بسمة math

المتجهات في المستوى الإحداثي

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق

درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم

والآن

١| اجري العمليات على المتجهات في المستوى الاحداثي وأمثلها بيانيا

٢|اكتب المتجه باستعمال متجهي الوحدة

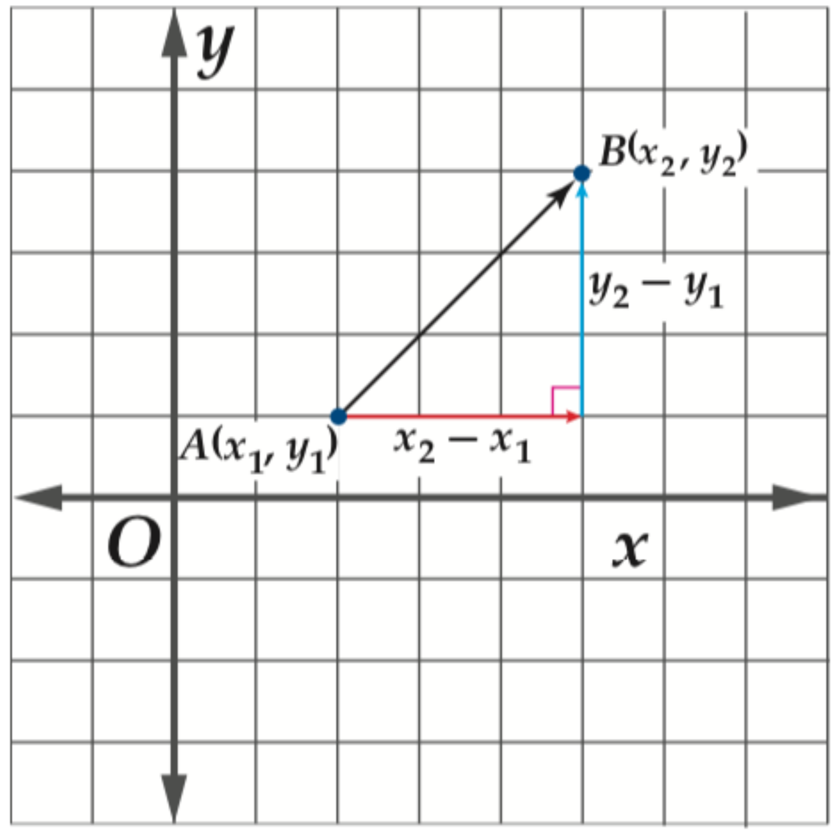
لماذا ؟

تؤثِّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

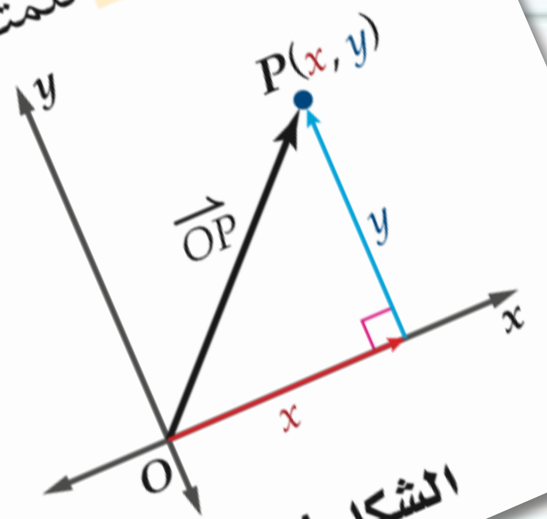
مفهوم أساسي — الصورة الإحداثية لمتجه

الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$



الصورة الإحداثية للمتجه.



