في الصباح تتجدد الطموحات والآمال والعزيمة، دائماً الصباحات للناجحين

# المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

# رياضيات ٦

# ثالث ثانوي

shikhah_math

شيخة المرزوقي
MATHEMATICS

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

# موضوع الدرس : المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

## فيما سبق

درست المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًا وجبريًا. الدرس (1–1)

## والآن

- أعيِّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أعبِّرُ عن المتجهات جبريًا، وأُجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

## المفردات

نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد
three-dimensional coordinate system

المحور z
$z$-axis

الثُمن
octant

الثلاثي المرتب
ordered triple

shikhah_math

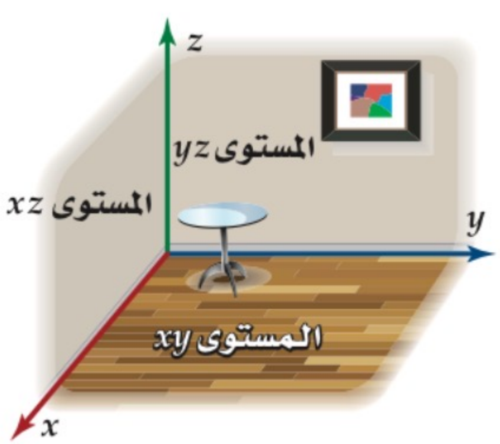
شيخة المرزوقي MATHEMATICS

# موضوع الدرس : المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

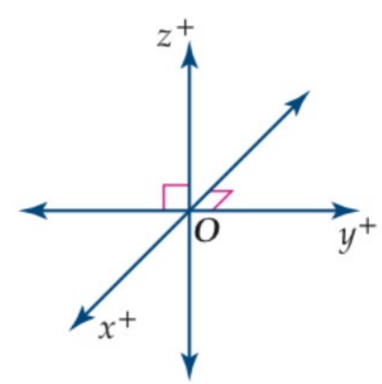
## لماذا:

لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.

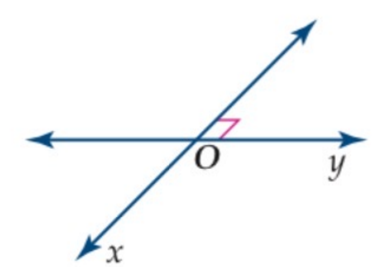
**الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد** المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطَّي أعداد متعامدين، هما المحور $x$ والمحور $y$، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاطٍ في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**؛ لتعيين نقطةٍ في الفضاء، فنبدأ بالمستوى $xy$، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل 1.4.1، ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور $z$** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين $x$، $y$ كما في الشكل 1.4.2. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy, yz, xz، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمَّى كلٌّ منها **الثُّمُن**، ويمكن تمثيل الثُّمُن الأول بجزء الحجرة في الشكل 1.4.3.




الشكل 1.4.3




الشكل 1.4.2




الشكل 1.4.1

تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية $(x, y, z)$، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيِّن أولًا النقطة $(x, y)$ في المستوى $x\,y$، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور $z$، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها $z$.

