بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللهم إنا نسألك علماً نافعاً وعملاً متقبلاً اللهم يا معلم آدم علمنا ويا مفهم سليمان فهمنا يا مؤتى لقمان الحكمة آتنا الحكمة وفصل الخطاب.

رب اجعل هذا البلد آمنا مطمئنا و سائر بلاد المسلمين

قدرات

ماهو نصف العدد $٢^{١٠}$

أ $١^{٥}$ ب $١^{١٠}$ ج $٢^{٩}$ د $٢^{٥}$

تحصيلى

ما الصورة الإحداثية لمتجه طوله 6 وزاوية اتجاهه مع الأفقي $150°$ ؟

Ⓐ $\langle -3\sqrt{3}, 3 \rangle$ Ⓑ $\langle 3, -3\sqrt{3} \rangle$

Ⓒ $\langle 3, 3\sqrt{3} \rangle$ Ⓓ $\langle 3\sqrt{3}, -3 \rangle$

درست في السابق

درست عمليتي الجمع
والضرب في عدد حقيقي
على المتجهات هندسيًّا
وجبريًّا. (الدرس 2–1)

المتجهات

الفصل الأول

01
مقدمة في المتجهات

02
المتجهات في المستوى الاحداثي

03
الضرب الداخلي

04
المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

05
الضرب الداخلي و الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

الأهداف

أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

المفردات

الضرب الداخلي

dot product

المتجهان المتعامدان

Orthogonal vectors

الشغل

work

الضرب الداخلي

Dot Product

لماذا ؟

تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

مفهوم أساسي

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

قراءة الرياضيات

الضرب القياسي

يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان** .

مفهوم أساسي **المتجهان المتعامدان**

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

01

استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

مثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين **u , v**، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$

1B) $\mathbf{u} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6 \rangle$

تدرب وحل المسائل

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين **u** , **v**، ثم تحقق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$

02

استعمال الضرب الداخلي
لإيجاد طول متجه

نظريَّة

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$$ الضرب الداخلي

$$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$$ اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$$= \lvert\mathbf{u}\rvert^2$$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lvert\mathbf{u}\rvert$

مثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

(2A $b = \langle 12, 16 \rangle$

(2B $c = \langle -1, -7 \rangle$

تدرب وحل المسائل

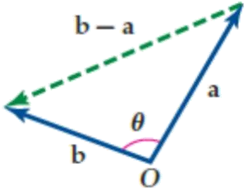
استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى.

8) $\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle$

03

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

مفهوم أساسي الزاوية بين متجهين



إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

البرهان

إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2$	قانون جيوب التمام
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$	$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	خاصية التوزيع للضرب الداخلي
$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
$-2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	بطرح $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ من الطرفين
$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$	بقسمة الطرفين على $-2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$

إرشادات للدراسة

المتجهات المتعامدة والمتجهات المتوازية

يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما $90°$. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$.

مثال 3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

(3B $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle , \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

