الفصل 2

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة
Polar Coordinates and Complex Numbers

فيما سبق:

درست القطوع المخروطية ومعادلاتها وتمثيلها بيانيًّا.

والآن:

- أُمثّلُ الإحداثيات القطبية بيانيًّا.
- أحولُ بين الإحداثيات والمعادلات الديكارتية والقطبية.
- أكتب الأعداد المركبة على الصورة القطبية والصورة الديكارتية وأحول بينهما.

لماذا؟

تصاميم هندسية: يمكن استعمال المعادلات القطبية في عمل تصاميم هندسية فمثلًا لوحة سهام تظهر عليها المواقع بوصفها أعدادًا مركبة على الصورتين القطبية والديكارتية. كما يمكن استعمالها لنمذجة أنماط الصوت التي تساعد على تحديد وضعية تجهيزات المسرح، مثل: السماعات ومكبرات الصوت، وتحديد قوة الصوت ومستوى التسجيل.

قراءة سابقة: اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل؛ لتساعدك على التنبؤ بالأفكار التي ستتعلمها في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 2

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

اختبار سريع

ارسم كلًّا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

1) $200°$

2) $-45°$

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل من الزوايا الآتية، ومثِّلهما في الوضع القياسي:

3) $165°$

4) $-10°$

5) $\frac{4\pi}{3}$

6) $-\frac{\pi}{4}$

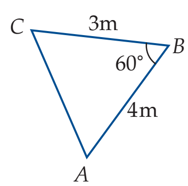
حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات في كل مما يأتي:

7) $-60°$

8) $\frac{3\pi}{2}$

9) أوجد القيمة الدقيقة لـِ $\sin 15$ باستعمال متطابقة الفرق بين زاويتين.

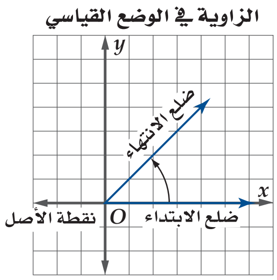
10) أوجد طول الضلع AC في المثلث المرسوم أدناه (قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة).



مراجعة المفردات

ضلع الابتداء للزاوية (Initial Side of an Angle)
الضلع المنطبق على المحور x عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.

ضلع الانتهاء للزاوية (Terminal Side of an Angle)
الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.



قياس الزاوية (Measure of an Angle)
يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

متطابقات المجموع والفرق (Sum and Difference Identities)

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

2-1

الإحداثيات القطبية
Polar Coordinates

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست الزوايا الموجبة والسالبة ورسمتها في الوضع القياسي. (مهارة سابقة)

والآن:

- أُمثّل نقاطًا بالإحداثيات القطبية.
- أُمثّل بيانيًا معادلات قطبية بسيطة.

المفردات:

نظام الإحداثيات القطبية polar coordinate system

القطب pole

المحور القطبي polar axis

الإحداثيات القطبية polar coordinates

المعادلة القطبية polar equation

التمثيل القطبي polar graph

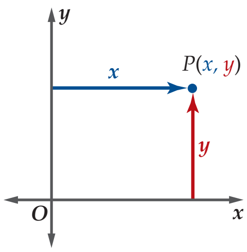
لماذا؟

يَستعملُ مراقبو الحركة الجوية أنظمةَ رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات، والحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة. وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات الأخرى، والتضاريس الأرضية. ويستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة؛ لتمثيل موقع الطائرة. ويقوم المراقبون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين.

تمثيل الإحداثيات القطبيّة لقد تعلمتَ التمثيلَ البياني لمعادلات معطاة في نظام الإحداثيات الديكارتيّة (المستوى الإحداثي). وعندما يحدد مراقبو الحركة الجوية موقع الطائرة باستعمال المسافات والزوايا، فإنهم يستعملون **نظام الإحداثيات القطبية** (المستوى القطبي).

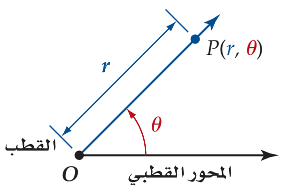
في نظام الإحداثيات الديكارتية، المحوران x, y هما المحوران الأفقي والرأسي على الترتيب، وتُسمَّى نقطة تقاطعهما نقطة الأصل، ويرمز لها بالحرف O. ويُعيَّنُ موقع النقطة P بالإحداثيات الديكارتية من خلال زوج مرتب (x, y)، حيث x, y المسافتان المتّجهتان الأفقية، والرأسية على الترتيب من المحورين إلى النقطة. فمثلًا، تقع النقطة $(1, \sqrt{3})$ على بُعد وحدة واحدة إلى يمين المحور y، وعلى بُعد $\sqrt{3}$ وحدة إلى أعلى المحور x.

نظام الإحداثيات الديكارتية



في نظام الإحداثيات القطبية، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تُسمى **القطب**. و**المحور القطبي** هو نصف مستقيم يمتد أفقيًا من القطب إلى اليمين. يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال **الإحداثيات** (r, θ)، حيث r المسافة المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا)، فمن الممكن أن تكون r سالبة) من القطب إلى النقطة P، و θ الزاوية المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا) من المحور القطبيّ إلى $\overrightarrow{OP}$.

نظام الإحداثيات القطبية



القياس الموجب للزاوية θ يعني دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي، في حين يعني القياس السالب دورانًا باتجاه عقارب الساعة، ولتمثيل النقطة P بالإحداثيات القطبيّة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ إذا كانت r موجبة. أما إذا كانت سالبة، فإن P تقع على نصف المستقيم المقابل (الامتداد) لضلع الانتهاء للزاوية θ.

مثال 1 تمثيل الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

a) $A(2, 45°)$

b) $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$

$C(3, -30°)$ (c

تحقق من فهمك

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

(1A $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ (1B $E(2.5, 240°)$ (1C $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

تُعيِّن الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي الذي يتخذ شكلًا دائريًّا، كما تُعيِّنُ الإحداثيات الديكارتية في المستوى الإحداثي الذي يتخذ شكلًا مستطيلًا.

مثال 2 تمثيل النقاط في المستوى القطبي

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

(a $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$

(b $(-3.5, 150°)$

تحقق من فهمك

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

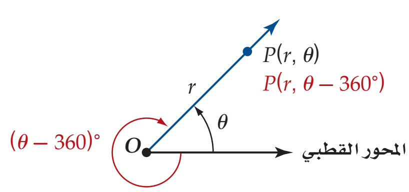
(2A $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ (2B $S(-2, -135°)$

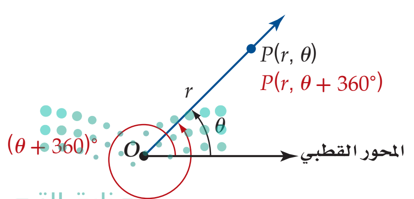
إرشادات للدراسة

القطب

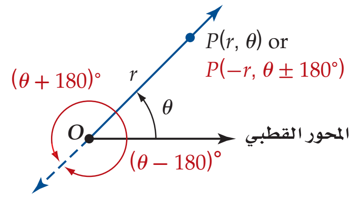
يمكن تمثيل القطب بالنقطة $(0, \theta)$، حيث θ أي زاوية.

في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرائق؛ وعليه فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ أيضًا كما هو مبيّن أدناه.





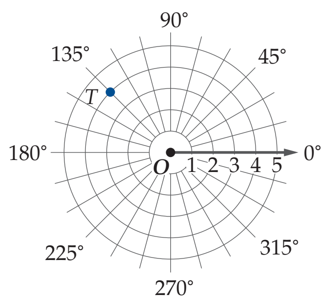
وكذلك لأن r مسافة متجهة، فإن (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$ ، أو $(-r, \theta \pm \pi)$ تمثِّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.



وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n+1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ مقيسة بالراديان، وكان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n+1)\pi)$.

مثال 3 تمثيلات قطبية متعددة

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$ ، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \le \theta \le 360°$ ، أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

3A) $(5, 240°)$

3B) $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية تُسمى المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية **معادلةً قطبيةً**. فمثلًا : $r = 2\sin\theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل القطبي** هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

لقد تعلمت سابقًا كيفية تمثيل المعادلات في نظام الإحداثيات الديكارتية (في المستوى الإحداثي). ويُعدُّ تمثيل المعادلات مثل $x = a$ ، و $y = b$ أساسيًّا في نظام الإحداثيات الديكارتية. وبالمثل فإن التمثيل البياني لمعادلات قطبية مثل $r = k$ ، و $\theta = h$ ، حيث k, h عددان حقيقيان، يُعَدُّ أساسيًّا في نظام الإحداثيات القطبية.