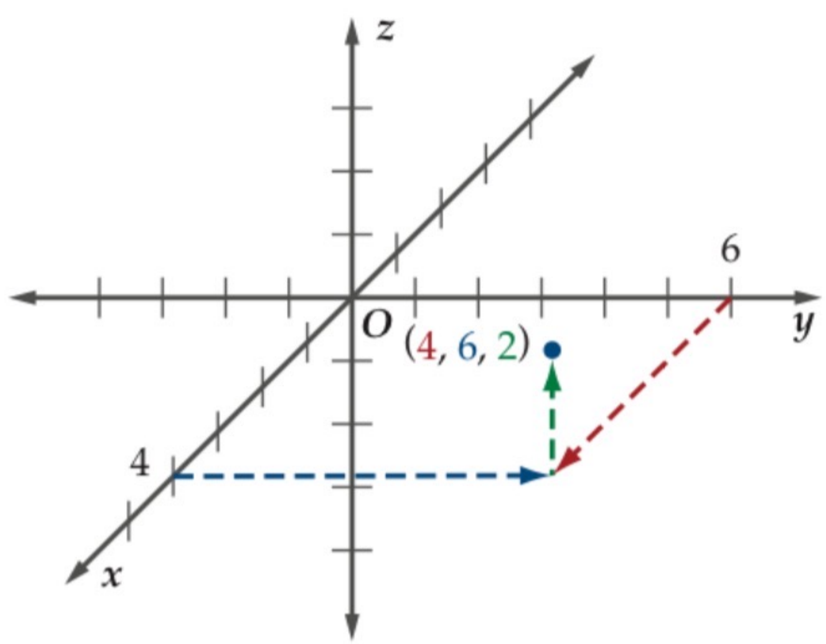
## مثال ١

## تعيين نقطة في الفضاء

عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

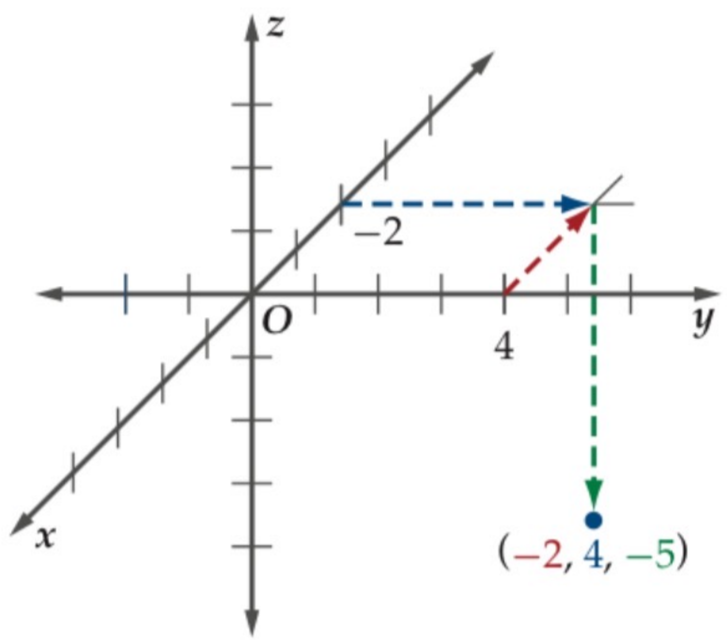
a) $(4, 6, 2)$

عيّن $(4, 6)$ في المستوى $xy$ بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد وحدتين أعلى الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور $z$، كما في الشكل أدناه.




b) $(-2, 4, -5)$

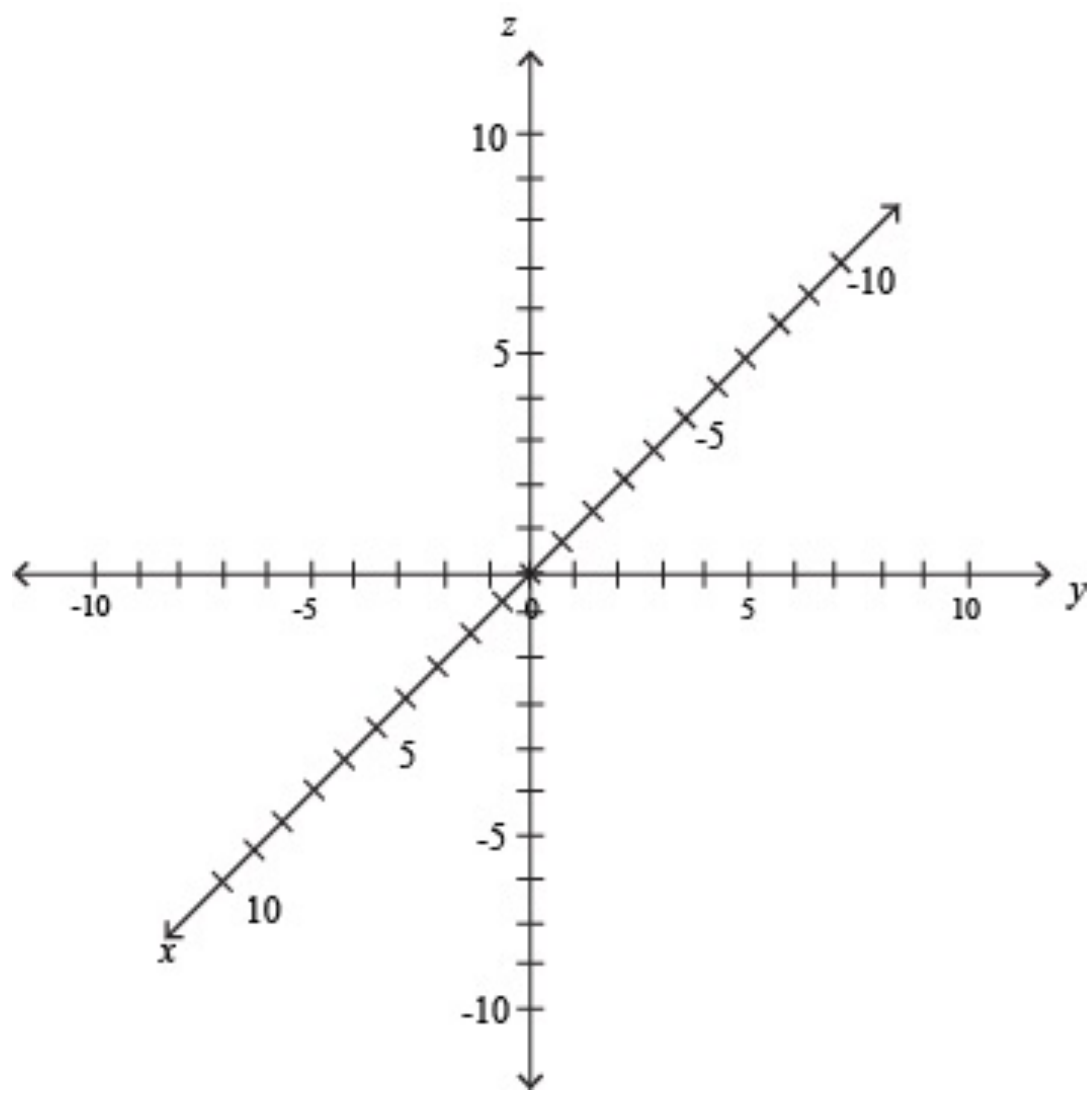
عيّن $(-2, 4)$ في المستوى $xy$ بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد 5 وحداتٍ أسفل الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور $z$، كما في الشكل أدناه.



