

سلسلة عروض الرياضيات رفعة



معلمة الرياضيات: تغريد مسعود باجنيد

الأستاذة / تخريد مسعود باجنيد

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم الموسوم بـ:

سلسلة عروض رفعة 2-3

هـ، ورقم ردمك

1445/03/17

وتاريخ

1445/3353

تحت رقم إيداع

978-603-04-8093-7

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللهم علما ما ينفعنا وانفعنا بما علمتنا
وزدنا علما إنك أنت العليم الحكيم.



الفهرس

7

الفصل السابع:
الاحتمالات

8

الفصل الثامن:
حساب المثلثات

- ١-٨ الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية.
- ٢-٨ الزوايا وقياساتها.
- ٣-٨ الدوال المثلثية للزوايا.
- ٤-٨ قانون الجيوب.
- ٥-٨ قانون جيب التمام.
- ٦-٨ الدوال الدائرية.
- ٧-٨ تمثيل الدوال المثلثية بيانياً.
- ٨-٨ الدوال المثلثية العكسية.

- ١-٧ تمثيل فضاء العينة.
- ٢-٧ الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق.
- ٣-٧ الاحتمال الهندسي.
- ٤-٧ احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.
- ٥-٧ احتمالات الحوادث المتنافية.

الاحتمالات

تمثيل فضاء العينة

Representing Sample Spaces



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



الالتزام بالوقت

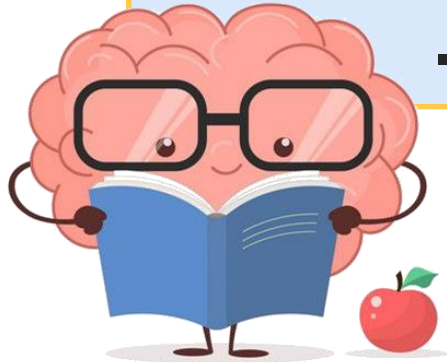


حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...



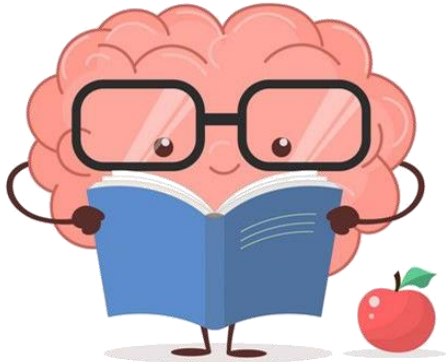
الأفكار الرئيسية



استعمل القوائم والجداول و الرسم الشجري لتمثيل
فضاء العينة.



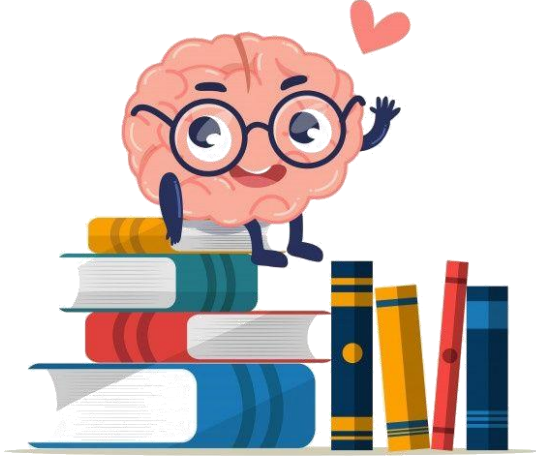
أستعمل مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد
النواتج الممكنة.



الموضوع: تمثيل فضاء العينة

اليوم:

التاريخ:



فيما سبق:

درست حساب الاحتمال التجريبي.

والآن:

- ❖ أستعمل القوائم والجداول والرسم الشجري لتمثيل فضاء العينة.
- ❖ أستعمل مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل فضاء العينة



المفردات

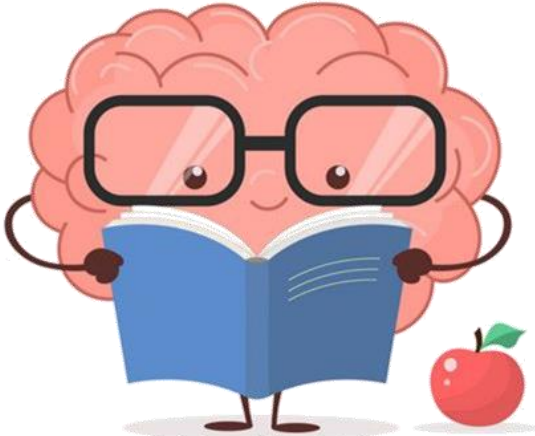
الرسم الشجري

فضاء العينة

تجربة متعددة المراحل

تجربة ذات مرحلتين

مبدأ العد الأساسي



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل فضاء العينة



لماذا؟



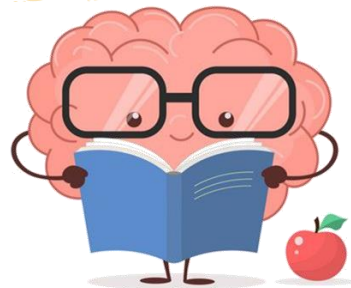
في مباريات كرة القدم، يلقي الحكم عادة قطعة نقد مرة واحدة؛ ليحدد أي الفريقين سيختار المكان في الملعب أولاً. وقد تكون النتيجة هي الشعار أو الكتابة.

جدول التعلم

الموضوع: تمثيل فضاء العينة

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

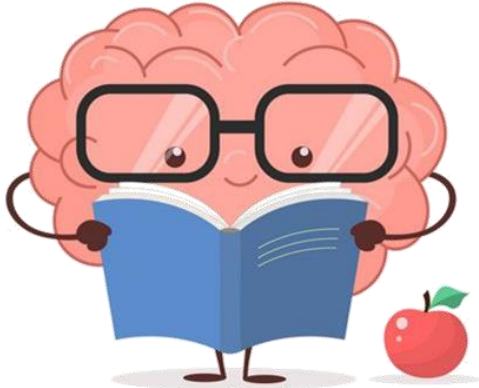
ماذا اعرف؟!

المفردات الجديدة:

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- تمثيل فضاء العينة.

٢- استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل فضاء العينة



تمثيل فضاء العينة : لقد تعلمت ما يأتي حول التجارب والناتج والحوادث.

التعريف	مثال
التجربة العشوائية: هي إجراء نعرف مسبقاً جميع نواتجه الممكنة.	في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة .
الناتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.	الناتج الممكنة هي: الشعار أو الكتابة.
الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة.	إحدى حوادث هذه التجربة ظهور الكتابة.

فضاء العينة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة، أو الجدول، أو **الرسم الشجري**.

مثال 1

تمثيل فضاء العينة

أُلقيت قطعة نقد مرتين، مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري. هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما: الشعار (L) والكتابة (T).

القائمة المنظمة

اقرن كل ناتج ممكن من الرمية الأولى بكل النواتج الممكنة من الرمية الثانية.

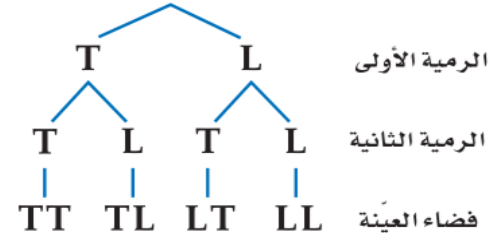
L , L
L , T
T , L
T , T

الجدول

دوّن النواتج الممكنة للرمية الأولى في العمود الأيمن، والنواتج الممكنة للرمية الثانية في الصف العلوي.

النواتج	شعار (L)	كتابة (T)
شعار (L)	L, L	L, T
كتابة (T)	T, L	T, T

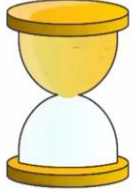
الرسم الشجري



الموضوع: تمثيل فضاء العينة

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear

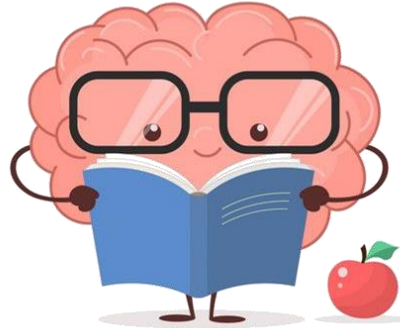


تحقق من فهمك

1) ألقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضًا. مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.



التجربة المعروضة في المثال 1 هي مثال على **تجربة ذات مرحلتين**؛ لأنها تمّت على مرحلتين. والتجارب التي تحتوي على أكثر من مرحلتين تسمى **تجارب متعددة المراحل**.



الرسم الشجري للتجارب المتعددة المراحل

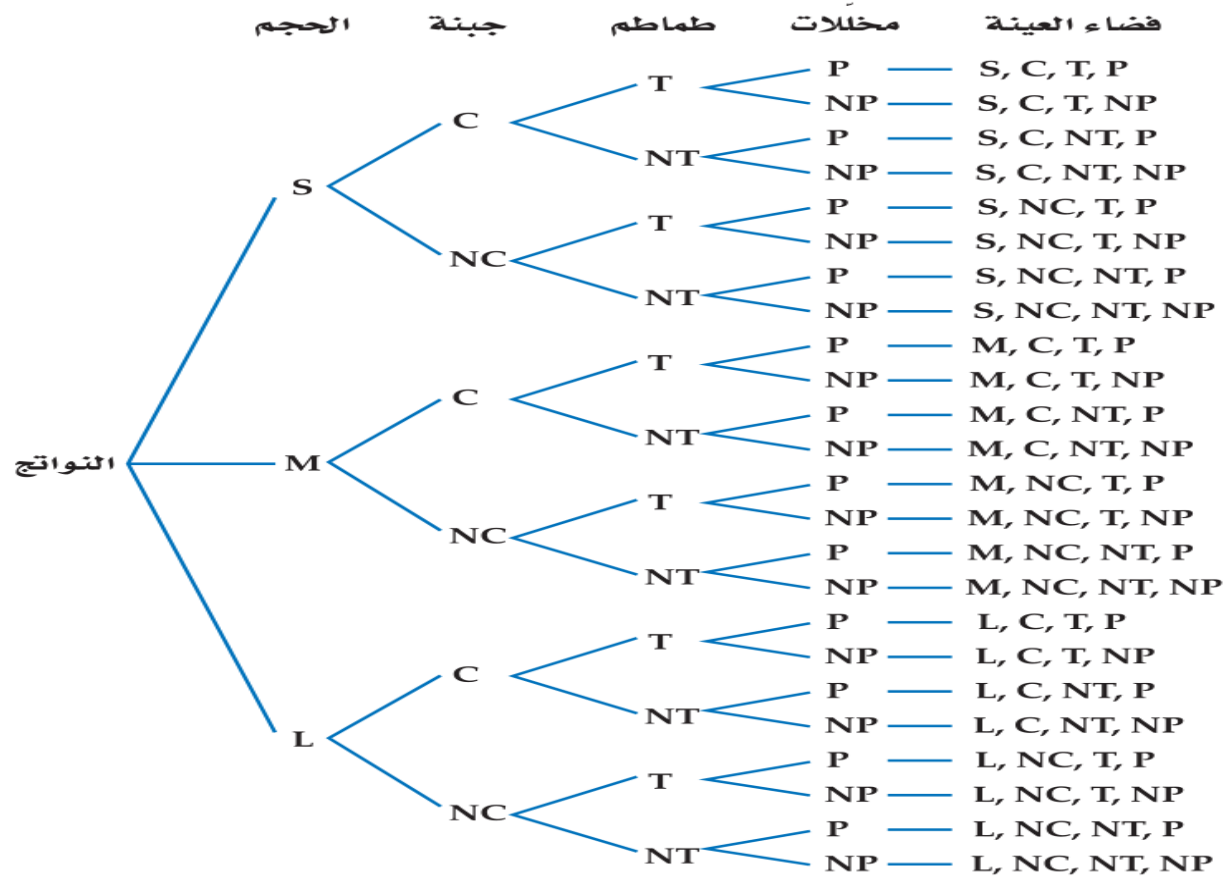
مثال 2 من واقع الحياة



شطائر: يبيع أحد المطاعم شطائر لحم كما هو مبين في قائمة الشطائر المجاورة. مثل فضاء العينة لأنواع الشطائر الممكنة باستعمال الرسم الشجري.

تتكون التجربة من أربع مراحل هي:

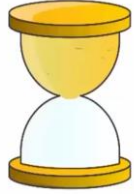
- اختيار حجم شطيرة اللحم (S: صغير، M: وسط، L: كبير).
 - اختيار الجبنة (مع جبنة C، بدون جبنة NC).
 - اختيار الطماطم (مع طماطم T، بدون طماطم NT).
 - اختيار المخللات (مع مخللات P، بدون مخللات NP).
- أنشئ الرسم الشجري للمراحل الأربع.



الموضوع: تمثيل فضاء العينة

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(2) **هواتف:** يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره بلون فضي (S) أو أسود (B) أو أحمر (R)، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC). ويمكنه أن يحصل على سماعات (H) و/أو غطاء للجهاز (W). مثل فضاء العينة لهذا الموقف بالرسم الشجري.



الموضوع: تمثيل فضاء العينة

اليوم:

التاريخ:

مبدأ العد الأساسي: قد لا يكون تسجيل جميع نواتج فضاء العينة في التجارب ذات المرحلتين أو المتعددة المراحل عملياً أو ضرورياً. لذا يمكن استعمال **مبدأ العد الأساسي** لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

أضف إلى

مطوبتك

مبدأ العد الأساسي

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز: في تجربة عدد مراحلها k . افرض أن:

$n_1 =$ عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى

$n_2 =$ عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى

:

$n_k =$ عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها k يساوي:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$$

الموضوع: تمثيل فضاء العينة

اليوم:

التاريخ:

استعمال مبدأ العد الأساسي

مثال 3 من واقع الحياة

عدد الخيارات	البدائل
5	القماش
6	اللون
3	الأكمام
3	القبة
2	الفتحة الأمامية
2	الأزرار

اختيار ثوب: يريد سعد شراء ثوب من بين البدائل المبينة في الجدول المجاور. فما عدد الخيارات المتاحة أمامه ليختار ثوبًا مناسبًا؟

استعمل مبدأ العد الأساسي.

$$1080 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 6 \times 5$$

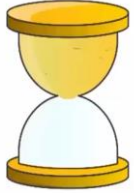
الأزرار الفتحة الأمامية القبة الأكمام اللون القماش

إذن لدى سعد 1080 خيارًا ليختار ثوبًا مناسبًا.

الموضوع: تمثيل فضاء العينة

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

نموذج الإجابة

1. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)
4. (A) (B) (C) (D)
5. (A) (B) (C) (D)
6. (A) (B) (C) (D)
7. (T) (F)
8. (T) (F)
9. (T) (F)
10. (T) (F)



أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:

(3A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور.

(3B) رمي مكعب مرقم أربع مرات.

(3C) أحذية: اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات:

45 , 44 , 43 , 42 , 41 , 40 , 39 ، بلون أسود أو بني أو رمادي

أو أبيض، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي،

وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء.

مثال 1

للسؤالين 1 ، 2 مثل فضاء العينة لكل تجربة ممّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

(1) عندما يسدّد اللاعب ركلة الجزاء فإنه يسجل هدفًا (G) أو لا يسجل (O). افرض أن اللاعب سدّد ركلة جزاء مرتين.

(2) سحب سمير بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من كيس فيه بطاقات كتب عليها:
(عصير مجاني (J) أو (دفتر ملحوظات مجاني (N).

مثال 2

(3) **ملابس:** تريد سمر حضور حفلة، وعليها أن تختار ما ترتديه في الحفلة من القائمة المجاورة. مثل فضاء العينة في هذا الموقف بالرسم الشجري.



تدرب وحل المسائل

مثال 1

لأسئلة 5-7 مثل فضاء العينة لكل تجربة ممّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري:

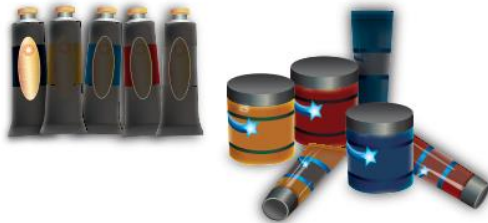
(5) تنظم إحدى المدارس الثانوية زيارة إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي (C) وإلى جامعة الملك سعود (U). لطلبة الصف الأول والثاني الثانوي.

(6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تدريبيّ لمدة شهر أو شهرين، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.

(7) يتكون اختبار من نماذج مختلفة من الأسئلة، وكل نموذج يتكون من سؤالين يتعلقان بالمثلثات؛ أحدهما يشتمل على مثلث منفرج الزاوية (O) أو مثلث حاد الزوايا (A)، والآخر يشتمل على مثلث متطابق الضلعين (E) أو مثلث مختلف الأضلاع (N).

ألوان زيتية (O)

ألوان مائية (A)



(8) **رسم:** ينفذ بعض الطلاب مشروعين للرسم، فيستعملون أحد نوعين مختلفين من الألوان لكل مشروع. مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

مسائل مهارات التفكير العليا

(16) **تحذّر:** يحتوي صندوق على n من الكرات المختلفة. إذا سحبت 3 منها على التوالي دون إرجاع، فما عدد النواتج الممكنة؟ برّر إجابتك.

(17) **مسألة مفتوحة:** قد لا يكون الرسم الشجري للتجربة متماثلاً. صفّ تجربة ذات مرحلتين تمثل ذلك، ثم ارسم الرسم الشجري لهذه التجربة، وبرّر إجابتك.

(18) **تبرير:** تجربة متعددة المراحل، عدد مراحلها k وعدد النواتج الممكنة لكل مرحلة n . اكتب صيغة تستطيع من خلالها إيجاد العدد الكلي للنواتج الممكنة p ، ووضح إجابتك.

تدريب على اختبار

(21) يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء. إذا كان لديه أربعة أصدقاء، فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم؟

8 **C**

4 **A**

9 **D**

6 **B**

(22) تحتوي قائمة الطعام في أحد المطاعم على 5 أنواع للطبق الرئيس، و 4 أنواع من الحساء، و 3 أنواع من الحلوى. كم طلبًا مختلفًا يمكن تقديمه إذا اختار الشخص طبقًا رئيسًا واحدًا، ونوعًا من الحساء، وآخر من الحلوى؟

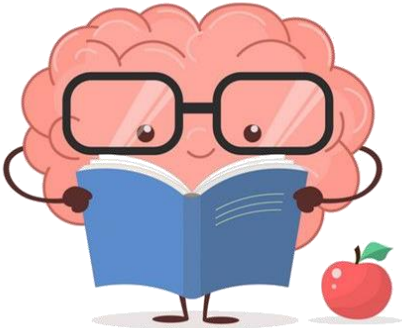
60 **C**

12 **A**

عدد لانهائي **D**

35 **B**

الأشخاص العُظماء هم أشخاص عاديون
طوّروا من قدراتهم ومجهوداتهم.



بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال

الواجب

انتهى درس اليوم

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

Probability with Permutations and
Combinations



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



الالتزام بالوقت

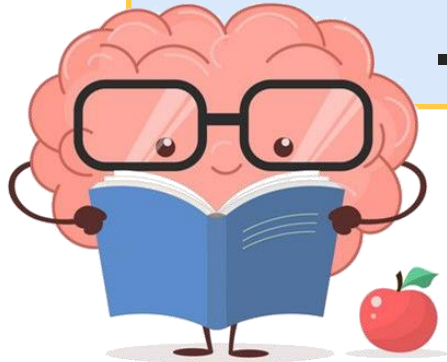


حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...



الأفكار الرئيسية

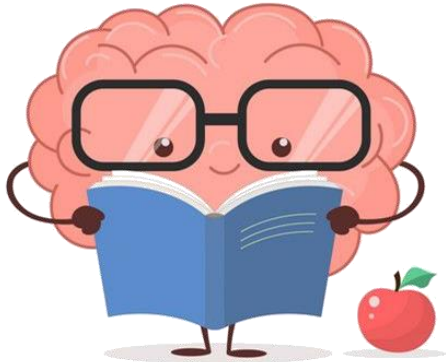


أستعمل التباديل في حساب الاحتمال.

1

أستعمل التوافق في حساب الاحتمال.

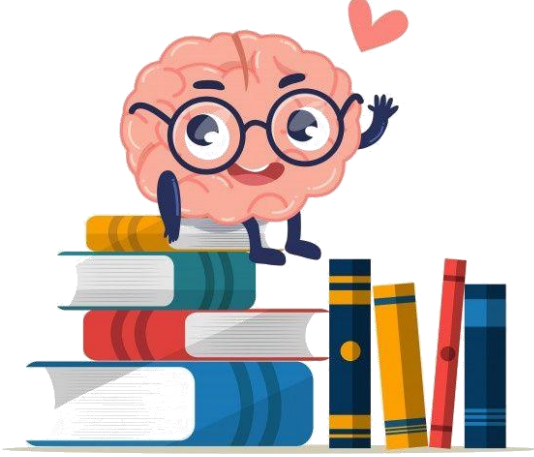
2



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



فيما سبق:

درست استعمال مبدأ العد الأساسي.

والآن:

- ❖ أستعمل التباديل في حساب الاحتمال.
- ❖ أستعمل التوافيق في حساب الاحتمال.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



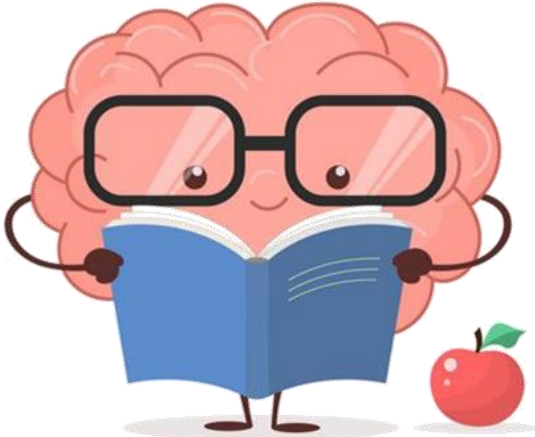
المفردات

التباديل

المضروب

التوافيق

التباديل الدائرية



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



لماذا؟



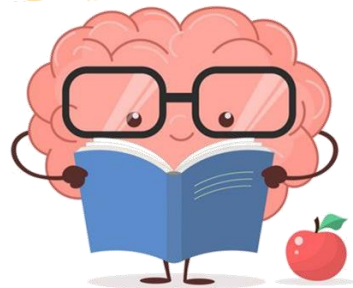
وقف يوسف وعليّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم.
وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليمين، و 3 خيارات لمن
يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد
للمكان الأخير.

جدول التعلم

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

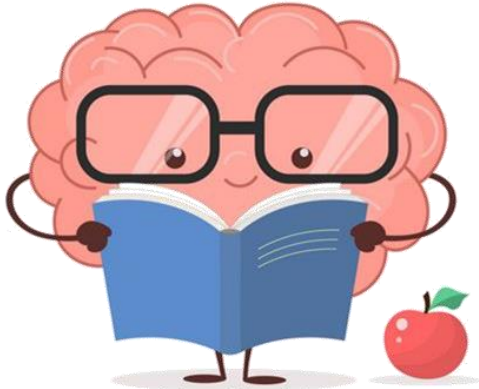
ماذا اعرف؟!

المفردات الجديدة:

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- استعمال التباديل في حساب الاحتمال.

٢- استعمال التوافيق في حساب الاحتمال.



الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:

الاحتمال باستعمال التباديل التبديل تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهماً. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد، يوسف. وباستعمال مبدأ العد الأساسي يوجد $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ترتيباً ممكناً لهؤلاء الأصدقاء. يمكن كتابة العبارة $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4.

أضف إلى

مطوبتك

المضروب

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$.

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:

مثال 1

الاحتمال وتباديل n من العناصر

رياضة: نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. إذا كان عدد أعضاء الفريق 20، ويرتدي كلُّ منهم قميصاً مرقماً من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

الخطوة 1: أوجد عدد نواتج فضاء العينة. وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق العشرين ويساوي $20!$.

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحادثة، وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق المتبقية، إذا كان رقم قميص نواف 1 ورقم قميص ماجد 2 ويساوي $18! = (20 - 2)!$

الخطوة 3: احسب الاحتمال

$$P(\text{نواف 1 و ماجد 2}) = \frac{18!}{20!}$$

عدد نواتج الحادثة ←
عدد النواتج الممكنة ←

جد مفكوك $20!$ واقسم على العوامل المشتركة

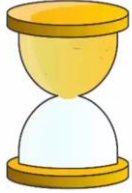
بسّط

$$= \frac{18!}{20 \cdot 19 \cdot 18!} = \frac{1}{380}$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(1) **تصوير:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟



الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:



ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، وافترض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يتم اختيار 4 أشخاص فقط عشوائياً ليظهروا في الصورة. وباستعمال مبدأ العد الأساسي فإن عدد تباديل مجموعة من 6 أصدقاء مأخوذة 4 في كل مرة هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360.

وهناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء، إذا اختير 4 منهم في كل مرة ويرمز إليها بالرمز ${}_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروب.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:



أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

التباديل

بالرموز:

يرمز إلى عدد **تباديل** n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nP_r$ حيث

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال:

عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:

الاحتمال والتباديل

مثال 2

مجلس الإدارة: يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، فما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسًا، ونائبًا للرئيس، وأمينًا للسّر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيًا؟

الخطوة 1: بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء مجلس الإدارة، فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جدًا. عدد النواتج الممكنة في فضاء العينة يساوي عدد تباديل 10 أعضاء أخذ منها 3 في كل مرة، أي ${}_{10}P_3$

$${}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

الخطوة 2: عدد نواتج الحادثة يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيبًا واحدًا فقط للأعضاء الثلاثة في مراكزهم المعينة.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار فيصل رئيسًا ومحمد نائبًا ومهند أمينًا للسّر يساوي $\frac{1}{720}$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(2) بطاقات جامعية: تستعمل الأرقام 1-9 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

(A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟

(B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائياً، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976, 67953124؟



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



تتكرر في بعض الأحيان بعض العناصر، ولإيجاد عدد التباديل المختلفة في هذه الحالة نستعمل الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي

التباديل مع التكرار

أضف إلى

مطوبتك

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا ...، فإنه يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:

مثال 3

الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفاً مبعثرة، ويطلب إليه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلاً لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟



الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف (ا) مرتين، والحرف (ي) مرتين؛ ولذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

استعمل الآلة الحاسبة

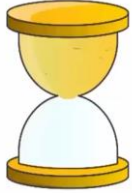
الخطوة 2: هناك ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي اسم ماليزيا.

الخطوة 3: احتمال أن يكون التبديل الذي تم اختياره عشوائياً يعطي اسم ماليزيا يساوي $\frac{1}{1260}$.

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

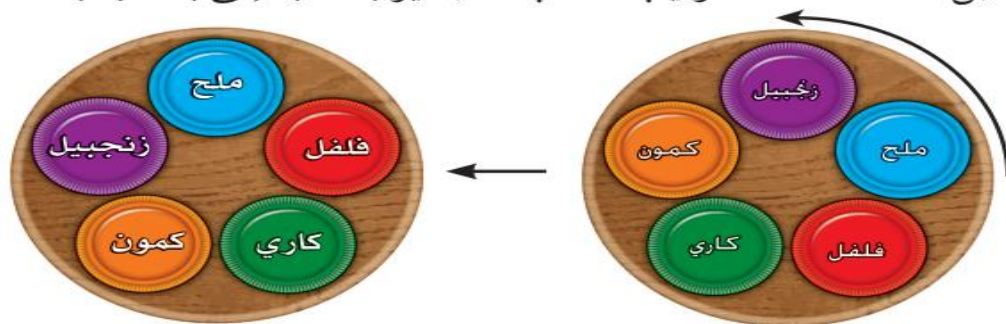
(3) أعداد: تم تكوين عدد مكون من 6 أرقام عشوائياً باستعمال الأرقام 1, 5, 2, 1, 5, 3، ما احتمال أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضاً؟



ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليسار (مثلًا)، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الكمون أولًا من اليمين بدلًا من الكاري؛ لذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي 5!.



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى الترتيبات الممكنة **تباديل دائرية**، فإذا وضعت عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة عكس اتجاه عقارب الساعة (مثلًا) موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.



لذا فإن؛ تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5} \cdot 5!$ عدد التباديل الكلي عندما تكون العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5 - 1)!$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



مفهوم أساسي

التباديل الدائرية

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n - 1)!$$

إذا رُتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة (وهي نقطة أو موقع يحدّد مسبقاً في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى أن الترتيبات ستُعامل خطأً وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

مثال 4

الاحتمال والتباديل الدائرية



أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.

(a) **زينة:** إذا رُتبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائيًا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

لذا يوجد $(6 - 1)!$ أو $5!$ من التباديل المختلفة لهذه القطع. وعليه فإن

احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل هو $\frac{1}{5!}$ ويساوي $\frac{1}{120}$.

(b) **طعام:** جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس

الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟

بما أن الأشخاص يجلسون حول المنضدة حسب نقطة مرجعية ثابتة فإن هذا تبديل خطي. لذا يوجد $4!$

أو 24 طريقة يجلس بها الأشخاص، وعدد نواتج الحادثة يساوي عدد تباديل الأشخاص الثلاثة الآخرين

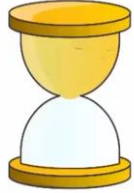
حيث سيجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجانب النافذة وهذا يساوي $3!$ أو 6.

لذا؛ فإن احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة هو $\frac{3!}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(4A) بطاقات: إذا رتبت 5 بطاقات مُسجل عليها الأسماء: (حسن، محمد، أحمد، سالم، سعود) على منضدة دائرية عشوائياً، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

(4B) كرة قدم: تجتمع فريق كرة قدم مكون من 11 لاعباً على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة، إذا وقف حكم المباراة تماماً خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضح تبريرك.



الاحتمال باستعمال التوافيق **التوافيق:** هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم. افترض أنك تحتاج إلى اختيار موظفين من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظفين غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الموظفين.

أضف إلى

مطوبتك

التوافيق

مفهوم أساسي

بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ ، حيث } {}_nC_r \text{ بالرمز}$$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5}!}{\cancel{6} \cdot \cancel{5}!} = 56$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



مثال 5

الاحتمال والتوافيق

كرة طائرة: يريد مدرب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟

الخطوة 1: بما أن ترتيب اختيار اللاعبين ليس مهمًا، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العينة يساوي عدد توافيق 10 مأخوذة 6 في كل مرة، أي ${}_{10}C_6$.

$${}_{10}C_6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6}!}{6! \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 210$$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي تتكون منها الحادثة، وفي هذه الحالة يساوي ${}_6C_6 = 1$ ، وهو اختيار اللاعبين الستة المذكورين، وترتيب اختيارهم ليس مهمًا.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار اللاعبين الستة هو $\frac{{}_6C_6}{{}_{10}C_6} = \frac{1}{210}$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق



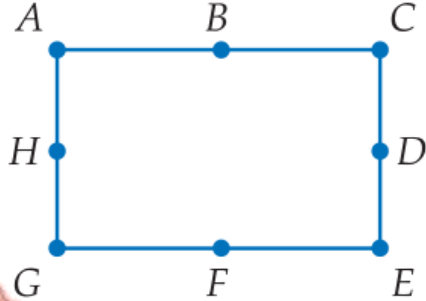
00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

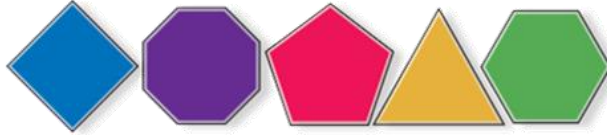


(5) **هندسة:** إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائياً من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور ، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟



مثال 1

(1) **هندسة:** إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلث هو الأول والمربع هو الثاني؟



مثال 2

(2) **معرض علمي:** تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 40 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟



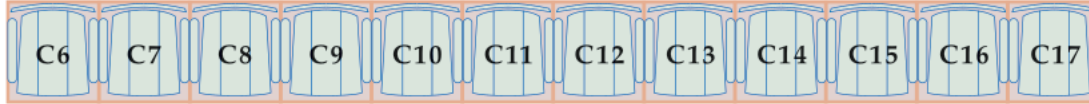
الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

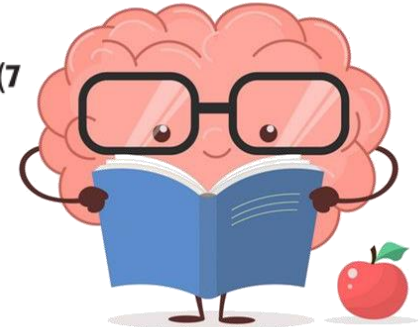
التاريخ:

تدرب وحل المسائل

مثال 1 (6) **محاضرات:** ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كلُّ منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟



(7) **حفلات:** وَزَّعَتْ بطاقات مرقّمة من 1 إلى 50 على 50 شخصًا في حفلة، وكان حسين وزياد من بين الحاضرين. ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 وزياد البطاقة رقم 23؟



مسائل مهارات التفكير العليا

(16) تبرير: هل العبارة الآتية صحيحة أحياناً أم صحيحة دائماً أم أنها غير صحيحة أبداً؟ برّر إجابتك.

$${}_nP_r = {}_nC_r$$

(17) تحدّ: يدّعي طالب أن العلاقة بين التباديل والتوافيق هي: ${}_nC_r \cdot r! = {}_nP_r$.
بيّن صحّة هذه العلاقة جبرياً، ثم وضح لماذا يختلف ${}_nC_r$ و ${}_nP_r$ بعاملٍ مقداره $r!$.

(18) مسألة مفتوحة: صف وضعاً يكون فيه الاحتمال يساوي $\frac{1}{7C_3}$.



تدريب على اختبار

(21) احتمال: يقف رجلان وولدان في صف واحد. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي؟

- A $\frac{1}{24}$
B $\frac{1}{12}$
C $\frac{1}{6}$
D $\frac{1}{2}$

(22) إجابة قصيرة: إذا اخترت تبديلاً للأحرف المبينة أدناه عشوائياً، فما احتمال أن تتكون كلمة "فسيفساء"؟

ف س ع س ف ي س ا

(23) احتمال: ألقى مكعب مرقم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي 9 مرات. إذا ألقى المكعب نفسه للمرة العاشرة، فما الاحتمال النظري لظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟

- A 1
B $\frac{9}{10}$
C $\frac{1}{6}$
D $\frac{1}{10}$

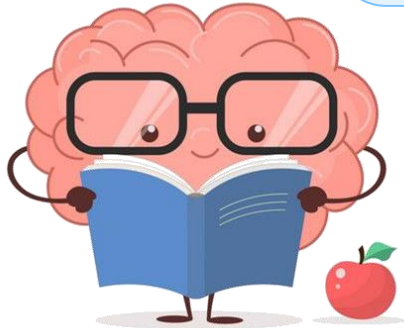


الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:

قدرتك على حفظ اتزانك في الطوارئ
ووسط الاضطرابات وتجنب الدُّعر هي
العلامات الحقيقية للقيادة.





الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:

بطاقة خروج

اختراري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال



الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:

الواجب



الموضوع: الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

اليوم:

التاريخ:

انتهى درس اليوم

الاحتمال الهندسي

Geometric Probability



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



الالتزام بالوقت

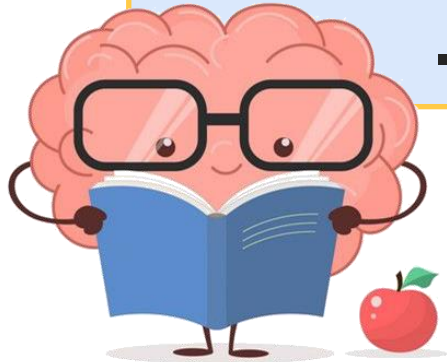


حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

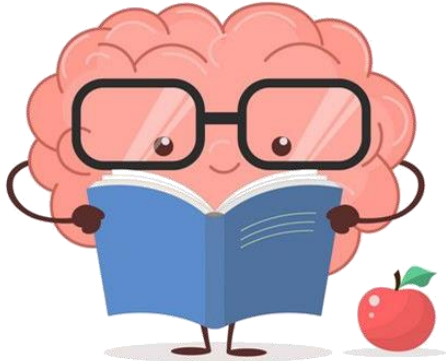


الأفكار الرئيسية



أجد الاحتمالات باستعمال الطول.