مثال 4 التمثيل البياني للمعادلات القطبية

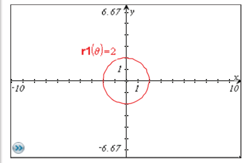
مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

a) $r = 2$

إرشاد تقني

تمثيل المعادلات القطبية

لتمثيل المعادلة القطبية $r = 2$ على الحاسبة البيانية TI-nspire، اضغط على أولًا ثم menu و 3:إدخال / تحرير الرسم البياني وغيِّر وضع الرسم إلى 4:قطبي، لاحظ أن المتغيِّر التابع تغيَّر من $f(x)$ إلى r، والمتغيِّر المستقل من x إلى θ . مثِّل $r = 2$.



$\theta = \frac{\pi}{6}$ (b

تحقق من فهمك

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

$r = 3$ (4A

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ (4B

يمكنُ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستعمال الصيغة الآتية.

تنبيه!

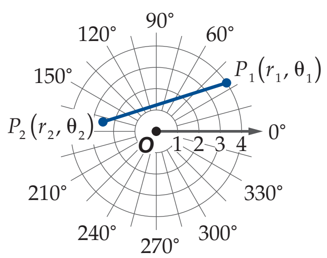
تهيئة الحاسبة البيانيّة

عند استعمال صيغة المسافة القطبية، تأكد من ضبط الحاسبة البيانية على وضعية الدرجات، أو الراديان بحسب قياسات الزوايا المعطاة.

مفهوم أساسي — المسافة بالصيغة القطبية

افترض أن $P_1(r_1, \theta_1), P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2 ، بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



سوف تبرهن هذه الصيغة في السؤال 56

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد المسافة باستعمال الصيغة القطبية

حركة جوية: يتابع مراقبُ الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $A(5, 310°), B(6, 345°)$ ، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.

a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

b) إذا كانت تعليمات الطيران تتطلب أن تكون المسافة بين الطائرتين أكثر من 3 mi ، فهل تخالف هاتان الطائرتان هذه التعليمات؟ وَضِّح إجابتك.

الربط مع الحياة

لقد طوّرت ألمانيا جهاز رادار عام 1936 يستطيع رصد الطائرات ضمن دائرة نصف قطرها 80 mi .

تحقق من فهمك

5) **قوارب:** يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(3, 65°), (8, 150°)$ ، حيث r بالأميال.

5A) فمثّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

5B) ما المسافة بين القاربين؟

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (المثالان 1 , 2)

1) $R(1, 120°)$ 2) $T(-2.5, 330°)$

3) $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$ 4) $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$

5) $B(5, -60°)$ 6) $D\left(-1, -\frac{5\pi}{3}\right)$

7) $G\left(3.5, -\frac{11\pi}{6}\right)$ 8) $C(-4, \pi)$

9) $M(0.5, 270°)$ 10) $W(-1.5, 150°)$

11) **رماية:** يتكون هدف في منافسة للرماية من 10 دوائر متحدة المركز. ويتدرج عدد النقاط المكتسبة من 1 إلى 10 من الحلقة الدائرية الخارجية إلى الدائرة الداخلية على الترتيب. افترض أن راميًا يستعمل هدفًا نصف قطره 120 cm، وأنه قد أطلق ثلاثة أسهم، فأصابت الهدف عند النقاط $(114, 45°)$, $(82, 315°)$, $(30, 240°)$. إذا كان لجميع الحلقات الدائرية السمك نفسه، ويساوي طول نصف قطر الدائرة الداخلية. (المثالان 1 , 2)

a) فمثِّل النقاط التي أصابها الرَّامي في المستوى القطبي.

b) ما مجموع النقاط التي حصل عليها الرَّامي؟

إذا كانت $-360° \leq \theta \leq 360°$ ، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

12) $(1, 150°)$ 13) $(-2, 300°)$

14) $\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$ 15) $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$

16) $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$ 17) $\left(-5, -\frac{4\pi}{3}\right)$

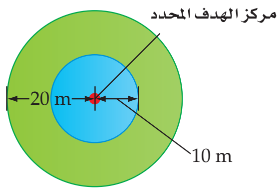
18) $(2, -30°)$ 19) $(-1, -240°)$

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا: (مثال 4)

20) $r = 1.5$ 21) $\theta = 225°$

22) $\theta = -\frac{7\pi}{6}$ 23) $r = -3.5$

24) **القفز بالمظلات:** في مسابقة لتحديد دقة موقع الهبوط، يحاول مظلي الوصول إلى «مركز الهدف المحدد»؛ ومركز الهدف عبارة عن دائرة حمراء طول قطرها 2 m. كما يشمل الهدف دائرتين طولا نصفي قطريهما 10 m و 20 m . (مثال 4)



a) اكتب 3 معادلات قطبية تمثِّل حدود المناطق الثلاث للهدف.

b) مَثِّل هذه المعادلات في المستوى القطبي.

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي. (مثال 5)

25) $(2, 30°), (5, 120°)$ 26) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$

27) $(6, 45°), (-3, 300°)$ 28) $\left(7, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$

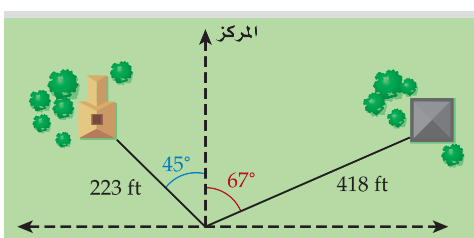
29) $\left(-5, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ 30) $(4, -315°), (1, 60°)$

31) $(-2, -30°), (8, 210°)$ 32) $\left(-3, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$

33) $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-5, \frac{7\pi}{6}\right)$ 34) $(7, -90°), (-4, -330°)$

35) $\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(4, -\frac{3\pi}{4}\right)$ 36) $(-5, 135°), (-1, 240°)$

37) **مسّاحون:** أراد مسَّاح تحديد حدود قطعة أرض، فحدّد أثرًا يبعُد 223 ft ، بزاوية °45 إلى يسار المركز ، وأثرًا آخر على بُعد 418 ft ، بزاوية °67 إلى يمين المركز، كما في الشكل أدناه، أوجد المسافة بين الأثرين. (مثال 5)



38) **مراقبة:** تراقب آلة تصوير مثبتة منطقة جبلية تمثِّل جزءًا من دائرة ، وتُحدَّدُ بالمتباينتين $0 \leq r \leq 40$, $-60° \leq \theta \leq 150°$ ، حيث r بالأمتار.

a) مثِّل في المستوى القطبي المنطقة التي يمكن لآلة التصوير مراقبتها.

b) أوجد مساحة المنطقة (مساحة القطاع الدائري تساوي: $\frac{\text{قياس زاوية القطاع بالدرجات}}{360°}$ × مساحة الدائرة).

إذا كانت $0 \leq \theta \leq 180°$ ، فأوجد زوجًا آخر من الإحداثيات القطبيّة لكل نقطة مما يأتي:

39) $(5, 960°)$

40) $\left(-2.5, \frac{15\pi}{6}\right)$

41) $\left(4, \frac{33\pi}{12}\right)$

42) $(1.25, -920°)$

43) $\left(-1, -\frac{21\pi}{8}\right)$

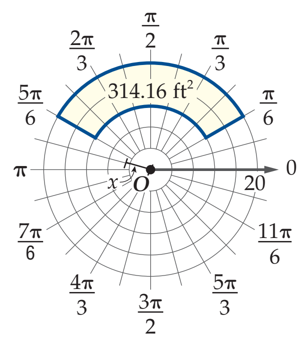
44) $(-6, -1460°)$

45) **مسرح:** يلقي شاعر قصيدة في مسرح. ويمكنُ وصف المسرح بمستوى قطبي، بحيث يقف الشاعر في القطب باتجاه المحور القطبي. افترض أن الجمهور يجلس في المنطقة المحددة بالمتباينتين $30 \leq r \leq 240$ ، $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ، حيث r بالأقدام.

a) مثِّل المنطقة التي يجلس بها الجمهور في المستوى القطبي.

b) إذا كان كل شخص بحاجة إلى $5\,ft^2$، فكم مقعداً يتسع له المسرح؟

46) **أمن:** يضيء مصباح مراقبة مثبت على سطح أحد المنازل منطقة على شكل جزء من قطاع دائري محدَّد بالمتباينتين $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ ، $x \leq r \leq 20$ ، حيث r بالأقدام. إذا كانت مساحة المنطقة $314.16\,ft^2$ ، كما هو مبين في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x .