## تحقق من فهمك

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

**1A)** $(-3, -4, 2)$ **1B)** $(3, 2, -3)$ **1C)** $(5, -4, -1)$




### إرشادات للدراسة

**تدريج المحاور**

تذكر أن التدريج في المحاور الثلاثة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد متساوٍ.

# موضوع الدرس : المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تشبهان عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

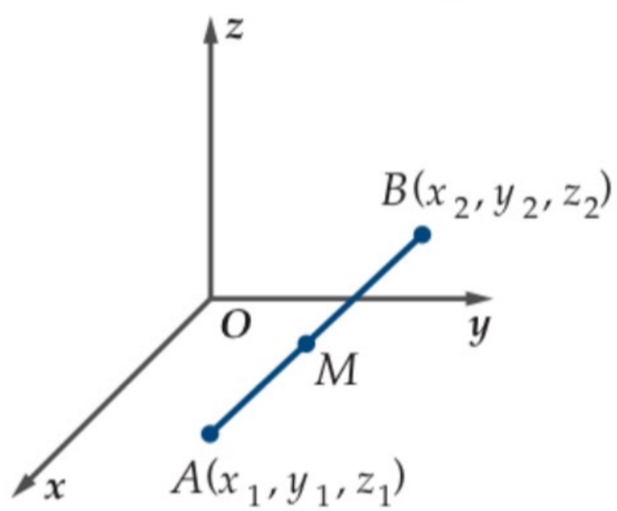
## مفهوم أساسي صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف $M$ لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

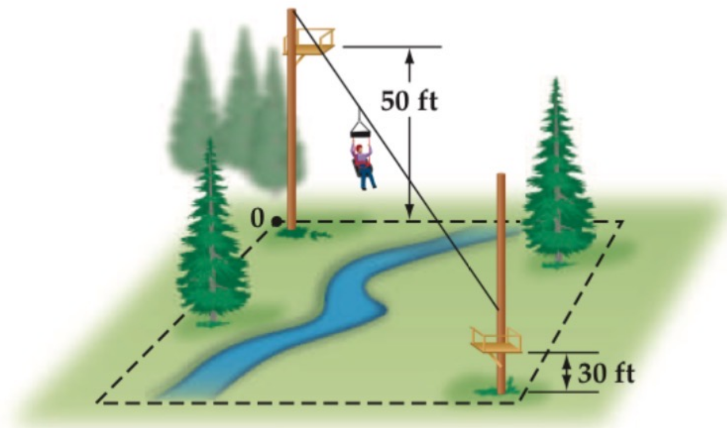
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