1



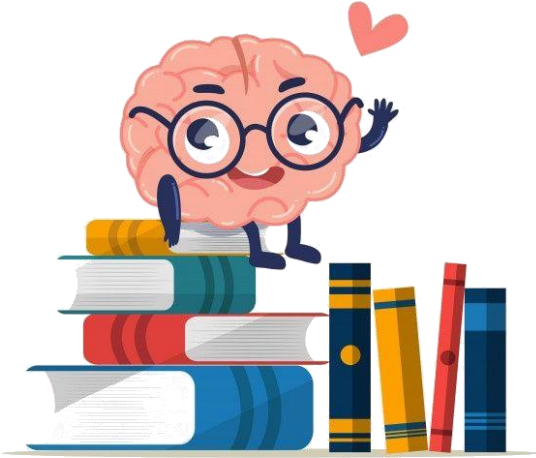
أجد الاحتمالات باستعمال المساحة.

2

الموضوع: الاحتمال الهندسي

اليوم:

التاريخ:



فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة.

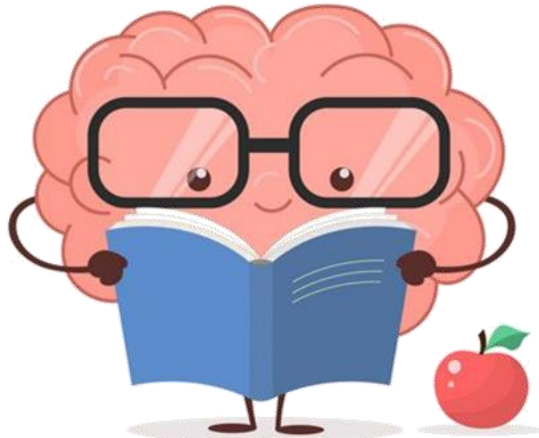
والآن:

- ❖ أجد الاحتمالات باستعمال الأطوال.
- ❖ أجد الاحتمالات باستعمال المساحات.



المفردات

الاحتمال الهندسي



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال الهندسي



لماذا؟



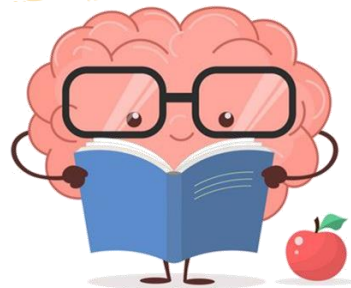
في القرص ذي المؤشر الدّوار المبين في الشكل، إذا تم تدوير المؤشر فإنه يستقر على أحد الألوان (الأزرق، الأحمر، الأخضر، الأصفر)، ويعاد تدوير المؤشر إن استقر على الخط الفاصل بين لونين.

جدول التعلم

الموضوع: الاحتمال الهندسي

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

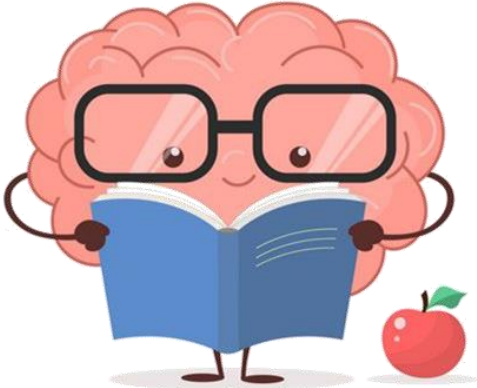
ماذا اعرف؟!

المفردات الجديدة:

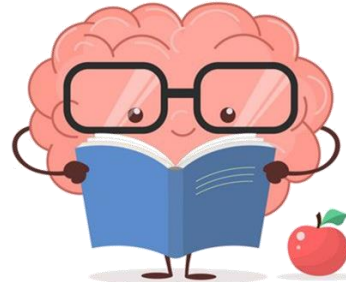
الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- إيجاد الاحتمالات باستعمال الأطوال.

٢- إيجاد الاحتمالات باستعمال المساحات.



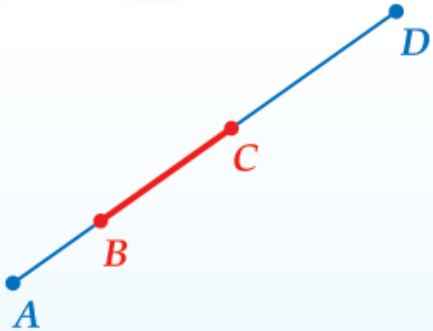
الاحتمال الهندسي: احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الألوان يعتمد على مساحة ذلك اللون. ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسًا هندسيًا مثل الطول أو المساحة **احتمالًا هندسيًا**.



أضف إلى
مطوبتك

الاحتمال والأطوال

مفهوم أساسي



التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائياً، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$

مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائياً على $\overline{AD}$ ، فإن:

$$P(E \in \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

مثال 1

استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على $\overline{JM}$ كما في الشكل أدناه، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.



احتمال الأطوال

$$KL = 7, JM = 3 + 7 + 4 = 14$$

بسط

$$\begin{aligned} P(X \in \overline{KL}) &= \frac{KL}{JM} \\ &= \frac{7}{14} \\ &= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \end{aligned}$$



الموضوع: الاحتمال الهندسي

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على $\overline{JM}$ في الشكل السابق، فأوجد كلاً ممّا يأتي:

$$P(X \in \overline{KM}) \quad (1B)$$

$$P(X \in \overline{LM}) \quad (1A)$$

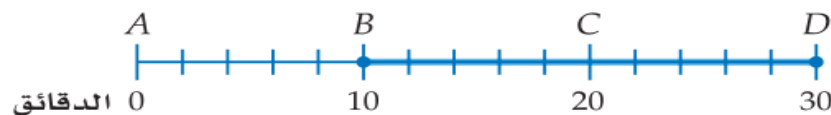


مثال 2 من واقع الحياة

نمذجة احتمالات من واقع الحياة

مواصلات: تصل حافلة ركاب إلى الموقف أو تغادره كل 30 دقيقة. إذا وصل راكب إلى المحطة، فما احتمال أن ينتظر 10 دقائق أو أكثر لركوب إحدى الحافلات؟

يمكن تمثيل الموقف باستعمال خط الأعداد. بما أن الحافلات تصل كل 30 دقيقة، فإن الحافلة التالية تصل بعد 30 دقيقة أو أقل من وصول الراكب. وتمثل حادثة الانتظار 10 دقائق أو أكثر بالقطعة المستقيمة BD على خط الأعداد الآتي:



أوجد احتمال هذه الحادثة.

احتمال الطول

$$BD = 20, AD = 30$$

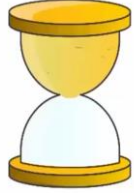
$$P(\text{انتظار 10 دقائق أو أكثر}) = \frac{BD}{AD} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

لذا فاحتمال انتظار 10 دقائق أو أكثر لوصول الحافلة التالية يساوي $\frac{2}{3}$, أو 67% تقريبًا.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال الهندسي



00:01:00

Start

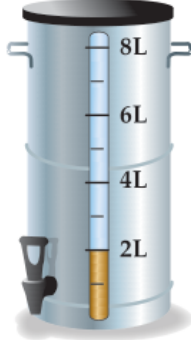
Clear

تحقق من فهمك

(2) شاي: يحضر مطعم الشاي في وعاء سعته 8 L ، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2L، يصبح تركيز الشاي كبيراً ويختلف طعمه.

(A) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2L ؟

(B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أي وقت بين 2L و 3L ؟



الاحتمال والمساحة: تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضًا. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

أضف إلى

مطوبتك

الاحتمال والمساحة

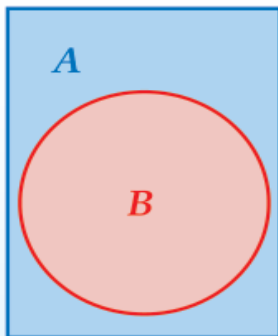
مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B ، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيًا، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$

مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا في المستطيل A ، فإن:

$$P(\text{وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة } B) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$





الهبوط بالمظلات: يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية 2 m ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 m، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟
نجد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف الكلي، ونصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m، بينما نصف قطر الهدف الكلي يساوي 1 + 1 + 1، أو 3 m.

احتمال المساحة

$$\begin{aligned} P(\text{أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء}) &= \frac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}} \\ &= \frac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2} \\ &= \frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$A = \pi r^2$$

بسّط

احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء هو $\frac{1}{9}$ ، ويساوي 11% تقريبًا.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال الهندسي



00:01:00

Start

Clear

تحقق من فهمك

(3) الهبوط بالمظلات: أوجد كلاً مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.

(A) أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء P

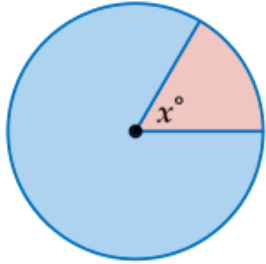
(B) أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء P



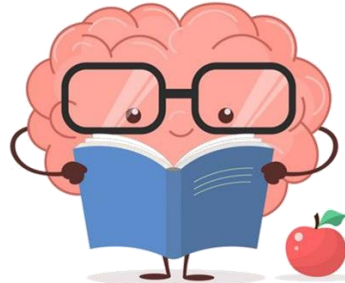
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال الهندسي

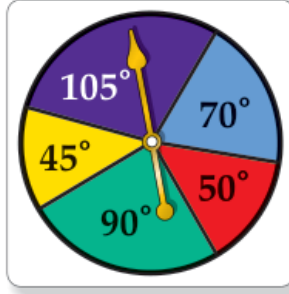


يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي.
إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية (x°) إلى 360° . (ستبرهن هذا في السؤال 21) ، وعليه فإنه إذا اختيرت نقطة عشوائيًا داخل الدائرة فإن احتمال وقوعها داخل القطاع يساوي $\frac{x}{360}$



مثال 4

استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي



استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلّ مما يأتي:

(علماً بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)

(a) استقرار المؤشر على اللون الأصفر P

قياس زاوية القطاع الأصفر 45°

$$P(\text{استقرار المؤشر على اللون الأصفر}) = \frac{45}{360} \approx 12.5\%$$

(b) استقرار المؤشر على اللون البنفسجي P

قياس زاوية القطاع البنفسجي 105°

$$P(\text{استقرار المؤشر على اللون البنفسجي}) = \frac{105}{360} \approx 29\%$$

(c) عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق P

مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق $50^\circ + 70^\circ = 120^\circ$

$$P(\text{عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق}) = \frac{360 - 120}{360} = \frac{240}{360} \approx 67\%$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الاحتمال الهندسي



00:01:00

Start

Clear

تحقق من فهمك

(4A) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر) P (4B) (استقرار المؤشر على اللون الأزرق) P .



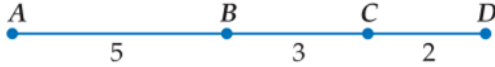
اليوم:

التاريخ:



الموضوع: الاحتمال الهندسي

تأكد



إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على $\overline{AD}$ في الشكل المجاور،
فأوجد كلاً مما يأتي:

مثال 1

(2) (أن تقع X على $\overline{BC}$) $P(\overline{BC})$

(1) (أن تقع X على $\overline{BD}$) $P(\overline{BD})$

(3) **مواصلات:** ينقل أحد فنادق مكة المكرمة المعتمرين من الفندق إلى الحرم، حيث تصل حافلة ركاب إلى الفندق أو تغادره كل 20 دقيقة. إذا وصل شخص إلى موقف الحافلات في الفندق، فما احتمال أن ينتظر 5 دقائق أو أقل لركوب إحدى الحافلات؟

مثال 2

تدرب وحل المسائل

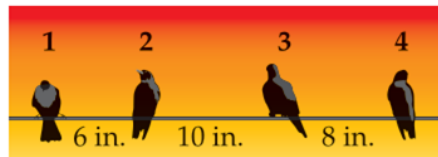


مثال 1 إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على $\overline{FK}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلاً مما يأتي:

$$P(X \in \overline{HK}) \quad (8)$$

$$P(X \in \overline{GJ}) \quad (7)$$

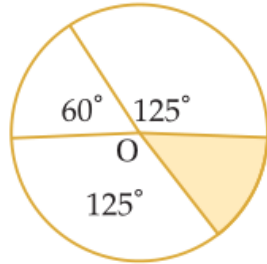
$$P(X \in \overline{FH}) \quad (6)$$



(9) **طيور:** تقف أربعة طيور عند نقاطٍ على سلكٍ كما في الشكل المجاور. فإذا هبط طائر خامس عشوائياً على نقطة من نقاط السلك فما احتمال أن يقف بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟

مثال 2 (10) **تلفاز:** يُتابع عمّار برنامجاً تلفزيونياً مدته 30 دقيقة. إذا كان يُبث إعلان في التلفاز في وقت عشوائي مرّة كل فترة 3 ساعات. فما احتمال أن يشاهد عمّار الإعلان ثانية خلال متابعته برنامجيه المفضل الذي مدته 30 دقيقة في اليوم التالي؟

مسائل مهارات التفكير العليا



(24) **اكتشف الخطأ:** حسب كل من عمر وسالم احتمال وقوع النقطة التي يتم اختيارها عشوائياً داخل الدائرة O في المنطقة المظللة، أيهما حلّه صحيح؟ وضّح تبريرك.

سالم

$$p = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلّل}}{360}$$

$$= \frac{60}{360}$$

$$\approx 16.7\%$$

عمر

$$p = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلّل}}{360}$$

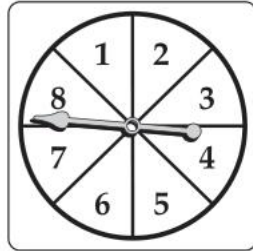
$$= \frac{50}{360}$$

$$\approx 13.9\%$$



تدريب على اختبار

(31) إجابة قصيرة: قُسم القرص الآتي إلى 8 قطاعات متساوية. وقد أدير المؤشر:



- (a) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد 3؟
(b) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد فردياً؟

(29) احتمال: رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات، واختيرت نقطة عشوائياً داخل المربع.

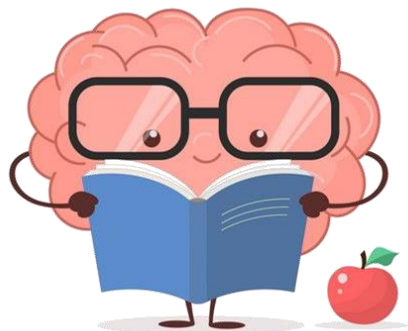
ما احتمال أن تقع أيضاً داخل الدائرة؟

- A $\frac{1}{9}$
B $\frac{\pi}{9}$
C $\frac{1}{3}$
D $\frac{9}{\pi}$

(30) احتمال: يحتوي صندوق على 7 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، وكرتين بيضاوين و 3 كرات سوداء. إذا سحب كرة واحدة عشوائياً. فما احتمال أن تكون حمراء؟

- A $\frac{1}{9}$
B $\frac{1}{6}$
C $\frac{1}{3}$
D $\frac{7}{18}$

تذكر دوماً ما أنت بارع فيه وتمسك به.



بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال



الموضوع: الاحتمال الهندسي

اليوم:

التاريخ:

الواجب

انتهى درس اليوم

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

Probabilities of Independent and Dependent Events



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



الالتزام بالوقت

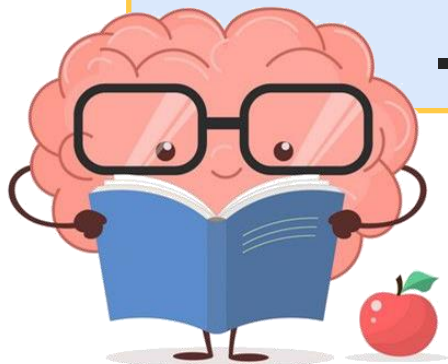


حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...



الأفكار الرئيسية

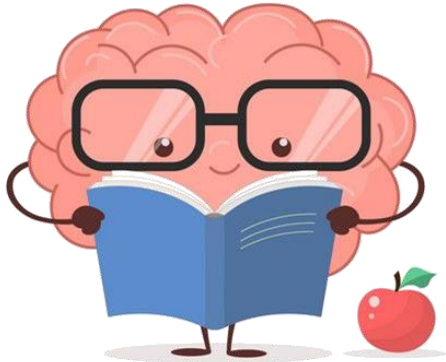


أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

1

أجد احتمال حادثة إذا علم وقوع حادثة أخرى.

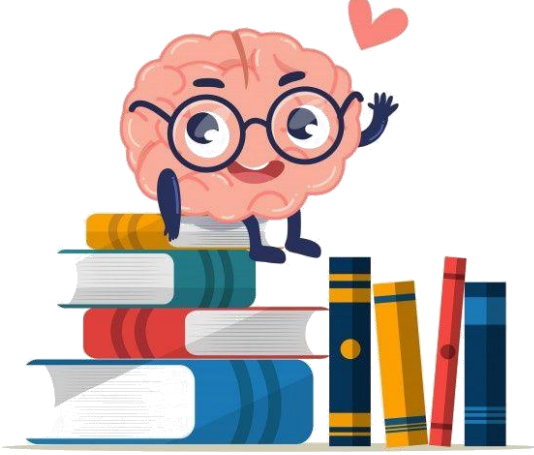
2



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



فيما سبق:

درست حساب الاحتمالات البسيطة.

والآن:

- ❖ أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.
- ❖ أجد احتمال حادثة إذا علم وقوع حادثة أخرى.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



المفردات

الحوادث المستقلة

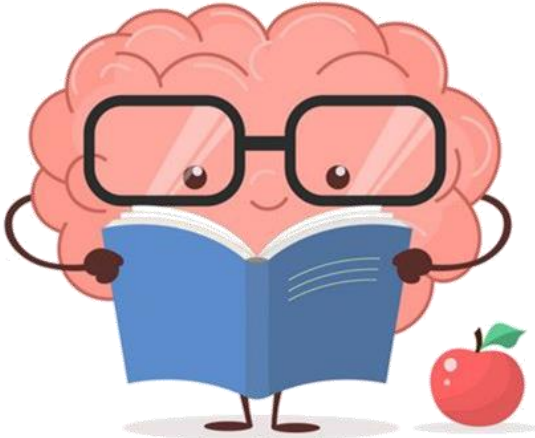
الحادثة المركبة

الاحتمال المشروط

الحوادث غير المستقلة

الحادثة المشروطة

شجرة الاحتمال



الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

اليوم:

التاريخ:



لماذا؟



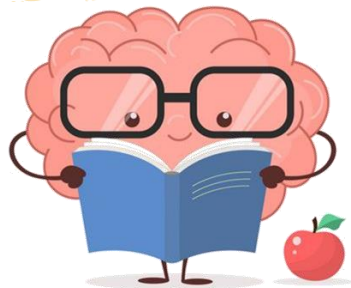
يسحب معلم الكيمياء عشوائياً بطاقات من صندوق فيه أسماء طلاب صفه البالغ عددهم 18 طالباً، ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.

جدول التعلم

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

ماذا اعرف؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

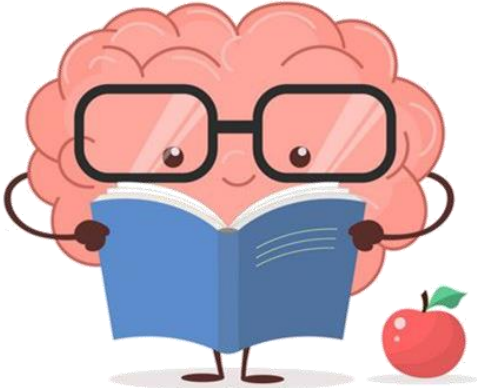


الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

٢- أجد احتمال حادثة إذا علم وقوع حادثة أخرى.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة: تتكون

الحادثة المركبة من حادثتين بسيطتين أو أكثر. وفي فقرة "لماذا؟" أعلاه، نجد أن اختيار سعود وفيصل لتقديم عرضيهما أولاً يُمثل حادثة مركبة؛ لأنها تتكون من حادثة اختيار سعود وحادثة اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الحوادث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B .
- تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغير بطريقة ما احتمال حدوث B .

افتراض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث غير مستقلة.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



مثال 1

تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

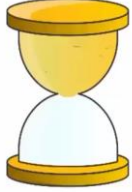
حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلّتين أو غير مستقلّتين في كلّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

- (a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثمّ إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.
إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الأولى لا يؤثر بأيّ حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الثانية؛ ولذا تكون الحادثتان مستقلّتين.
- (b) في فقرة "لماذا؟" أعلاه، اختيار اسم أحد الطلبة عشوائياً دون إرجاع، ثم اختيار اسم طالب آخر.
بعد اختيار اسم الطالب الأول لا يعاد ولا يتم اختياره ثانية. وهذا يؤثر في احتمال اختيار اسم الطالب الثاني؛ لأن عدد عناصر فضاء العينة قد نقص واحداً؛ لذا فإن الحادثتين غير مستقلّتين.
- (c) سحب كرة واحدة عشوائياً من كلّ من صندوقين مختلفين.
احتمال نتيجة السحب من الصندوق الأول ليس لها تأثير في احتمال نتيجة السحب من الصندوق الثاني؛
لذا تكون الحادثتان مستقلّتين.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

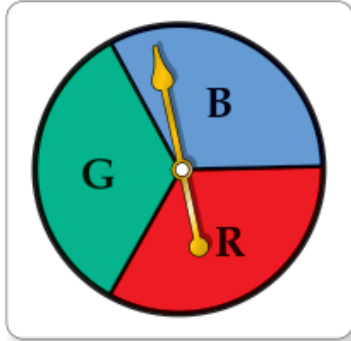
- حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلّتين أم غير مستقلّتين في كلّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:
- (1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سُحبت بطاقة ثانية.
- (1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرّقم مرة واحدة أيضًا.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



إذا أُلقيت قطعة نقد وأدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العينة لهذه التجربة هو: $\{(L, B), (L, R), (L, G), (T, B), (T, R), (T, G)\}$.

باستعمال فضاء العينة، فإن احتمال الحادثة المركبة؛ ظهور الشعار على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي: $P(L \cap G) = \frac{1}{6}$

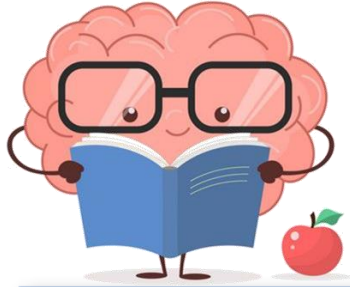
لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحادتين البسيطتين كما يأتي:

$$P(\text{L}) = \frac{1}{2} \quad P(\text{G}) = \frac{1}{3} \quad P(\text{L} \cap \text{G}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



وهذا المثال يوضح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

أضف إلى

مطوبتك

احتمال حادثتين مستقلتين

مفهوم أساسي



التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معاً يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



وسائل النقل: يرغب خالد وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في سيارة تركي، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في سيارة سعود.

افترض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

هاتان حادثتان مستقلتان؛ لأن خالدًا أعاد القصاصات التي سحبها أولاً. افترض أن B يمثل سحب قصاصة زرقاء وأن Y يمثل سحب قصاصة صفراء، فيكون المطلوب هو $P(B \cap B)$.



احتمال الحادثتين المستقلتين

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

السحب 1

السحب 2

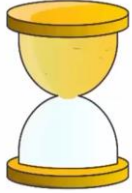
$$\begin{aligned} P(B \cap B) &= P(B) \cdot P(B) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64} \end{aligned}$$

لذا فاحتمال أن يسحب خالد قصاصتين زرقاوين يساوي $\frac{9}{64}$ أو 14% تقريبًا.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقّم مرة واحدة. فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6 ؟

(2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات ؟



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات احتمال وقوع حادثين غير مستقلين معًا .



مفهوم أساسي

احتمال حادثين غير مستقلتين

أضف إلى

مطوبتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلاً.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولاً، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**، ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات. وتُسمى **شجرة الاحتمال**.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

مثال 3

احتمالات الحوادث غير المستقلة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قصاصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قصاصة، فما احتمال أن يسحب كل من الصديقين قصاصة صفراء؟

هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن خالدًا لم يرجع القصاصة التي سحبها من الكيس.

احتمال الحادثتين غير المستقلتين

$$P(Y \cap Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

بعد سحب قصاصة صفراء، يبقى 7 قصاصات، أربع منها صفراء

لذا فاحتمال أن يسحب الصديقان قصاصتين صفراوين يساوي $\frac{5}{14}$ ، أو 36% تقريبًا.

تحقق: تحقق من صحة هذه النتيجة باستعمال الرسم الشجري. احسب احتمال كل حادثة بسيطة في المرحلة الأولى والاحتمال المشروط في المرحلة الثانية، ثم اضرب احتمالي المرحلة الأولى في فروع الشجرة لإيجاد احتمال كل ناتج كما في الشكل أدناه.



اليوم:

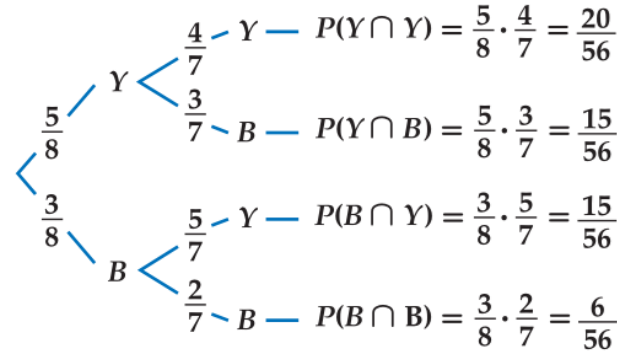
التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



مثال 3 احتمالات الحوادث غير المستقلة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قساصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قساصة، فما احتمال أن يسحب كل من الصديقين قساصة صفراء؟



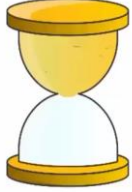
يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1

$$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1 \quad \checkmark$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



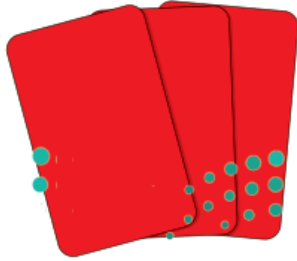
00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك



(3) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 24 بطاقة، منها 6 بطاقات زرقاء مرقمة من 1 إلى 6 وبالمثل 6 بطاقات حمراء و 6 صفراء و 6 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

الاحتمال المشروط: علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين، يمكنك إيجاد احتمال وقوع **حادثة مشروطة**، وذلك بإعطاء معلومات إضافية عن وقوع حادثة أخرى، وذلك باختزال فضاء العينة، فمثلاً إذا رُمي مكعب مرقّم مرة واحدة وعُلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5؟



هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه المكعب؛ لذا سوف يختزل فضاء العينة من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ إلى $\{1, 3, 5\}$ ، وعليه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي:

$$P(5 | \text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$$

مثال 4 على اختبار

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1 إلى 8 عشوائياً حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.
 - تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.
- إذا كانت ليلي من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

$$\frac{1}{2} \quad D$$

$$\frac{3}{8} \quad C$$

$$\frac{1}{4} \quad B$$

$$\frac{1}{8} \quad A$$

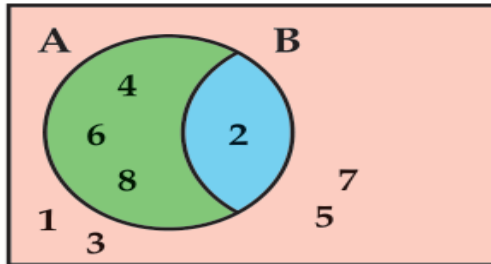
اقرأ فقرة الاختبار

بما أن ليلي من الفريق الثاني فإنها تكون قد سحبت عدداً زوجياً؛ لذا فإنك في حاجة إلى إيجاد احتمال أن يكون الناتج 2 إذا علمت أن العدد المسحوب كان زوجياً. وعليه فإن هذه مسألة احتمال مشروط.

حل فقرة الاختبار

افترض أن A حادثة سحب عدد زوجي. وأن B حادثة سحب العدد 2
ارسم شكل فن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية في فضاء العينة، وواحد منها هو 2؛

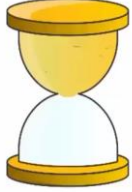
لذا فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. والإجابة الصحيحة هي B .



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

4) عند رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟

$\frac{1}{2}$ D

$\frac{1}{3}$ C

$\frac{1}{4}$ B

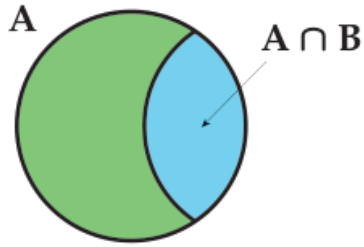
$\frac{1}{6}$ A



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العينة، فإنه يمكن تبسيط شكل فن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين النواتج المشتركة

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ في } A \text{ و } B \text{ وهذا يعني أن}$$

أضف إلى

مطوبتك

الاحتمال المشروط

مفهوم أساسي



$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ الاحتمال المشروط لـ } B \text{ إذا وقع } A \text{ هو}$$

حيث: $P(A) \neq 0$

اليوم:

التاريخ:



تأكد

حدّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1, 2) مستقلّتين أم غير مستقلّتين، ووضّح إجابتك:

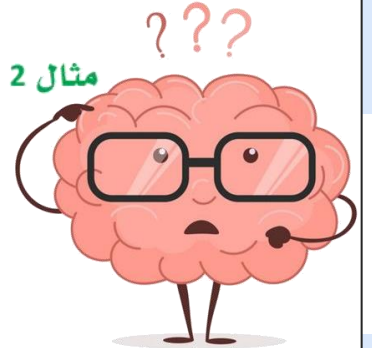
مثال 1

(1) وصل فريق كرة القدم في مدرسة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في المباراة النهائية للبطولة.

(2) نجاح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس.

(3) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 20 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية لكلّ منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق. سُحبت بطاقة واحدة عشوائياً من الصندوق، ثم أُعيدت إليه، وبعد ذلك سُحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقة حمراء في المرتين؟

مثال 2



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



تطوير - إنتاج - توليف

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-3

حدّد إذا كانت الحادثتان في الأسئلة (9-6) مستقلّتين أم غير مستقلّتين، ثم أوجد الاحتمال:

- (6) رمي مكعب مرّقم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسّم إلى قطاعات متطابقة، ومرّقم من 1 إلى 5؛ للحصول على عدد فردي.
- (7) اختيار طالّبين حصلاً على الدرجة الكاملة في اختبار للرياضيات. واحداً تلو الآخر من صفٍّ فيه 25 طالباً، 5 منهم حصلوا على الدرجة الكاملة.
- (8) تكرار سحب كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائياً دون إرجاع، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و 4 كرات زرقاء.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

مسائل مهارات التفكير العليا



- (18) **اكتشف الخطأ:** أراد كلٌّ من مهند وجابر إيجاد احتمال A شرط وقوع B ، حيث $P(A) = 0.3, P(B) = 0.3$ ، والحدثان A و B مستقلتان. أيُّهما إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

جابر

بها أننا لا نعرف $P(A \cap B)$ ،
فإننا لا نستطيع إيجاد $P(A|B)$

مهند

بها أن A و B حادثتان مستقلتان،
فإن: $P(A|B) = P(A)$

- (19) **تحّد:** يحتوي كيس على n من العناصر المختلفة، فإذا كان احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون إرجاع يساوي 5%. فما قيمة n ؟ وضح إجابتك.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



نظور - إنتاج - توليق

تدريب على اختبار

(23) احتمال: يمكن أن يلعب بلال عشوائياً في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟

- | | | | |
|---------------|----------|----------------|----------|
| $\frac{1}{9}$ | C | $\frac{1}{18}$ | A |
| $\frac{1}{2}$ | D | $\frac{1}{6}$ | B |

(24) احتمال: يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ عمّار حبتَي حلوى من الكيس دون أن ينظر إليهما. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشر.

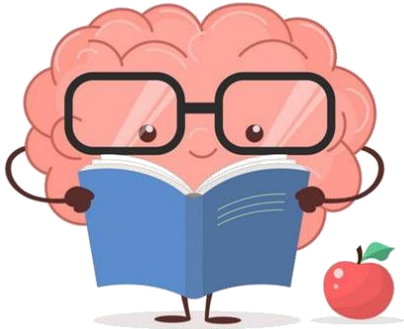
الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

اليوم:

التاريخ:



التَّعَلَّمْ كُنْزٌ يَتَّبِعُ صَاحِبَهُ فِي كُلِّ مَكَانٍ



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



الواجب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة



انتهى درس اليوم

احتمالات الحوادث المتنافية

Probabilities of Mutually Exclusive Events



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



الالتزام بالوقت

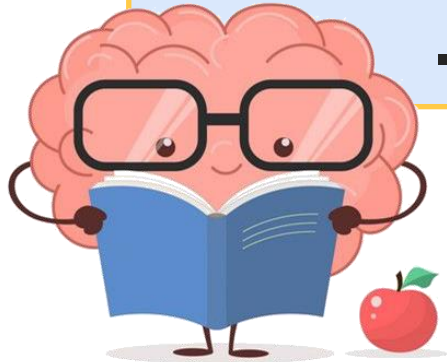


حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

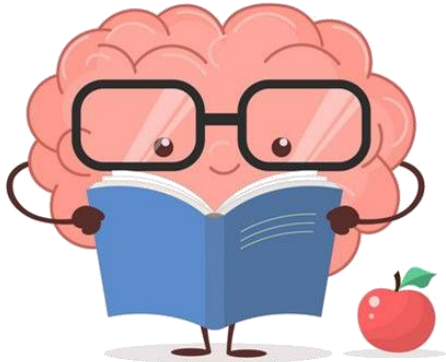


الأفكار الرئيسية



أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.

1



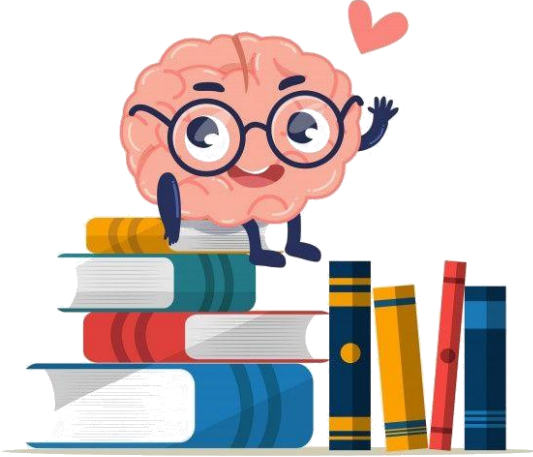
أجد احتمال متممة حادثة.

2

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية



فيما سبق:

درست إيجاد احتمالات الحوادث
المستقلة والحوادث غير المستقلة.

والآن:

- ❖ أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.
- ❖ أجد احتمال متممة حادثة.