الشكل 1.2.1

التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

مثال ١

أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle 3 - (-4), -5 - 2 \rangle$	$(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$
$= \langle 7, -7 \rangle$	بسّط

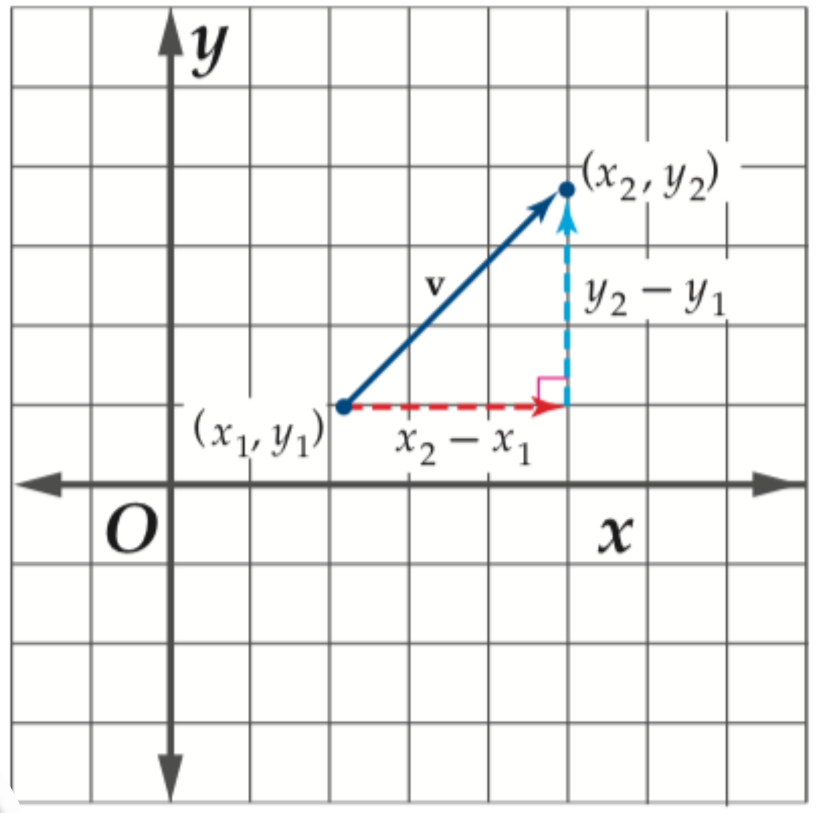
تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

1B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

مفهوم أساسي طول المتجه في المستوى الإحداثي



إذا كان **v** متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ،

فإن طول **v** يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه **v** فإن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

قراءة الرياضيات

المعيار

يسمى مقدار المتجه أحيانًا معيار المتجه.

بسمة math

مثال 2

إيجاد طول المتجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \sqrt{98} \approx 9.9$ بسّط

التحقق علمت من المثال 1 أن: $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7 \rangle$ ؛ وعليه فإن: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98}$ ✔

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

2A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

2B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

تدرب

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي: (المثالان 1, 2)

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

math بسمة

مثال 3

أوجد كلًا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$ عوّض

$= \langle -4 + 2, 1 + 5\rangle = \langle -2, 6\rangle$ اجمع المتجهين

b) $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

$\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = \mathbf{b} + (-2)\mathbf{a}$ أعد كتابة الطرح كعملية جمع

$= \langle -3, 0\rangle + (-2)\langle 2, 5\rangle$ عوّض

$= \langle -3, 0\rangle + \langle -4, -10\rangle = \langle -7, -10\rangle$ اضرب متجهًا في عدد حقيقي، واجمع متجهين

العمليات على المتجهات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

3A) $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$

3B) $-3\mathbf{c}$

3C) $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

تدرب

إذا كان: $\mathbf{h} = \langle -6, 2\rangle$, $\mathbf{g} = \langle -3, -5\rangle$, $\mathbf{f} = \langle 8, 0\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مثال 3)

7) $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$

8) $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$

مقطع توضيحي

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز **u**، ولإيجاد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه المتجه v، اقسم المتجه **v** على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = \mathbf{u}\,|\mathbf{v}|$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ **v** في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه **v** في عددٍ حقيقيٍّ.