أوجد الإحداثي المجهول الذي يحقِّق الشروط المعطاة في كل مما يأتي:

47) $P_1 = (3, 35°), P_2 = (r, 75°), P_1P_2 = 4.174$

48) $P_1 = (5, 125°), P_2 = (2, \theta), P_1P_2 = 4, 0 \leq \theta \leq 180°$

49) $P_1 = (3, \theta), P_2 = \left(4, \frac{7\pi}{9}\right), P_1P_2 = 5, 0 \leq \theta \leq \pi$

50) $P_1 = (r, 120°), P_2 = (4, 160°), P_1P_2 = 3.297$

51) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستقصي العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

a) **بيانيًا:** عيِّن $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ في المستوى القطبي، وارسم نظام الإحداثيات الديكارتية فوق المستوى القطبي بحيث تنطبق نقطة الأصل على القطب، والجزء الموجب من المحور x على المحور القطبي. وبالتالي سينطبق المحور y على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$. ارسم مثلثًا قائمًا بوصل A مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x .

b) **عدديًا:** احسب طولي ضلعي الزاوية القائمة باستعمال طول الوتر والمتطابقات المثلثية.

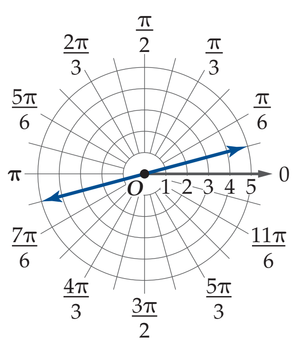
c) **بيانيًا:** عيِّن $B\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ على المستوى القطبي نفسه، وارسم مثلثًا قائمًا بوصل B مع نقطة الأصل، وارسم منها عمودًا على المحور x ، واحسب طولي ضلعي الزاوية القائمة.

d) **تحليليًا:** كيف ترتبط أطوال أضلاع المثلث بالإحداثيات الديكارتية لكل نقطة؟

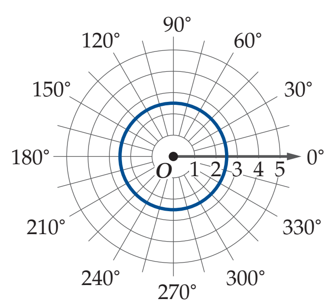
e) **تحليليًا:** اشرح العلاقة بين الإحداثيات القطبية (r, θ) ، والإحداثيات الديكارتية (x, y) .

اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي:

52)



53)



مسائل مهارات التفكير العليا

54) تبرير: وضّح لماذا لا يكون ترتيب النقاط في معادلة المسافة القطبية مهمًّا، أو بعبارة أخرى، لماذا يمكنك اختيار أي نقطة لتكون P_1 ، والنقطة الأخرى لتكون P_2؟

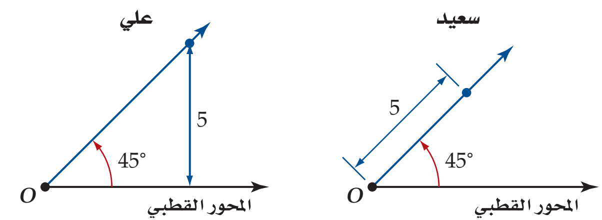
55) تحدٍّ: أوجد زوجًا مُرَتَّبًا من الإحداثيات القطبية ؛ لتمثيل النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-3, -4)$.

56) برهان: أثبت أن المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1), P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1 P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

(**إرشاد:** استعمل قانون جيوب التمام).

57) تبرير: وضّح ماذا يحدث لمعادلة المسافة المعطاة بالصيغة القطبية عندما يكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. فسِّر هذا التغيّر.

58) اكتشف الخطأ: قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة $(5, 45°)$ في المستوى القطبي كما هو مبيّن أدناه. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



59) اكتب: خمِّن سبب عدم كفاية الإحداثيات القطبية لتحديد موقع طائرة بشكل دقيق.

مراجعة تراكمية

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u , v في كل مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كان u , v متعامدين أولًا: (الدرس 5-1)

60) $\mathbf{u} = \langle 4, 10, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1, 7 \rangle$

61) $\mathbf{u} = \langle -5, 4, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, -9, 8 \rangle$

62) $\mathbf{u} = \langle -8, -3, 12 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -6, 0 \rangle$

إذا كان $\mathbf{a} = \langle -4, 3, -2 \rangle, \mathbf{b} = \langle 2, 5, 1 \rangle, \mathbf{c} = \langle 3, -6, 5 \rangle$. فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 4-1)

63) $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

64) $-2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 5\mathbf{c}$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u , v لكل مما يأتي: (الدرس 5-1)

65) $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 6, -8 \rangle$

66) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

67) $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, -6, 9 \rangle$

أوجد إحداثيات مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر الآتية: (مهارة سابقة)

68) $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

69) $(x + 1)^2 + y^2 = 16$

70) $x^2 + y^2 = 1$

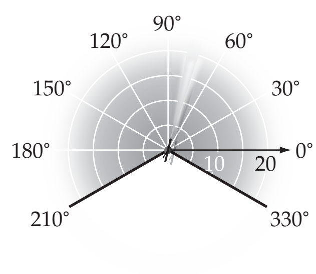
تدريب على اختبار

71) أيُّ المتجهات الآتية يمثِّل $\overrightarrow{RS}$ ، حيث إن نقطة البداية $R(-5, 3)$ ، ونقطة النهاية $S(2, -7)$؟

A $\langle 7, -10 \rangle$ **C** $\langle -7, 10 \rangle$

B $\langle -3, 10 \rangle$ **D** $\langle -3, -10 \rangle$

72) يستطيع رشاش ماء رشّ منطقة على شكل قطاع دائري يمكن تحديدها بالمتباينتين $0 \le r \le 20$, $-30° \le \theta \le 210°$ ، حيث r بالأقدام. ما المساحة التقريبية لهذه المنطقة؟



A $821\ ft^2$ **C** $852\ ft^2$

B $838\ ft^2$ **D** $866\ ft^2$

2-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

Polar and Rectangular Forms of Equations

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ تمثيل النقاط وبعض المعادلات القطبية.

(الدرس 1–2)

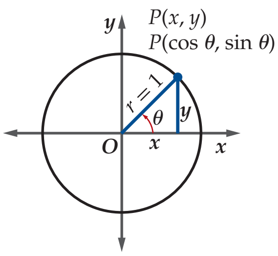
والآن:

- أحوِّلُ بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
- أحوِّلُ المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

لماذا؟

يبعث مِجَس مُثبت إلى رجل آلي أمواجًا فوق صوتية على شكل دوائر كاملة، وعندما تصطدم الأمواج بجسم، فإنَّ المجس يستقبل إشارة، ويقوم بحساب بُعد الجسم عن مقدمة الرجل الآلي بدلالة المسافة المتجهة r ، والزاوية المتجهة θ . ويوصل المجس هذه الإحداثيات القطبية إلى الرَّجل الآلي الّذي يحولها إلى الإحداثيات الديكارتية؛ ليتمكن من تعيينها على خريطة داخلية.

الإحداثيات القطبية والديكارتية يمكن كتابة إحداثيات النقطة $P(x, y)$ الواقعة على دائرة الوحدة، والمقابلة لزاوية θ على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ؛ لأن



$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

فإذا كان طول نصف قطر دائرة عددًا حقيقيًّا r بدلًا من 1، فإنه يمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة r, θ على النحو الآتي:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

اضرب في r

$$r\cos\theta = x \quad , \quad r\sin\theta = y$$

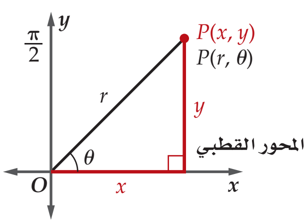
وإذا نظرنا للمستوى الديكارتي على أنه مستوى قطبي، بحيث ينطبق المحور القطبي على الجزء الموجب من المحور x ، والقطب على نقطة الأصل، فإنه يصبح لدينا وسيلة لتحويل الإحداثيّات القطبية إلى الإحداثيّات الديكارتيّة.