اليوم:

التاريخ:

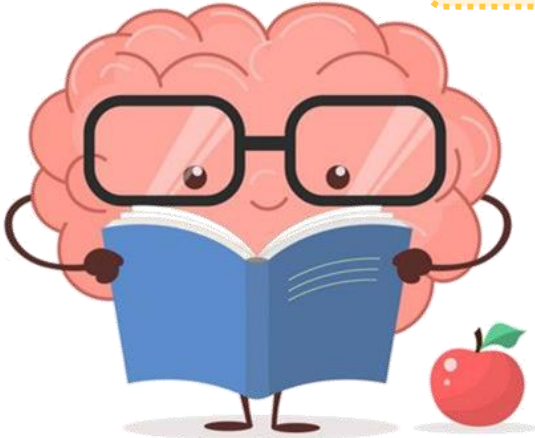
الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية



المفردات

الحادثة المتممة

الحدثان المتنافيتان





الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية

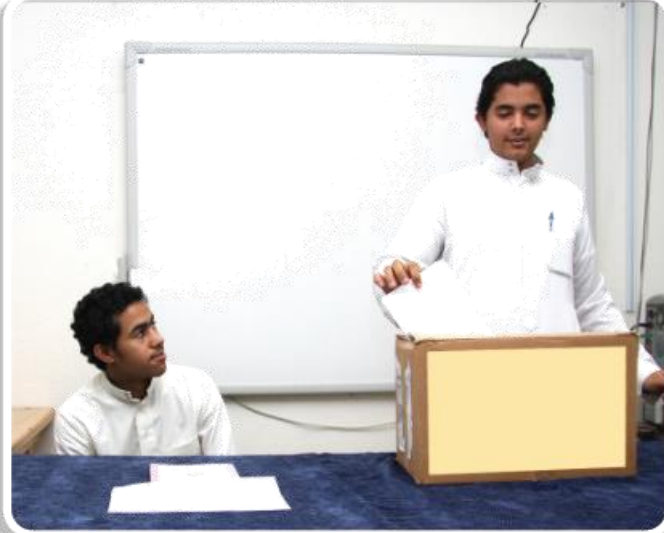
اليوم:

التاريخ:



لماذا؟

يمكن لأي طالب في الصفوف (الأول والثاني والثالث الثانوي) الترشح ليكون مسؤول أنشطة. ويرغب صالح في أن يكون المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي، في حين يرغب سلمان في أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي، أو طالباً يبدأ اسمه بحرف م.

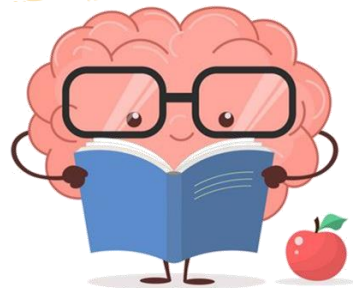


جدول التعلم

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

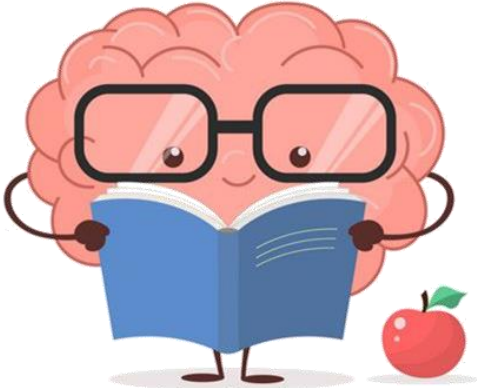
ماذا اعرف؟!

المفردات الجديدة:

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- إيجاد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.

٢- إيجاد احتمال متممة حادثة.





الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية

اليوم:

التاريخ:

الحوادث المتنافية: لقد اختبرت في الدرس 3-4 احتمالات تتضمن تقاطع حادثتين أو أكثر في وقت واحد، وستختبر في هذا الدرس احتمالات تتضمن اتحاد حادثتين أو أكثر.

$$P(A \cap B)$$



يدل على تقاطع مجموعتين

$$P(A \cup B)$$



يدل على اتحاد مجموعتين

عند إيجاد احتمال وقوع حادثة أو وقوع حادثة أخرى، يجب أن تعرف العلاقة بين الحادثتين. فإذا لم يكن وقوع الحادثتين ممكناً في الوقت نفسه يُقال إنهما **متنافيتان**؛ أي أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية



مثال 1 من واقع الحياة

تحديد الحوادث المتنافية

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلِّ مما يأتي، وبرِّر إجابتك:
انتخابات: ارجع إلى المعلومات الواردة في فقرة "لماذا؟".

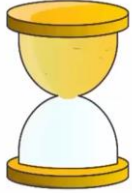
(a) المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو من الصف الثالث الثانوي.
هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة، إذ لا يمكن أن يكون المسؤول طالبًا في الصف الثالث الثانوي والثاني الثانوي في آن واحد.

(b) المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م.
هاتان الحادثتان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي وفي الوقت نفسه يبدأ اسمه بحرف م.

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

1A اختيار عدد من الأعداد من 1 إلى 100 عشوائياً، والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10 .

1B الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.



إحدى طرق إيجاد احتمال وقوع حادثتين متنافيتين هو اختبار فضاء العينة لهما.

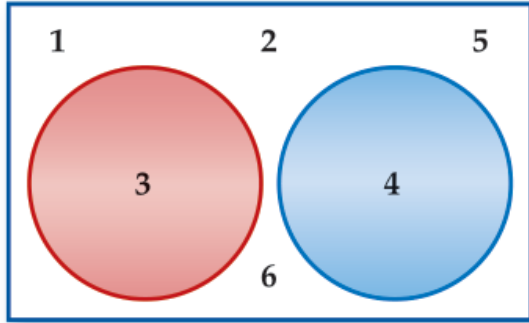
فمثلاً لإيجاد احتمال ظهور 3 أو 4 عند رمي مكعب مرقم، سترى من أشكال
فن أنه يوجد ناتجان يحققان هذا الشرط 3 أو 4، لذا فإن:

$$P(3 \cup 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بإضافة احتمالي الحادثتين البسيطتين.

$$P(3) = \frac{1}{6} \text{ و } P(4) = \frac{1}{6} \quad P(3 \cup 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

يوضح هذا المثال القانون الأول من قانوني الجمع في الاحتمالات.



أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي



احتمال الحادثتين المتنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين، فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كل منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين، فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 2 من واقع الحياة

الحوادث المتنافية

مكتبة موسى	
أنواع الكتب	العدد
دينية	10
فيزيائية	12
كيميائية	13

كتب: اختار موسى كتاباً من الكتب الموجودة في مكتبته المبينة في الجدول المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب دينياً أو فيزيائياً؟ هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه لا يمكن أن يكون الكتاب دينياً أو فيزيائياً في آن واحد.

افترض أن الحادثة $A1$ تمثل اختيار كتاب ديني.
وافترض أن الحادثة $A2$ تمثل اختيار كتاب فيزيائي.
مجموع الكتب هو $10 + 12 + 13 = 35$.

احتمال الحادثتين المتنافيتين

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$$

$$P(A1) = \frac{10}{35} \text{ و } P(A2) = \frac{12}{35} \quad = \frac{10}{35} + \frac{12}{35}$$

$$\text{اجمع} \quad = \frac{22}{35}$$

لذا فإن احتمال اختيار كتاب ديني أو فيزيائي هو $\frac{22}{35}$ ، ويساوي 63% تقريباً.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية



00:01:00

Start

Clear

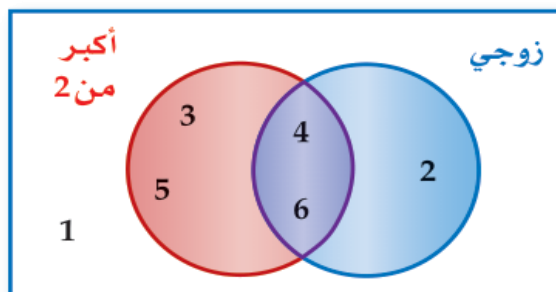


تحقق من فهمك

(2A) إذا رُمي مكعبان مرقَّمان متمايزان مرة واحدة. فما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كلٍّ من وجهي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟

(2B) **ألعاب:** إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائياً من بين 15 محفظة و 16 ساعة و 14 نظارة و 25 قلمًا و 10 كرات، فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟





عند رمي مكعب مرّقم مرة واحدة، ما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ يمكنك أن تلاحظ من أشكال ثن وجود 5 أعداد أكبر من 2 أو زوجية وهي 2, 3, 4, 5, 6. لذا فإن:

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من 2}) = \frac{5}{6}$$

وبما أنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه، فإن هاتين الحادّتين غير متنافيتين، وإذا أخذنا احتمال كل حادثة على حدة فإن:

$$P(\text{أكبر من 2}) = \frac{4}{6}$$

$$P(\text{زوجي}) = \frac{3}{6}$$

وإذا جمعنا هذين الاحتمالين فإن احتمالي الناتجين 6، 4 يحسبان مرتين؛ مرة لكونهما عددين أكبر من 2، ومرة أخرى لكونهما عددين زوجيين؛ لذا يجب عليك أن تطرح احتمال الناتجين المشتركين.

$$P(\text{عدد زوجي وأكبر من 2}) = P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{عدد أكبر من 2}) - P(\text{عدد زوجي وأكبر من 2})$$

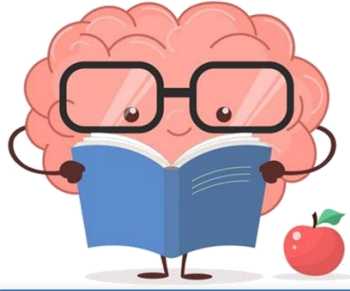
$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

يؤدي هذا المثال إلى قانون الجمع الثاني في الاحتمال.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية



مفهوم أساسي



احتمال حادثتين غير متنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A, B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحاً منه احتمال وقوع A و B معاً.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A, B غير متنافيتين فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

أضف إلى

مطوبتك

لوحات إبراهيم			
الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائيًا للمشاركة في معرض للوحات الفنية، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظرًا طبيعيًا؟
بما أن بعض لوحات إبراهيم مناظر طبيعية ولوحات زيتية في وقت واحد فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.

$$P(\text{لوحة زيتية و منظر طبيعي}) = P(\text{لوحة زيتية}) + P(\text{منظر طبيعي}) - P(\text{لوحة زيتية أو منظر طبيعي})$$

$$\text{عوض} = \frac{5 + 3 + 2 + 0}{30} + \frac{1 + 3 + 2}{30} - \frac{3}{30}$$

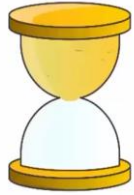
$$\text{بسّط} = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30}$$

لذا فإن احتمال أن يختار إبراهيم منظرًا طبيعيًا أو لوحة زيتية يساوي $\frac{13}{30}$ أو 43% تقريبًا.

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(3) فن: في المثال أعلاه، ما احتمال أن تكون اللوحة التي اختارها إبراهيم مائية أو شكلاً هندسياً؟



احتمال الحادثة المتممة: عناصر **الحادثة المتممة** A تتكون من جميع نواتج فضاء العينة غير الموجودة في الحادثة A . فمثلاً تعلم أن احتمال الحصول على العدد 4 عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة يساوي $\frac{1}{6}$ ، وبالتالي فإن احتمال عدم الحصول على العدد 4 هو $\frac{5}{6}$ ؛ وذلك لأنه توجد 5 نواتج ممكنة لهذه الحادثة هي: 1, 2, 3, 5, 6. لذا فإن $P(\text{عدم الحصول على العدد 4}) = \frac{5}{6}$.
لاحظ أن هذا الاحتمال يساوي $1 - \frac{1}{6}$ أو $1 - P(4)$.

مفهوم أساسي

احتمال الحادثة المتممة

التعبير اللفظي: احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة.

بالرموز: لأي حادثة A ، $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية



مثال 4

الحادثة المتممة

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطُلب إليها سحب بطاقة عشوائيًا من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة؟

افترض أن A تمثل اختيار بطاقة رابحة، فأوجد احتمال متممة A .

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad \text{احتمال المتممة}$$

$$= 1 - \frac{20}{300} \quad \text{عوض}$$

$$= \frac{280}{300} \quad \text{اطرح وبسط}$$

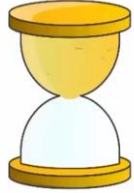
$$= \frac{14}{15}$$

احتمال أن تسحب سميرة بطاقة غير رابحة $\frac{14}{15}$ ، أو 93% تقريبًا.

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(4) أمطار: إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟



نوع الحوادث	الوصف	القانون
الحدثان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A, B حادثتين مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
الحدثان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما .	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B : $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بشرط $P(B) \neq 0$
الحدثان المتنافيتان	حدثان لا توجد بينهما نواتج مشتركة.	إذا كانت A, B حادثتين متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحدثان غير المتنافيتين	حدثان توجد بينهما نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحادثة المتممة	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العينة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأي حادثة A : $P(A') = 1 - P(A)$



تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها

حزام الأمان: افرض أن 81 % من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقيْن واحدًا تلو الآخر عشوائيًا من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

افهم: تعلم أن 81% من السائقين يستعملون حزام الأمان. الاصطلاح (واحد على الأقل) يعني واحدًا أو أكثر. لذا أنت في حاجة إلى إيجاد احتمال أن:

- السائق الأول المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو السائق الثاني المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو كلا السائقين المختارين لا يستعمل حزام الأمان.

أي إيجاد (الأول لا يستعمل الحزام U الثاني لا يستعمل الحزام) P



حزام الأمان: افرض أن 81 % من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقيّن واحدًا تلو الآخر عشوائيًا من بين 100 من السائقيّن. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

خطط: الحادثة الموصوفة أعلاه هي الحادثة المتممة لحادثة أن السائقيّن المختارين يستعملان حزام الأمان.

افرض أن الحادثة A تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان.
وافرض أن الحادثة B تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان بعد أن يكون قد تمّ اختيار السائق الأول.

إذن المطلوب إيجاد $P[(A \cap B)']$ وهي تكافئ $P(A' \cup B')$

هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن احتمال الحادثة الأولى يؤثر في احتمال الحادثة الثانية.

تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها

مثال 5 من واقع الحياة

حزام الأمان: افرض أن 81 % من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقيْن واحدًا تلو الآخر عشوائيًا من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

حلّ: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ احتمال الحادثتين غير المستقلتين

$$P(A) = \frac{81}{100}$$

اضرب

احتمال الحادثة المتممة

عوّض

اطرح

$$= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$$

$$= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$$

$$P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1 - \frac{36}{55}$$

$$= \frac{19}{55}$$

لذا فإن احتمال أن أحد السائقين على الأقل لا يستعمل حزام الأمان يساوي $\frac{19}{55}$ ، أو 35% تقريبًا.

حزام الأمان: افرض أن 81 % من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقيّن واحدًا تلو الآخر عشوائيًا من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

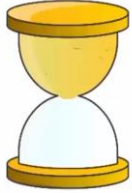
تحقق: استعمل التبرير المنطقي للتحقق من معقولة إجابتك.

احتمال اختيار سائق من 100 لا يستعمل حزام الأمان يساوي $(100 - 81)\%$ ، أو 19% واحتمال اختيار سائقيّن من 100 لا يستعملانه يجب أن يكون أكبر من 19% . وبما أن $35\% > 19\%$ ، فإن الإجابة معقولة.

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(5) **هواتف نقالة :** أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير سائقان واحداً تلو الآخر عشوائياً من مجموعة 100 سائق، فما احتمال أن يستعمل أحدهما على الأقل هاتفه النقال أثناء القيادة؟



مثال 1

حدد إذا كانت الحادثان متنافيتين أو غير متنافيتين في كل ممّا يأتي، وبرّر إجابتك:

- (1) ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة.
- (2) اختيار سيارة أو حصان.

مثال 2

- (3) **الموظف المثالي:** حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي شركة، وكانت جائزته أن يختار عشوائياً واحدة من بين 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب، و 7 نظارات. ما احتمال أن يربح بطاقة سفر، أو كتاباً، أو ساعة؟

???



تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1، 3

حدّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين (في كلّ من الأسئلة 7-9)، ثم أوجد الاحتمال، وقرب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًا:

(7) رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين.

(8) اختيار عدد عشوائيًا من 1 إلى 20، للحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3.

(9) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة للحصول على شعار أو كتابة.

(10) **رياضة:** يبين الجدول المجاور أنواع الرياضات التي يقدمها نادٍ رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 14-16. ما احتمال أن يمارس مشارك السباحة أو أن يكون عمره 14؟

النادي الرياضي			
العمر	كرة القدم	الكرة الطائرة	السباحة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية



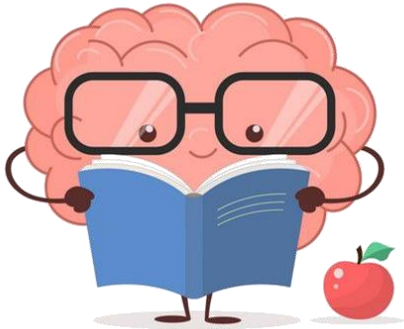
مسائل مهارات التفكير العليا

18 تحد: إذا رميت ثلاثة مكعبات مرقمة متميزة مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر على مكعبين منها على الأقل عدد أقل من أو يساوي 4؟

تبرير: حدد إذا كانت الحادثتان في كل مما يأتي متنافيتين أو غير متنافيتين:

19 اختيار مثلث متطابق الأضلاع ومثلث متطابق الزوايا.

20 اختيار عدد مركب واختيار عدد حقيقي.



تدريب على اختبار

(24) احتمال: رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر؟

A $\frac{1}{6}$

B $\frac{2}{3}$

C $\frac{5}{6}$

D 1

(23) احتمال: يقدم محل تجاري لزبائنه في يوم الافتتاح الهدايا المبينة في الجدول الآتي. ما احتمال أن يربح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو إحدى الساعات؟

الهدية	العدد
أدوات مطبخ	10
أدوات كهربائية	6
ساعات	3
هواتف نقالة	1

D 0.65

C 0.5

B 0.35

A 0.075

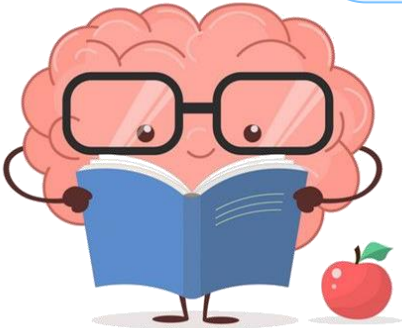
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية



التفاؤل بالحياة , واليقين بأن الأيام
الجميلة قادمة تزدك ثقة بنفسك
فافتح قلبك للحياة , تجد الأجل.



بطاقة خروج

اختراري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال



الموضوع: احتمالات الحوادث المتنافية

اليوم:

التاريخ:

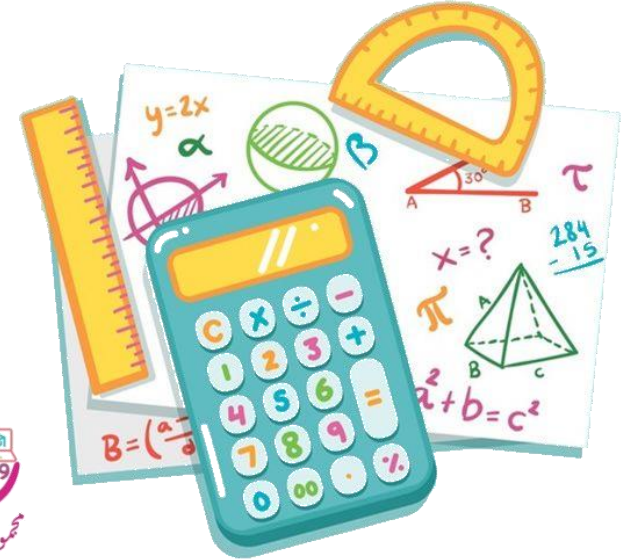
الواجب

انتهى درس اليوم

8

حساب المثلثات

- 55 التهيئة للفصل الثامن
- 56 استكشاف 8-1 معمل الجداول الإلكترونية : استقصاء المثلثات القائمة الخاصة
- 57 8-1 الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية
- 66 8-2 الزوايا وقياساتها
- 72 8-3 الدوال المثلثية للزوايا
- 78 8-4 قانون الجيوب
- 85 8-4 توسع معمل الهندسة : مساحة متوازي الأضلاع
- 86 اختبار منتصف الفصل
- 87 8-5 قانون جيوب التمام
- 93 8-6 الدوال الدائرية
- 100 8-7 تمثيل الدوال المثلثية بيانياً
- 107 8-8 الدوال المثلثية العكسية
- 113 دليل الدراسة والمراجعة
- 118 اختبار الفصل
- 119 الإعدادات للاختبارات المعيارية
- 121 اختبار تراكمي
- 123 الصيغ والرموز



تطوير - إنتاج - توثيق

الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

Trigonometric Functions in Right Triangles



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



الالتزام بالوقت

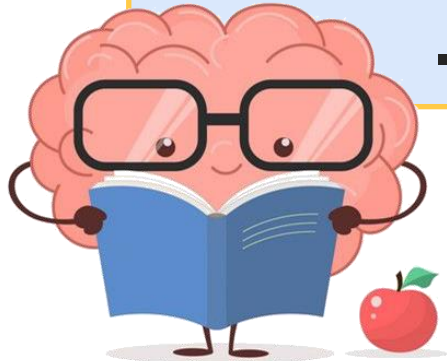


حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...



الأفكار الرئيسية

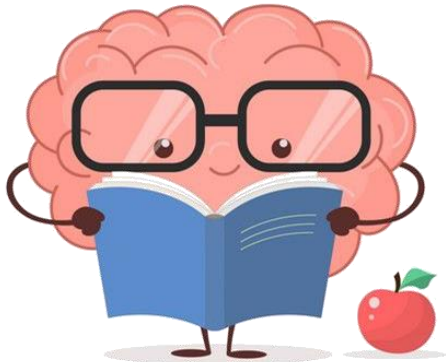


1

أجد قيم الدوال المثلثية لزوايا حادة.

2

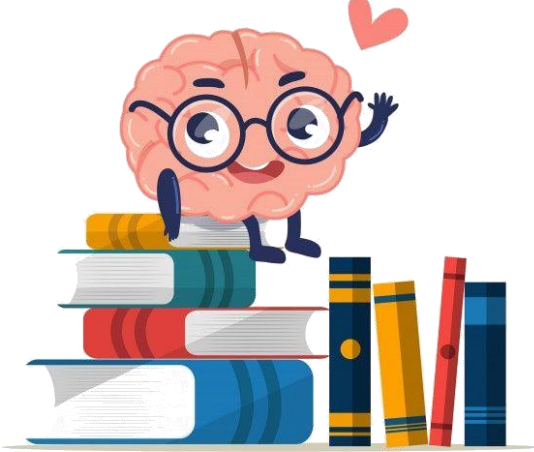
أستعمل الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع
وقياسات زوايا مثلثات قائمة الزاوية.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



فيما سبق:

درست استعمال نظرية فيثاغورس
في إيجاد أطوال أضلاع مثلثات قائمة
الزاوية.

والآن:

- ❖ أجد قيم الدوال المثلثية لزوايا حادة.
- ❖ أستعمل الدوال المثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا مثلثات قائمة الزاوية.

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:

المفردات

الجيب

الدالة المثلثية

النسبة المثلثية

حساب المثلثات

القاطع

قاطع التمام

الظل

جيب التمام

معكوس الجيب

دوال المقلوب

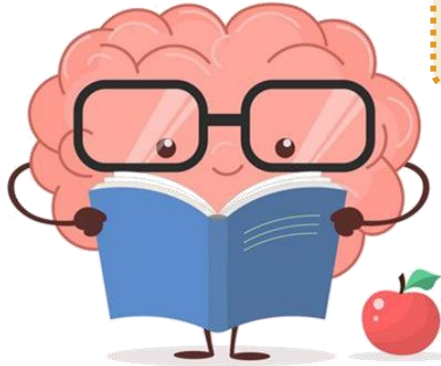
ظل التمام

معكوس الظل

معكوس جيب التمام

زاوية الانخفاض

زاوية الارتفاع



الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

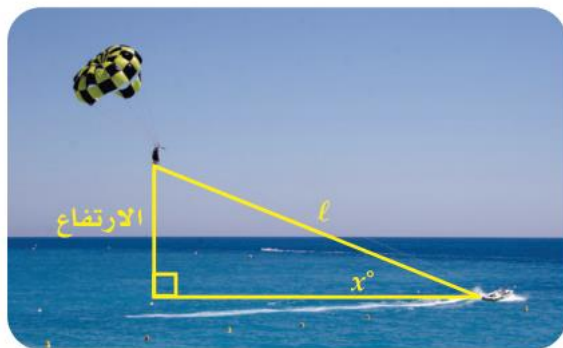
اليوم:

التاريخ:



لماذا؟

يعتمد ارتفاع الشخص في التزلُّج الهوائي على طول حبل السحب l والزاوية x° التي يصنعها الحبل مع الخط الأفقي. وإذا علمت هاتين القيمتين، يمكنك استعمال نسبة معينة لإيجاد ارتفاع المتزلِّج.

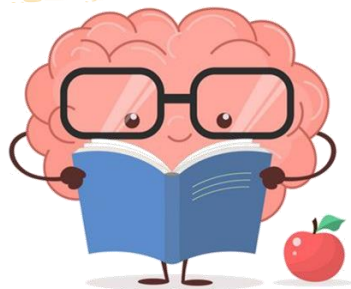


جدول التعلم

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

ماذا اعرف؟!

المفردات الجديدة:

اليوم:

التاريخ:

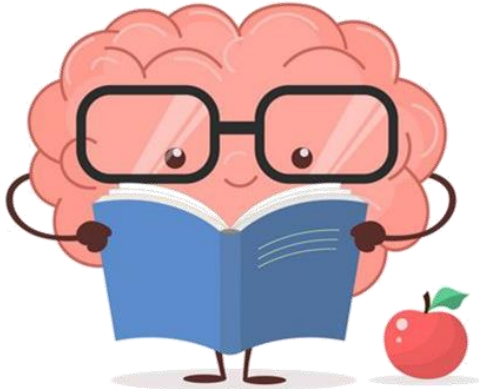
الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:



١- إيجاد قيم دوال مثلثية لزوايا حادة.

٢- استعمال دوال مثلثية لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا في مثلثات قائمة الزاوية.



اليوم:

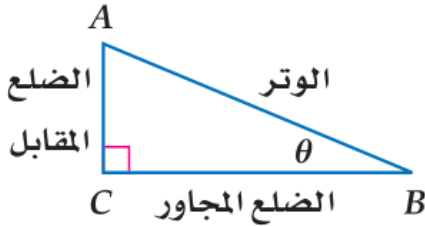
التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



تطوير - إنتاج - توثيق

الدوال المثلثية للزوايا الحادة يُعرّف **حساب المثلثات** بأنه دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه. وتُقارن **النسبة المثلثية** بين طولَي ضلعين في المثلث القائم الزاوية، أما **الدالة المثلثية** فتُعرف من خلال نسبة مثلثية.



يُستعمل الرمز الإغريقي θ (ويُقرأ أثيتا) عادة للدلالة على قياس زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية. حيث يُستعمل الوتر والضلع المقابل للزاوية التي قياسها θ والضلع المجاور لها في تعريف الدوال المثلثية الست.

جميع الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية

أضف إلى

مطوبتك

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

$$\sin \theta (\theta \text{ جيب}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\csc \theta (\theta \text{ قاطع تمام}) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

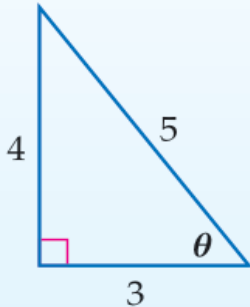
الرموز:

$$\cos \theta (\theta \text{ جيب تمام}) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\sec \theta (\theta \text{ قاطع}) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan \theta (\theta \text{ ظل}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\cot \theta (\theta \text{ ظل تمام}) = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$



$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{5}{4}$$

$$\sec \theta = \frac{5}{3}$$

$$\cot \theta = \frac{3}{4}$$

أمثلة:

مثال 1

إيجاد قيم الدوال المثلثية

إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية في C ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ عندما يكون:

طول الضلع المقابل للزاوية θ : $BC = 8$ ، طول الضلع المجاور للزاوية θ : $AC = 15$ ، طول الوتر: $AB = 17$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17} & \cos \theta &= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17} & \tan \theta &= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15} \\ \csc \theta &= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{17}{8} & \sec \theta &= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{17}{15} & \cot \theta &= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{15}{8} \end{aligned}$$



الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(1) أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية B الواردة أعلاه.



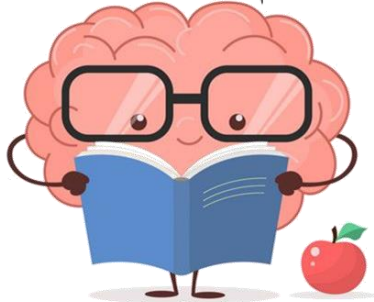
لاحظ أن النسب: قاطع التمام، والقاطع، وظلّ التمام، هي مقلوب النسب: الجيب، وجيب التمام، والظلّ على الترتيب. وتُستعمل في تعريف **دوال المقلوب**. حيث يمكن تعريفها على النحو الآتي:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

مجال أيّ دالة مثلثية هو مجموعة قياسات الزوايا الحادة θ في المثلث القائم الزاوية؛ لذا فإن قيم الدوال المثلثية تعتمد فقط على قياسات الزوايا الحادة وليس على أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية؛ أي أن قيم الدوال المثلثية للزاوية الحادة ستبقى كما هي مهما اختلفت أطوال أضلاع المثلث.

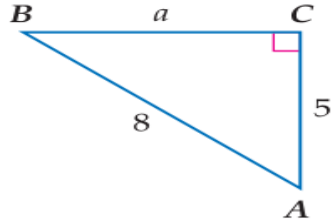


مثال 2

إيجاد النسب المثلثية

$\angle B$ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، إذا كان $\sin B = \frac{5}{8}$ ، فأوجد قيمة $\tan B$.

الخطوة 1: ارسم مثلثًا قائم الزاوية وسمّ إحدى زواياه الحادة B .



بما أن $\sin B = \frac{5}{8} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$. فحدّد على الرسم طول الضلع المقابل بـ 5، والوتر بـ 8.

الخطوة 2: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد a .

نظرية فيثاغورس

$$b = 5, c = 8$$

بسّط

اطرح 25 من كلا الطرفين

خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

الطول لا يمكن أن يكون سالبًا

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + 5^2 = 8^2$$

$$a^2 + 25 = 64$$

$$a^2 = 39$$

$$a = \pm\sqrt{39}$$

$$a = \sqrt{39}$$

الخطوة 3: أوجد قيمة $\tan B$.

$$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{39}}$$

$$= \frac{5\sqrt{39}}{39}$$

دالة الظلّ

عوّض عن المقابل بـ 5 والمجاور بـ $\sqrt{39}$

أنطق المقام

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$ ، فأوجد قيمة $\sin B$.



الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:

تتكرر الزوايا التي قياساتها $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ كثيرًا في حساب المثلثات.

أضف إلى

مطوبتك

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

مفهوم أساسي

نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ أن:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

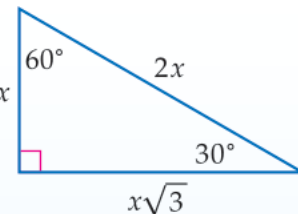
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

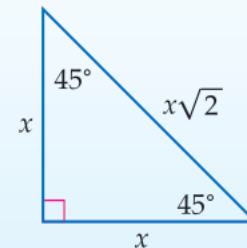


نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ أن:

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$



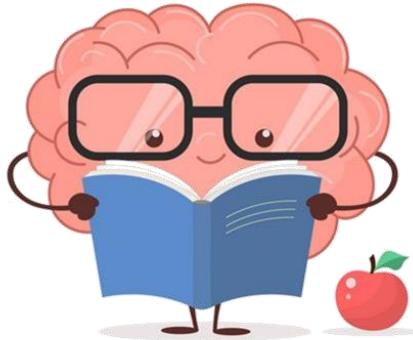
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



استعمال الدوال المثلثية : يمكنك استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث قائم الزاوية.



اليوم:

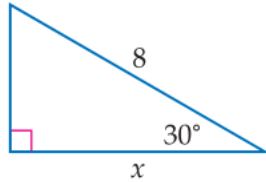
التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



مثال 3

إيجاد طول ضلع مجهول



استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x ، مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.
طول الوتر يساوي 8. والطول المجهول هو الضلع المجاور للزاوية 30° .
استعمل دالة جيب التمام لإيجاد قيمة x .

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

دالة جيب التمام

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{8}$$

عوّض عن θ بـ 30° ، المجاور بـ x ، الوتر بـ 8

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{2} = x$$

اضرب كلّاً من الطرفين في 8

$$6.9 \approx x$$

استعمل الآلة الحاسبة



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



00:01:00

Start

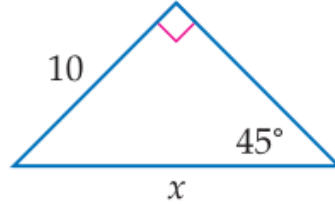
Clear



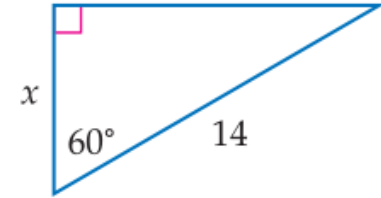
تحقق من فهمك

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x . قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

(3B)

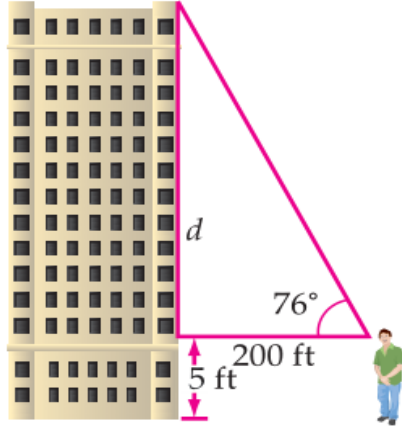


(3A)



مثال 4

إيجاد طول ضلع مجهول



بناية: لحساب ارتفاع بناية، مشى أحمد مسافة 200 ft مبتعدًا عن قاعدة البناية. واستعمل أداة (مقياس زاوية الميل) لقياس الزاوية المحصورة بين خطّ نظره المارّ بقمّة البناية والخطّ الأفقي. إذا كان مستوى نظره على ارتفاع 5 ft، فما ارتفاع البناية؟

الزاوية المقيسة كما يوضّح الشكل هي 76° . طول الضلع المجاور لها 200 ft، الضلع المجهول طوله هو الضلع المقابل لها. استعمل دالة الظل لإيجاد d .

دالة الظلّ

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

عوّض عن θ بـ 76° ، والمقابل بـ d ، والمجاور بـ 200

$$\tan 76^\circ = \frac{d}{200}$$

اضرب الطرفين في 200

$$200 \tan 76^\circ = d$$

استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط

$$802 \approx d$$

بما أن مقياس زاوية الميل كان على ارتفاع 5 ft عن سطح الأرض، فإن ارتفاع البناية يساوي 807 ft تقريبًا.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(4) **بنايات:** في الشكل المجاور بنائتان،

ارتفاع إحداهما 18 m، وارتفاع الأخرى

37 m، ولقياس المسافة الأفقية بينهما، وَضَعَ

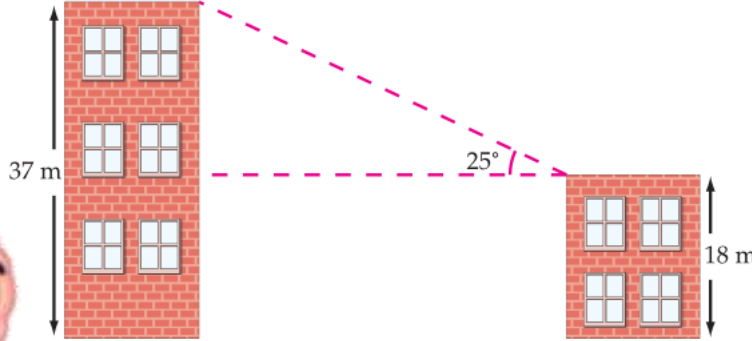
سعد أداة (مقياس زاوية الميل) على قمة البناية

الصغرى، فوجد أن قياس الزاوية المحصورة

بين الخط الأفقي بين البنائتين والخط المارّ

من الأداة إلى قمة البناية الكبرى هو 25° . فما

المسافة الأفقية بين البنائتين؟





معكوس النسب المثلثية

أضف إلى

مطوبتك



التعبير اللفظي:

إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيبها يساوي x ، فإن:
معكوس جيب x هو قياس $\angle A$.