تاريخ الرياضيات

ويليام روان هاميلتون (1805–1865)

طوّر الرياضي الأيرلندي هاميلتون نظريةً في نظام الأعداد؛ لتوسيع الأعداد المركبة، ونشر العديد من المحاضرات فيها. يُذكر أن العديد من المفاهيم الأساسية في تحليل المتجهات يعتمد على هذه النظرية.

مثال 4

ايجاد متجه وحدة له نفس اتجاه متجه معطى

أوجد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$.

$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$ متجه وحدة باتجاه **v**

$= \frac{1}{|\langle -2, 3\rangle|}\langle -2, 3\rangle$ عوِّض

$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle$ $|\langle a, b\rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$ بسِّط

$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$ اضرب متجه في عدد حقيقي

$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$ أنطق المقام

التحقق بما أن **u** تمثل حاصل ضرب **v** في عدد موجب فإن له اتجاه **v** نفسه. تحقَّق من أن طول **u** هو 1 .

$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}}$ بسِّط

$= \sqrt{1} = 1$ ✓ بسِّط

تحقق من فهمك

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

(4A $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

(4B $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

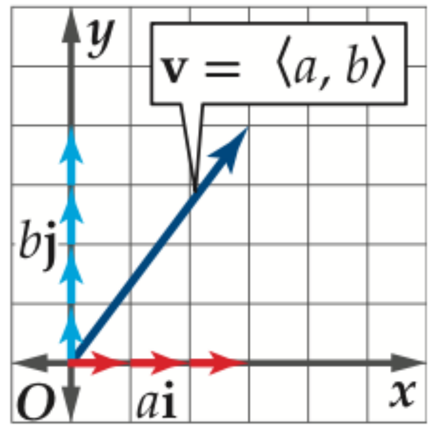
تدرب

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه **v** نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي:

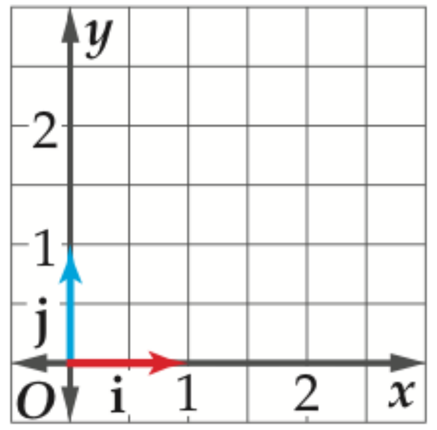
13) $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle$

14) $\mathbf{v} = \langle 9, -3 \rangle$

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x ، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 1.2.4



الشكل 1.2.3

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4 ؛ وذلك لأن:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$	أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين
$= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$	اضرب متجه في عدد حقيقي
$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$	$\langle 1, 0 \rangle = \mathbf{i}$, $\langle 0, 1 \rangle = \mathbf{j}$

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

تنبيه!

متجه الوحدة i

لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$ ، والعدد التخيلي i ، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍ داكن غير مائل $\mathbf{i}$ ، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍ غير داكن مائل i .

مثال 5

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$، ونقطة نهايته $E(4, 5)$، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

أولًا، أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{DE}$.

$$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$ الصورة الإحداثية

$$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$$ $(x_1, y_1) = (-2, 3)$, $(x_2, y_2) = (4, 5)$

$$= \langle 6, 2 \rangle$$ بسّط

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة.

$$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle$$ الصورة الإحداثية

$$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$ $\langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