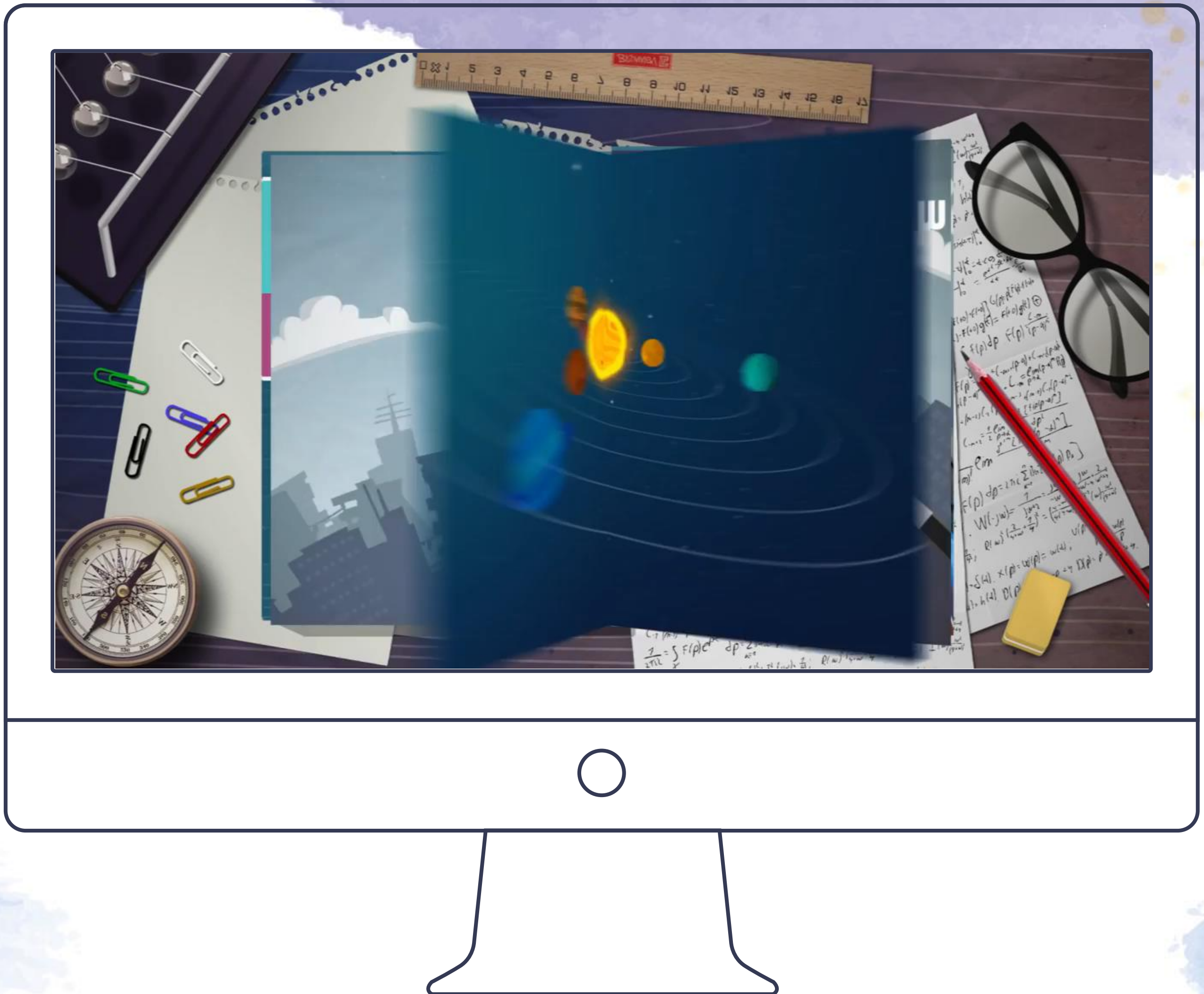
تدرب وحل المسائل

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين **u , v** في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ. (مثال 3)

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

04

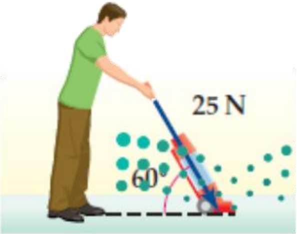
حساب الشغل



مثال 4 من واقع الحياة

حساب الشغل

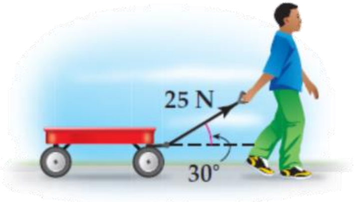
تحقق من فهمك



4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض °60 ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟

طاقة خروج

عربة : يسحب أحمد عربةً بقوةٍ مقدارها 25 N ، وبزاوية °30 مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 3-1)



a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة 150 m، قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

شكرا لكن

لا تنسا حل الواجب