الرموز:

إذا كان $\sin A = x$ ، فإن: $\sin^{-1} x = m \angle A$.

مثال:

$$\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m \angle A \rightarrow m \angle A = 30^\circ$$

التعبير اللفظي:

إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيب التمام لها يساوي x ، فإن:
معكوس جيب تمام x هو قياس $\angle A$.

الرموز:

إذا كان $\cos A = x$ ، فإن: $\cos^{-1} x = m \angle A$.

مثال:

$$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = m \angle A \rightarrow m \angle A = 45^\circ$$

التعبير اللفظي:

إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وظلها يساوي x ، فإن:
معكوس ظل x هو قياس $\angle A$.

الرموز:

إذا كان $\tan A = x$ ، فإن: $\tan^{-1} x = m \angle A$.

مثال:

$$\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m \angle A \rightarrow m \angle A = 60^\circ$$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



تطوير - إنتاج - توثيق

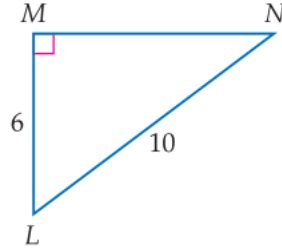
مثال 5

إيجاد قياس زاوية مجهولة

أوجد قياس كل زاوية مما يأتي، مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

(a) $\angle N$

بما أنك تعرف طول الضلع المقابل للزاوية N وطول الوتر. استعمل دالة الجيب.



$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin N = \frac{6}{10}$$

معكوس الجيب

$$\sin^{-1} \frac{6}{10} = m\angle N$$

استعمل الآلة الحاسبة

$$36.9^\circ \approx m\angle N$$

???



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



مثال 5

إيجاد قياس زاوية مجهولة

أوجد قياس كل زاوية مما يأتي، مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

(b) $\angle B$

استعمل دالة جيب التمام.

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

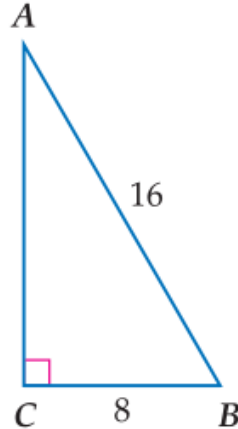
$$\cos B = \frac{8}{16}$$

معكوس جيب التمام

$$\cos^{-1} \frac{8}{16} = m\angle B$$

استعمل الآلة الحاسبة

$$60^\circ = m\angle B$$



الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

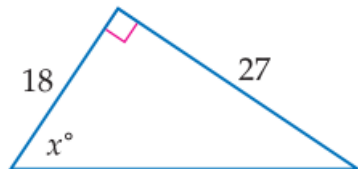
Clear



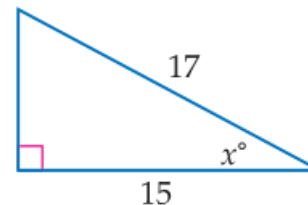
تحقق من فهمك

أوجد قيمة x ، مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(5B)



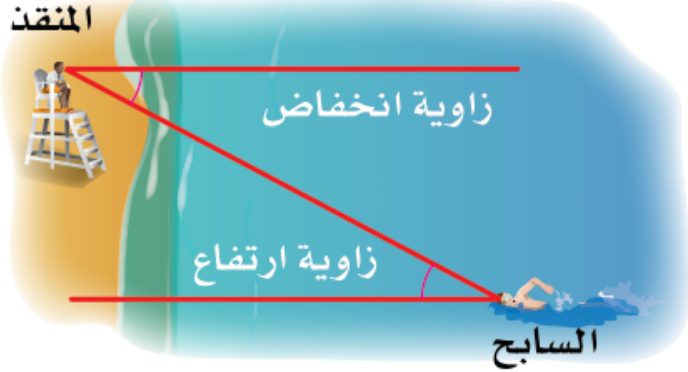
(5A)



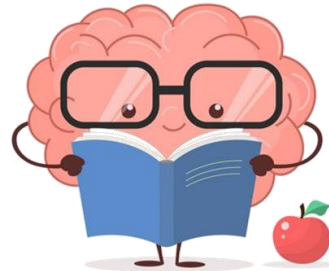
الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:



في الشكل المجاور، تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطّ نظر السباح إلى المنقذ والخطّ الأفقي له **زاوية الارتفاع**. كما تُسمّى الزاويةُ المحصورة بين خطّ نظر المنقذ إلى السباح والخطّ الأفقي له **زاوية الانخفاض**.



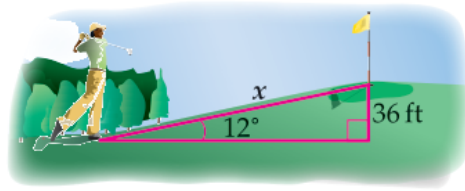
الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:

مثال 6

استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض



(a) **لعبة الجولف:** يقف لاعب جولف أسفل تلّ، وينظر إلى الحفرة في القمة. إذا كان ارتفاع التلّ 36 ft، وزاوية ارتفاع أسفل التلّ عن الحفرة هي 12° ، فأوجد المسافة من أسفل التلّ إلى الحفرة.

اكتب معادلة باستعمال دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسى (الضلع المقابل للزاوية 12°) إلى المسافة من أسفل التلّ إلى الحفرة (الوتر).

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 12^\circ = \frac{36}{x}$$

اضرب كلا من الطرفين في x

$$x \sin 12^\circ = 36$$

اقسم كلا من الطرفين على $\sin 12^\circ$

$$x = \frac{36}{\sin 12^\circ}$$

استعمل الآلة الحاسبة

$$x \approx 173.2$$

لذا فإن المسافة من أسفل التلّ إلى الحفرة تساوي: 173.2 ft تقريباً.



اليوم:

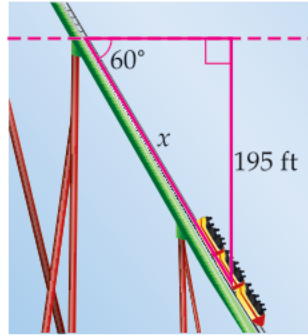
التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



مثال 6

استعمال زوايا الارتفاع والانخفاض



(b) **العربة الدوارة:** قياس زاوية انحدار (انخفاض) جزء من مسار عربة دوّارة في إحدى مدن الألعاب هي 60° . وينحدر هذا المسار من ارتفاع رأسي مقداره 195 ft. أوجد طول هذا الجزء من المسار.

اكتب معادلة باستعمال دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 60°) إلى طول الجزء من المسار (الوتر).

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{195}{x}$$

اضرب كلا الطرفين في x

$$x \sin 60^\circ = 195$$

اقسم كلا الطرفين على $\sin 60^\circ$

$$x = \frac{195}{\sin 60^\circ}$$

استعمل الآلة الحاسبة

$$x \approx 225.2$$

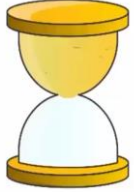
لذا فإن طول هذا الجزء من المسار يساوي 225.2 ft تقريبًا.



الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

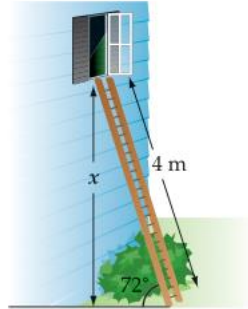
Clear



تحقق من فهمك



(6A) **تفريغ حمولة:** استعمل سطح مائل لتفريغ شاحنة بزاوية ارتفاع قياسها 32° . إذا كان ارتفاع السطح عند باب الشاحنة عن الأرض 1.2 m، فأوجد طول السطح المائل.



(6B) **سلالم:** سلّم طوله 4m يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها 72° . ما ارتفاع قمة السلّم عن الأرض؟

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

???

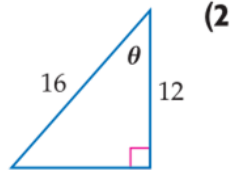
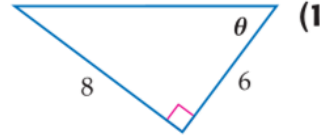


تأكد



أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ الموضحة في كل مما يأتي:

مثال 1



معتبرا $\angle A$ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، أجب عما يأتي:

مثال 2

(4) إذا كان $\tan A = \frac{20}{21}$ ، فما قيمة $\cos A$ ؟

(3) إذا كان $\cos A = \frac{4}{7}$ ، فما قيمة $\sin A$ ؟

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

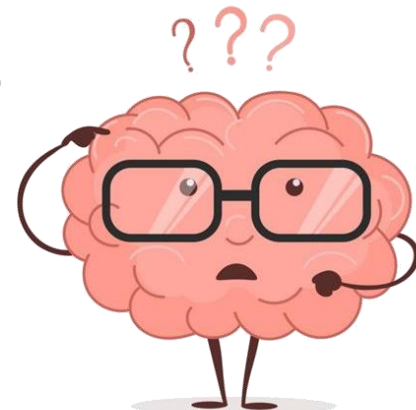
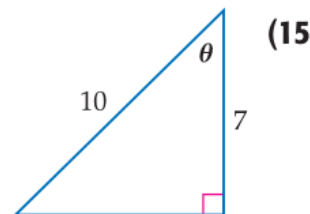
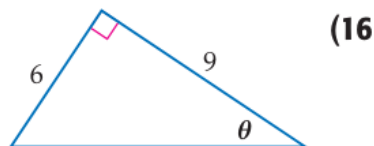
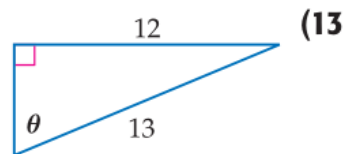
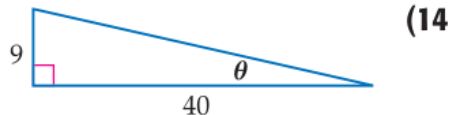
اليوم:

التاريخ:

تدرب وحل المسائل

أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ الموضحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

مثال 1

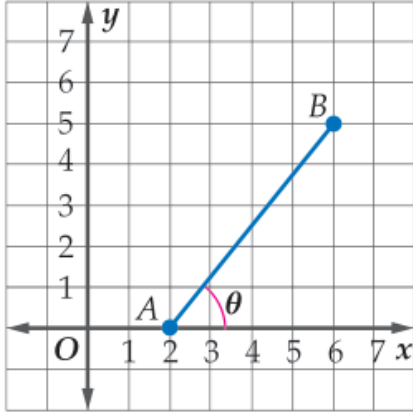


اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

مسائل مهارات التفكير العليا



51 تحدّ: قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين $A(2, 0)$, $B(6, 5)$ كما هو موضّح في الشكل المجاور، ما قياس الزاوية الحادة θ المحصورة بين القطعة المستقيمة والمحور x ؟ وضّح كيف وجدت القياس.

52 تبرير: بيّن ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وبرّر إجابتك: قيمة دالة الجيب لأيّ زاوية حادة، لن تكون سالبة أبداً.

53 إجابة مفتوحة: في المثلث القائم الزاوية ABC ، إذا علمت أن: $\sin A = \sin C$ ، فماذا يمكن أن تستنتج عن هذا المثلث؟ برّر إجابتك.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

تدريب على اختبار

(54) إذا كان ثمن شطيرة x ريالاً، و ثمن علبة عصير y ريالاً، و ثمن شطيرتين مع علبة عصير 4.50 ريالاً، و ثمن ثلاث شطائر مع علبتين عصير 7.25 ريالاً، فأَيُّ المصفوفات الآتية يمكن ضربها في المصفوفة $\begin{bmatrix} 4.50 \\ 7.25 \end{bmatrix}$ لإيجاد قيمة كلٍّ من x, y ؟

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ C

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ A

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ D

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ B

(55) نسبة طول مستطيل إلى عرضه هي 12:5 . إذا كانت مساحة المستطيل 240 cm^2 ، فكم ستمتراً طول قطر المستطيل؟

26 A

30 C

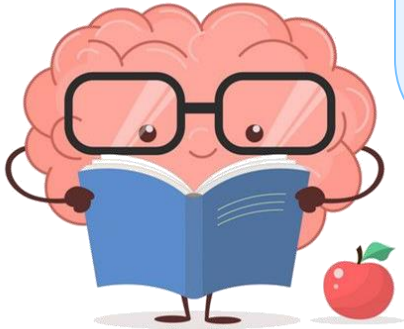
28 B

32 D





ابتعد عن الأشخاص الذين يحاولون
التقليل من شأن طموحاتك، فصغار
الشأن دائماً ما يفعلون ذلك، ولكن
العظماء حقاً يجعلونك تشعر أنك أنت
أيضاً يمكن أن تصبح عظيمًا.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية



بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال

الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:

الواجب



الموضوع: الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

اليوم:

التاريخ:

انتهى

درس اليوم



الزوايا وقياساتها

Angles and Angle Measure



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



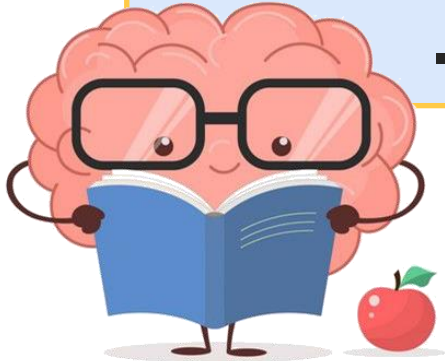
الالتزام بالوقت



حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...



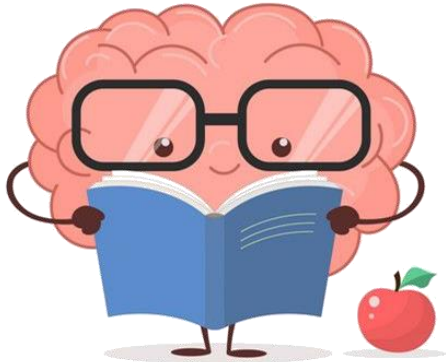
الأفكار الرئيسية



أرسم زوايا في الوضع القياسي وأجد قياساتها.



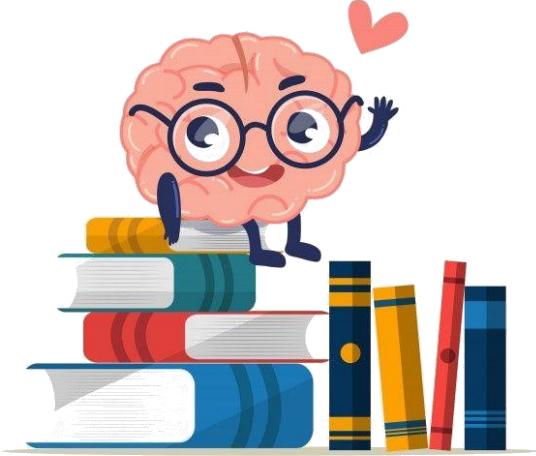
أحول من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:



فيما سبق:

درست استعمال الزوايا المقاسة بالدرجات.

والآن:

- ❖ أرسم زوايا في الوضع القياسي وأجد قياساتها.
- ❖ أحول من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس.

المفردات

ضلع الانتهاء

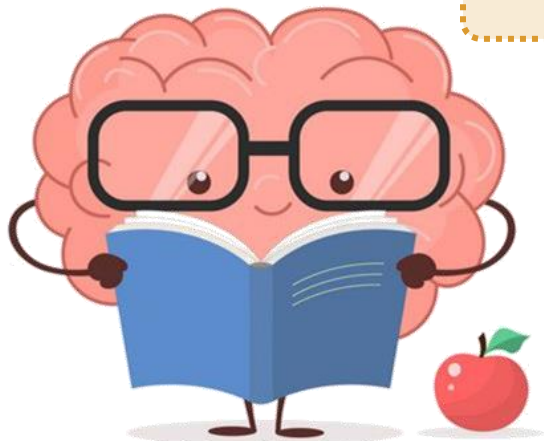
ضلع الابتداء

الوضع القياسي

طول القوس

الزاوية المركزية

الراديان



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:

لماذا؟



المزولة (الساعة الشمسية)، أداة تُحدّد الوقت نهارًا من خلال الظلّ الذي تسقطه على قرص مدرج لإظهار الساعة أو أجزاء من الساعة. ويدور الظلّ على القرص 15° كلّ ساعة.

???

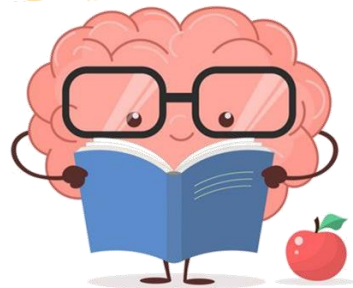


جدول التعلم

الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

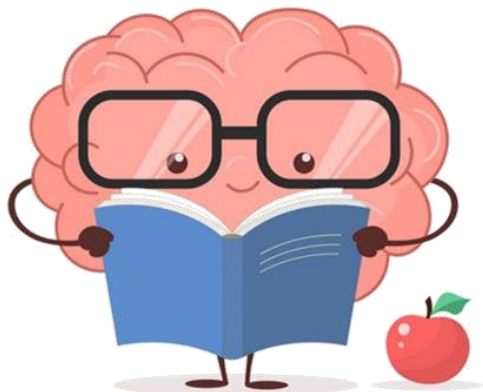
ماذا اعرف؟!

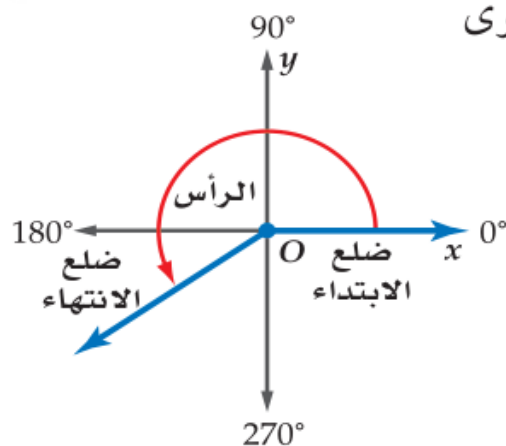
المفردات الجديدة:

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- رسم زوايا في الوضع القياسي وإيجاد قياساتها.

٢- التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس الراديان
وبالعكس.





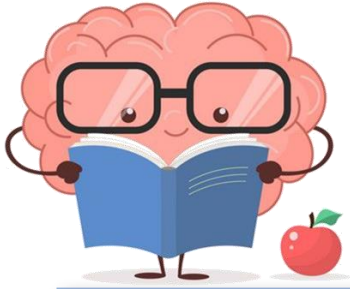
الزوايا المرسومة في الوضع القياسي: تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي** إذا كان رأسها نقطة الأصل، وأحد ضلعيها منطبقاً على الجزء الموجب من المحور x .

- يُسمّى الضلع المنطبق على المحور x **ضلع الابتداء** للزاوية.
- يُسمّى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل **ضلع الانتهاء**.

الموضوع: الزوايا وقياساتها

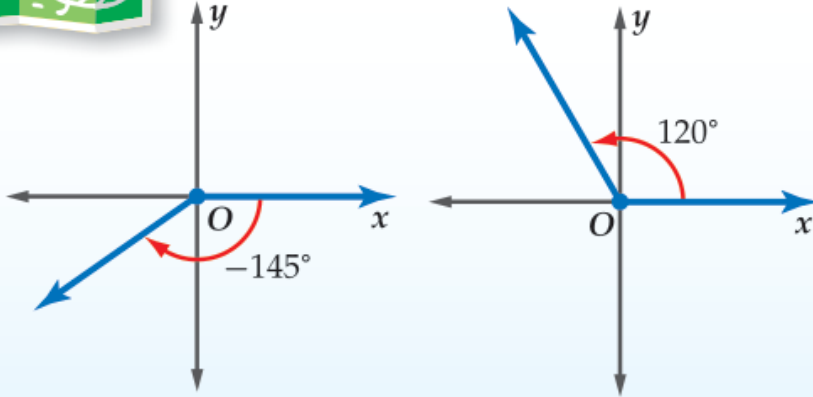
اليوم:

التاريخ:



أضف إلى

مطوبتك



قياسات الزوايا

مفهوم أساسي

يكون قياس الزاوية موجباً إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون قياس الزاوية سالباً إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

مثال 1

رسم زاوية في الوضع القياسي

ارسم كلاً من الزاويتين المُعطى قياساهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

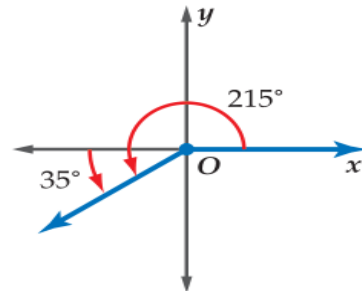
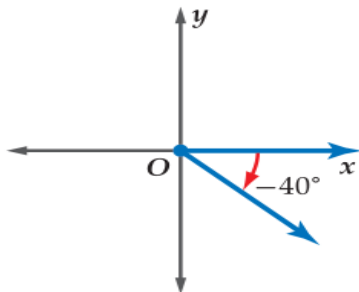
(a) 215°

(b) -40°

$$215^\circ = 180^\circ + 35^\circ$$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 35° بدوران معاكس لحركة عقارب الساعة بدءاً من الجزء السالب من المحور x .

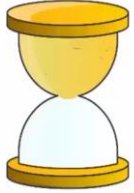
قياس الزاوية سالب. ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 40° بدوران مع حركة عقارب الساعة بدءاً من الجزء الموجب من المحور x .



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

-105° (1B)

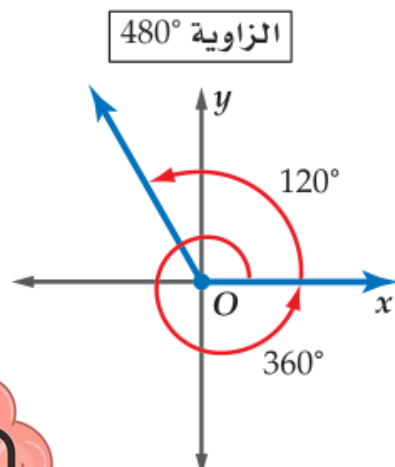
80° (1A)



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:

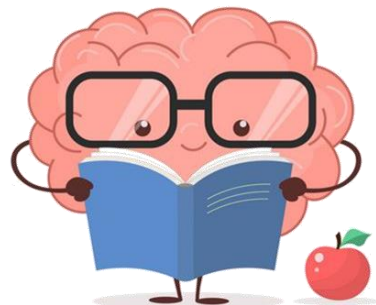


يمكن لضلع الانتهاء لزاوية أن يدور أكثر من دورة كاملة واحدة.

فعلى سبيل المثال:

دورة كاملة مقدارها 360° إضافة إلى دورة بمقدار 120° تشكّان

زاوية قياسها $360^\circ + 120^\circ = 480^\circ$



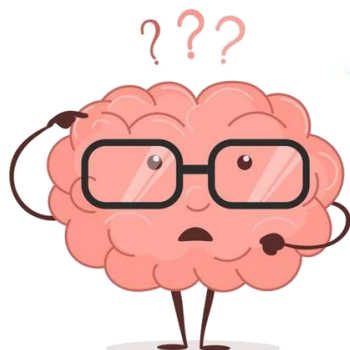
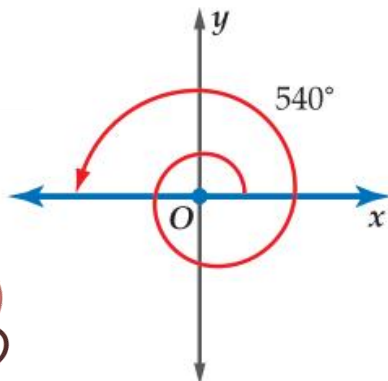
مثال 2 من واقع الحياة

رسم زاوية في الوضع القياسي

التزلج المائي: يتضمّن التزلج المائي أن يقوم المتزلج بالمناورة من خلال الدوران في الهواء في أثناء تنفيذ هذه الرياضة. إذا تضمّنت إحدى المناورات الدوران بمقدار 540° في الهواء، فارسم زاوية قياسها 540° في الوضع القياسي.

$$540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$$

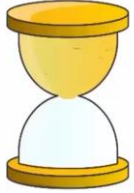
ارسم ضلع الانتهاء للزاوية 180° بدءًا من الجزء الموجب من المحور x .



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

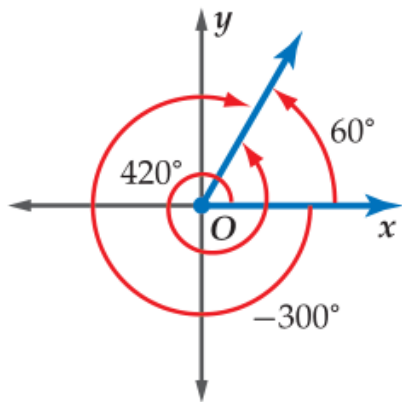
(2) **عجلات:** أوقف سعيد درّاجته، فتحرّكت عجلتاها بزاوية قياسها 600° ، ارسم زاوية قياسها 600° في الوضع القياسي.



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:



عند رسم زاويتين أو أكثر في الوضع القياسي، فإنها قد تشترك في ضلع الانتهاء مثل الزوايا التي قياساتها: 60° , 420° , -300° كما هو موضح في الشكل المجاور.

يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى، من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات 360° .

$$60^\circ + 360^\circ = 420^\circ \quad \bullet$$

$$60^\circ - 360^\circ = -300^\circ \quad \bullet$$



مثال 3

إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

في كلِّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية مُعطاة:

(a) 130°

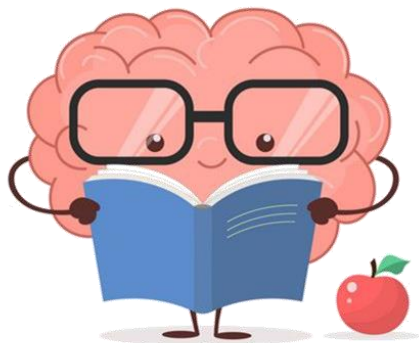
زاوية بقياس موجب: $130^\circ + 360^\circ = 490^\circ$ أضف 360°

زاوية بقياس سالب: $130^\circ - 360^\circ = -230^\circ$ اطرح 360°

(b) -200°

زاوية بقياس موجب: $-200^\circ + 360^\circ = 160^\circ$ أضف 360°

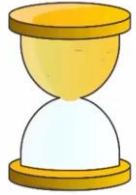
زاوية بقياس سالب: $-200^\circ - 360^\circ = -560^\circ$ اطرح 360°



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear

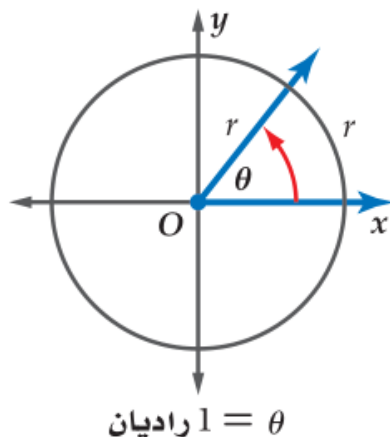


تحقق من فهمك

-45° (3B)

15° (3A)





التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس: يمكن أن تقاس الزوايا أيضًا بوحدات تستند إلى طول قوس من دائرة. فقياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، والتي تحدّد على الدائرة قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة هو 1 **راديان** (rad)

محيط الدائرة يساوي $2\pi r$. لذلك فالدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان. وبما أن $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ ، فإن العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان كما يأتي:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \text{ أي أن } \pi \text{ rad} = 180^\circ$$



مفهوم أساسي

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

أضف إلى

مطويتك

من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات

للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$$

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان

للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

مثال 4

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات في كل مما يأتي:

(a) -30°

(b) $\frac{5\pi}{2}$

$$-30^\circ = -30^{\cancel{\circ}} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^{\cancel{\circ}}}$$

$$= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\cancel{\pi}}{2} \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{180^\circ}{\cancel{\pi \text{ rad}}}$$

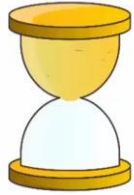
$$= \frac{900^\circ}{2} = 450^\circ$$



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

$$-\frac{3\pi}{8} \quad (4B)$$

$$120^\circ \quad (4A)$$



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

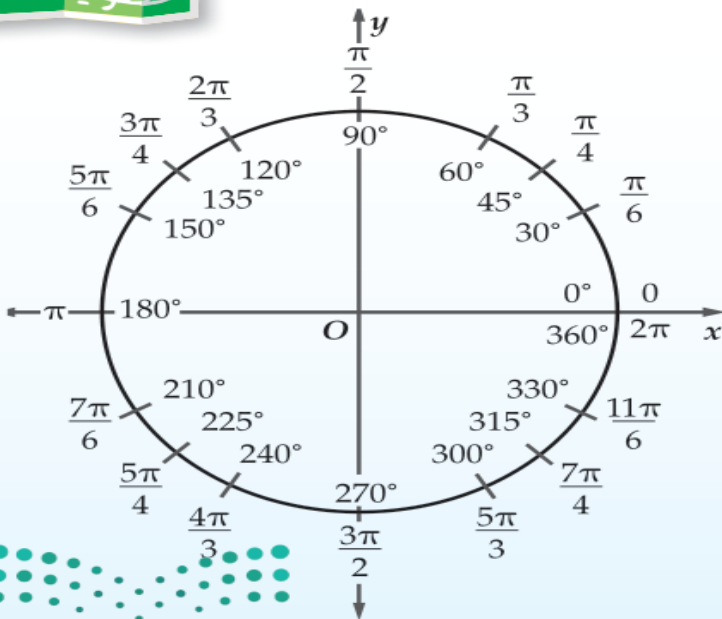
التاريخ:

ملخص المفهوم

القياس بالدرجات وبالراديان

يُظهر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

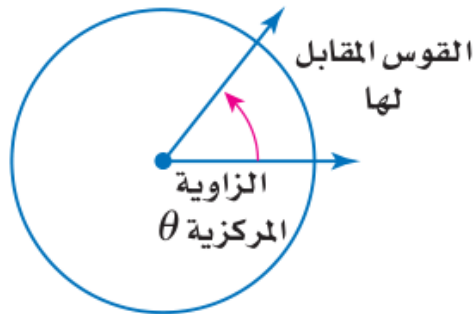


$$30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

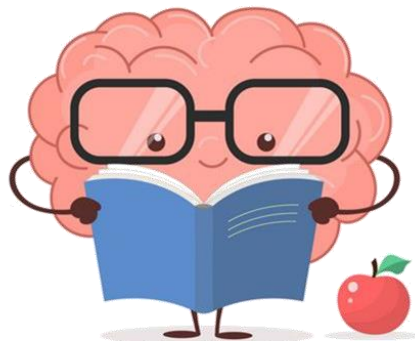
$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}$$



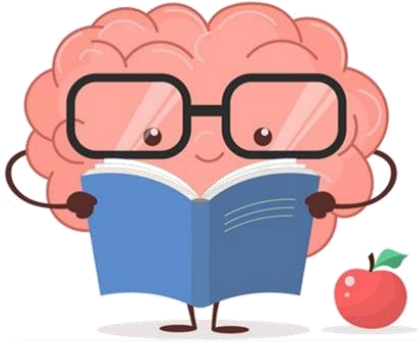
الزاوية المركزية في دائرة هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة. إذا علمت قياس الزاوية المركزية وطول نصف قطر الدائرة، فإنك تستطيع أن تجد طول القوس المقابل لها.



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:

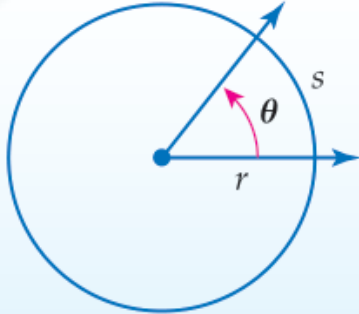


مفهوم أساسي

طول القوس

التعبير اللفظي: **طول القوس** من الدائرة (S)، المقابل لزاوية مركزية قياسها (θ) بالراديان يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ .

الرموز: $s = r\theta$



أضف إلى

مطوبتك

إيجاد طول القوس

مثال 5 من واقع الحياة

شاحنات: طول نصف قطر إطارات شاحنة 33 in، ما المسافة بالقدم التي يقطعها الإطار بعد أن تدور إطارات الشاحنة ثلاثة أرباع دورة؟

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

$$\theta = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

قياس الزاوية هو $\frac{3}{4}$ الدورة الكاملة

الخطوة 2: استعمل طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

صيغة طول القوس

$$\text{عوّض عن } r \text{ بـ } 33 \text{ و } \theta \text{ بـ } \frac{3\pi}{2}$$

استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط

اقسم على 12 للتحويل إلى وحدة القدم

$$\begin{aligned} s &= r\theta \\ &= 33 \cdot \frac{3\pi}{2} \\ &\approx 155.5 \text{ in} \\ &\approx 13.0 \text{ ft} \end{aligned}$$

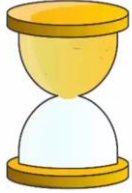
إذن إطار الشاحنة قطع مسافة 13 ft تقريبًا بعد دوران إطاراتها ثلاثة أرباع دورة.



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(5) **مطاعم:** يقع في أعلى برج الخرج مطعم دوّار، نصف قطره 90 ft، حيث يدور الجناح المخصّص لتقديم الطعام والقريب من النوافذ الخارجية دورة كاملة كل 90 دقيقة. إذا ذهب شخص للمطعم لتناول العشاء وجلس على طاولة بجانب النافذة عند الساعة 6:42 مساءً وانتهى عند الساعة 8:00 مساءً، فما المسافة التي دارها؟



تأكد 

ارسم كلاً من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

المثالان 1, 2

(1) 140°

(2) -60°

(3) 390°

في كلٍّ ممَّا يأتي أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

مثال 3

(4) 25°

(5) 175°

(6) -100°



الموضوع: الزوايا وقياساتها

اليوم:

التاريخ:



تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 ارسم كلاً من الزوايا الآتية المُعطى قياسها في الوضع القياسي:

(11) 75° (12) 160° (13) -90°

(14) -120° (15) 295° (16) 510°

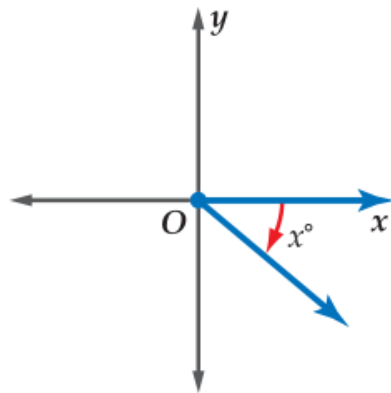
(17) **جُمباز:** يتأرجح لاعب جمباز على جهاز له عارضتان، ليدور بزاوية قياسها 240° . ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.

مثال 3 في كلٍّ ممَّا يأتي، أوجد زاويتين، إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب، مشتركتين في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة:

(18) 50° (19) 95° (20) 205°

(21) 350° (22) -80° (23) -195°

مسائل مهارات التفكير العليا



(45) اكتشف الخطأ: كتب كلٌّ من عليٍّ وأحمد عبارة تُمثِّل قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية الظاهرة في الشكل المجاور. من منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

أحمد

$$(360 - x)^\circ$$

عليٌّ

$$(x - 360)^\circ$$

(46) تحدّد: مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ راديان مع الجزء الموجب من المحور x عند النقطة $(2, 0)$. أوجد معادلة هذا المستقيم.