كتابة متجه على صورة توافق خطي

تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

5A) $D(-6, 0), E(2, 5)$

5B) $D(-3, -8), E(7, 1)$

تدرب

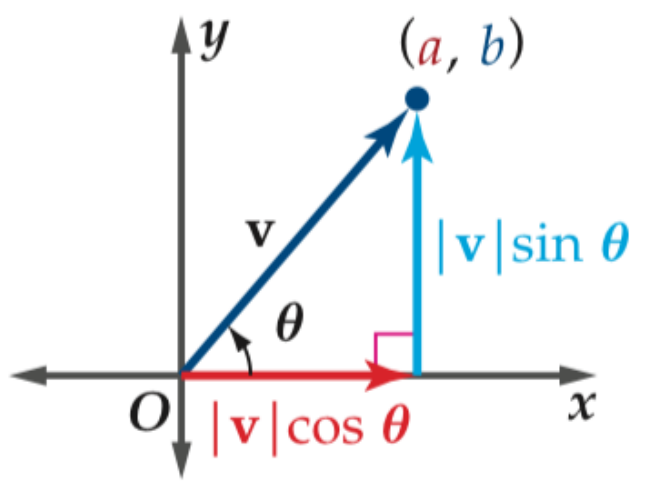
اكتب $\overrightarrow{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي على صورة توافقٍ خطّيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5)

19) $D(4, -1), E(5, -7)$

20) $D(9, -6), E(-7, 2)$

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 1.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta \rangle$	عوِّض
$= \lvert\mathbf{v}\rvert (\cos\theta)\,\mathbf{i} + \lvert\mathbf{v}\rvert (\sin\theta)\,\mathbf{j}$	توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$



الشكل 1.2.5

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة

تستنتج من الصورة $\mathbf{v} = \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta \rangle$ أن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة

$\mathbf{u} = \langle 1\cos\theta, 1\sin\theta \rangle$
$= \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$

math بسمة

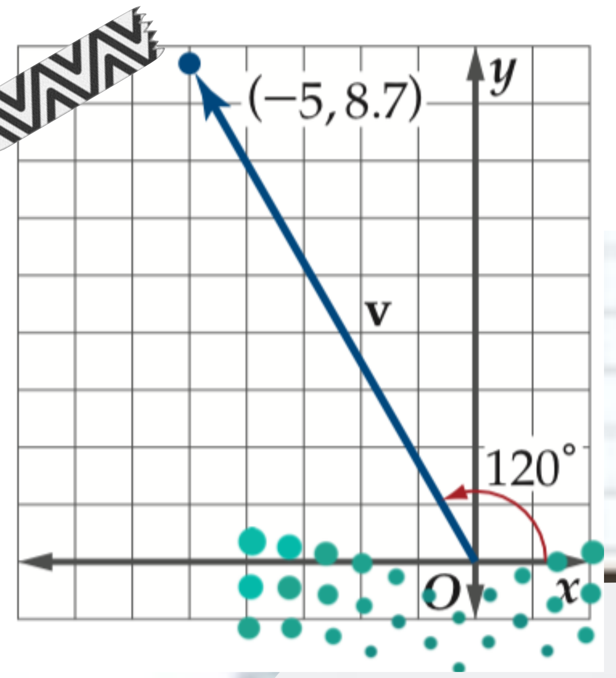
مثال 6

ايجاد الصورة الاحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه °120 مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \langle \lvert\mathbf{v}\rvert \cos\theta, \lvert\mathbf{v}\rvert \sin\theta\rangle$	الصورة الإحداثية للمتجه **v** بدلالة $\lvert\mathbf{v}\rvert, \theta$
$= \langle 10\cos 120°, 10\sin 120°\rangle$	$\lvert\mathbf{v}\rvert = 10, \theta = 120°$
$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\rangle$	$\cos 120° = -\frac{1}{2}, \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= \langle -5, 5\sqrt{3}\rangle$	بسّط

التحقق مثِّل بيانيًا: $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3}\rangle \approx \langle -5, 8.7\rangle$ ، تجد أن قياس الزاوية التي يصنعها **v** مع الاتجاه الموجب لمحور x هي °120 كما في الشكل المجاور،



$$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10 \checkmark$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه **v** المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

(6A $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

(6B $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

تدرب

الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ ممَّا يأتي:

25) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$

26) $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$

من الشكل (1.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x)
بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \dfrac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$.