مفهوم أساسي **تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية**

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ) ، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.



مثال 1 تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلِّ نقطة مما يأتي:

a) $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

$Q(-2, 135°)$ (b

$V(3, -120°)$ (c

تحقق من فهمك

حوِّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

(1A $R(-6, -120°)$ (1B $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ (1C $T(-3, 45°)$

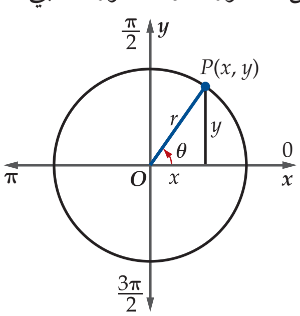
إرشادات للدراسة

تحويل الإحداثيات

إن العملية المتبعة لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية هي ذاتُها العملية المتبعة في إيجاد طول المتجه واتجاهه.

ولكتابة زوج الإحداثيات الديكارتية بالصيغة القطبية، فإنك بحاجة إلى إيجاد المسافة المتجهة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل أو القطب، و قياس الزاوية المتجهة التي يصنعها r مع الجزء الموجب من المحور x أو المحور القطبيّ.

استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل.



$$r^2 = x^2 + y^2$$ نظرية فيثاغورس

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

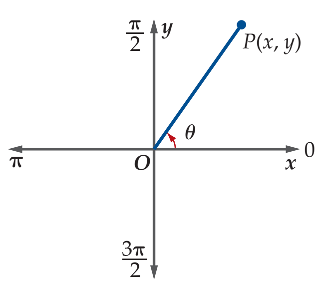
ترتبط الزاوية θ بكل من x, y من خلال دالة الظل، ولإيجاد الزاوية θ:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$ تعريف الظل

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$$ دالة معكوس الظل

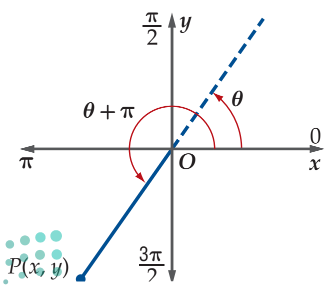
تذكّر أن الدالة العكسيّة للظل معرّفة فقط على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ أو $(-90°, 90°)$ في نظام الإحداثيات الديكارتية.

وتُعطى قيم θ الواقعة في الربع الأول أو الرابع، أي عندما تكون $x > 0$، كما في الشكل **2.2.1** . وإذا كانت $x < 0$، فإن الزاوية تقع في الربع الثاني أو الثالث، لذا عليك إضافة π أو $180°$ (طول الدورة للدالة $y = \tan x$) إلى قياس الزاوية المعطاة بالدالة العكسيّة للظل كما في الشكل **2.2.2** .



$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ عندما $x > 0$

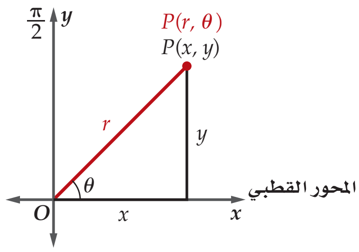
الشكل 2.2.1



$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + \pi$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + 180°$ عندما $x < 0$

الشكل 2.2.2

مفهوم أساسي — تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية



إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y) ، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$

وعندما $x < 0$ فإن:

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$$

أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$.

وعندما $x = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y > 0$

أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y < 0$

تذكَّر أن هناك عددًا لانهائيًّا من أزواج الإحداثيات القطبية للنقطة، والتحويل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية يعطي أحدها.

مثال 2 تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبيّة

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

a) $S(1, -\sqrt{3})$

b) $T(-3, 6)$

تحقق من فهمك

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

2A) $V(8, 10)$

2B) $W(-9, -4)$

في بعض ظواهر الحياة الطبيعية، قد يكون من المفيد أن تحوّل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية.

مثال 3 من واقع الحياة — التحويل بين الإحداثيات

رجل آلي: بالرجوع إلى فقرة «لماذا؟»، افترض أن الرَّجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسَّ قد رَصَدَ جسمًا عند النقطة $(5, 295°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها $(3, 7)$، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟

الربط مع الحياة

صممت وكالة ناسا رجلًا آليًا وزنه 3400 باوند، وطوله 12 ft، وطول ذراعه 11 ft؛ لأداء بعض المهام في الفضاء الخارجي.

تحقق من فهمك

3) **صيد الأسماك:** يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

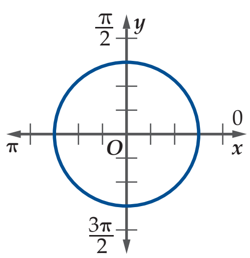
A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-2, 6)$، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟

المعادلات القطبية والديكارتية قد تحتاج في دراستك المستقبلية إلى تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس؛ وذلك لتسهيل بعض الحسابات. فبعض المعادلات الديكارتية المعقَّدة صورتها القطبية أسهل كثيرًا. لاحظ معادلة الدائرة على الصورة الديكارتية والقطبية كما في الشكل أدناه.

المعادلة على الصورة الديكارتية

$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة على الصورة القطبية

$r = 3$

وبشكلٍ مماثل فإن بعض المعادلات القطبية المعقَّدة صورتها الديكارتية أسهل كثيرًا، فالمعادلة القطبية $r = \frac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$ صورتها الديكارتية هي $2x - 3y = 6$

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة؛ إذ نعوض عن x بـ $r \cos \theta$، وعن y بـ $r \sin \theta$ ، ثم نبسِّط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.

مثال 4 تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

a) $(x-4)^2 + y^2 = 16$

b) $y = x^2$

إرشادات للدراسة

المتطابقات المثلثية

من المفيد أن تراجع المتطابقات المثلثية التي تعلمتها سابقًا؛ لمساعدتك على تبسيط الصورة القطبية للمعادلات الديكارتيّة.

تحقق من فهمك

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

4A) $x^2 + (y-3)^2 = 9$

4B) $x^2 - y^2 = 1$

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$$r^2 = x^2 + y^2 , \tan \theta = \frac{y}{x}, x = r \cos \theta , y = r \sin \theta .$$

مثال 5 تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

a) $\theta = \frac{\pi}{6}$

b) $r = 7$

c) $r = -5 \sin \theta$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

النقطتان $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ تقعان على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{6}$، والإحداثيات الديكارتية لهما $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$، فتكون معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين هي: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

تحقق من فهمك

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

5A) $r = -3$

5B) $\theta = \frac{\pi}{3}$

5C) $r = 3 \cos \theta$

تدرب وحل المسائل

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلٍّ نقطة مما يأتي: (مثال 1)

1) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

3) $(5, 240°)$

4) $(2.5, 250°)$

5) $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$

6) $(-13, -70°)$

7) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

8) $(-2, 270°)$

9) $(4, 210°)$

10) $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

11) $(7, 10)$

12) $(-13, 4)$

13) $(-6, -12)$

14) $(4, -12)$

15) $(2, -3)$

16) $(0, -173)$

17) $(1, 3)$

18) $(-14, 14)$

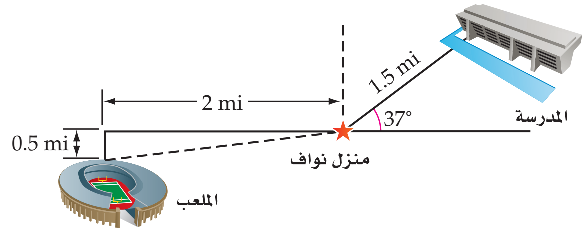
19) $(52, -31)$

20) $(3, -4)$

21) $(1, -1)$

22) $(2, \sqrt{2})$

23) **مسافات:** إذا كانت مدرسة نواف تبعُد 1.5 mi عن منزله، وتصنع زاوية مقدارها 53° شمال الشرق كما في الشكل أدناه، فأجب عن الفرعين a, b. (مثال 3)



a) إذا سلك نواف طريقًا للشرق ثم للشمال؛ كي يصل إلى المدرسة، فكم ميلًا يتحرك في كل اتجاه؟

b) إذا كان الملعب على بُعد 2 mi غربًا، و 0.5 mi جنوبًا، ومنزل نواف يمثِّل القطب، فما إحداثيات موقع الملعب على الصورة القطبية؟

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية: (مثال 4)