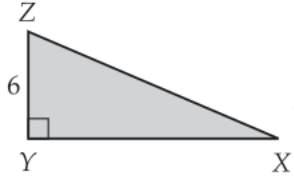
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الزوايا وقياساتها



تدريب على اختبار

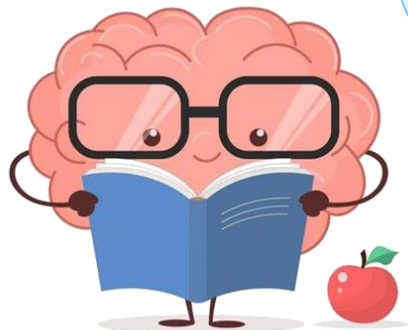


50) هندسة: إذا كانت مساحة المثلث المجاور
60 وحدة مربعة، فما طول الضلع $\overline{XZ}$ ؟

- A $2\sqrt{34}$ B $4\sqrt{109}$ C $2\sqrt{109}$ D $4\sqrt{34}$

49) إذا كان $(x + 6)(x + 8) - (x - 7)(x - 5) = 0$ ،
فأوجد قيمة x .

إذا كنت تستطيع تخيل صورة ما فذلك
يعني أنه يمكنك أن تجعلها واقعاً،
وإذا كنت تستطيع أن تحلم فهذا يعني
أنك تستطيع تحقيق حلمك.



بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال

الواجب

انتهى درس اليوم

الدوال المثلثية للزوايا

Trigonometric Functions of Angles



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



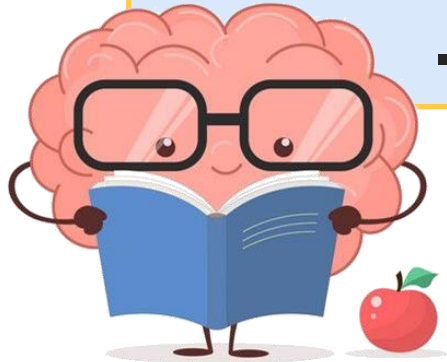
الالتزام بالوقت



حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...



الأفكار الرئيسية

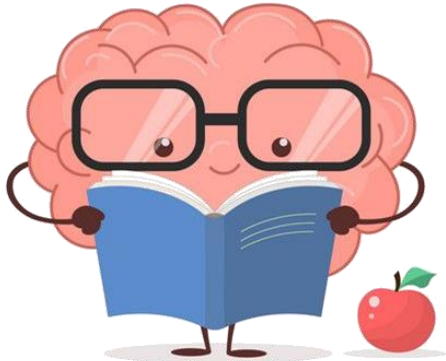


1

أجد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.

2

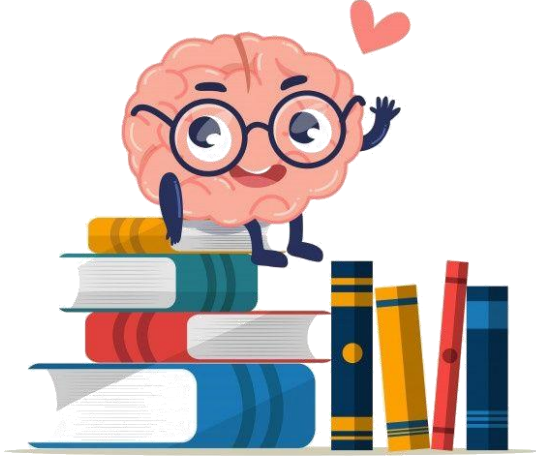
أجد قيم الدوال المثلثية باستعمال زوايا مرجعية.



الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:



فيما سبق:

درس إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة.

والآن:

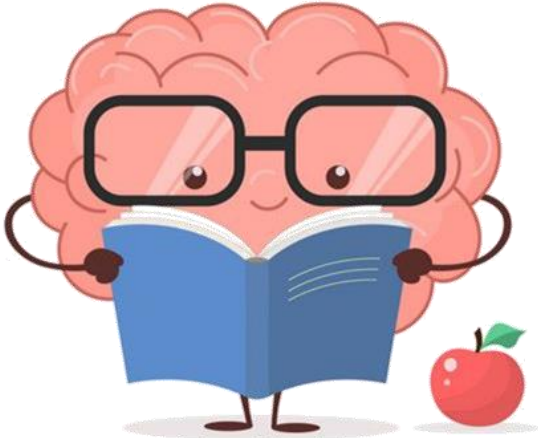
- ❖ أجد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
- ❖ أجد قيم الدوال المثلثية باستعمال زوايا مرجعية.



المفردات

الزاوية المربعة

الزاوية المثلثية



لماذا؟



تنتشر العجلة الدوّارة في كُبريات مدن الألعاب. ويمكننا إيجاد ارتفاع إحدى عرباتها في لحظة معينة عندما تدور العجلة بزاوية أكبر من 90° .

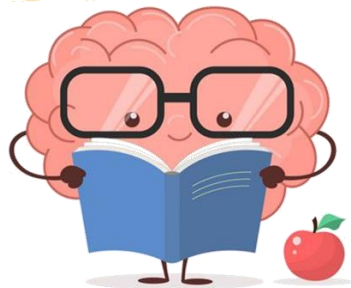


جدول التعلم

الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

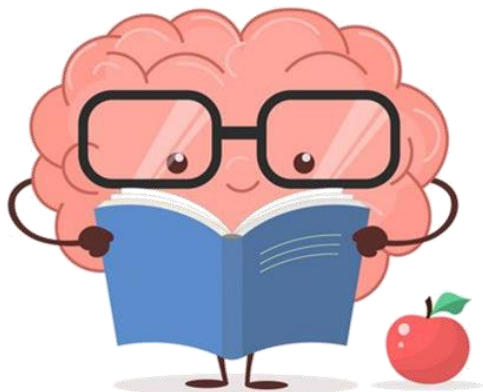
ماذا اعرف؟!

المفردات الجديدة:

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.

٢- إيجاد قيم الدوال المثلثية باستعمال زوايا مرجعية.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

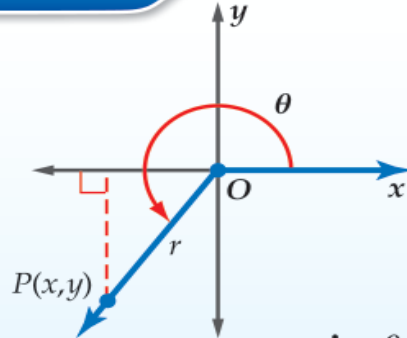


الدوال المثلثية للزوايا: يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية لزوايا قياساتها تزيد على 90° أو تقل عن 0° .

أضف إلى

الدوال المثلثية للزوايا

مفهوم أساسي



لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r التي تمثل البعد بين نقطة الأصل والنقطة P .

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$

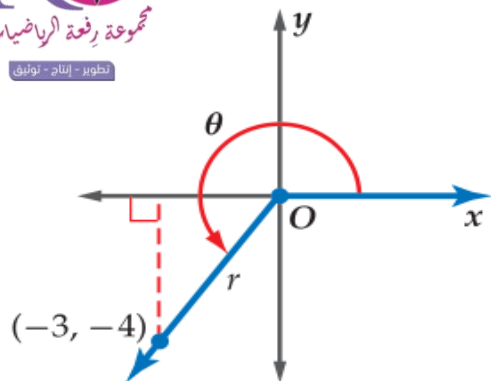
$$\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

إيجاد قيم الدوال المثلثية بمعلومية نقطة

مثال 1

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-3, -4)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .



الخطوة 1: ارسم الزاوية وأوجد قيمة r .

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

الخطوة 2: استعمل $x = -3, y = -4, r = 5$ لكتابة الدوال المثلثية الست.

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

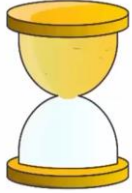
$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-6, 2)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .



إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على المحور x أو على المحور y ، فإن الزاوية θ تُسمى **زاوية ربعية**.

أضف إلى

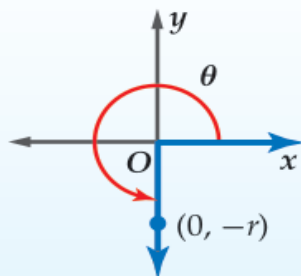
مطوبتك

الزوايا الربعية

مفهوم أساسي

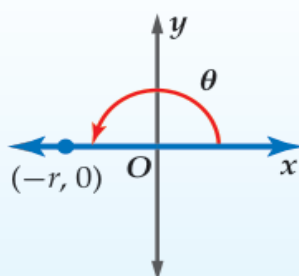
$$\theta = 270^\circ$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ rad أو}$$



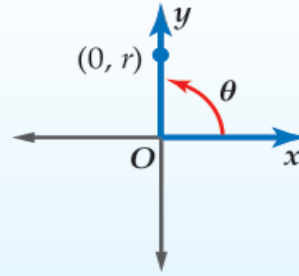
$$\theta = 180^\circ$$

$$\theta = \pi \text{ rad أو}$$



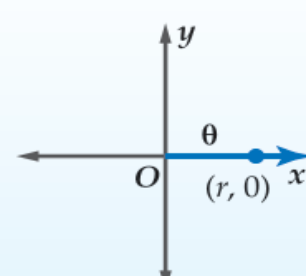
$$\theta = 90^\circ$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad أو}$$



$$\theta = 0^\circ$$

$$\theta = 0 \text{ rad أو}$$





الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

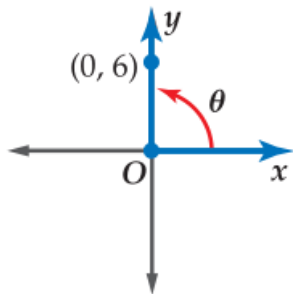
اليوم:

التاريخ:

مثال 2

الزوايا الربعية

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(0, 6)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .



تقع النقطة $(0, 6)$ على الجزء الموجب من المحور y ، لذلك فإن قياس الزاوية الربعية θ يساوي 90° . استعمل $x = 0, y = 6, r = 6$ لكتابة الدوال المثلثية.

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{6}{0} \text{ (غير معرف)}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{0} \text{ (غير معرف)}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{0}{6} = 0$$

الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

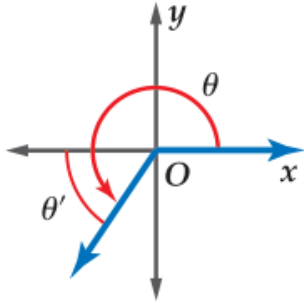
Clear



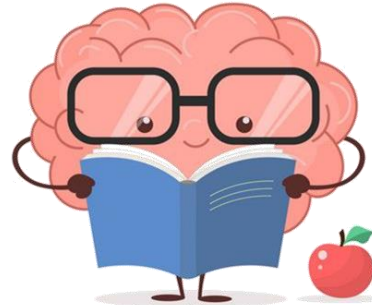
تحقق من فهمك

(2) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بالنقطة $(-2, 0)$ ، فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ .





الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية : إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن **زاويتها المرجعية** θ هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x . والجدول الآتي يبين قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ أو $0 < \theta < 2\pi$.



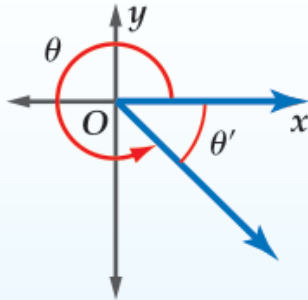
مفهوم أساسي

الزوايا المرجعية

أضف إلى

مطوبتك

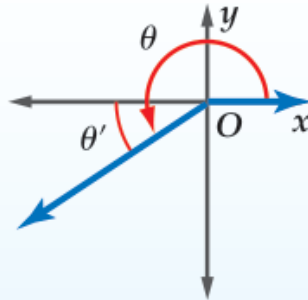
الربع الرابع



$$\theta' = 360^\circ - \theta$$

$$\theta' = 2\pi - \theta$$

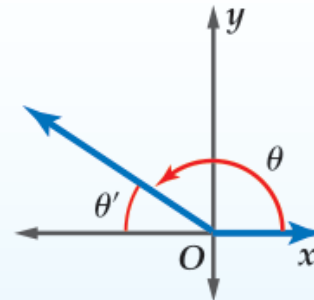
الربع الثالث



$$\theta' = \theta - 180^\circ$$

$$\theta' = \theta - \pi$$

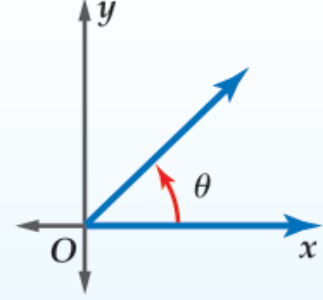
الربع الثاني



$$\theta' = 180^\circ - \theta$$

$$\theta' = \pi - \theta$$

الربع الأول



$$\theta' = \theta$$

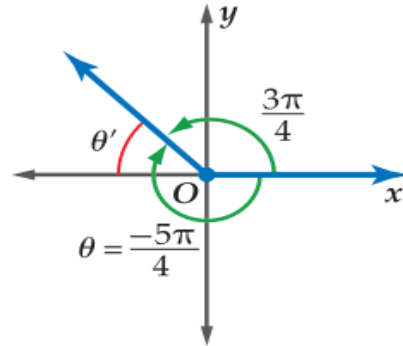
ارسم كلاً من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

(a) 210°

(b) $-\frac{5\pi}{4}$

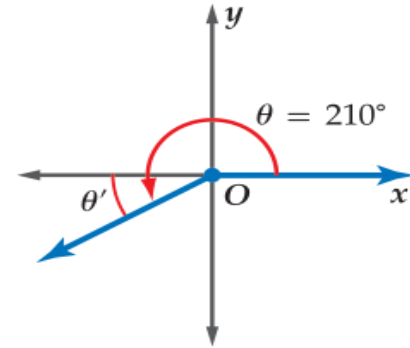
الزاوية المشتركة مع الزاوية $-\frac{5\pi}{4}$ في ضلع الانتهاء

هي: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$



ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{4}$ يقع في الربع الثاني.

$$\theta' = \pi - \theta = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



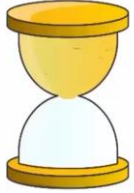
ضلع الانتهاء للزاوية 210° يقع في الربع الثالث.

$$\begin{aligned}\theta' &= \theta - 180^\circ \\ &= 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ\end{aligned}$$

الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

$$\frac{9\pi}{3} \quad (3B)$$

$$-110^\circ \quad (3A)$$



لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ ، يمكنك استعمال الزوايا المرجعية وتحدد إشارة كل دالة بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ . وللقيام بذلك استعمل الخطوات أدناه.

مفهوم أساسي

إيجاد قيم الدوال المثلثية

أضف إلى

مطوبتك

الربع الأول	الربع الثاني
$\sin \theta, \csc \theta: +$	$\sin \theta, \csc \theta: +$
$\cos \theta, \sec \theta: +$	$\cos \theta, \sec \theta: -$
$\tan \theta, \cot \theta: +$	$\tan \theta, \cot \theta: -$
الربع الثالث	الربع الرابع
$\sin \theta, \csc \theta: -$	$\sin \theta, \csc \theta: -$
$\cos \theta, \sec \theta: -$	$\cos \theta, \sec \theta: +$
$\tan \theta, \cot \theta: -$	$\tan \theta, \cot \theta: +$

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ' .

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ' .

الخطوة 3: حدد إشارة قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .

الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:



يمكنك استعمال قيم الدوال المثلثية للزوايا التي قياساتها 30° , 45° , 60° التي تعلّمتها في الدرس 1-4.

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

الظل	جيب التمام	الظل	قاطع التمام	القاطع	ظل التمام
$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 45^\circ = 1$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$
$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 45^\circ = 1$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$	$\cot 45^\circ = 1$
$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\sec 60^\circ = 2$	$\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

استعمال الزاوية المرجعية لإيجاد قيمة دالة مثلثية

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة للدالة المثلثية في كل مما يأتي:

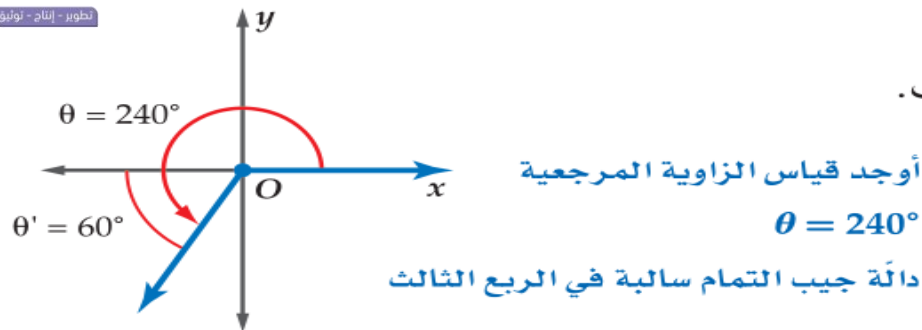
(a) $\cos 240^\circ$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية 240° في الربع الثالث.

$$\theta' = \theta - 180^\circ$$

$$= 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$



(b) $\csc \frac{5\pi}{6}$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{5\pi}{6}$ في الربع الثاني.

أوجد قياس الزاوية المرجعية

$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\theta' = \pi - \theta$$

$$= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

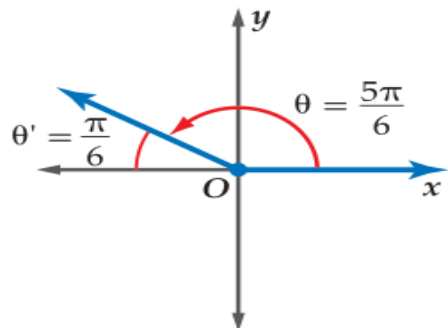
$$\csc \frac{5\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6}$$

$$= \csc 30^\circ$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

$$\csc 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ}$$

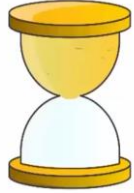
$$= 2$$



الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear

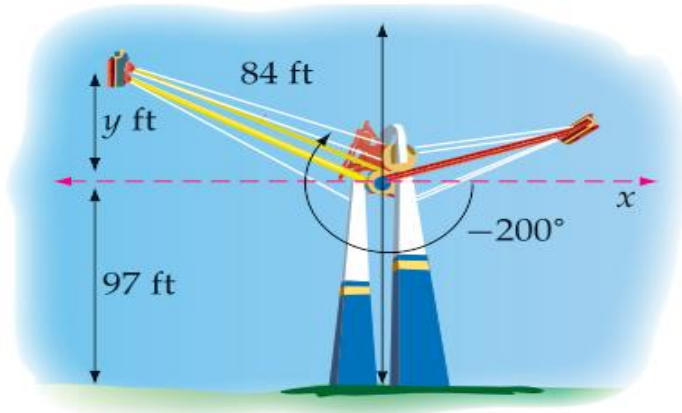


تحقق من فهمك

$$\tan \frac{5\pi}{6} \quad (4B)$$

$$\cos 135^\circ \quad (4A)$$





أراجع: إذا كان طول كل ذراع من أذرع الأرجوحة في الشكل المجاور 84 ft، وارتفاع محور الدوران 97 ft، فأوجد الارتفاع الكليّ لنهاية الذراع الأصفر اللون عندما يدور كما هو موضح في الشكل.

قياس الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية -200° :
 $-200^\circ + 360^\circ = 160^\circ$

$$\text{قياس الزاوية المرجعية} \quad 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

$$\text{دالة الجيب} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\theta = 20^\circ, r = 84 \quad \sin 20^\circ = \frac{y}{84}$$

$$\text{اضرب كل من الطرفين في 84} \quad 84 \sin 20^\circ = y$$

$$\text{استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة } y \quad 28.7 \approx y$$

بما أن y تساوي 28.7 ft تقريباً، فإن الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون هو $28.7 + 97$ ويساوي 125.7 ft تقريباً.

الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

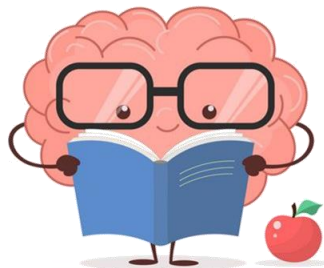
Clear



تحقق من فهمك

(5) أراجيح: أوجد الارتفاع الكليّ لنهاية الذراع الأصفر اللون في المثال 5 إذا كان طول هذه الذراع 72 ft ، وارتفاع محور الدوران 88 ft ، وقياس زاوية الدوران 195° -





الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:

تأكد

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلِّ مرّة، فأوجد قيم الدوال المثلثية الستَّ للزاوية θ :

المثالان 1, 2

(1) $(1, 2)$ (2) $(-8, -15)$ (3) $(0, -4)$

ارسم كلّاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

مثال 3

(4) 300° (5) 115° (6) $-\frac{3\pi}{4}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلِّ دالة مثلثية فيما يأتي:

مثال 4

(7) $\sin \frac{3\pi}{4}$ (8) $\tan \frac{5\pi}{3}$ (9) $\sec 120^\circ$ (10) $\sin 300^\circ$



الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمرُّ بإحدى النقاط الآتية في كلّ مرة، فأوجد قيم الدوال المثلثية الستّ للزاوية θ .

- | | | |
|-----------------|----------------|----------------|
| (14) $(3, 0)$ | (13) $(-6, 8)$ | (12) $(5, 12)$ |
| (17) $(-9, -3)$ | (16) $(4, -2)$ | (15) $(0, -7)$ |

مثال 3 ارسم كلّاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها.

- | | | |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|
| (20) -250° | (19) 285° | (18) 195° |
| (23) 400° | (22) $-\frac{\pi}{4}$ | (21) $\frac{7\pi}{4}$ |



الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

- (44) **تحذُّ:** الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي، حيث $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan \theta = -1$. هل من الممكن أن يكون قياس الزاوية θ مساوياً لـ 225° ؟ وضح إجابتك.
- (45) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت المعادلة: $3 \sin 60^\circ = \sin 180^\circ$ صحيحة أم غير صحيحة. وضح إجابتك.
- (46) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثلاً على زاوية θ بقياس سالب بحيث: $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$.
- (47) **اكتب:** وضح خطوات إيجاد قيمة دالة مثلثية لزاوية قياسها أكبر من 90° . مضمّنًا ذلك وصفاً للزاوية المرجعية في هذه الخطوات.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا



تدريب على اختبار

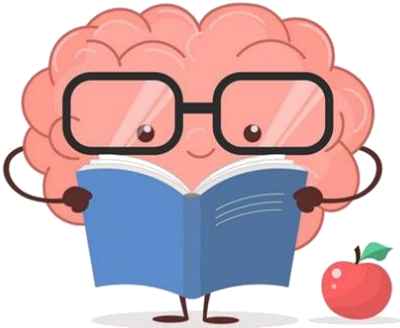
(48) إذا كان مجموع عددين 21، والفرق بينهما 3، فما ناتج ضربهما؟

(49) ما المقدار الذي يكافئ المقدار: $(-6 + i)^2$ ؟

A $-12i$ B $36 - 12i$ C $36 - i$ D $35 - 12i$



ليس هناك تحدٍّ أكبر من تحسين ذاتك
وتطويرها



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا



بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدروس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال

الموضوع: الدوال المثلثية للزوايا

اليوم:

التاريخ:



الواجب



انتهى درس اليوم

قانون الجيوب

Law of Sines



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



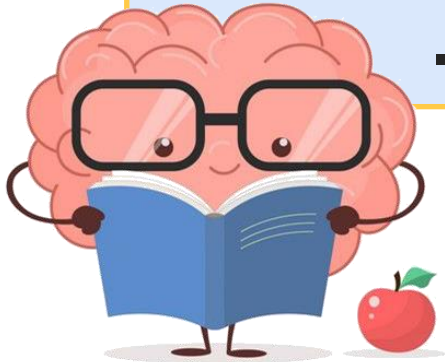
الالتزام بالوقت



حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...



الأفكار الرئيسية

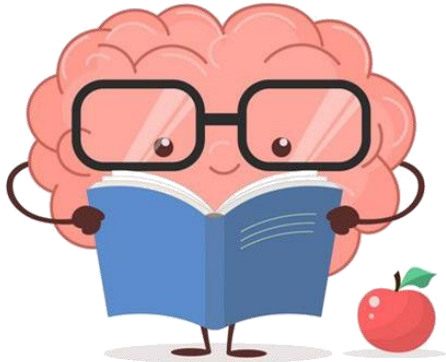


أجد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين به وقياس
الزاوية المحصورة بينهما.

1

استعمل قانون الجيوب في حل المثلثات.

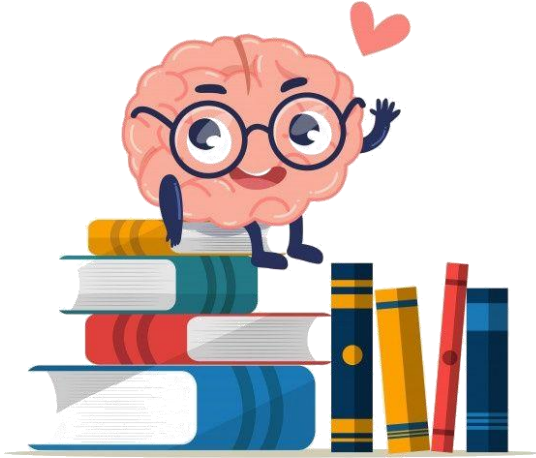
2



الموضوع: قانون الجيوب

اليوم:

التاريخ:



فيما سبق:

درست إيجاد أطوال أضلاع مثلثات
قائمة الزاوية وقياسات زواياها.

والآن:

- ❖ أجد مساحة مثلث باستعمال طولي ضلعين فيع وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- ❖ أستعمل قانون الجيوب في حل المثلثات.



الموضوع: قانون الجيوب

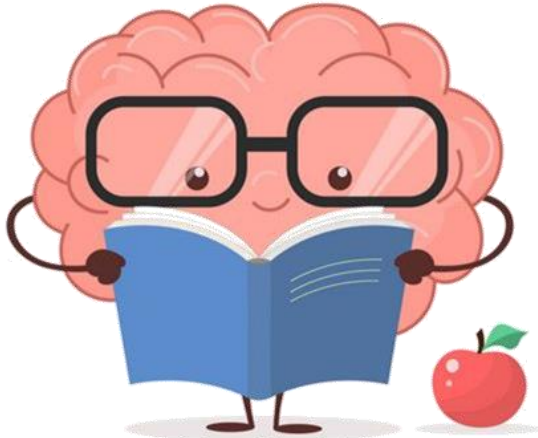
اليوم:

التاريخ:

المفردات

حل المثلث

قانون الجيوب



الموضوع: قانون الجيوب

اليوم:

التاريخ:



لماذا؟

يوجد على سطح كوكب المريخ عشرات الآلاف من الفوهات أو الحفر، وقد أطلق عليها العلماء تسميات عديدة لعلماء مشهورين وأسماء مدن ومؤلفي قصص علمية خيالية. والشكل المجاور يبيّن ثلاثاً من هذه الفوهات. يمكنك استعمال حساب المثلثات في إيجاد المسافة بين الفوهتين واهو ونوكان.

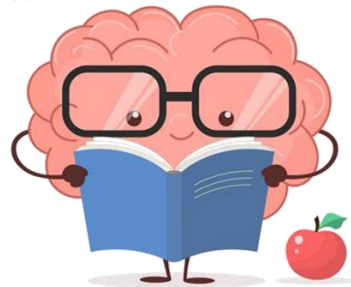


جدول التعلم

الموضوع: قانون الجيوب

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

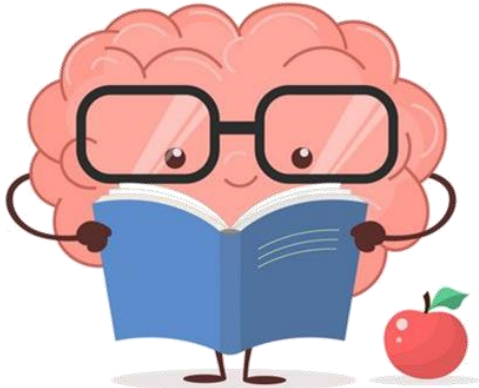
ماذا اعرف؟!

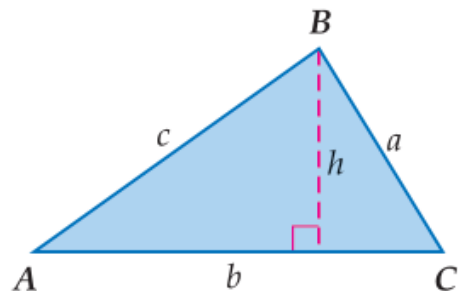
المفردات الجديدة:

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- إيجاد مساحات مثلث باستعمال طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

٢- استعمال قانون الجيوب في حل المثلثات.





إيجاد مساحة المثلث: في المثلث المجاور

$$\sin A = \frac{h}{c} \text{ أي أن } h = c \sin A$$

المساحة = $\frac{1}{2}bh$ صيغة مساحة المثلث

المساحة = $\frac{1}{2}b(c \sin A)$ عوّض عن h بـ $c \sin A$

المساحة = $\frac{1}{2}bc \sin A$ بسّط

يمكنك استعمال هذه الصيغة أو صيغتين أخريين لإيجاد مساحة مثلث، إذا كان معلوماً لديك طولاً أيّ ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما.



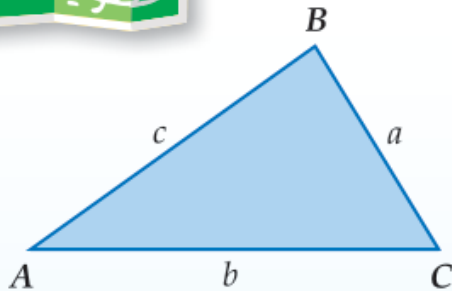
الموضوع: قانون الجيوب

اليوم:

التاريخ:

أضف إلى

مطويتك



مساحة المثلث

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: مساحة المثلث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

$$k = \frac{1}{2} ab \sin C \quad k = \frac{1}{2} ac \sin B \quad k = \frac{1}{2} bc \sin A$$

الرموز:

مثال 1

إيجاد مساحة مثلث

أوجد مساحة $\triangle ABC$ الموضح في الشكل المجاور مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

$\triangle ABC$ فيه: $a = 8, b = 9, C = 104^\circ$.

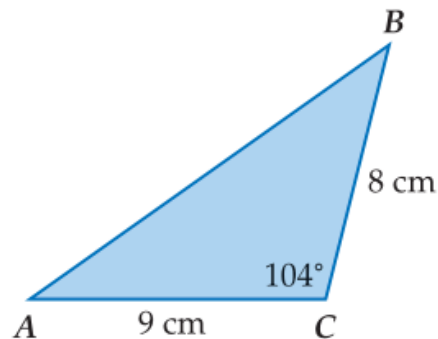
صيغة مساحة المثلث

عوَض

بسَط

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} (8)(9) \sin 104^\circ \\ &\approx 34.9 \end{aligned}$$

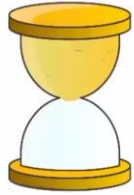
إذن المساحة تساوي 34.9 cm^2 تقريبًا.



الموضوع: قانون الجيوب

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

1) أوجد مساحة $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 31^\circ$, $b = 18\text{ m}$, $c = 22\text{ m}$ مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.



استعمال قانون الجيوب لحلّ المثلثات: يمكنك استعمال الصيغ المختلفة لإيجاد مساحة المثلث في اشتقاق **قانون الجيوب**، الذي يبيّن العلاقات بين أطوال أضلاع مثلث وجيوب الزوايا المقابلة لها.

اكتب صيغ مساحة المثلث الثلاث المتساوية

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

اضرب كل عبارة في 2

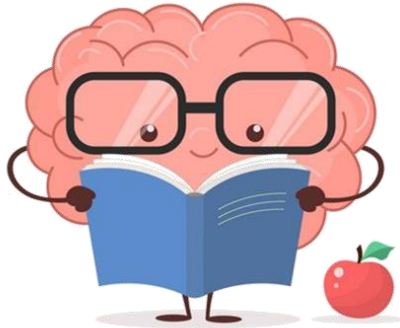
$$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$$

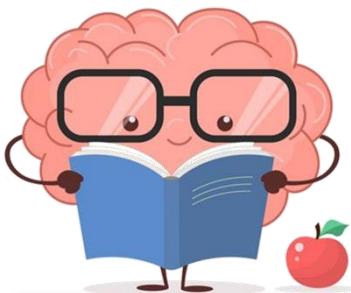
اقسم كل عبارة على abc

$$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$

بسّط

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$





الموضوع: قانون الجيوب

اليوم:

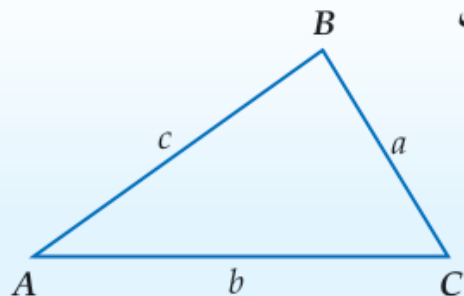
التاريخ:

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

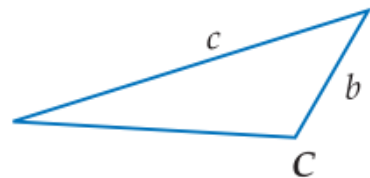
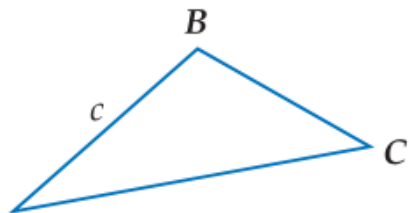
قانون الجيوب



إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

حلّ المثلث يعني استعمال القياسات المُعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلث وقياس زواياه. ويمكنك استعمال قانون الجيوب لحلّ المثلث في الحالات الآتية:



- معرفة قياسي زاويتين في المثلث وطول أي ضلع فيه
(زاوية - زاوية - ضلع (حالة AAS)، أو زاوية - ضلع - زاوية (حالة ASA))

- معرفة طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما
(ضلع - ضلع - زاوية (حالة SSA))

مثال 2

حلّ مثلث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

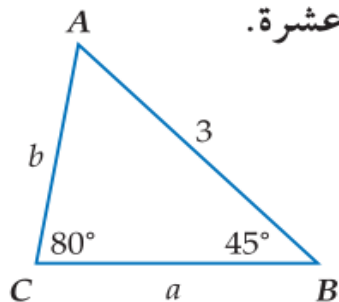
حلّ $\triangle ABC$ ، الموضّح في الشكل المجاور، مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle A = 180^\circ - (80^\circ + 45^\circ) = 55^\circ$$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد كلّ من الطولين: a, b .

اكتب معادلة لإيجاد قيمة كلّ منهما.



$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{b} = \frac{\sin 80^\circ}{3}$$

$$b = \frac{3 \sin 45^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$b \approx 2.2$$

قانون الجيوب

عوض

حلّ بالنسبة لكل متغيّر

استعمل الآلة الحاسبة

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 55^\circ}{a} = \frac{\sin 80^\circ}{3}$$

$$a = \frac{3 \sin 55^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$a \approx 2.5$$

إذن، $A = 55^\circ$ ، $a \approx 2.5$ ، $b \approx 2.2$.

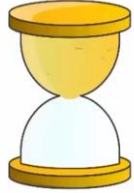


لتطوير - إنتاج - توثيق

الموضوع: قانون الجيوب

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear

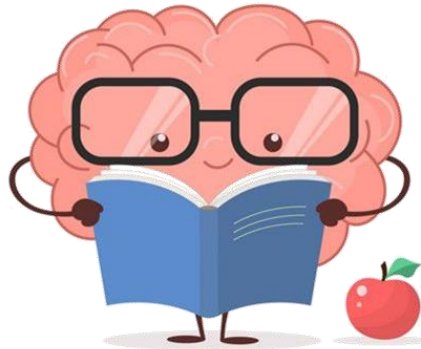


تحقق من فهمك

(2) حلّ $\triangle NPQ$ الذي فيه: $n = 5$, $Q = 65^\circ$, $P = 42^\circ$, مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة.