math بسمة

مثال 7

زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

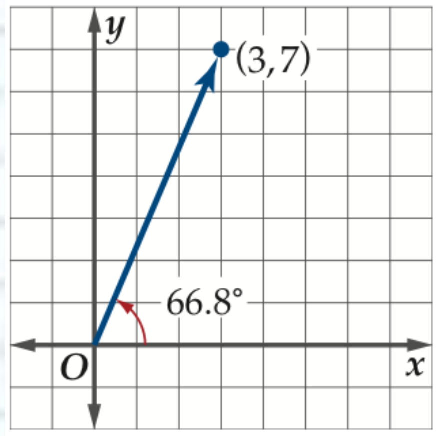
$\tan\theta = \frac{7}{3}$ $a = 3 , b = 7$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 3$ ، $y = 7$،
فإن المتجه يقع في الربع الأول، إذن:

$\theta \approx 66.8°$ استعمل الآلة الحاسبة

أي أن زاوية اتجاه المتجه **p** هي $66.8°$ تقريبًا كما في الشكل **1.2.6** .



الشكل **1.2.6**

b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

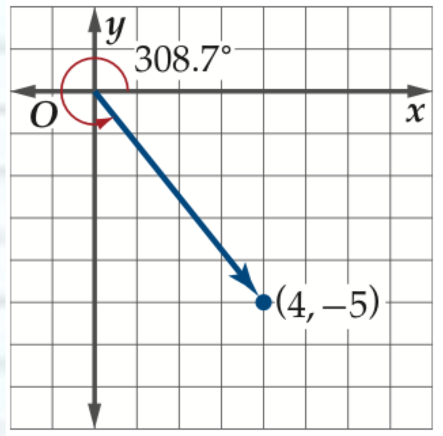
$\tan\theta = \frac{-5}{4}$ $a = 4 , b = -5$

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $y = -5 < 0$ ، $x = 4 > 0$،
فإن المتجه يقع في الربع الرابع وبالتالي زاويته

$\theta \approx -51.3°$ استعمل الآلة الحاسبة

بما أن **r** يقع في الربع الرابع، كما في الشكل **1.2.7**، فإن: $\theta \approx 360° - 51.3° = 308.7°$



الشكل **1.2.7**

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

7B) $\langle -3, -8 \rangle$

تدرب

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x : (مثال 7)

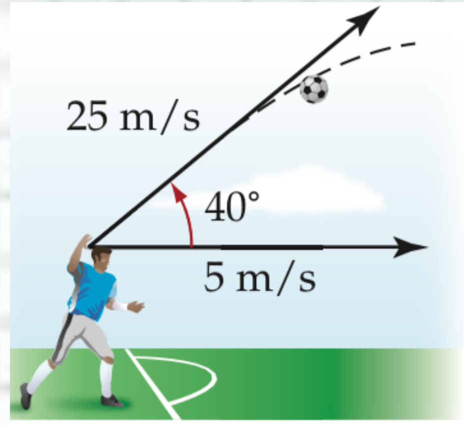
29) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

30) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

تطبيق العمليات على المتجهات

مثال من واقع الحياة 8

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة $5\,m/s$ ، ليرمي الكرة بسرعة $25\,m/s$ ، بزاوية $40°$ مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



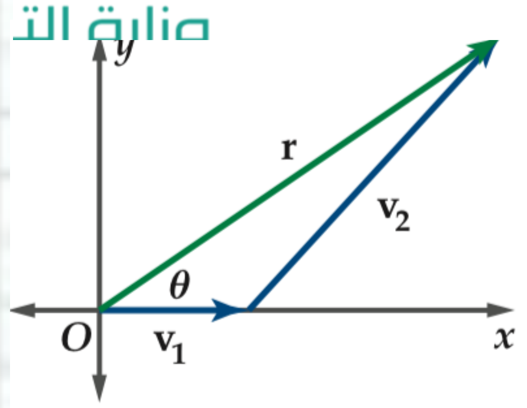
بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0\rangle$ ، وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ هي:

$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2| \cos\theta, |\mathbf{v}_2| \sin\theta \rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}_2$

$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40°\rangle$ $|\mathbf{v}_2| = 25 , \theta = 40°$

$\approx \langle 19.2, 16.1\rangle$ بسّط

اجمع المتجهين $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.