24) $x = -2$

25) $(x+5)^2 + y^2 = 25$

26) $y = -3$

27) $x = 5$

28) $(x-2)^2 + y^2 = 4$

29) $x^2 + (y+3)^2 = 9$

30) $y = \sqrt{3}x$

31) $x^2 + (y+1)^2 = 1$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية: (مثال 5)

32) $r = 3 \sin \theta$

33) $\theta = -\frac{\pi}{3}$

34) $r = 10$

35) $r = 4 \cos \theta$

36) $\tan \theta = 4$

37) $r = 8 \csc \theta$

38) $r = -4$

39) $\cot \theta = -7$

40) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

41) $r = \sec \theta$

42) **زلازل:** تُنمذَج حركة أمواج الزلازل بالمعادلة $r = 12.6 \sin \theta$، حيث r مقاسه بالأميال. اكتب معادلة أمواج الزلازل على الصورة الديكارتية. (مثال 5)

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

43) $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$

44) $r = 10 \csc\left(\theta + \frac{7\pi}{4}\right)$

45) $r = 3 \csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

46) $r = -2 \sec\left(\theta - \frac{11\pi}{6}\right)$

47) $r = 4 \sec\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)$

48) $r = \frac{5\cos\theta + 5\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

49) $r = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

50) $r = 4 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

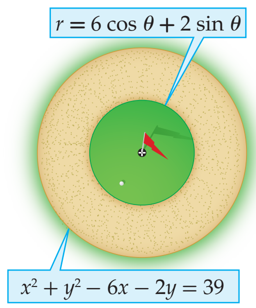
51) $6x - 3y = 4$

52) $2x + 5y = 12$

53) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$

54) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$

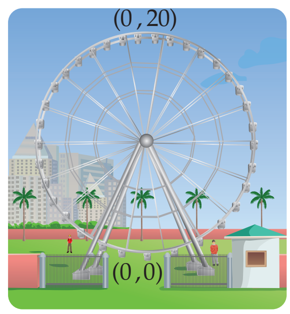
55) **جولف:** في أحد ملاعب الجولف، يحيط بثقب الهدف منطقة خضراء محاطة بمنطقة رملية، كما في الشكل أدناه. أوجد مساحة المنطقة الرملية على فرض أن الثقب يمثِّل القطب لكلتا المعادلتين، وأن المسافات تُقاس بوحدة الياردة.



56) **عجلة دوَّارة:** إذا كانت إحداثيات أدنى نقطة في عجلة دوَّارة $(0, 0)$، وأعلى نقطة فيها $(0, 20)$.

a) فاكتب معادلة العجلة الدوَّارة الموضحة بالشكل المجاور على الصورة الديكارتية.

b) اكتب المعادلة في الفرع **a** بالصيغة القطبية.



57) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تكتشف العلاقة بين الأعداد المركبة والإحداثيات القطبية.

a) **بيانيًا:** يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ في المستوى الديكارتي بالنقطة (a, b). مَثِّل العدد المركب $6 + 8i$ في المستوى الديكارتي.

b) **عدديًا:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع **a** .

c) **بيانيًا:** عزِّز إجابتك في الفرع **b** بتمثيل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

d) **بيانيًا:** مَثِّل بيانيًّا العدد المركب $-3 + 3i$ في المستوى الديكارتي.

e) **بيانيًا:** أوجد الإحداثيات القطبية للعدد المركب باستعمال الإحداثيات الديكارتية التي أوجدتها في الفرع **d**. ومَثِّل الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي.

f) **تحليليًا:** أوجد العبارات الجبرية التي تبيّن كيفية كتابة العدد المركب $a + bi$ بالإحداثيات القطبية.

مسائل مهارات التفكير العليا

58) **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من باسل وتوفيق كتابة المعادلة القطبية $r = \sin\theta$ على الصورة الديكارتية، فيعتقد توفيق أن الحل هو $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$، في حين يعتقد باسل أن الحل هو $y = \sin x$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

59) **تحدٍّ:** اكتب معادلة الدائرة $r = 2a\cos\theta$ بالصورة الديكارتية، وأوجد مركزها وطول نصف قطرها.

60) **اكتب:** اكتب تخمينًا يبيِّن متى يكون تمثيل المعادلة على الصورة القطبيّة أسهل من تمثيلها على الصورة الديكارتية، ومتى يكون العكس صحيحًا.

61) **برهان:** استعمل $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ؛ لإثبات أن $r = x\sec\theta, r = y\csc\theta$ ، حيث $\sin\theta \neq 0, \cos\theta \neq 0$.

62) **تحدٍّ:** اكتب المعادلة:

$$r^2(4\cos^2\theta + 3\sin^2\theta) + r(-8a\cos\theta + 6b\sin\theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

على الصورة الديكارتية. (**إرشاد:** فك الأقواس قبل تعويض قيم r^2، r . تمثّل المعادلة الديكارتية قطعًا مخروطيًّا).

مراجعة تراكمية

مَثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي. (الدرس 1-2)

63) $A(-2, 45°)$

64) $D(1, 315°)$

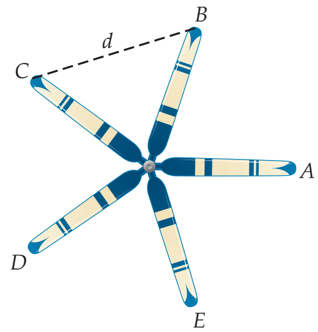
65) $C\left(-1.5, -\frac{4\pi}{3}\right)$

أوجد الزاوية بين المتّجهين u , v في كل مما يأتي: (الدرس 1-3)

66) $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -7\rangle$

67) $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 6\rangle$

68) طائرات: تتكون مروحة طائرة من 5 ريش، المسافة بين أطرافها المتتالية متساوية. ويبلغ طول كل ريشة منها 11.5 ft . (الدرس 1-2)



a) إذا كانت الزاوية التي تصنعها الشفرة A مع المحور القطبي °3، فاكتب زوجًا يمثِّل الإحداثيات القطبية لطرف كل شفرة، بفرض أن مركز المروحة ينطبق على القطب.

b) ما المسافة d بين رأسي شفرتين متتاليتين؟

حل كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام. (مهارة سابقة)

69) $x^2 - 7x = -15$

70) $x^2 + 2x + 4 = 0$

71) $12x^2 + 9x + 15 = 0$

أوجد طول القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي، وأوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 4-1)

72) $(2, -15, 12), (1, -11, 15)$

73) $(-4, 2, 8), (9, 6, 0)$

74) $(7, 1, 5), (-2, -5, -11)$

تدريب على اختبار

75) أيٌّ من النقاط الآتية يعد تمثيلًا آخر للنقطة $\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي؟

A $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

B $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

C $\left(2, \frac{-11\pi}{6}\right)$

D $\left(-2, \frac{11\pi}{6}\right)$

76) إذا كان $\mathbf{m} = \langle 5, -4 \rangle, \mathbf{n} = \langle -7, 3 \rangle$، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل $\mathbf{k}$، حيث $\mathbf{k} = \mathbf{n} - 2\mathbf{m}$؟

A $\langle -17, 11 \rangle$

B $\langle -17, -5 \rangle$

C $\langle 17, -11 \rangle$

D $\langle -17, 5 \rangle$

77) ما الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$؟

A $r = \sin\theta$

B $r = 2\sin\theta$

C $r = 4\sin\theta$

D $r = 8\sin\theta$

78) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -4, 2 \rangle$؟

A $\langle -10, 10, 25 \rangle$

B $\langle -10, -10, 25 \rangle$

C $\langle -10, -10, -25 \rangle$

D $\langle -10, 10, -25 \rangle$

2-3

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر
Complex Numbers and De Moivre's Theorem

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحوِّلُ الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
- أجِدُ حاصلَ ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وأجِدُ جذورها وقواها في الصورة القطبية.

المفردات:

المستوى المركب
complex plane

المحور الحقيقي
real axis

المحور التخيلي
imaginary axis

القيمة المطلقة لعدد مركب
absolute value of a complex number

الصورة القطبية
polar form

الصورة المثلثية
trigonometric form

المقياس
modulus

السعة
argument

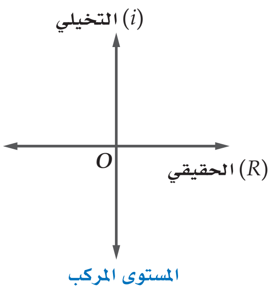
الجذور النونية للعدد واحد
nth roots of unity

لماذا؟

يستعمل مهندسو الكهرباء الأعداد المركبة لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. فالكميات: فرق الجهد V، والمعاوقة Z، وشدة التيار I ترتبط بالعلاقة $V = I \cdot Z$، التي تستعمل لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$، حيث j العدد التخيلي (ويستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز شدة التيار I).