إذا عُلِمَ لدينا قياسا زاويتين وطول أحد الأضلاع، فإنه يوجد مثلثٌ وحيد في هذه الحالة. أما في حالة معلومية طولَي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (SSA)، فإن عدد المثلثات الممكنة في هذه الحالة هو صفر، أو واحد، أو اثنان. وبذلك فإنه ليس للمثلث حلّ، أو له حلٌّ واحد، أو له حلان.

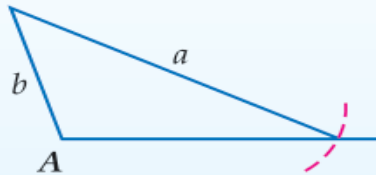


افترض مثلثًا معلومًا فيه: $m\angle A, a, b$

$\angle A$ قائمة أو منفرجة

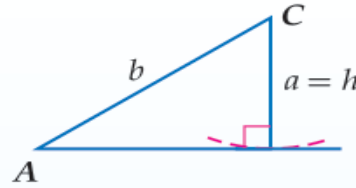


$a \leq b$
لا يوجد حل

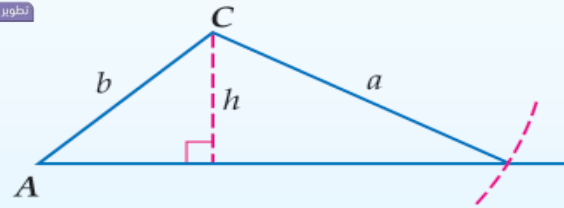


$a > b$
حل واحد

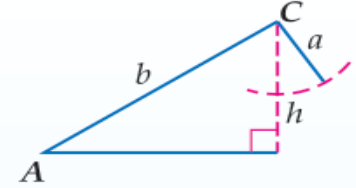
$\angle A$ حادة



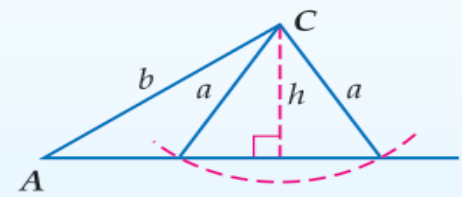
$a = h$
حل واحد



$a \geq b$
حل واحد



$a < h$
لا يوجد حل



$h < a < b$
حلان

مثال 3

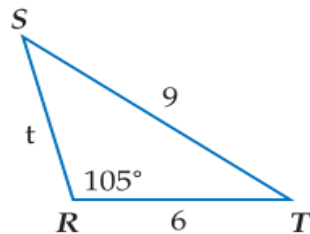
حلّ مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدّد إن كان لكلّ مثلث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقرّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(a) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 105^\circ$, $r = 9$, $s = 6$.

بما أن $\angle R$ منفرجة، و $9 > 6$ ، نستنتج أن للمثلث حلّاً واحداً.

الخطوة 1: ابدأ برسم المثلث، ثم استعمل قانون الجيوب لإيجاد $m\angle S$.



قانون الجيوب

$$\frac{\sin S}{6} = \frac{\sin 105^\circ}{9}$$

حلّ بالنسبة لـ $\sin S$

$$\sin S = \frac{6 \sin 105^\circ}{9}$$

استعمل الآلة الحاسبة

$$\sin S \approx 0.6440$$

أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.6440$ ، والزاوية S حادة

$$S \approx 40^\circ$$

الموضوع: قانون الجيوب

اليوم:

التاريخ:

مثال 3

حلّ مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدّد إن كان لكلّ مثلث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(a) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 105^\circ$, $r = 9$, $s = 6$.

الخطوة 2: أوجد $m\angle T$.

$$m\angle T \approx 180^\circ - (105^\circ + 40^\circ) \approx 35^\circ$$

الخطوة 3: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قيمة t .

$$\frac{\sin 35^\circ}{t} \approx \frac{\sin 105^\circ}{9}$$

$$t \approx \frac{9 \sin 35^\circ}{\sin 105^\circ}$$

$$t \approx 5.3$$

إذن: $S \approx 40^\circ$, $T \approx 35^\circ$, $t \approx 5.3$.



قانون الجيوب

حلّ بالنسبة لـ t

استعمل الآلة الحاسبة

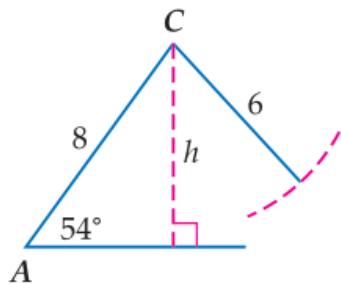
مثال 3

حلّ مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدّد إن كان لكلّ مثلث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(b) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 54^\circ$, $a = 6$, $b = 8$.

بما أن $\angle A$ حادة، و $6 < 8$ ، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a .



$$b = 8, A = 54^\circ$$

استعمل الآلة الحاسبة

$$h = b \sin A = 8 \sin 54^\circ$$

$$\approx 6.5$$

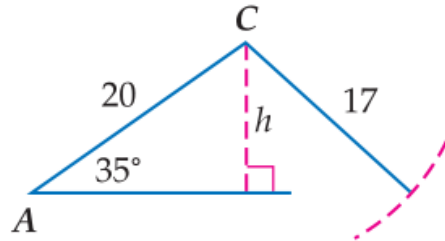
بما أن $6 < 6.5$ أو $a < h$ فلا يوجد للمثلث حلّ.

مثال 3

حلّ مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما

حدّد إن كان لكلّ مثلث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

(c) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 35^\circ$, $a = 17$, $b = 20$.



بما أن $\angle A$ حادة، و $17 < 20$ ، فأوجد قيمة h وقارنها بقيمة a .

$$b = 20, A = 35^\circ$$

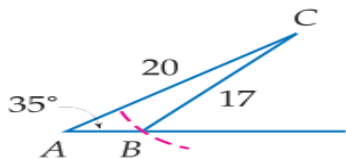
استعمل الآلة الحاسبة

$$h = b \sin A = 20 \sin 35^\circ$$

$$\approx 11.5$$

بما أن $11.5 < 17 < 20$ أو $h < a < b$. فإن للمثلث حلّين، وبالتالي هناك مثلثان يطلب حلّهما.

الحالة 2: $\angle B$ منفرجة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

قيمة دالة الجيب موجبة في الربع الثاني، لذا أوجد زاوية منفرجة B بحيث $\sin B \approx 0.6748$.

$$m\angle B \approx 180^\circ - 42^\circ \approx 138^\circ$$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$$m\angle C \approx 180^\circ - (35^\circ + 138^\circ) \approx 7^\circ$$

الخطوة 3: أوجد قيمة c .

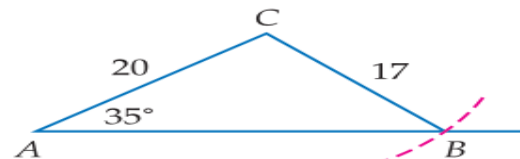
قانون الجيوب $\frac{\sin 7^\circ}{c} \approx \frac{\sin 35^\circ}{17}$

حل بالنسبة لـ c $c \approx \frac{17 \sin 7^\circ}{\sin 35^\circ}$

استعمل الآلة الحاسبة

$$c \approx 3.6$$

الحالة 1: $\angle B$ حادة.



الخطوة 1: أوجد $m\angle B$.

قانون الجيوب $\frac{\sin B}{20} = \frac{\sin 35^\circ}{17}$

حل بالنسبة لـ $\sin B$ $\sin B = \frac{20 \sin 35^\circ}{17}$

استعمل الآلة الحاسبة $\sin B \approx 0.6748$

أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.6748$ $B \approx 42^\circ$

الخطوة 2: أوجد $m\angle C$.

$$m\angle C \approx 180^\circ - (35^\circ + 42^\circ) \approx 103^\circ$$

الخطوة 3: أوجد قيمة c .

قانون الجيوب $\frac{\sin 103^\circ}{c} \approx \frac{\sin 35^\circ}{17}$

حل بالنسبة لـ c $c \approx \frac{17 \sin 103^\circ}{\sin 35^\circ}$

استعمل الآلة الحاسبة

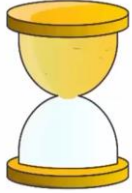
$$c \approx 28.9$$

لذا فإن أحد الحلين هو: $c \approx 28.9$, $C \approx 103^\circ$, $B \approx 42^\circ$ ، والحل الثاني هو: $c \approx 3.6$, $C \approx 7^\circ$, $B \approx 138^\circ$.

الموضوع: قانون الجيوب

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

حدّد إن كان لكل مثلث مما يأتي حلّ واحد، أم حلّان، أم ليس له حلّ. أوجد الحلول، مقرّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

(3A) $\triangle RST$ الذي فيه: $R = 95^\circ, r = 10, s = 12$

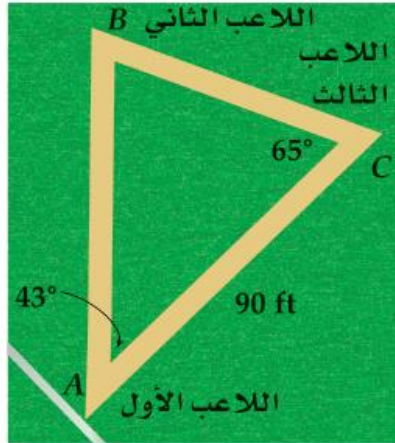
(3B) $\triangle MNP$ الذي فيه: $N = 32^\circ, n = 7, p = 4$

(3C) $\triangle ABC$ الذي فيه: $A = 47^\circ, a = 15, b = 18$



مثال 4 من واقع الحياة

استعمال قانون الجيوب لحل مسألة



كرة قدم: يُمثل الشكل المجاور إحدى التمريرات الحاسمة بين ثلاثة لاعبين من فريق كرة قدم خلال إحدى المباريات. أوجد المسافة بين اللاعب الثاني واللاعب الثالث.

مجموع زوايا المثلث 180°

قانون الجيوب

استعمل الضرب التبادلي

حل بالنسبة لـ x

استعمل الآلة الحاسبة

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 72^\circ$$

$$\frac{\sin 72^\circ}{90} = \frac{\sin 43^\circ}{x}$$

$$x \sin 72^\circ = 90 \sin 43^\circ$$

$$x = \frac{90 \sin 43^\circ}{\sin 72^\circ}$$

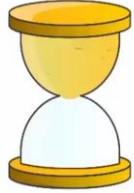
$$x \approx 64.5$$

إذن المسافة بين اللاعبين تساوي 64.5 ft تقريباً.

الموضوع: قانون الجيوب

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

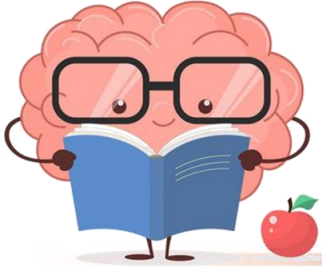
Clear



تحقق من فهمك

(4) كرة قدم: أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني في الشكل أعلاه.





الموضوع: قانون الجيوب

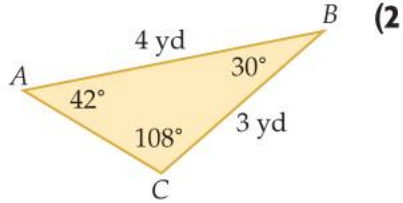
اليوم:

التاريخ:

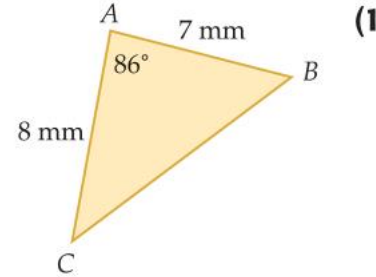
تأكد

أوجد مساحة $\triangle ABC$ في كلِّ ممَّا يأتي، مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

مثال 1



$$B = 103^\circ, a = 20 \text{ in}, c = 18 \text{ in} \quad (4)$$

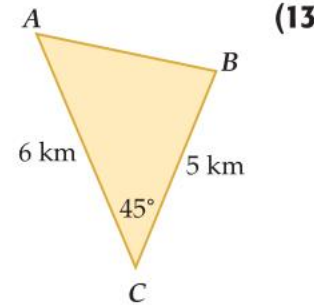
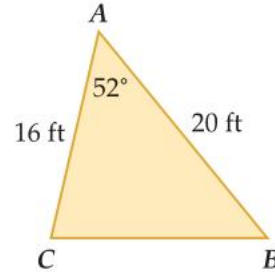
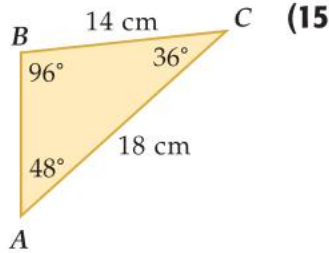


$$A = 40^\circ, b = 11 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm} \quad (3)$$

تدرب وحل المسائل

أوجد مساحة كل من المثلثات الموضحة في الأشكال الآتية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة:

مثال 1



$A = 138^\circ, b = 10 \text{ in}, c = 20 \text{ in}$ (17)

$C = 25^\circ, a = 4 \text{ ft}, b = 7 \text{ ft}$ (16)

$C = 116^\circ, a = 2.7 \text{ cm}, b = 4.6 \text{ cm}$ (19)

$B = 92^\circ, a = 14.5 \text{ m}, c = 9 \text{ m}$ (18)





مسائل مهارات التفكير العليا

(38) **اكتشف الخطأ:** $\triangle RST$ فيه: $R = 56^\circ, r = 24, t = 12$. فإذا حاول كلٌّ من رضوان وعلي إيجاد $m\angle T$, فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.



علي

بما أن $r > t$ فلا يوجد للمثلث حل.

رضوان

$$\frac{\sin T}{12} = \frac{\sin 56^\circ}{24}$$

$$\sin T \approx 0.4145$$

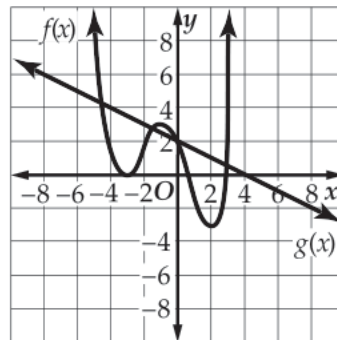
$$T \approx 24.5^\circ$$

(39) **تبرير:** أوجد أطوال أضلاع مثلثين مختلفين ABC ، بحيث يكون في كلٍّ منها $A = 55^\circ, C = 20^\circ$.

(40) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت $d = 38, R = 62^\circ$ ، فأوجد قيمة r ، بحيث لا يوجد للمثلث DRF حلٌّ عندها. ووضح إجابتك.

تدريب على اختبار

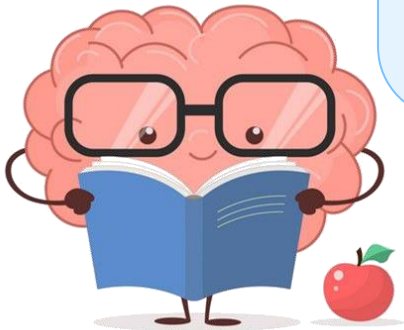
(41) إجابة قصيرة: في الشكل المجاور التمثيل البياني لكلٍّ من $f(x)$, $g(x)$. ما قيمة $f(g(4))$ ؟



(42) إذا كان أحد أصفار الدالة $f(x) = x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ هو 4. فأَيُّ مما يأتي يُمثِّل تحليلًا للعلاقة: $x^3 - 7x^2 - 6x + 72$ ؟

- A $(x - 6)(x + 3)(x + 4)$
- B $(x - 6)(x + 3)(x - 4)$
- C $(x + 6)(x + 3)(x - 4)$
- D $(x + 12)(x - 1)(x - 4)$

إذا كنت تستطيع تخيل صورة ما فذلك
يعني أنه يمكنك أن تجعلها واقعاً،
وإذا كنت تستطيع أن تحلم فهذا يعني
أنك تستطيع تحقيق حلمك.



بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال

الواجب

انتهى درس اليوم

قانون الجيوب التمام

Law of Cosines



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



الالتزام بالوقت

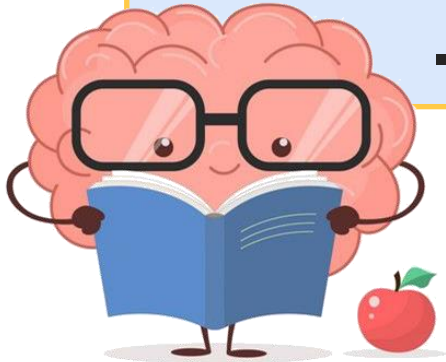


حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...

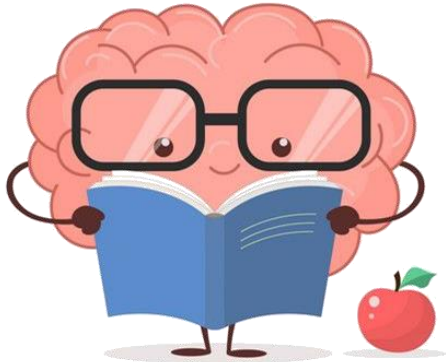


الأفكار الرئيسية



أستعمل قانون جيوب التمام لحل مثلثات.

1



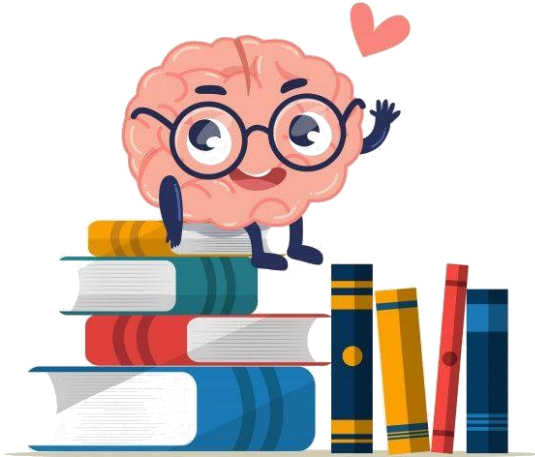
اختر طرقاً مناسبة لحل مثلثات.

2

الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

التاريخ:



فيما سبق:

درست حل مثلثات باستعمال قانون الجيوب.

والآن:

- ❖ أستعمل قانون جيوب التمام لحل مثلثات.
- ❖ اختر طرقاً مناسبة لحل مثلثات.

الموضوع: قانون الجيوب التمام

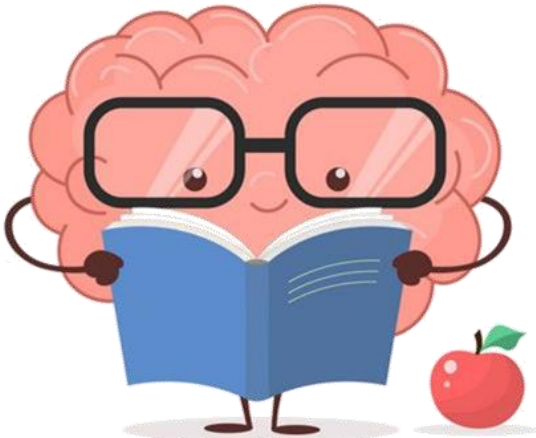
اليوم:

التاريخ:



المفردات

قانون الجيوب التمام



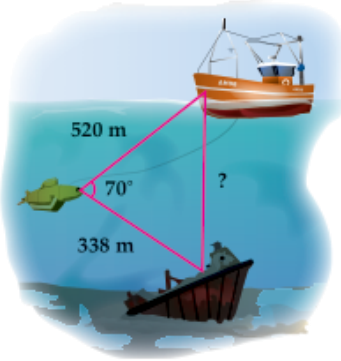
الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

التاريخ:



لماذا؟



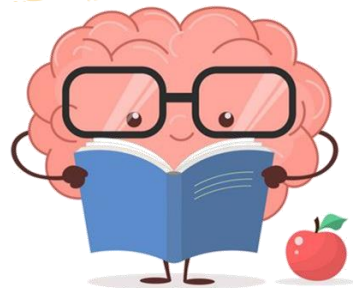
الغَوَّاصات التي تُنزلها السفن إلى المحيط تُستعمل لإيصال الأشخاص إلى أعماق لا يمكنهم الوصول إليها بوسائل أخرى. الغواصة في الشكل المجاور على بُعد 520 m من السفينة، وترسل ضوءاً إلى حطام سفينة أخرى على بُعد 338 m عنها، يمكن استعمال حساب المثلثات لإيجاد المسافة بين السفينة والحطام.

جدول التعلم

الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

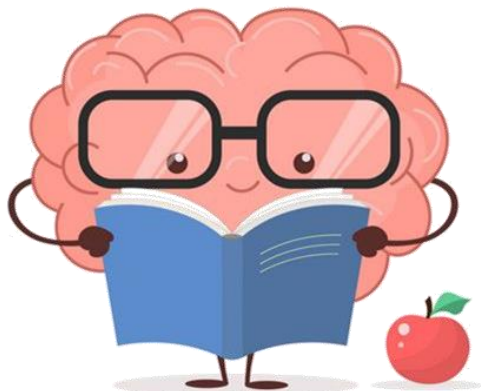
ماذا اعرف؟!

المفردات الجديدة:

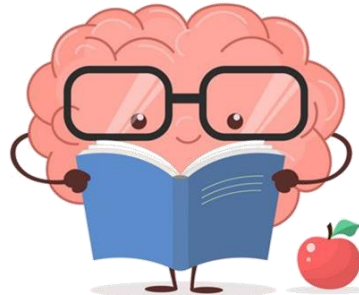
الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- أستعمل قانون جيوب التمام لحل مثلثات.

٢- اختر طرقة مناسبة لحل مثلثات.



- استعمال قانون جيوب التمام لحلّ المثلثات:** لا يمكنك استعمال قانون الجيوب لحلّ مثلث مثل المثلث المرسوم في الشكل أعلاه. يمكنك استعمال **قانون جيوب التمام** لحلّ المثلث في الحالتين الآتيتين:
- معرّفة طولي ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما (ضلع - زاوية - ضلع (حالة SAS))
 - معرّفة أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث (ضلع - ضلع - ضلع (حالة SSS))



الموضوع: قانون الجيوب التمام

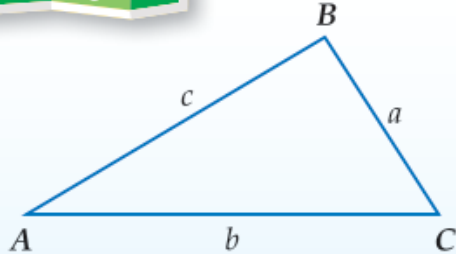
اليوم:

التاريخ:



أضف إلى

مطوبتك



قانون جيوب التمام

مفهوم أساسي

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

الموضوع: قانون الجيوب التمام

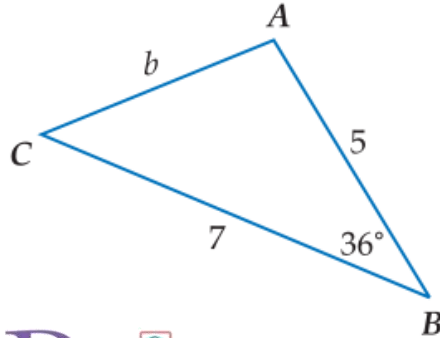
اليوم:

التاريخ:

مثال 1

حلّ مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حلّ $\triangle ABC$ الموضّح في الشكل المجاور، مقرّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.



الخطوة 1: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث.

$$\text{قانون جيوب التمام} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$a = 7, c = 5, B = 36^\circ \quad b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5) \cos 36^\circ$$

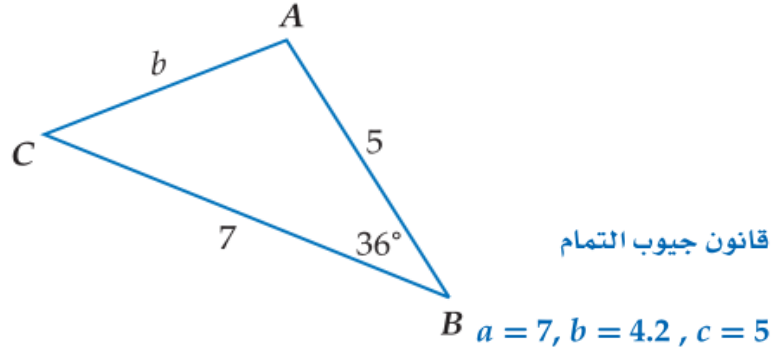
$$\text{استعمل الآلة الحاسبة للتبسيط} \quad b^2 \approx 17.4$$

$$\text{خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين} \quad b \approx 4.2$$

مثال 1

حلّ مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حلّ $\triangle ABC$ الموضّح في الشكل المجاور، مقرّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.



الخطوة 2: استعمل قانون جيب التمام لإيجاد قياس الزاوية A .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$7^2 = (4.2)^2 + 5^2 - 2(4.2)(5) \cos A$$

اطرح $(4.2)^2$ و 5^2 من كلا الطرفين

$$7^2 - (4.2)^2 - 5^2 = -2(4.2)(5) \cos A$$

اقسم كلا الطرفين على $-2(4.2)(5)$

$$\frac{7^2 - (4.2)^2 - 5^2}{-2(4.2)(5)} = \cos A$$

استعمل الآلة الحاسبة

$$-0.1514 \approx \cos A$$

أوجد قيمة $\cos^{-1}(-0.1514)$

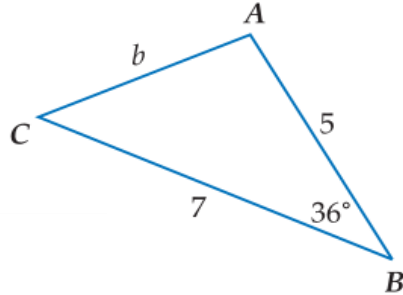
$$99^\circ \approx A$$



مثال 1

حلّ مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حلّ $\triangle ABC$ الموضّح في الشكل المجاور، مقرّبًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.



الخطوة 3: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle C \approx 180^\circ - (36^\circ + 99^\circ) \approx 45^\circ$$

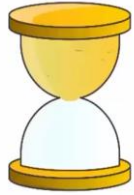
$$\text{إذن: } b \approx 4.2, A \approx 99^\circ, C \approx 45^\circ$$



الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

1) حُلّ $\triangle FGH$ الموضَّح في الشكل المجاور الذي فيه: $G = 82^\circ$, $f = 6$, $h = 4$ مقربًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة.



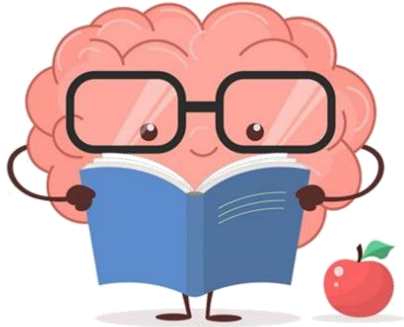


الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

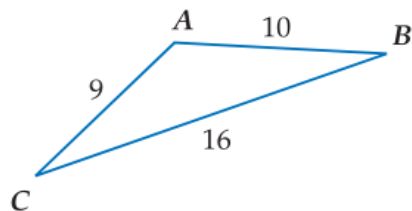
التاريخ:

يمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحلّ المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة، وتكون الخطوة الأولى للحلّ هي إيجاد قياس الزاوية الكبرى في المثلث حتى نضمن أن الزاويتين الأخريين حادثان عند استعمال قانون الجيوب بعد ذلك.



مثال 2

حل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة



حلّ $\triangle ABC$ الموضَّح في الشكل المجاور، مقرَّبًا قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 1: استعمل قانون جيبوس التمام لإيجاد قياس الزاوية الكبرى في $\triangle ABC$ وهي $\angle A$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$16^2 = 9^2 + 10^2 - 2(9)(10) \cos A$$

$$16^2 - 9^2 - 10^2 = -2(9)(10) \cos A$$

$$\frac{16^2 - 9^2 - 10^2}{-2(9)(10)} = \cos A$$

$$-0.4167 \approx \cos A$$

$$115^\circ \approx A$$

قانون جيبوس التمام

$$a = 16, b = 9, c = 10$$

اطرح 9^2 و 10^2 من كلا الطرفين

اقسم كلاً من الطرفين على $-2(9)(10)$

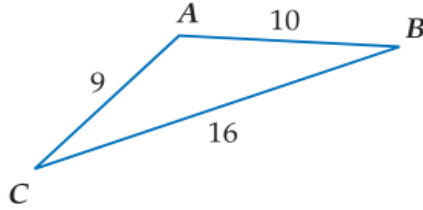
استعمل الآلة الحاسبة

أوجد قيمة $\cos^{-1} -0.4167$



مثال 2

حل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة



حلّ $\triangle ABC$ الموضّح في الشكل المجاور، مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قياس $\angle B$.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin B}{9} \approx \frac{\sin 115^\circ}{16}$$

اضرب كل من الطرفين في 9

$$\sin B \approx \frac{9 \sin 115^\circ}{16}$$

استعمل الآلة الحاسبة

$$\sin B \approx 0.5098$$

أوجد قيمة $\sin^{-1} 0.5098$

$$B \approx 31^\circ$$

الخطوة 3: أوجد قياس $\angle C$.

$$m\angle C \approx 180^\circ - (115^\circ + 31^\circ) \approx 34^\circ$$

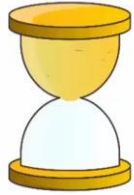
إذن: $A \approx 115^\circ, B \approx 31^\circ, C \approx 34^\circ$.



الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(2) حلّ $\triangle ABC$ الذي فيه: $a = 5, b = 11, c = 8$ مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.





الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

التاريخ:

اختيار الطريقة المناسبة لحلّ المثلثات: يمكنك استعمال قانون الجيوب وقانون جيوب التمام لحلّ مثلثات غير قائمة الزاوية، حيث تحتاج على الأقلّ إلى معرفة طول أحد الأضلاع وقياسي أيّ عنصرين آخرين من عناصر المثلث. وإذا كان للمثلث حلّ، فيجب أن تُقرّر ما إذا كنت ستبدأ باستعمال قانون الجيوب أو قانون جيوب التمام لحلّه.



أضف إلى

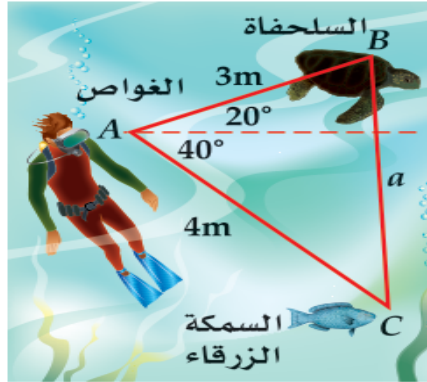
مطوبتك

حلُّ المثلثات غير القائمة الزاوية

ملخص المفهوم

إذا أُعطيت	فابدأ الحلَّ باستعمال
قياسا زاويتين وطول أي ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

غوص: ينظر غواص إلى أعلى بزاوية قياسها 20° ليرى سلحفاة تبعد عنه 3 m، وينظر إلى أسفل بزاوية قياسها 40° فيرى سمكة زرقاء تبعد عنه 4 m، ما المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء؟



افهم: تعرف قياسَي الزاويتين المتكوّنتين من نظر الغواص إلى أعلى وإلى أسفل، كذلك تعرف المسافة بين الغواص وكل من السلحفاة والسمكة الزرقاء.

خطط: استعمل هذه المعلومات لرسم شكل تقريبي يُمثل المسألة. بما أن طولي ضلعين في المثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما معلوم لديك، فيمكنك استعمال قانون جيوب التمام لحل المسألة.

قانون جيوب التمام

حل: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b = 4, c = 3, A = 60^\circ$

$a^2 = 4^2 + 3^2 - 2(4)(3) \cos 60^\circ$

استعمل الآلة الحاسبة

$a^2 = 13$

أوجد قيمة a الموجبة

$a \approx 3.6$



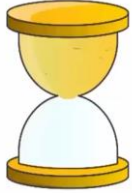
إذن المسافة بين السلحفاة والسمكة الزرقاء تساوي 3.6 m تقريباً.

تحقق: باستعمال قانون الجيوب، يمكنك التوصل إلى أن: $B \approx 74^\circ, C \approx 46^\circ$. بما أن $C < A < B, c < a < b$ فإن الحل منطقي.

الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

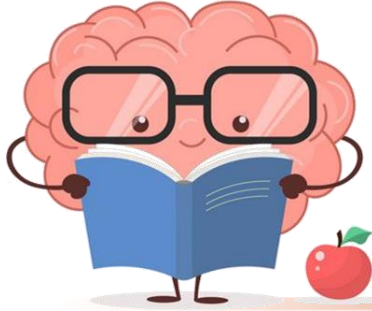
(3) **ماراثون:** ركض سعيد مسافة 6 km في اتجاه معين. ثم انعطف بزاوية قياسها 79° ، وركض مسافة 7 km . ما المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها؟



الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

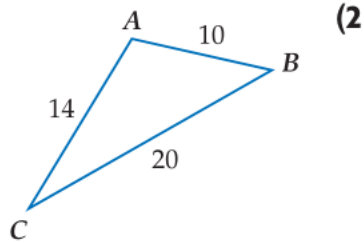
التاريخ:



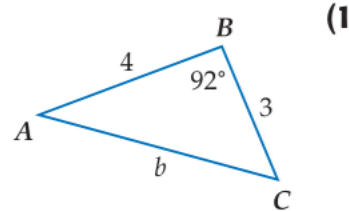
تأكد

حلّ كلّ مثلث ممّا يأتي مقرّباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

المثالان 1, 2



$$B = 110^\circ, a = 6, c = 3 \quad (4)$$

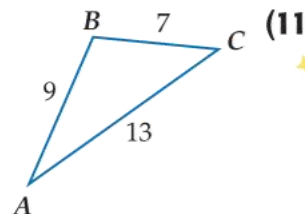
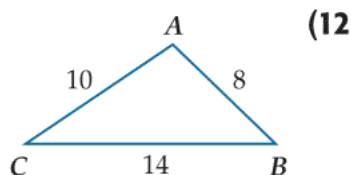
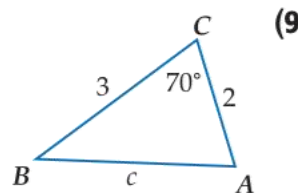
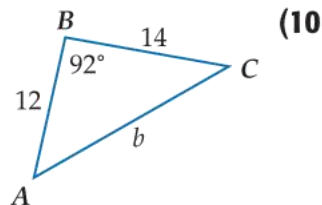


$$a = 5, b = 8, c = 12 \quad (3)$$

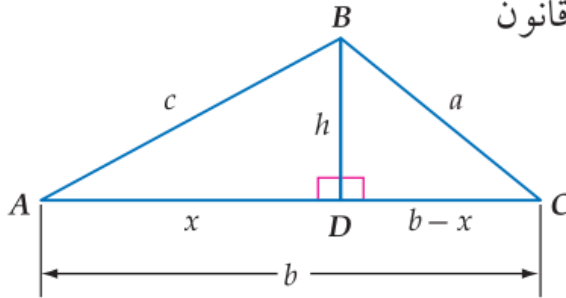
تدرب وحل المسائل

حل كل مثلث مما يأتي مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة:

المثالان 1، 2



مسائل مهارات التفكير العليا



(31) **برهان:** استعمل الشكل المجاور ونظرية فيثاغورس، لاشتقاق قانون

جيوب التمام، مستعملًا الإرشادات الآتية:

أولاً: طبق نظرية فيثاغورس على $\triangle DBC$.