$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ متجه المحصلة

$= \langle 5, 0\rangle + \langle 19.2, 16.1\rangle$ عوّض

$= \langle 24.2, 16.1\rangle$ اجمع

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

$\tan\theta = \dfrac{16.1}{24.2}$ $\tan\theta = \frac{b}{a}$ ، حيث $\langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{16.1}{24.2} \approx 33.6°$ حُل بالنسبة إلى θ

أي أن محصلة سرعة الكرة هي $29.1\,m/s$ تقريبًا، وتصنع زاوية قياسها $33.6°$ مع الأفقي تقريبًا.

تحقق من فهمك

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة $7\,m/s$

تدرب

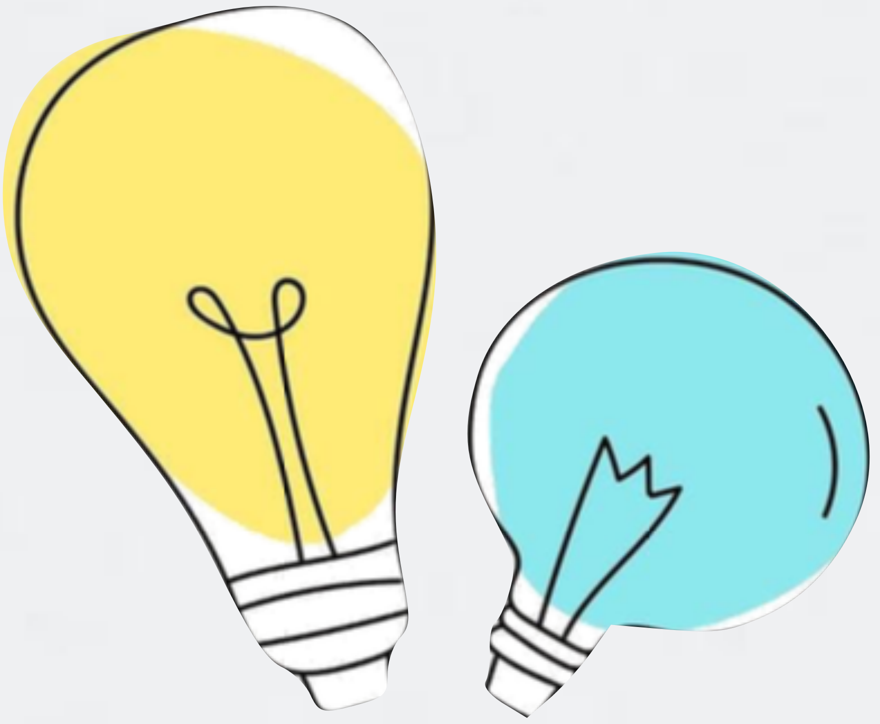
43) **تبرير:** إذا كان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متجهين متوازيين، فعبِّر عن كلٍّ من المتجهين بالصورة الإحداثية مبيِّنًا العلاقة بين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$، ونقطة نهايته $(-3, -4)$؟

A $\sqrt{2}$ **C** $\sqrt{82}$

B $\sqrt{26}$ **D** $\sqrt{106}$

مسابقات



Wordwall

مقطع توضيحي

المتجهات في المستوى الإحداثي

متجه الوحدة

طوله يساوي ١ ويمكن إيجاد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه المتجه v

$$u = \frac{v}{|v|}$$

الصورة الإحداثية للمتجه

توافق خطي

$\langle a, b\rangle = ai + bj$

الصورة الإحداثية بدلالة نقطتين

$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$

الصورة المثلثية

$\langle |v|\cos\theta, |v|\sin\theta\rangle$

الزاوية بين متجهين غير صفريين

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

الضرب الداخلي

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

يكون المتجهان متعامدان اذا كان حاصل الضرب الداخلي صفر

الواجب المنزلي