مثال ٢ من واقع الحياة

## المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء

**رحلة :** تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: (10, 12, 50) , (70, 92 , 30)، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:




**a)** أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتَين إلى أقرب قدمٍ.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ صيغة المسافة

$$= \sqrt{(70 - 10)^2 + (92 - 12)^2 + (30 - 50)^2}$$ $(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$ , $(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$

$$\approx 101.98$$ بسّط

أي أننا نحتاج إلى حبلٍ طوله 102 ft تقريبًا للربط بين المنصَّتين.

**b)** أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

استعمل صيغة نقطة المنتصف في الفضاء .

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$ صيغة المنتصف

$$= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right)$$ $(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$ , $(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$

$$= (40, 52, 40)$$

أي أن إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين هي (40, 52, 40)

**الربط مع الحياة**

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصًا في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ .

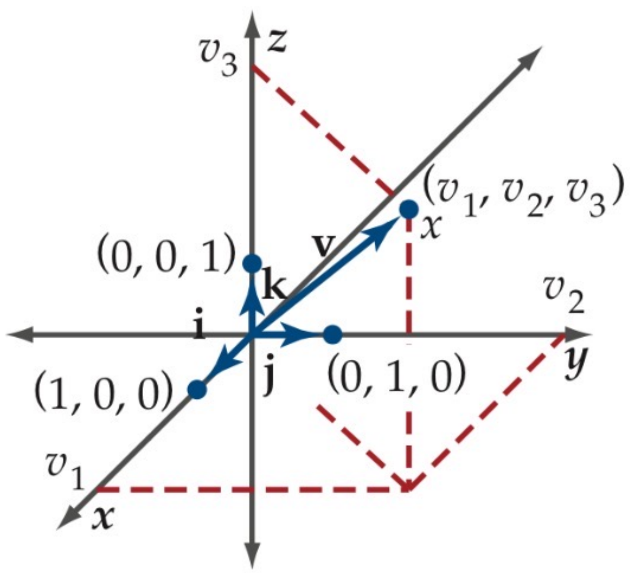
## تحقق من فهمك

2) **طائرات:** تفرض أنظمة السلامة ألّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: $(300, 150, 30000)$ , $(450, -250, 28000)$، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

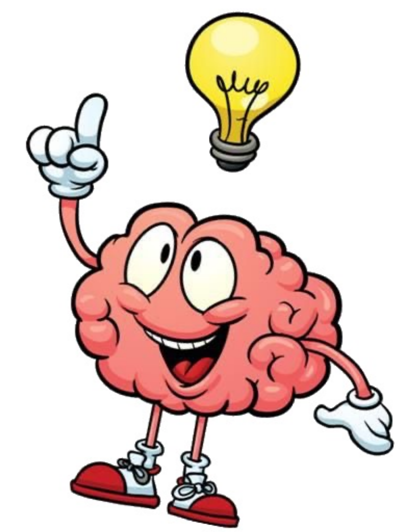
**A)** هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

**B)** إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا




الشكل 1.4.4



**المتجهات في الفضاء** إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت $(v_1, v_2, v_3)$ نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ،كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ ، كما في الشكل 1.4.4 ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$ .