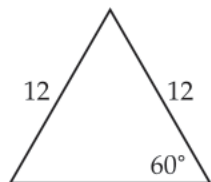
ثانياً: استعمل المعلومات التالية في $\triangle ADB$.

$$c^2 = x^2 + h^2 \quad .$$

$$\cos A = \frac{x}{c} \quad .$$

تدريب على اختبار

(34) إجابة قصيرة: حُلّ المعادلة: $\frac{1}{x-1} + \frac{5}{8} = \frac{23}{6x}$

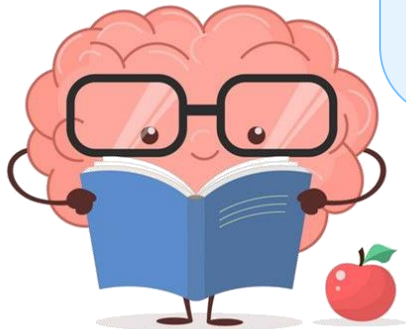


(35) هندسة: محيط الشكل المجاور يساوي:

- | | |
|------|------|
| 36 C | 24 A |
| 48 D | 30 B |



عليك اتّباع **أربعة** خطوات **لتحقق** إنجازاً
عظيماً، وهي: اختر مهنة **تُحبها**،
امنحها **أفضل** ما لديك، اغتنم **الفرص**
التي **تلوح** لك، وكن **أحد** أفراد الفريق





الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

التاريخ:

بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال

الموضوع: قانون الجيوب التمام

اليوم:

التاريخ:



الواجب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: قانون الجيوب التمام



انتهى درس اليوم

الدوال الدائرية

Circular Functions



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



الالتزام بالوقت

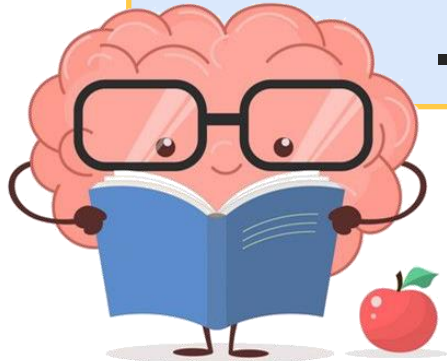


حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...



الأفكار الرئيسية

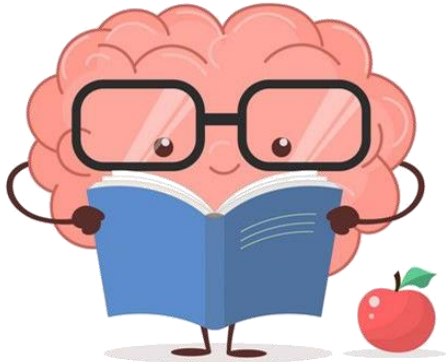


1

أجد قيم دوال مثلثية بالاعتماد على دائرة الوحدة.

2

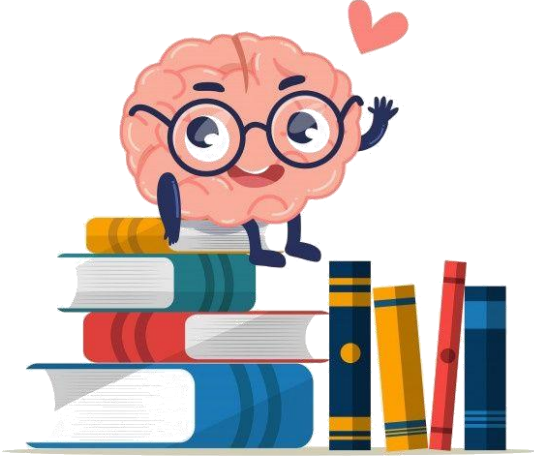
استعمل خواص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية.



الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:



فيما سبق:

درست إيجاد قيم دوال مثلثية
باستعمال زوايا مرجعية.

والآن:

- ❖ أجد قيم دوال مثلثية بالاعتماد على دائرة الوحدة.
- ❖ أستعمل خواص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية.



المفردات

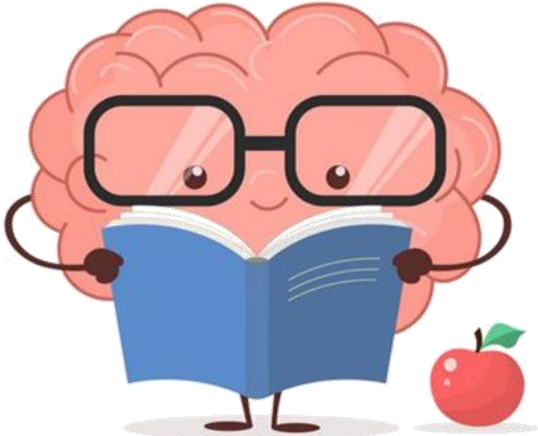
الدالة الدائرية

دائرة الوحدة

الدورة

الدالة الدورية

طول الدورة



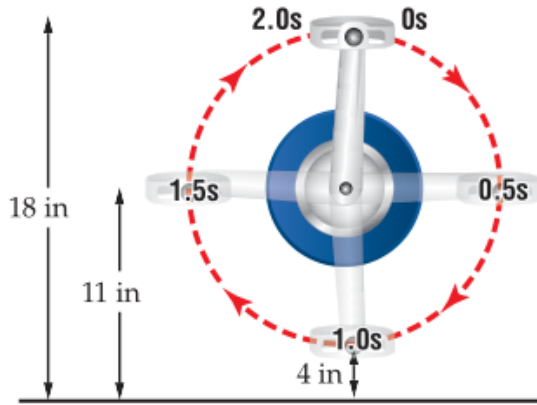
الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:



لماذا؟



عندما يقود شخص دراجة هوائية، فإن ارتفاع البدال في أثناء دورانه يمثل دالة بالنسبة إلى الزمن، كما هو مبين في الشكل المجاور.

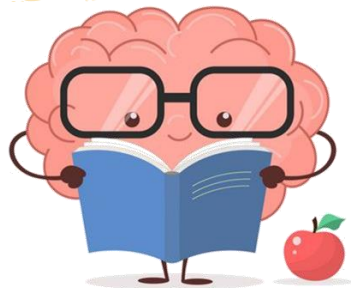
لاحظ أن البدال في الشكل المجاور يدور دورة كاملة كل ثانيتين.

جدول التعلم

الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

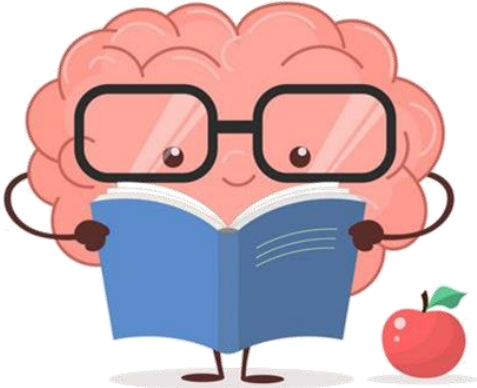
ماذا اعرف؟!

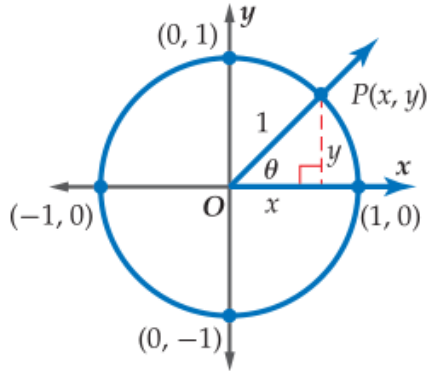
المفردات الجديدة:

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- إيجاد قيم دوال مثلثية باستعمال دائرة الوحدة.

٢- استعمال خصائص الدوال الدورية في إيجاد قيم دوال مثلثية.





الدوال الدائرية: دائرة الوحدة هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة. يمكنك استعمال النقطة P الواقعة على دائرة الوحدة لتعريف دالتَي الجيب وجيب التمام.

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

وبذلك فإن قيمة $\cos \theta$ هي الإحداثي x ، وقيمة $\sin \theta$ هي الإحداثي y لنقطة تقاطع ضلع الانتهاء للزاوية θ مع دائرة الوحدة.

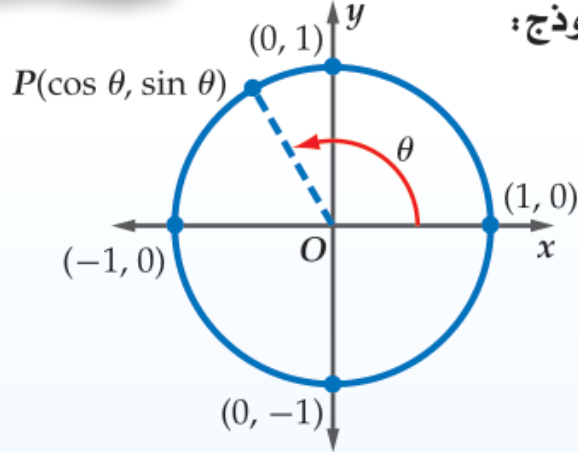
أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

دوال في دائرة الوحدة

النموذج:



التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ

المرسومة في الوضع القياسي

دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$,

فإن: $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$

$$P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta)$$

الرموز:

إذا كانت: $\theta = 120^\circ$ فإن:

مثال:

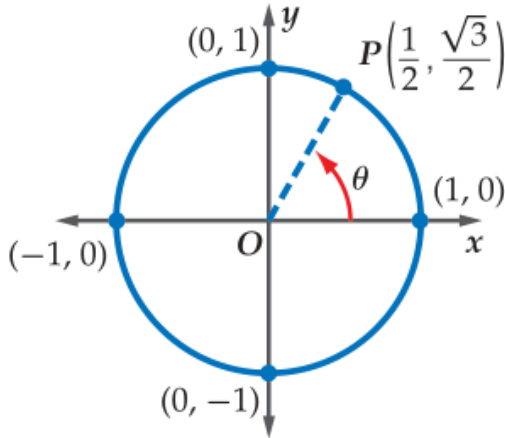
$$P(x, y) = P(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$$

كلٌّ من $\sin \theta = y$, $\cos \theta = x$ دالّة بالنسبة إلى θ . وتُسمّى كلٌّ منهما **دالّة دائرية**؛ لأنّ تعريف كلٍّ منهما اعتمد على دائرة الوحدة.



مثال 1

إيجاد قيمة الجيب وجيب التمام لزاوية بمعلومية نقطة على دائرة الوحدة



إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ، فأوجد كلاً من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = P(\cos \theta, \sin \theta)$$

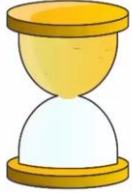
$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

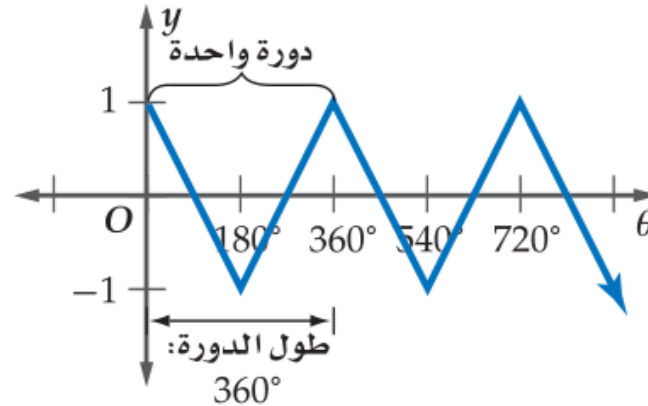
1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ ، فأوجد كلاً من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.



الدوال الدورية: في الدوال الدورية يكون شكل الدالة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. ويُسمى النمط الواحد الكامل منها **دورة**، وتُسمى المسافة الأفقية في الدورة **طول الدورة** كما هو مبين في التمثيل البياني للدالة أدناه.

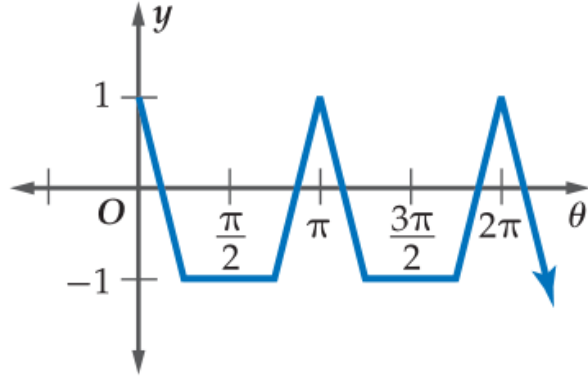
θ	y
0°	1
180°	-1
360°	1
540°	-1
720°	1

تتكرر الدورة كل 360°



مثال 2

إيجاد طول الدورة



أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً في الشكل المجاور.

يبدأ تكرار النمط عند $\pi, 2\pi, \dots$

ولذلك طول الدورة هو π .



الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

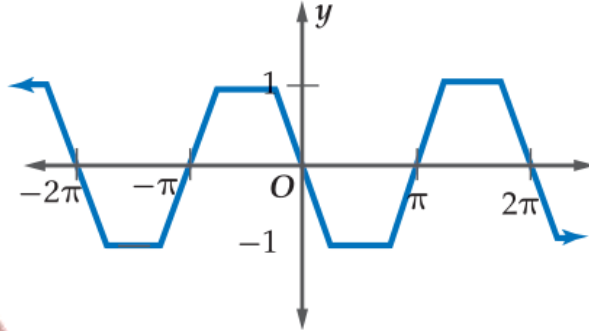
Start

Clear



تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك



(2) أوجد طول الدورة للدالة الممثلة بيانياً في الشكل المجاور.



درجات هوائية: عُدْ إلى فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس. إذا تغيّر ارتفاع البدّال في الدّراجة الهوائية بصورة دورية كدالة في الزمن، فأجب عما يأتي:

الارتفاع (in)	الزمن (s)
18	0
11	0.5
4	1.0
11	1.5
18	2.0
11	2.5
4	3.0

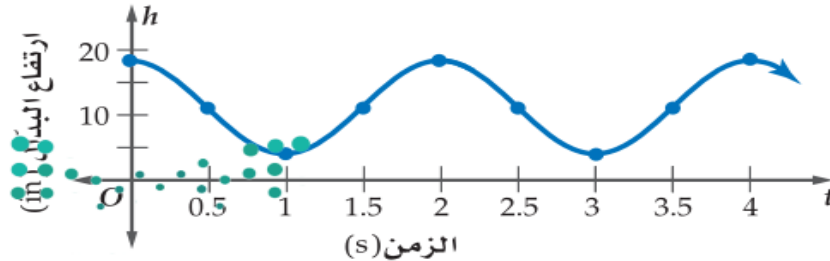


(a) أنشئ جدولاً يوضّح ارتفاع البدّال عند الثواني الآتية:
0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3

عند 0s يكون الارتفاع 18 in. وعند 0.5s، يكون الارتفاع 11 in،
وعند 1s يكون الارتفاع 4 in، وهكذا.

(b) أوجد طول دورة الدالة.

طول الدورة هو الزمن اللازم لإكمال دورة كاملة، لذلك طول الدورة 2 ثانية.



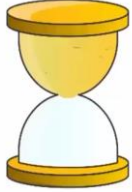
(c) مثل الدالة بيانياً. افترض أن المحور الأفقي يُمثّل الزمن t ، والمحور الرأسي يُمثّل الارتفاع h .

أقصى ارتفاع يصله البدّال 18 in. وأقل ارتفاع 4 in، ولأن طول الدورة ثانيتان، لذا فإن النمط يتكرّر كلّ ثانيتين.

الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

3) **درجات هوائية** افترض أن البدال للدرّاجة الهوائية المحدّدة في فقرة "لماذا؟" الواردة في بداية الدرس يدور بمعدّل دورة واحدة لكل ثانية.

A) أنشئ جدولاً يوضّح ارتفاع البدال عند الثواني الآتية: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0

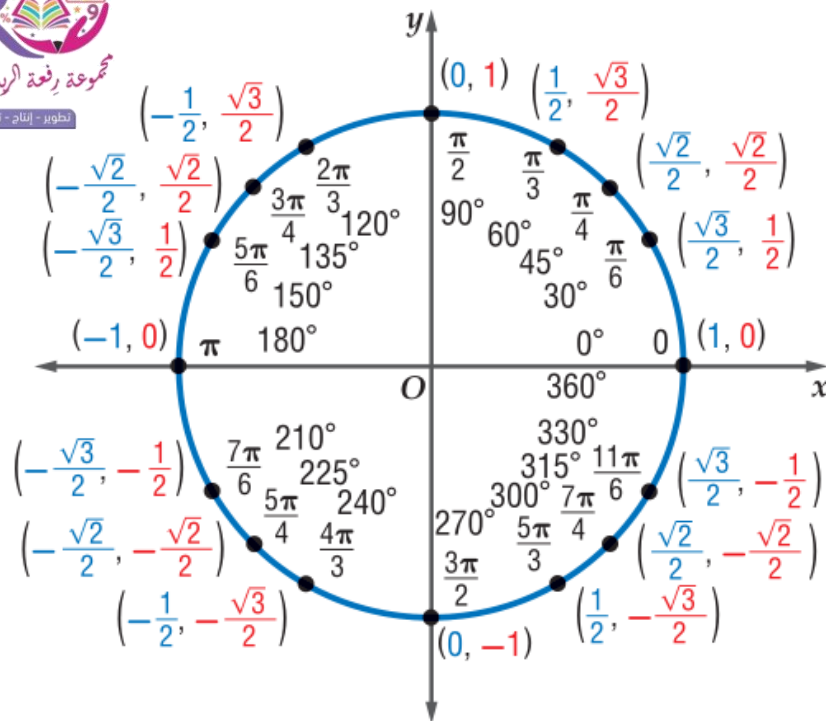
B) أوجد طول دورة الدالّة ومثّلها بيانياً.





مجموعة رقة الرياضيات

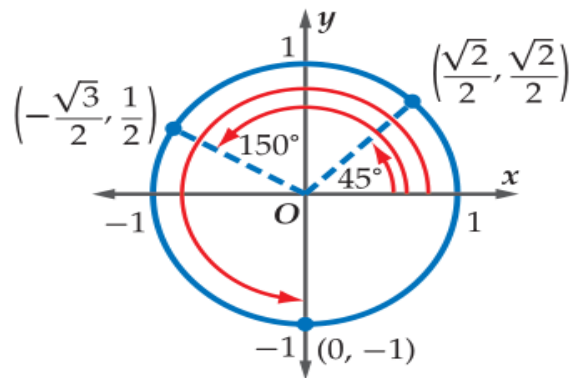
لتطوير - إنتاج - توليق



يُبين الشكل المجاور القيم الدقيقة لكلٍّ من $\cos \theta$, $\sin \theta$ لبعض الزوايا الخاصة على دائرة الوحدة. حيث يمثل الإحداثي x قيمة $\cos \theta$ ، ويمثل الإحداثي y قيمة $\sin \theta$ للنقاط على دائرة الوحدة.

يمكنك استعمال هذه المعلومات في تمثيل الدالتين: $\cos \theta$, $\sin \theta$ بيانياً، حيث يمثل المحور الأفقي قيم θ والمحور الرأسي قيم الدالة المطلوبة.

تتكرر دورة كلٍّ من دالتي الجيب وجيب التمام كل 360° . وهذا يعني أنهما دالتان دوريتان. طول دورة كلٍّ منهما 360° أو 2π .



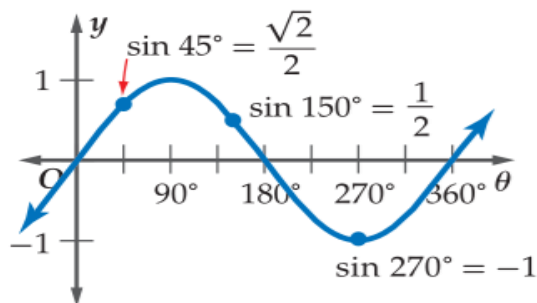
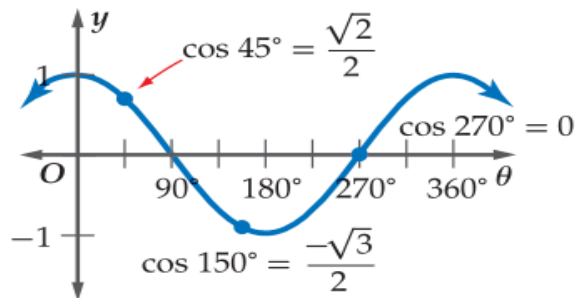
إذا كانت النقاط المبينة في الشكل تمثل نقاط تقاطع ضلع الانتهاء للزوايا مع دائرة الوحدة، فإن $\theta = 45^\circ$, $\theta = 150^\circ$, $\theta = 270^\circ$.

$$(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\cos 150^\circ, \sin 150^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(\cos 270^\circ, \sin 270^\circ) = (0, -1)$$

كما يمكنك تعيين هذه النقاط على التمثيل البياني لكل من الدالتين $\sin \theta$, $\cos \theta$ كما يأتي:



بما أن طول الدورة لكلٍّ من الدالتين هو 360° ، فإن قيم كلٍّ من الدالتين تتكرّر كلّ 360° .
لذلك فإن $\sin(x + 360^\circ) = \sin x$, $\cos(x + 360^\circ) = \cos x$



حساب قيم الدوال المثلثية

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية مما يأتي:

(a) $\cos 480^\circ$

$$\begin{aligned}\cos 480^\circ &= \cos (120^\circ + 360^\circ) \\ &= \cos 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) $\sin \frac{11\pi}{4}$

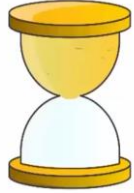
$$\begin{aligned}\sin \frac{11\pi}{4} &= \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{3\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$



الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \quad (4B)$$

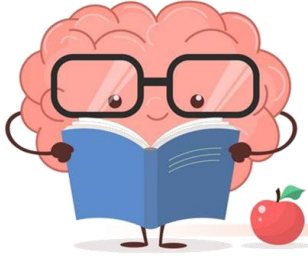
$$\sin 420^\circ \quad (4A)$$



الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:



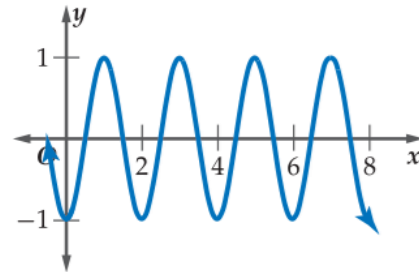
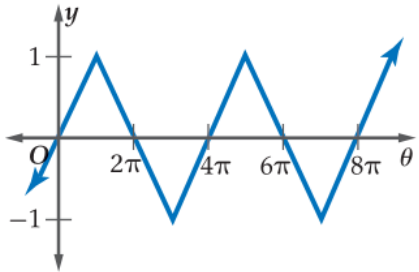
تأكد

مثال 1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P ، فأوجد كلاً من $\cos \theta$ ، $\sin \theta$ في كل ممّا يأتي:

$$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (2)$$

$$P\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right) \quad (1)$$

مثال 2 أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدالتين الآتيتين:



الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:

تدرب وحل المسائل

إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة P ، فأوجد كلاً من $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ في كلٍّ مما يأتي:

مثال 1

$$P\left(-\frac{10}{26}, -\frac{24}{26}\right) \quad (10)$$

$$P\left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right) \quad (9)$$

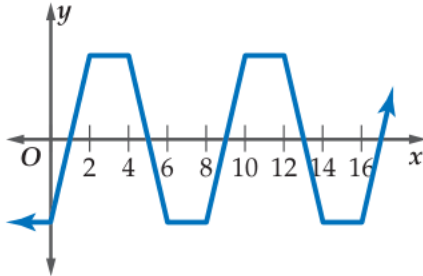
$$P\left(\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{19}}{5}\right) \quad (12)$$

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (11)$$

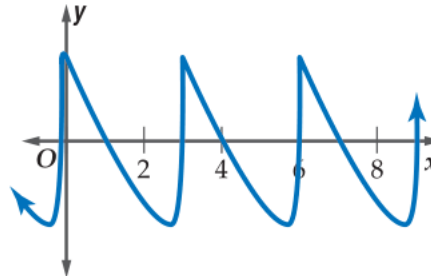
أوجد طول الدورة لكلٍّ من الدوال الآتية:

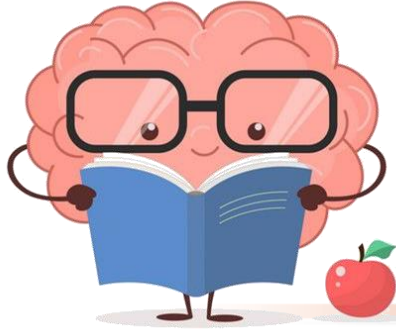
مثال 2

(14)

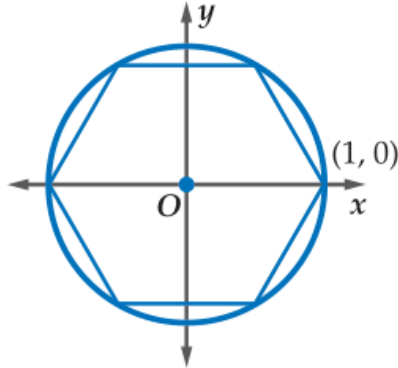


(13)



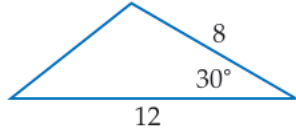


مسائل مهارات التفكير العليا



(32) **هندسة:** رُسم سداسي منتظم داخل دائرة وحدة مركزها نقطة الأصل، بحيث تقع رؤوسه جميعها على الدائرة كما في الشكل المجاور. إذا كانت إحداثيات أحد رؤوس السداسي $(1, 0)$ ، فما إحداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى من السداسي؟

تدريب على اختبار



(38) هندسة: مساحة المثلث الموضح
في الشكل المجاور تساوي:

- 24 D 41.6 C 96 B 48 A

(37) إذا كان $d^2 + 8 = 21$ ، فإن: $d^2 - 8$ يساوي:

- 161 D 31 C 13 B 5 A

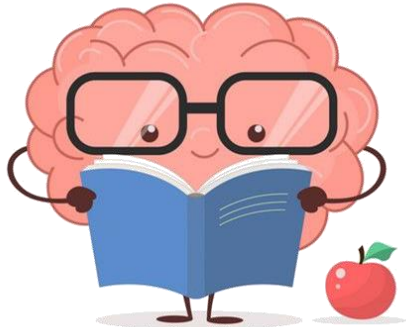


الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:

تذكر دوماً ما أنت بارع فيه وتمسك به.



بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال



الموضوع: الدوال الدائرية

اليوم:

التاريخ:

الواجب

انتهى درس اليوم

تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

Graphing Trigonometric Functions



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



الالتزام بالوقت

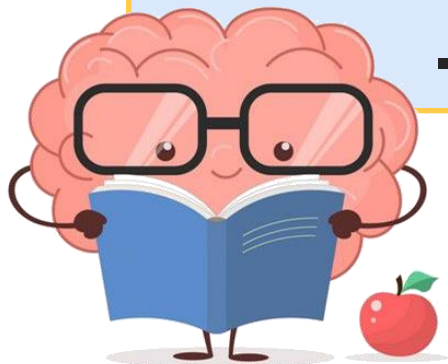


حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

كن صبوراً؛ الدروس التي تتعلمها اليوم تفيدك غداً



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...



الأفكار الرئيسية

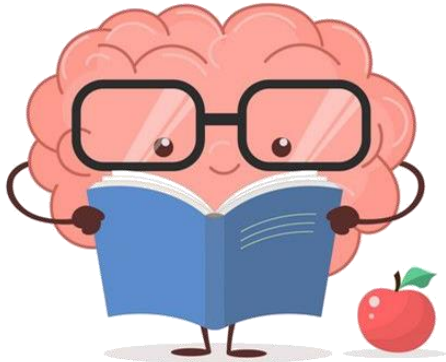


1

أضف دوال الجيب وجيب التمام والظل وأمثلها بيانياً.

2

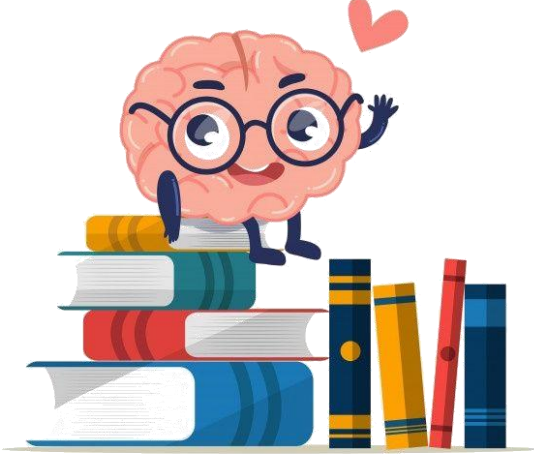
أضف دوال مثلثية أخرى وأمثلها بيانياً.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



فيما سبق:

درست الدوال الدورية.

والآن:

- ❖ أضف دوال الجيب وجيب التمام والظل وأمثلها بيانياً.
- ❖ أضف دوال مثلثية أخرى وأمثلها بيانياً.

اليوم:

التاريخ:

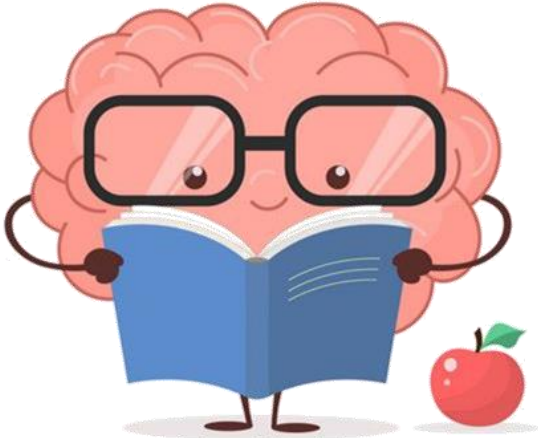
الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



المفردات

التردد

السعة



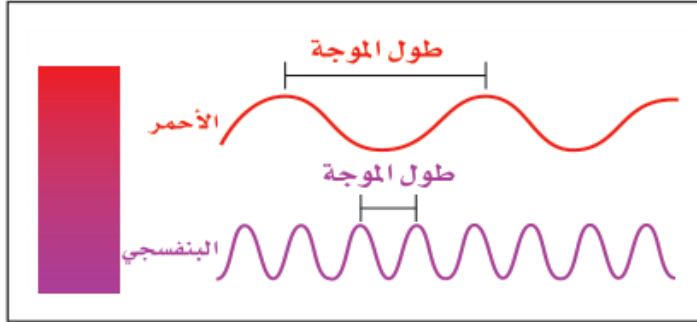
اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



لماذا؟



لموجات الضوء المرئية، أطوال موجات أو ترددات مختلفة. فاللون الأحمر له أكبر طول موجة، واللون البنفسجي له أقصر طول موجة.

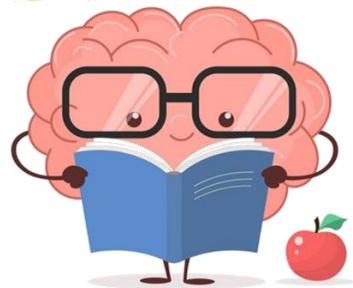
ويمكنك تمثيل الحركة الموجية بالمعادلة:
 $y = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ ، حيث تمثل A سعة الموجة، λ طول الموجة.

جدول التعلم

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

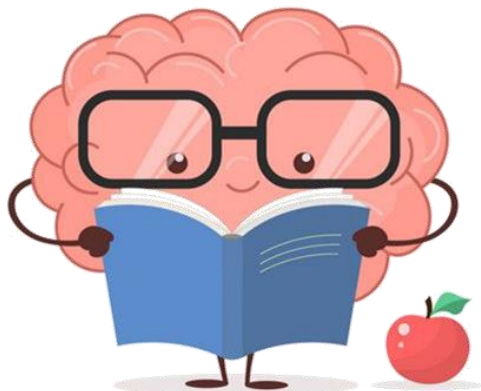
ماذا اعرف؟!

المفردات الجديدة:

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- وصف دوال الجيب وجيب التمام والظل وتمثيلها بيانياً.

٢- وصف دوال مثلثية أخرى وتمثيلها بيانياً.



دوال الجيب وجيب التمام والظل: يمكنك تمثيل الدوال المثلثية بيانياً في المستوى الإحداثي. تذكر أن منحنيات الدوال الدورية فيها أنماط متكررة أو دورات. وأن الطول الأفقي لكل دورة يُسمى طول الدورة. **سعة** منحنى دالة الجيب أو دالة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.





$y = \cos \theta$	$y = \sin \theta$	الدالة المولدة (الأم)
		التمثيل البياني
مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية	المجال
$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	المدى
1	1	السعة
360°	360°	طول الدورة

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

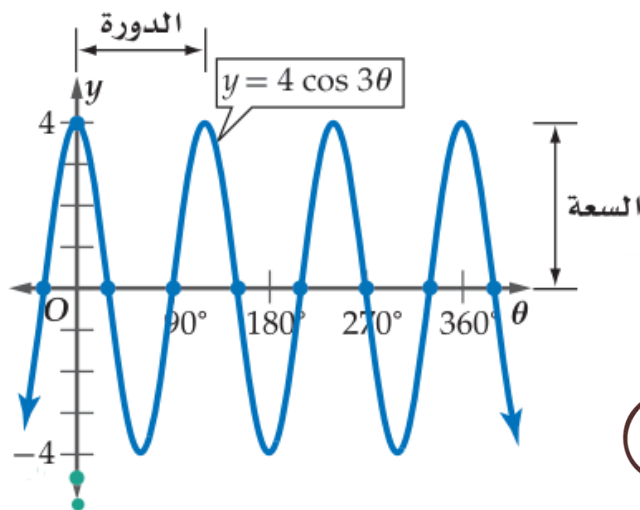


يمكنك تطبيق ما تعلمته في أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوال الأخرى على التمثيل البياني للدوال المثلثية في صورتها العامة: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$ ، التي سعتها $|a|$ ، وطول دورتها $\frac{360^\circ}{|b|}$.



مثال 1

إيجاد السعة وطول الدورة



أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 4 \cos 3\theta$.

السعة: من الرسم نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة

الصغرى للدالة يساوي $\frac{4 - (-4)}{2} = 4$ أو $|a| = |4| = 4$

طول الدورة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|3|} = 120^\circ$

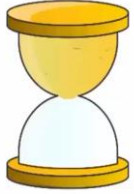
من الرسم يكرّر الرسم نفسه كلّ 120°



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة فيما يأتي:

$$y = 3 \sin 5\theta \quad (1B)$$

$$y = \cos \frac{1}{2}\theta \quad (1A)$$



الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

اليوم:

التاريخ:

استعمل منحنيات الدوال المولدة (الأم) لتمثيل كلٍّ من الدالتين: $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$. ثم استعمل السعة وطول الدورة لرسم منحنى دالة الجيب أو دالة جيب التمام المناسبة بيانياً. ويمكنك أيضاً استعمال نقاط التقاطع مع المحور θ .

إذا كانت دورة كلٍّ من الدالتين $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ تبدأ عند $\theta = 0$ ، فإن نقاط تقاطع كلٍّ منهما مع المحور θ هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \sin b\theta$	$y = a \cos b\theta$
$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right)$

تمثيل دالتي الجيب وجيب التمام بيانياً

مثال 2

مثّل كلّاً من الدالتين الآتيتين بيانياً:

$$y = 2 \sin \theta \quad (a)$$

أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 2, b = 1$.

السعة: $|a| = |2| = 2$ ← المنحنى يتسع رأسياً بحيث تكون القيمة العظمى

2 والقيمة الصغرى -2.