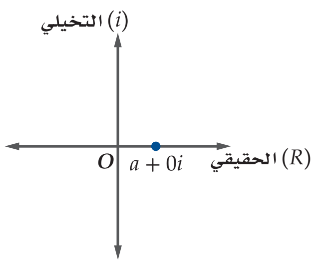
(**إرشاد:** استعملت كلمة المعاوقة بدلًا من كلمة المقاومة؛ لأن مجموعة الأعداد المستخدمة هنا هي مجموعة الأعداد المركبة، حيث تستعمل كلمة المقاومة في مجموعة الأعداد الحقيقية).

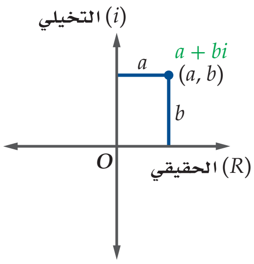
الصورة القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$، هو a والجزء التخيلي bi. ويمكنك تمثيل العدد المركب على **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال في المستوى الإحداثي، فإننا نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب، ويُعيَّنُ الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمَّى **المحور الحقيقي** ويرمز له بالرمز R، في حين يُعيَّنُ الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمَّى **المحور التخيلي** ويرمز له بالرمز i.



المستوى المركب

في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًّا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.



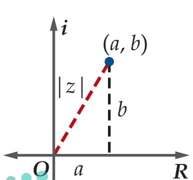


تذكَّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، وبالمثل، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب. وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب. فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.

مفهوم أساسي — القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مثال 1 تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركَّب، وأوجد قيمته المطلقة:

(a $z = 4 + 3i$　　　(b $z = -2 - i$

✓ تحقق من فهمك

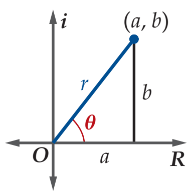
مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

(1A $5 + 2i$　　　(1B $-3 + 4i$

تنبيه!

الصورة القطبية:
يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والإحداثيات القطبية للعدد المركب. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب. وسوف نناقش الإحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقًا في هذا الدرس.

كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (a, b) التي تمثِّل عددًا مركبًا في المستوى المركب على الصورة القطبية. وتُطبق الدوال المثلثية نفسها التي استُعملت في إيجاد قيم x, y لإيجاد قيم a, b.



$\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$

$r\cos\theta = a$　　$r\sin\theta = b$　　اضرب كل طرف في r

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a، b، يمكننا إيجاد **الصورة القطبية** أو **الصورة المثلثية** لعدد مركب.

$z = a + bi$　　العدد المركب الأصلي

$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$　　$b = r\sin\theta$ ، $a = r\cos\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$　　خُذ العامل المشترك

في حالة العدد المركب، فإن r تمثِّل القيمة المطلقة أو **المقياس** للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمَّى الزاوية θ **سعة** العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

مفهوم أساسي الصورة القطبية لعدد مركب

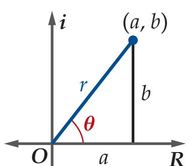
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، $a = r\cos\theta$، $b = r\sin\theta$،

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



إرشادات للدراسة

السعة:
كما في الإحداثيات القطبية، فإن θ ليست وحيدةً، مع أنها تُعطى عادةً في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

مثال 2 الأعداد المركبة بالصورة القطبية

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

a) $-6+8i$

b) $4+\sqrt{3}i$

تحقق من فهمك

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

2A) $9+7i$ 　　 2B) $-2-2i$

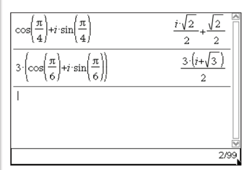
ويمكنك استعمال الصورة القطبية لعدد مركب؛ لتمثيله في المستوى القطبي باستعمال (r, θ) كإحداثيات قطبية للعدد المركب. كما يمكنك تحويل عدد مركب مكتوب على الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية، وذلك باستعمال قيم r، وقيم النسب المثلثية للزاوية θ المعطاة.

مثال 3 تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثِّل العدد $z=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

إرشاد تقني

تحويل الأعداد المركبة: يمكن تحويل عدد مركب من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية باستعمال الحاسبة البيانية من تطبيق الحاسبة، بفتح صفحة تطبيق الحاسبة وإدخال العبارة على الصورة القطبية، ثم اختيار enter . مع مراعاة إعدادات الآلة الحاسبة بحيث تُعطي الصورة القطبية



تحقق من فهمك

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

3A) $5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ 　　 3B) $4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدةً للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اشتقاق صيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية على النحو الآتي:

$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ الصورة القطبيّة للعددين المركبين z_1 ، z_2

$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$ فك الأقواس

$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$ جمّع الحدود التخيلية والحقيقية، واستبدل i^2 بـ -1

$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$ أخرج i عاملًا مشتركًا

$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ متطابقتا جيب المجموع، وجيب تمام المجموع

مفهوم أساسي **ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها**

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

سوف تبرهن صيغة القسمة في التمرين 51

لاحظ أنه عند ضرب عددين مركبين، فإنك تضرب المقياسين وتجمع السعتين، وعند القسمة فإنك تقسم المقياسين وتطرح السعتين.

مثال 4 **ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية**

أوجد ناتج $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

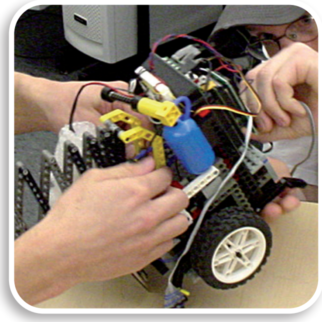
تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

4A) $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4B) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

كما تقدم في فقرة "لماذا؟"، فإنه يمكن استعمال قسمة الأعداد المركبة للتعبير عن العلاقات في الكهرباء.



الربط مع الحياة

مهندسو الكهرباء يطور مهندسو الكهرباء تكنولوجيا جديدة لصناعة نظام تحديد المواقع والمحولات العملاقة التي تُشغِّل مدنًا كاملة ومحركات الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما أنهم يعملون على تطوير منتجات متعددة مثل الهواتف المحمولة والسيارات والرجل الآلي.

مثال 5 من واقع الحياة قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي $150\,\mathrm{V}$، وكانت معاوقتها Z تساوي Ω $(3\sqrt{5}\,[\cos(-0.46) + \boldsymbol{j}\sin(-0.46)])$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

تحقق من فهمك

5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية $120\,\mathrm{V}$، وكانت شدة التيار $(8 + 6\boldsymbol{j})$ أمبير، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية.

يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر، وقبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النمط الذي اكتشفه ديموافر.

أولًا: أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.

$$z \cdot z = r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta) \cdot r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$$ اضرب

$$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + \boldsymbol{i}\sin(\theta + \theta)]$$ صيغة الضرب

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + \boldsymbol{i}\sin 2\theta)$$ بسِّط

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

$$z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + \boldsymbol{i}\sin 2\theta) \cdot r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$$ اضرب

$$z^3 = r^3[\cos(2\theta + \theta) + \boldsymbol{i}\sin(2\theta + \theta)]$$ صيغة الضرب

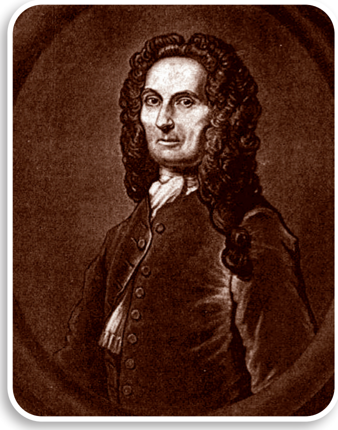
$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + \boldsymbol{i}\sin 3\theta)$$ بسِّط

لاحظ أنه عند حساب القوة النونية للعدد المركب، فإنك تجد القوّة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n.

ويمكن تلخيص ذلك على النحو الآتي:

نظرية **نظرية ديموافر**

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:
$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.