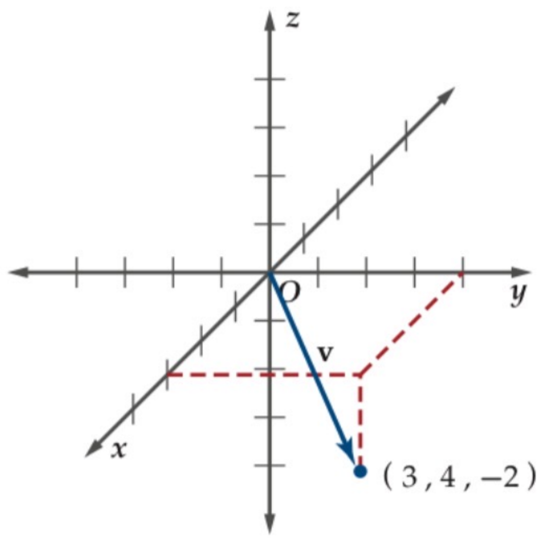
مثال ٣

## تعيين متجه في الفضاء

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

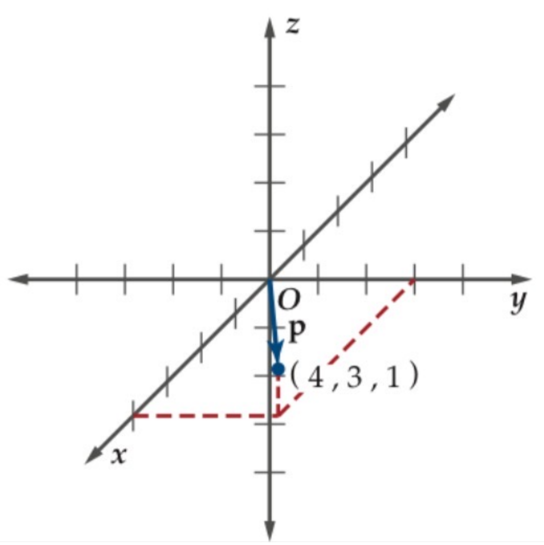
(a $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2\rangle$

عيِّن النقطة $(3, 4, -2)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{v}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(3, 4, -2)$ نقطة نهايته.




(b $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

عيِّن النقطة $(4, 3, 1)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{p}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(4, 3, 1)$ نقطة نهايته.