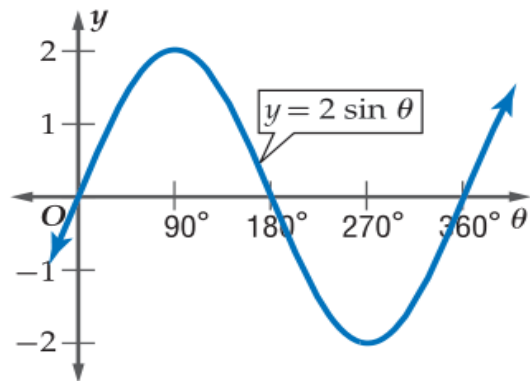
طول الدورة: $\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|1|} = 360^\circ$ ← دورة واحدة طولها 360° .

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $(0, 0)$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (180^\circ, 0)$$

$$\left(\frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (360^\circ, 0)$$

???



تمثيل دالتي الجيب وجيب التمام بيانيًا

مثال 2

مثّل كلّاً من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

$$y = \cos 4\theta \quad (b)$$

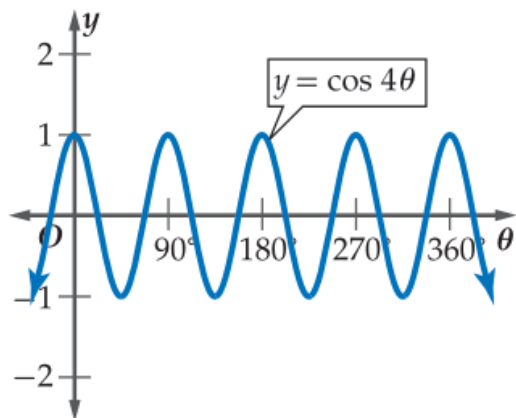
أوجد السعة، وطول الدورة، ونقاط التقاطع مع المحور θ ، حيث: $a = 1$, $b = 4$.

$$\text{السعة: } |a| = |1| = 1$$

$$\text{طول الدورة: } \frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|4|} = 90^\circ$$

$$\text{نقاط التقاطع مع المحور } \theta \text{ هي: } \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (22.5^\circ, 0)$$

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b}, 0\right) = (67.5^\circ, 0)$$



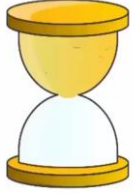
???



الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

مثّل كلّاً من الدالتين الآتيتين بيانياً:

$$y = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad (2B)$$

$$y = 3 \cos \theta \quad (2A)$$



تفيد الدوال المثلثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتم وصف هذه الأمواج عادة باستعمال **التردد**، وهو عدد الدورات في وحدة الزمن. ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالة نجد مقلوب طول الدورة، فمثلاً إذا كان طول الدورة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن ترددها يساوي 100 دورة في الثانية.



تمثيل موقف بدالة دورية

أصوات: تُسمّى الأصوات التي يكون ترددها أقلّ من المستوى الذي يسمعه الإنسان، الأصوات تحت السمعية. ويمكن للفيلة سماع الأصوات تحت السمعية التي يصل ترددها إلى 5 هيرتز أو 5 دورات / ثانية.

(a) أوجد طول دورة الدالة التي تعبر عن موجات الصوت.

يوجد 5 دورات في الثانية، وطول الدورة هو مقلوب التردد، ويساوي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة، لذلك فإن طول الدورة هو $\frac{1}{5} = 0.2$.

(b) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالة جيب تُمثل موجة الصوت y باعتبارها دالة في الزمن t ، ثم مثلها بيانيًا.

اكتب العلاقة بين طول الدورة و b

$$\text{طول الدورة} = \frac{2\pi}{|b|}$$

عوّض

$$\frac{2\pi}{|b|} = 0.2$$

اضرب الطرفين في $|b|$

$$0.2|b| = 2\pi$$

اضرب الطرفين في 5؛ b موجبة

$$b = 10\pi$$

الصورة العامة لدالة الجيب

$$y = a \sin b\theta$$

$$a = 1, b = 10\pi, \theta = t$$

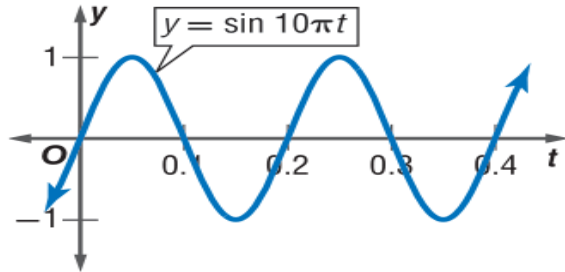
$$y = 1 \sin 10\pi t$$

بسّط

$$y = \sin 10\pi t$$



تطوير - إنتاج - توليف



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

(3) **أصوات:** يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز.

(A) أوجد طول دورة الدالة.

(B) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالة جيب التمام التي تعبر عن موجات الصوت، ثم مثلها بيانياً.



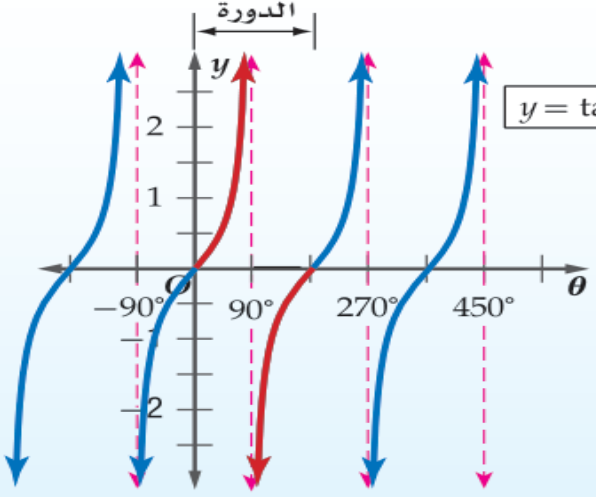
تُعَدّ دالة الظلّ من الدوالّ المثلثية التي لها خطوط تقارب.

أضف إلى

مطوبتك

دالة الظلّ

مفهوم أساسي

التمثيل البياني للدالة	$y = \tan \theta$	الدالة المولدة (الأم)
	{ $\theta \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}$ }	المجال
	مجموعة الأعداد الحقيقية	المدى
	غير معرفة	السعة
	180°	طول الدورة

طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \tan b\theta$ يساوي $\frac{180^\circ}{|b|}$ ، ولا يوجد سعة لهذه الدالة. وخطوط التقارب الرأسية

لها تكون عند المضاعفات الفردية للعدد $\left(\frac{180^\circ}{|b|} \cdot \frac{1}{2}\right)$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



مثال 4

تمثيل دوال الظل بيانياً

أوجد طول دورة الدالة $y = \tan 2\theta$. ومثل هذه الدالة بيانياً.

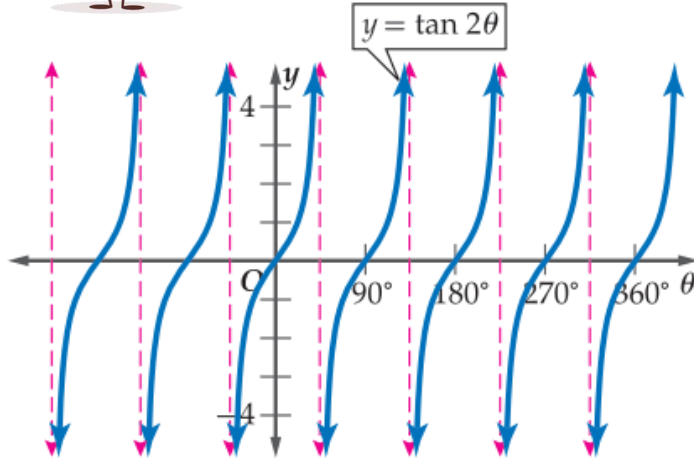
$$\text{طول الدورة: } \frac{180^\circ}{|b|} = \frac{180^\circ}{|2|} = 90^\circ$$

$$\text{خط تقارب عند: } \frac{180^\circ}{|2b|} = \frac{180^\circ}{2|2|} = 45^\circ$$

ارسم خطوط التقارب عند

$$-3 \cdot 45^\circ = -135^\circ, -1 \cdot 45^\circ = -45^\circ, 1 \cdot 45^\circ = 45^\circ, 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ, \dots$$

استعمل $y = \tan \theta$ ، ولكن ارسم دورة كاملة كل 90° .



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



00:01:00

Start

Clear

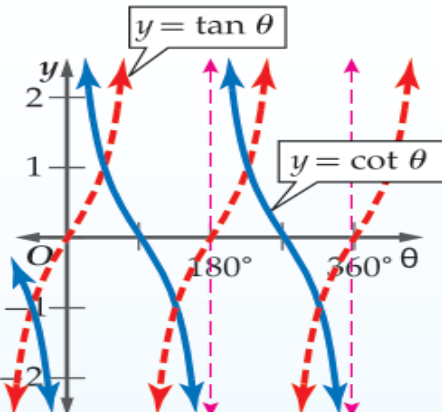
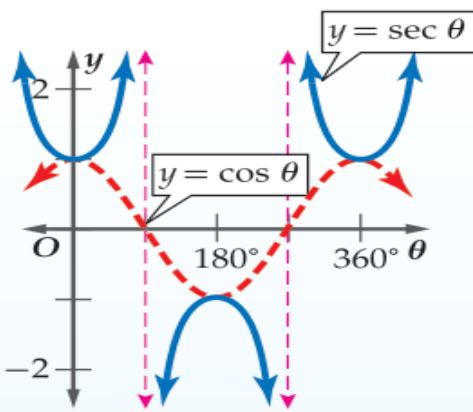
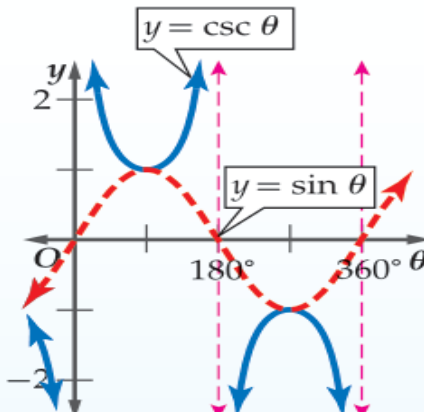


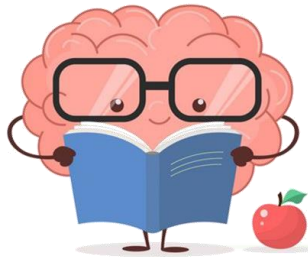
تحقق من فهمك

4) أوجد طول دورة الدالة $y = \frac{1}{2} \tan \theta$. ثم مثل هذه الدالة بيانياً.



تمثيل الدوال المثلثية الأخرى بيانياً: ترتبط منحنيات دوال قاطع التمام، والقاطع، وظل التمام بمنحنيات دوال الجيب، وجيب التمام، والظل.

أضف إلى مطوبتك		مفهوم أساسي	
دوال قاطع التمام والقاطع وظل التمام		الدالة المولدة (الأم)	
$y = \cot \theta$	$y = \sec \theta$	$y = \csc \theta$	 مجموعة رفعة الرياضيات تطوير - إنتاج - توثيق التمثيل البياني
			
$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in \mathbb{Z}\}$	
مجموعة الأعداد الحقيقية	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	
غير معرفة	غير معرفة	غير معرفة	
180°	360°	360°	



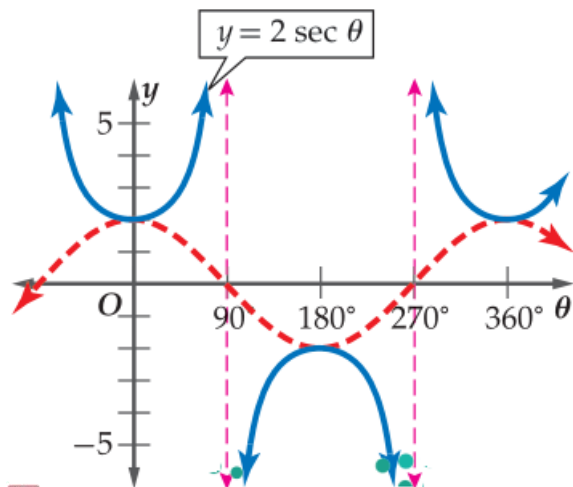
الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

اليوم:

التاريخ:

مثال 5

تمثيل الدوال المثلثية الأخرى بيانياً



أوجد طول دورة الدالة $y = 2 \sec \theta$. ثم مثل هذه الدالة بيانياً.
طول دورة الدالة يساوي 360° ، وبما أن $y = \sec \theta$ هي مقلوب $y = \cos \theta$ فإنه لتمثيل $y = 2 \sec \theta$ ، استند من تمثيل $y = 2 \cos \theta$ واتبع ما يلي:

- ارسم الدالة $y = 2 \cos \theta$.
- ارسم خطوط التقارب الرأسية عند نقاط تقاطع الدالة $y = 2 \cos \theta$ مع محور θ .
- مثل الدالة $y = 2 \sec \theta$.

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

5) أوجد طول دورة الدالة $y = \csc 2\theta$. ثم مثل الدالة بيانياً.



الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

اليوم:

التاريخ:

تأكد 

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة مما يأتي، ثم مثلها بيانياً:

$$y = \sin 3\theta \quad (2)$$

$$y = 4 \sin \theta \quad (1)$$

المثالان 1, 2

$$y = \frac{1}{2} \cos 3\theta \quad (4)$$

$$y = \cos 2\theta \quad (3)$$

(5) **عناكب:** عندما تسقط حشرة ما في شبكة العنكبوت، فإن الشبكة تهتز بتردد يبلغ 14 هيرتز.

مثال 3

(a) أوجد طول دورة الدالة.

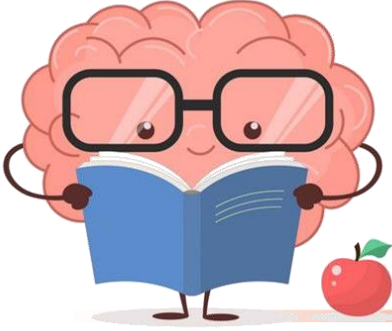
(b) افرض أن سعة الدالة وحدة واحدة. واكتب دالة جيب تُمثل اهتزازات الشبكة y كدالة في الزمن t ، ومثلها بيانياً.



اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



تدرب وحل المسائل

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة فيما يأتي، ثم مثلها بيانياً:

المثالان 1, 2

$$y = \sin 2\theta \quad (11)$$

$$y = 3 \sin \theta \quad (10)$$

$$y = 2 \cos \theta \quad (9)$$

$$y = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad (14)$$

$$y = \frac{3}{4} \cos \theta \quad (13)$$

$$y = \cos 3\theta \quad (12)$$

$$y = \sin \frac{\theta}{2} \quad (17)$$

$$y = 5 \sin \frac{2}{3} \theta \quad (16)$$

$$y = 3 \cos 2\theta \quad (15)$$



مسائل مهارات التفكير العليا

(36) تحدّ: حدّد المجال والمدى لكلٍّ من الدالتين $y = a \cos \theta$ ، $y = a \sec \theta$ حيث a عدد حقيقي موجب.

(37) تبرير: عيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين منحنى الدالة $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ ، ومنحنى الدالة $y = \sin \frac{1}{2} \theta$.

(38) مسألة مفتوحة: اكتب دالة مثلثية سعتها 3، وطول دورتها 180° . ثم مثلها بيانياً.

(39) اكتب: وضح كيف تُحسب سعة الدالة $y = -2 \sin \theta$. ووضح كيف يؤثر المعامل السالب في التمثيل البياني للدالة.

تدريب على اختبار

(42) إذا كان عدد سكان إحدى المدن قبل عشر سنوات يساوي 312430 نسمة، وعدد السكان الحالي يساوي 418270 نسمة، فما النسبة المئوية للزيادة في عدد السكان خلال السنوات العشر الماضية؟

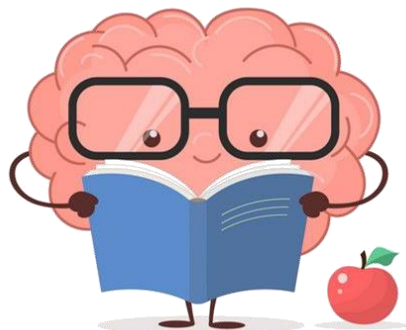
A 25% B 34% C 66% D 75%

(40) مراجعة: أيّ من الزوايا الآتية تحقّق $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ؟
A 990° B 1080° C 1830° D 1215°

(41) إجابة قصيرة: أوجد الحدّ رقم 100001 في المتتابعة:

13, 20, 27, 34, 41, ...

إنني لا أحاول الأداء أفضل من أي
شخص آخر، إنني فقط أحاول الأداء
أفضل من نفسي.



بطاقة خروج

اختراري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدرس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



الواجب

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: تمثيل الدوال المثلثية بيانياً



انتهى درس اليوم

الدوال المثلثية العكسية

Inverse Trigonometric Functions



معلمة المادة: تغريد مسعود باجنيد

القوانين الصفية



إعْملي مع زميلاتك
كفريق



حافظي على الممتلكات
ونظافة فصلك



إرفعي يدك عند
المشاركة



إستمعي جيداً
لنصائح المعلمة



الاستعداد الجيد وإبذلي
قصار جهدك



الالتزام بالوقت

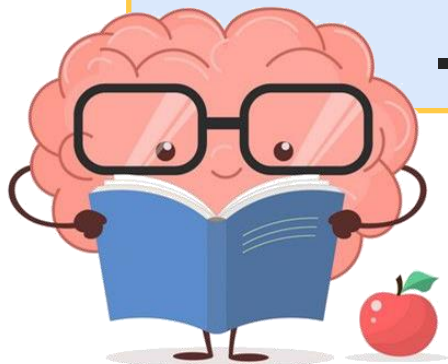


حل الواجبات وإرسالها
في الوقت المحدد

اليوم تفيدك غداً



اللهم إني أسالك فهم النبيين وحفظ المرسلين
والملائكة المقربين اللهم اجعل ألسنتنا عامرة
بذكرك وقلوبنا بخشيتك وأسرارنا بطاعتك إنك على
كل شيء قدير حسبنا الله ونعم الوكيل ...



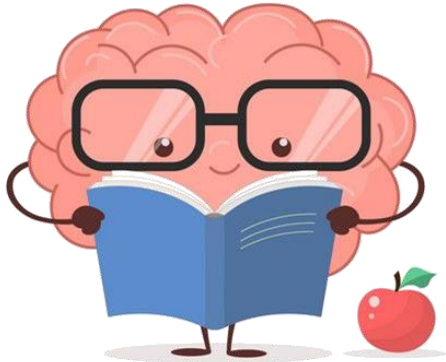
الأفكار الرئيسية



أجد قيم الدوال المثلثية بيانياً.



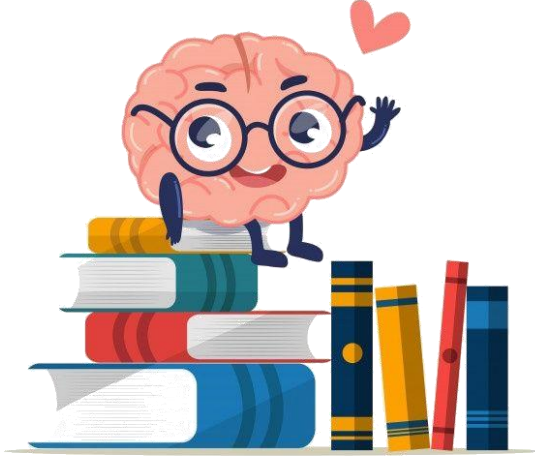
احل معادلات باستعمال الدوال المثلثية
العكسية.



الموضوع: الدوال المثلثية العكسية

اليوم:

التاريخ:



فيما سبق:

درست تمثيل الدوال المثلثية بيانياً.

والآن:

- ❖ أجد قيم الدوال المثلثية العكسية.
- ❖ أحل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية.



المفردات

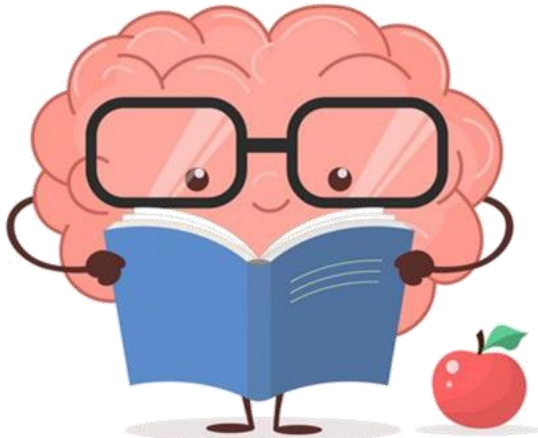
دالة الجيب العكسية

القيم الأساسية

دالة الظل العكسية

دالة جيب التمام العكسية

المعادلة المثلثية





الموضوع: الدوال المثلثية العكسية

اليوم:

التاريخ:



لماذا؟



75 in.

15 in.

لقد تعلّمت كيف تستعمل الدوال المثلثية العكسية لإيجاد قياسات الزوايا الحادة. مثال: يتكئ رف الكتب في الشكل المجاور على حائط عمودي، بحيث تبعد قاعدته عن الجدار بمقدار 15 in، ويصل ارتفاعه إلى 75 in. ولإيجاد قياس الزاوية θ ، استعمل دالة الظل.

$$\tan \theta = \frac{15}{75} = 0.2$$

ثم أوجد قياس الزاوية التي ظلّها 0.2 مستعملًا الآلة الحاسبة العلمية.

$$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\tan} \boxed{.2} \boxed{=} 11.30993247$$

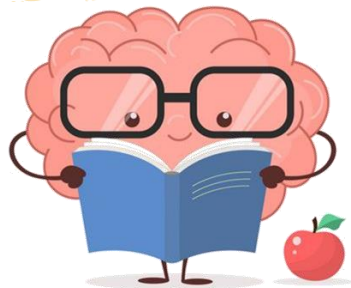
إذن قياس الزاوية θ حوالي 11° .

جدول التعلم

الموضوع: الدوال المثلثية العكسية

اليوم:

التاريخ:



ماذا تعلمت اليوم؟!

ما أريد أن أعرف؟!

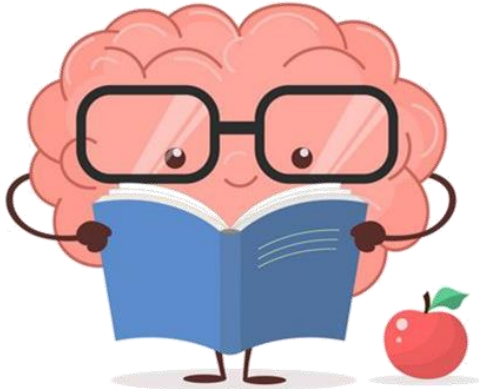
ماذا اعرف؟!

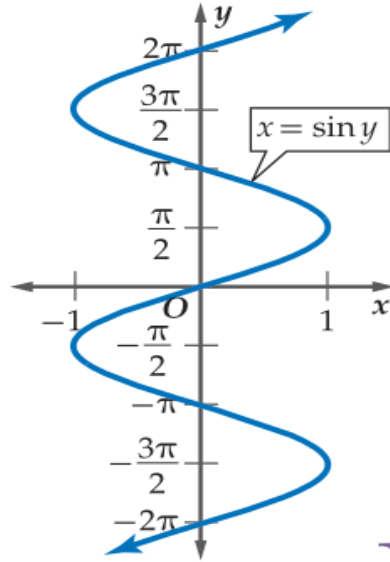
المفردات الجديدة:

الأهداف التي سيكتسبها الطالب في هذا الدرس:

١- إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية.

٢- حل معادلات باستعمال الدوال المثلثية العكسية.





معكوس الدالة المثلثية: إذا علمت قيمة الدالة المثلثية لزاوية ما، فإنك تستطيع استعمال معكوس الدالة لإيجاد قياس الزاوية. تذكر أن معكوس الدالة هو العلاقة التي تعكس فيها قيم المتغيرين: x, y . فمعكوس: $y = \sin x$ ، هو $x = \sin y$ ، الممثل بيانيًا في الشكل المجاور.

لاحظ أن معكوس الدالة ليس دالة لوجود عدد من قيم y لكل قيمة من قيم x . لكن إذا تمَّ تحديد مجال الدالة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، فإن المعكوس يكون دالة عكسية.

تُسمى القيم في هذا المجال المحدد **القيم الأساسية**. فالدوال المثلثية ذات المجال المحدد تُمثل بأحرف كبيرة، هكذا:

$$y = \sin x \text{ إذا وفقط إذا كان } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

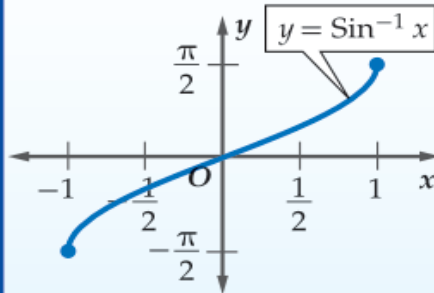
$$y = \cos x \text{ إذا وفقط إذا كان } x \in [0, \pi],$$

$$y = \tan x \text{ إذا وفقط إذا كان } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

يمكنك استعمال الدوال ذات المجالات المحددة لتعريف دوال عكسية: لكل من دالة الجيب، ودالة جيب التمام ودالة الظل وهي **دالة الجيب العكسية**، و**دالة جيب التمام العكسية**، و**دالة الظل العكسية** كما يأتي:



نموذج



الدالة العكسية	الرموز	المجال	المدى
دالة الجيب العكسية	$y = \sin^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \leq y \leq 90^\circ$
دالة جيب التمام العكسية	$y = \cos^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$ $0^\circ \leq y \leq 180^\circ$
دالة الظل العكسية	$y = \tan^{-1} x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ < y < 90^\circ$

اليوم:

التاريخ:

الموضوع: الدوال المثلثية العكسية



مثال 1

إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$$\text{a) } \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

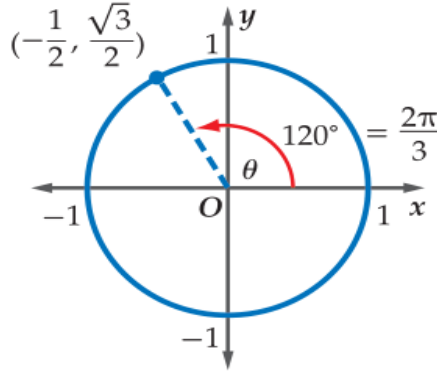
المطلوب إيجاد الزاوية θ ، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ والتي قيمة جيب التمام لها $-\frac{1}{2}$.

الطريقة 1: استعمال دائرة الوحدة

أوجد نقطة على دائرة الوحدة إحداثيها x هو $-\frac{1}{2}$.

نلاحظ أن: $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ عندما $\theta = 120^\circ$

$$\text{إذن } \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$



تطوير - إنتاج - توزيع

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

(a) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

المطلوب إيجاد الزاوية θ ، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ والتي قيمة جيب التمام لها $-\frac{1}{2}$.

الطريقة 2: استعمال الزاوية المرجعية

بما أن المطلوب $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني.

أوجد الزاوية الحادة (المرجعية θ')

بما أن $\cos \theta' = \frac{1}{2}$ ، فإن $\theta' = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

إذن $\theta = 180^\circ - \theta'$

$= 180^\circ - 60^\circ$

$= 120^\circ$

θ زاوية تقع في الربع الثاني



الموضوع: الدوال المثلثية العكسية

اليوم:

التاريخ:



مثال 1

إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$$(a) \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

المطلوب إيجاد الزاوية θ ، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ والتي قيمة جيب التمام لها $-\frac{1}{2}$.

الطريقة 3: استعمال الآلة الحاسبة

المفاتيح: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{COS}} (-1 \div 2) \boxed{=}$ 120

$$\text{إذن } \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

مثال 1

إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

(b) $\tan^{-1} 1$

المطلوب إيجاد الزاوية θ في الفترة $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ والتي ظلُّها يساوي 1.

المفاتيح: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\tan} 1 \boxed{=}$ 45

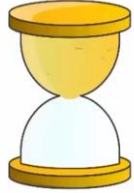
إذن $\tan^{-1} 1 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$.



الموضوع: الدوال المثلثية العكسية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

أوجد قيمة كل مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$$\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (1B)$$

$$\cos^{-1} 0 \quad (1A)$$



مثال 2

إيجاد قيمة مثلثية

أوجد قيمة $\tan \left(\cos^{-1} \frac{1}{2} \right)$ مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.

استعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: $\tan$ SHIFT $\cos$ $(1 \div 2)$ $=$ 1.732050808

إذن $\tan \left(\cos^{-1} \frac{1}{2} \right) \approx 1.73$.

تحقق: $\cos^{-1} \frac{1}{2} = 60^\circ$, $\tan 60^\circ \approx 1.73$

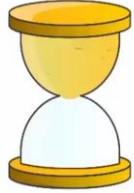
إذن الإجابة صحيحة.



الموضوع: الدوال المثلثية العكسية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي، مقربًا إلى أقرب جزء من مئة:

$$\cos \left(\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \quad (2B)$$

$$\sin \left(\tan^{-1} \frac{3}{8} \right) \quad (2A)$$



حلُّ المعادلات المثلثية باستعمال الدوال العكسية: **المعادلة المثلثية** هي معادلة تحتوي على دوالٍ مثلثية بزوايا مجهولة القياس. وحلُّ المعادلة المثلثية يعني: إيجاد قياس الزوايا المجهولة، والتي دوالها المثلثية تجعل المعادلة المثلثية صحيحة، وذلك بإعادة كتابتها باستعمال الدوال المثلثية العكسية.



مثال 3 على اختبار

إذا كان $\sin \theta = -0.35$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريباً يساوي:

- A -20.5° B -0.6° C 0.6° D 20.5°

اقرأ فقرة الاختبار

جيب الزاوية θ هو -0.35 . ويمكن كتابة هذا في الصورة: $\sin^{-1}(-0.35) = \theta$.

حل فقرة الاختبار

استعمل الآلة الحاسبة.

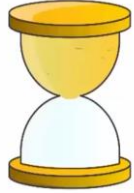
المفاتيح: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sin} (-0.35) \boxed{=}$ -20.48731511

إذن $\theta \approx -20.5^\circ$. الإجابة الصحيحة هي A.

الموضوع: الدوال المثلثية العكسية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

Clear



تحقق من فهمك

3) إذا كان $\tan \theta = 1.8$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات تقريباً يساوي:

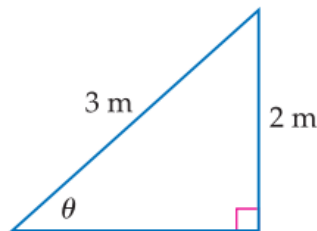
60.9° C

0.03° A

D لا يوجد حلّ

29.1° B





لعبة التزحلق: لعبة تزلح للأطفال، ارتفاعها 2 m ، وطولها 3 m كما في الشكل المجاور. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي تصنعها لعبة التزحلق مع الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

بما أن طول الضلع المقابل وطول الوتر معلومان، فيمكن استعمال دالة الجيب.

$$\text{دالة الجيب} \quad \sin \theta = \frac{2}{3}$$

$$\text{دالة معكوس الجيب} \quad \theta = \sin^{-1} \frac{2}{3}$$

$$\text{استعمل الآلة الحاسبة} \quad \theta \approx 41.8^\circ$$

إذن قياس الزاوية يساوي 41.8° تقريباً.

تحقق: باستعمال الآلة الحاسبة، $\sin 41.8 \approx 0.66653 \approx \frac{2}{3}$.

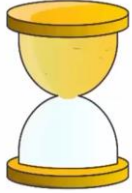
أي أن الإجابة صحيحة.



الموضوع: الدوال المثلثية العكسية

اليوم:

التاريخ:



00:01:00

Start

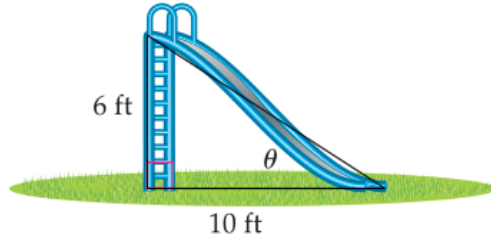
Clear



تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

4) تزلج: يظهر الشكل المجاور منحدرًا للتزلج. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قياس الزاوية (θ) التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.



مثال 1

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$$(1) \sin^{-1} \frac{1}{2}$$

$$(2) \tan^{-1} (-\sqrt{3})$$

$$(3) \cos^{-1} (-1)$$

مثال 2

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

$$(4) \cos \left(\sin^{-1} \frac{4}{5} \right)$$

$$(5) \tan (\cos^{-1} 1)$$

$$(6) \sin \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي بالدرجات وبالراديان:

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (13)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (12)$$

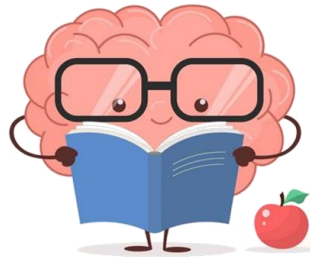
$$\tan^{-1}\sqrt{3} \quad (15)$$

$$\sin^{-1}(-1) \quad (14)$$

$$\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (17)$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (16)$$





الموضوع: الدوال المثلثية العكسية

اليوم:

التاريخ:

مسائل مهارات التفكير العليا

(37) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من خليل وعبدالرحمن بحلّ المعادلة $\cos \theta = 0.3$ حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

عبدالرحمن

$$\cos \theta = 0.3$$

$$\cos^{-1} 0.3 = 162.5^\circ$$

خليل

$$\cos \theta = 0.3$$

$$\cos^{-1} 0.3 = 72.5^\circ$$

(38) **تبرير:** وضح كيف يرتبط مجال الدالة $y = \sin^{-1} x$ مع مدى الدالة $y = \sin x$.

(39) **اكتب:** فسّر لماذا تكون كلٌّ من $\sin^{-1} 8$, $\cos^{-1} 8$ غير معرفّة، بينما $\tan^{-1} 8$ معرفّة.



تطوير - إنتاج - توثيق

تدريب على اختبار

41) إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x$, $g(x) = 4 - 2x$ ، فأوجد $g[f(x)]$.

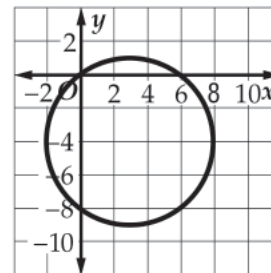
A $g[f(x)] = 4 + 6x - 8x^2$

B $g[f(x)] = 4 + 6x - 4x^2$

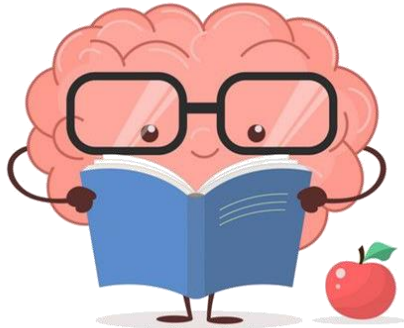
C $g[f(x)] = 20 - 26x + 8x^2$

D $g[f(x)] = 44 - 38x + 8x^2$

40) إجابة قصيرة: أوجد معادلة الدائرة الممثلة في الشكل الآتي:



افعل الشيء الصحيح في الوقت
الصحيح بالطريقة الصحيحة لتتميز.



بطاقة خروج

اختاري الوجه التعبيري المناسب:



الجزء الذي
أعجبني من
الدروس



لم أفهم



اليوم تعلمت



لدي سؤال



الموضوع: الدوال المثلثية العكسية

اليوم:

التاريخ:

الواجب

انتهى درس اليوم



جمهورية مصر العربية



المراجع:

ماجروهيل رياضيات ثاني ثانوي (رياضيات ٢-٣) الفصل الدراسي الثالث،
وزارة التعليم، مجموعة العبيكان للاستثمار.

الخاتمة:

نسأل الله قبول هذا العمل، وأن يكون هذا الإنجاز نال شيئاً
من إعجابكم.