تاريخ الرياضيات

إبراهام ديموافر
(1667 م – 1754 م)
رياضي فرنسي عُرف بالنظرية المسماة باسمه، وكتابه عن الاحتمالات هو *Doctrine of Chances* . ويُعدّ ديموافر من الرياضيين الروّاد في الهندسة التحليلية والاحتمالات.

مثال 6 **نظرية ديموافر**

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$ بالصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

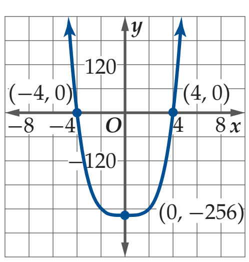
تحقق من فهمك

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية:

6A) $(1 + \sqrt{3}i)^4$ **6B)** $(2\sqrt{3} - 2i)^8$

مراجعة المفردات

النظرية الأساسية في الجبر
كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.



يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية هما $-4 , 4$. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4 , -4$ ، بينما في مجموعة الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.

درست سابقًا نتيجة النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة؛ لذا يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب على الصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4 , -4 , 4i , -4i$.

وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلفٌ لأي عدد مركب لا يساوي الصفر حيث $n \geq 2$ ، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور رباعية...، وهكذا.

ولإيجاد جميع جذور عدد مركب يمكن أن تستعمل نظرية ديموافر للوصول إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي **الجذور المختلفة**

لأي عدد صحيح $n \geq 2$ ، فإن للعدد المركب $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k = n - 1$ ، وعندما يساوي k العدد n، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالتكرار، كما يظهر في المعادلة:

$$\frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$ وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما $k = 0$

مثال 7 جذور العدد المركب

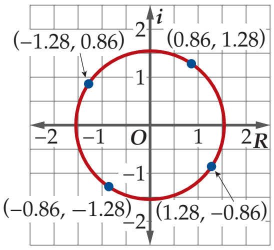
أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4 - 4i$.

تحقق من فهمك

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8

لاحظ أن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال 7 تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته ($\sqrt[8]{32} \approx 1.54$)، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.



تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة عن تمثيل الجذور في المستوى المركب؛ لذا فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.

مثال 8 الجذور النونية للعدد واحد

أوجد الجذور الثُّمانيَّة للعدد واحد.

إرشادات للدراسة

الجذور النونية لعدد مركب

يكون للجذور المقياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$. سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$، ثم تزداد للجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.

تحقق من فهمك

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

8B) أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

تدرب وحل المسائل

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة: (مثال 1)

1) $z = 4 + 4i$

2) $z = -3 + i$

3) $z = -4 - 6i$

4) $z = 2 - 5i$

5) $z = -7 + 5i$

6) $z = 8 - 2i$

7) **متجهات:** تُعطى القوة المؤثرة على جسم بالعلاقة $z = 10 + 15i$، حيث تُقاس كل مركبة للقوة بالنيوتن (N) . (مثال 1)

a) مَثِّل z كمتجه في المستوى المركب.

b) أوجد طول المتجه واتجاهه.

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (مثال 2)

8) $4 + 4i$

9) $-2 + i$

10) $4 - \sqrt{2}i$

11) $2 - 2i$

12) $4 + 5i$

13) $-1 - \sqrt{3}i$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 3)

14) $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

15) $\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$

16) $2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$

17) $\frac{3}{2}(\cos 360° + i \sin 360°)$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (المثالان 4 , 5)

18) $6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

19) $5(\cos 135° + i \sin 135°) \cdot 2(\cos 45° + i \sin 45°)$

20) $3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos \pi + i \sin \pi)$

21) $2(\cos 90° + i \sin 90°) \cdot 2(\cos 270° + i \sin 270°)$

22) $3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \div 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

23) $4\left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

24) $\frac{1}{2}(\cos 60° + i \sin 60°) \cdot 6(\cos 150° + i \sin 150°)$

25) $6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

26) $5(\cos 180° + i \sin 180°) \cdot 2(\cos 135° + i \sin 135°)$

27) $\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \div 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج لكل مما يأتي بالصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 6)

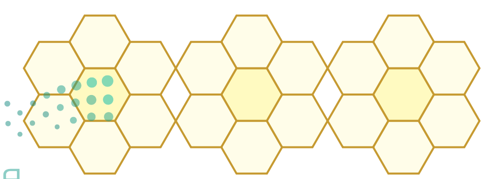
28) $(2 + 2\sqrt{3}i)^6$

29) $\left[4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)\right]^4$

30) $(2 + 3i)^{-2}$

31) $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^4$

32) **تصميم:** يعمل سالم في وكالة للإعلانات. ويرغب في تصميم لوحة مكونة من أشكال سداسية منتظمة كما هو مبيّن أدناه. ويستطيع تعيين رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية بتمثيل حلول المعادلة $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب. أوجد رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية. (مثال 7)



أوجد جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي:
(المثالان 7, 8)

33) الجذور السداسية للعدد $\boldsymbol{i}$

34) الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3}-4\boldsymbol{i}$

35) الجذور التربيعية للعدد $-3-4\boldsymbol{i}$

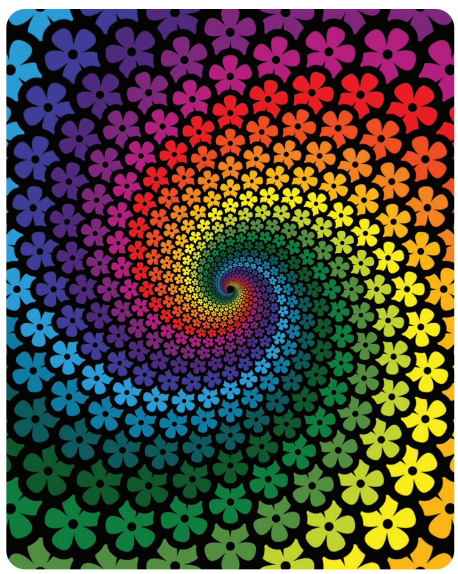
36) **كهرباء:** تُعطَى معاوقة أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي بالعبارة $5(\cos 0.9 + \boldsymbol{j} \sin 0.9)\Omega$، وتُعطَى في الجزء الآخر من الدائرة بالعبارة $8(\cos 0.4 + \boldsymbol{j} \sin 0.4)\Omega$.

a) حَوِّل كلًّا من العبارتين السابقتين إلى الصورة الديكارتية.

b) اجمع الناتجين في الفرع **a**؛ لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة.

c) حَوِّل المعاوقة الكلية إلى الصورة القطبية.

37) **كسريات:** الكسريات شكل هندسي يتكون من نمط مكرر بشكل مستمر، وتكون الكسريات ذاتية التشابه؛ أي أن الأجزاء الصغيرة للشكل لها الخصائص الهندسية نفسها للشكل الأصلي، كما في الشكل أدناه.



في هذا السؤال سوف تنتج كسريات من خلال تكرار $f(z)=z^2$، حيث $z_0 = 0.8 + 0.5\boldsymbol{i}$.

a) احسب $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$، حيث $z_1 = f(z_0)$، $z_2 = f(z_1)$، وهكذا.

b) مَثِّل كل عدد في المستوى المركب.

c) صِف النمط الناتج.

38) أوجد العدد المركب z إذا علمت أن $(-1-\boldsymbol{i})$ هو أحد جذوره الرباعية، ثم أوجد جذوره الرباعية الأخرى.

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال صيغة الجذور المختلفة:

39) $x^3 = \boldsymbol{i}$

40) $x^4 = 81\boldsymbol{i}$

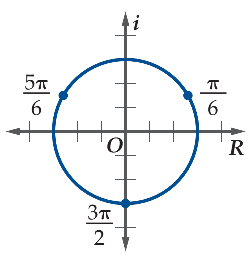
41) $x^3 + 1 = \boldsymbol{i}$

مسائل مهارات التفكير العليا

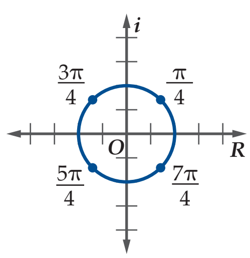
42) **اكتشف الخطأ:** يَحسبُ كل من أحمد وباسم قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right)^5$. فيستعمل أحمد نظرية ديموافر ويحصل على الإجابة $\cos\frac{5\pi}{6} + \boldsymbol{i}\sin\frac{5\pi}{6}$. ويقول باسمُ بأن أحمدَ قد أنجز جزءًا من المسألة فقط. أيهما إجابته صحيحة؟ بَرِّر إجابتك.