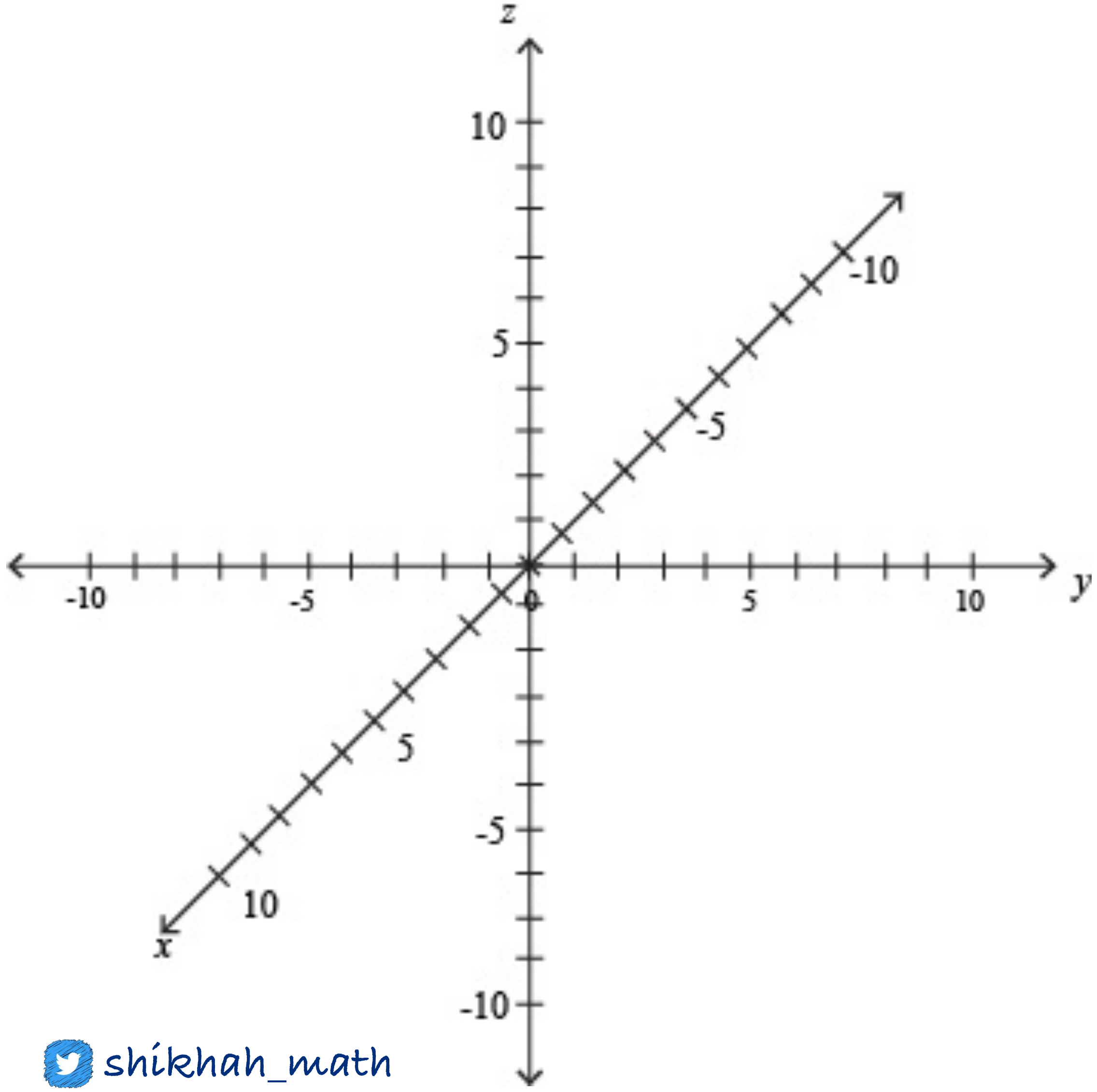


تحقق من فهمك

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$



إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح ، والضرب في عدد حقيقي كما هي الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

**مفهوم أساسي** **العمليات على المتجهات في الفضاء**

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان $k$ عددًا حقيقيًّا ، فإن :

**جمع متجهين** $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

**طرح متجهين** $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

**ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ** $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

## مثال ٤

## العمليات على المتجهات في الفضاء

**إرشادات للدراسة**

**العمليات على المتجهات**
خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$ :

a) $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$ عوّض

$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle$ اضرب متجهًا في عدد حقيقي

$= \langle 8, -24, 18 \rangle$ اجمع المتجهين

b) $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$ عوّض

$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$ اضرب متجهٍ في عددٍ حقيقي

$= \langle 9, -10, -7 \rangle$ اجمع المتجهات

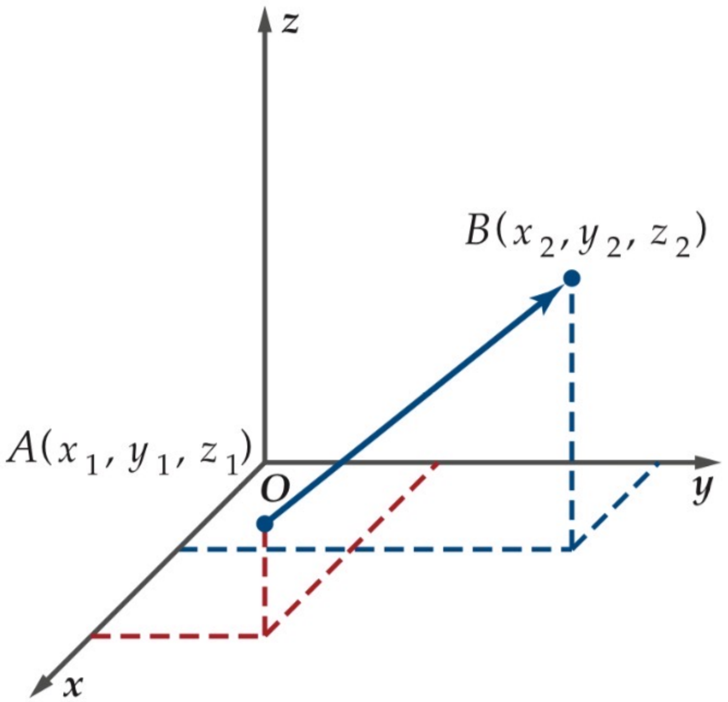
تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$ :

**4A)** $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$

**4B)** $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$

# موضوع الدرس : المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد




وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ ، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

## مثال ٥

## التعبير عن المتجهات في الفضاء جبرياً

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$، ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ .

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

الصورة الإحداثية لمتجه

$$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1 \rangle = \langle 7, 8, -7 \rangle$$

$(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1), (x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

وباستعمال الصورة الإحداثية، فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2} = 9\sqrt{2}$$

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$

ويستعمل هذا الطول والصورة الإحداثية؛ لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي:

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

متجه وحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$$= \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{-7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$$

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$ , $|\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

## تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overline{AB}$ في كلّ مما يأتي:

**(5A** $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$

**(5B** $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

مسائل مهارات التفكير العليا

**53) تحدٍّ:** إذا كانت $M$ هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $M_1M$.

مسائل مهارات التفكير العليا

**54)** **اكتب:** اذكر موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر منطقية، وآخر يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد أكثر منطقية.