تحدٍّ: **أوجد الجذور المحدّدة على كل من المنحنيين أدناه على الصورة القطبية، ثم عيِّن العدد المركب الذي له هذه الجذور.**

43)



44)



45) **برهان:** إذا كان $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \boldsymbol{i}\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \boldsymbol{i}\sin\theta_2)$ ، حيث $r_2 \neq 0$ ، فأثبت أن $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \boldsymbol{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)]$.

46) **تحدٍّ:** اكتب $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$ مستعملًا نظرية ديموافر. إرشاد: أوجد قيمة $(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)^3$ مرة باستعمال نظرية ديموافر، ومرة باستعمال مفكوك نظرية ذات الحدين.

47) **اكتب:** وضِّح خطوات إيجاد الجذور النونية للعدد المركب $z = r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$ ، حيث n عدد صحيح موجب.

مراجعة تراكمية

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي: (الدرس 1-2)

48) $Q\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

49) $P(4.5, -210°)$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية: (الدرس 2-2)

50) $(x-3)^2 + y^2 = 9$

51) $x^2 + y^2 = 2y$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي: (الدرس 1-2)

52) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$

53) $(1, -45°), (-5, 210°)$

حوّل الإحداثيات القطبيّة لكل نقطة مما يأتي إلى إحداثيات ديكارتية: (الدرس 2-2)

54) $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

55) $(4, 210°)$

تدريب على اختبار

56) أي مما يأتي يمثّل $\overrightarrow{AB}$ وطوله، إذا كان $A(3, 4, -2), B(-5, 2, 1)$ ؟

A $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

B $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{77}$

C $\langle -8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

D $\langle 8, -2, 3\rangle, \sqrt{109}$

57) ما المسافة بين النقطة $\left(-3, \frac{5\pi}{3}\right)$ والنقطة $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$ ؟

A 3.97

B 4.97

C 5.97

D 6.97

58) أي مما يأتي يمثِّل تقريبًا الصورة القطبية للعدد المركب $20 - 21\boldsymbol{i}$؟

A $29(\cos 5.47 + \boldsymbol{i}\sin 5.47)$

B $29(\cos 5.52 + \boldsymbol{i}\sin 5.52)$

C $32(\cos 5.47 + \boldsymbol{i}\sin 5.47)$

D $32(\cos 5.52 + \boldsymbol{i}\sin 5.52)$

دليل الدراسة والمراجعة

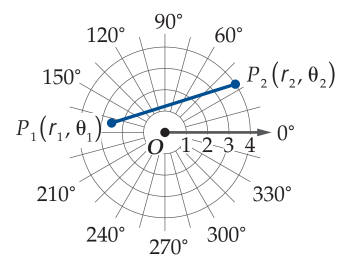
ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الإحداثيات القطبية (الدرس 2-1)

- يُعيِّن موقع النقطة (r, θ) في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال المسافة المتجهة r والزاوية المتجهة θ.
- المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ في المستوى القطبي هي:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$



الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الدرس 2-2)

- الإحداثيات الديكارتية للنقطة $P(r, \theta)$ هي $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
- لتحويل إحداثيات نقطة $P(x, y)$ من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية استعمل المعادلات $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$، عندما $x > 0$، أو $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ عندما $x < 0$.

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر (الدرس 2-3)

- الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $a + bi$ هي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- صيغة الضرب لعددين مركبين z_1، z_2 هي: $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$.
- صيغة القسمة لعددين مركبين z_1، z_2 هي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)],\ r_2 \neq 0$$

- تنص نظرية ديموافر على أنه إذا كانت $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ هي الصورة القطبية لعدد مركب، فإن: $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$، حيث n عدد صحيح موجب.

الجذور المختلفة:

لأي عدد صحيح $n \geq 2$، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$، n من الجذور النونية المختلفة ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

المفردات

- نظام الإحداثيات القطبية ص 52
- القطب ص 52
- المحور القطبي ص 52
- الإحداثيات القطبية ص 52
- المعادلة القطبية ص 54
- التمثيل القطبي ص 54
- المستوى المركب ص 68
- المحور الحقيقي ص 68
- المحور التخيلي ص 68
- القيمة المطلقة لعدد مركب ص 68
- الصورة القطبية ص 69
- الصورة المثلثيّة ص 69
- المقياس ص 69
- السعة ص 69
- الجذور النونيّة للعدد واحد ص75

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة مما يأتي:

1) ________ هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق معادلة قطبية معطاة.

2) المستوى الذي يحوي محوراً يمثِّل الجزء الحقيقي، وآخر يمثل الجزء التخيلي هو ________ .

3) يُحدّدُ موقع نقطة في ________ باستعمال المسافة المتجه من نقطة ثابتة إلى النقطة نفسها، وزاوية متجهة من محور ثابت.

4) ________ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب على الصورة: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

5) تُسمَّى نقطة الأصل في نظام الإحداثيات القطبية بـ ________ .

6) تُسمَّى القيمة المطلقة لعدد مركب بـ ________ .

7) ________ هو اسم آخر للمستوى المركب.

8) ________ هو نصف مستقيم ممتد من القطب، ويكون أفقيًّا باتجاه اليمين.

مراجعة الدروس

2-1 الإحداثيات القطبية (الصفحات 58 - 52)

مَثِّل كلّ نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

9) $W(-0.5, -210°)$

10) $X\left(1.5, \frac{7\pi}{4}\right)$

11) $Y(4, -120°)$

12) $Z\left(-3, \frac{5\pi}{6}\right)$

مَثِّل كلّ معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

13) $\theta = -60°$

14) $r = \frac{9}{2}$

15) $r = 7$

16) $\theta = \frac{11\pi}{6}$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

17) $\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, -\frac{7\pi}{6}\right)$

18) $(-3, 60°), (4, 240°)$

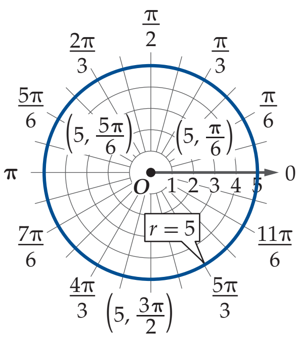
19) $(-1, -45°), (6, 270°)$

20) $\left(7, \frac{5\pi}{6}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$

مثال 1

مَثِّل المعادلة $r = 5$ بيانيًّا في المستوى القطبي.

حلول المعادلة $r = 5$ هي الأزواج المرتبة $(5, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي. ويتكون التمثيل من جميع النقاط التي تبعد 5 وحدات عن القطب، لذا فإن التمثيل هو دائرة مركزها القطب، وطول نصف قطرها 5.



2-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات (الصفحات 67 - 59)

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

21) $(-1, 5)$

22) $(3, 7)$

23) $(1, 2)$

اكتب كلّ معادلة على الصورة الديكارتية، وحدّد نوع تمثيلها البياني:

24) $r = 5$

25) $r = -4 \sin \theta$

26) $r = 6 \sec \theta$

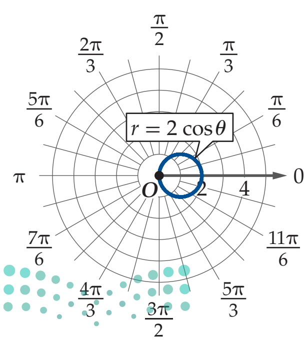
27) $r = \frac{1}{3} \csc \theta$

مثال 2

اكتب المعادلة $r = 2 \cos \theta$ على الصورة الديكارتية، ثم حدِّد نوع تمثيلها البياني.

$r = 2\cos\theta$	المعادلة الأصلية
$r^2 = 2r\cos\theta$	اضرب الطرفين في r
$x^2 + y^2 = 2x$	$x = r\cos\theta,\ r^2 = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 - 2x = 0$	اطرح $2x$ من الطرفين

أيّ أن الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-1)^2 + y^2 = 1$، وهي معادلة دائرة مركزها $(1,0)$ وطول نصف قطرها 1.



مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمتهُ المطلقة:

(28 $z = 3 - i$

(29 $z = 4i$

(30 $z = -4 + 2i$

(31 $z = 6 - 3i$

عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

(32 $3 + \sqrt{2}i$

(33 $-5 + 8i$

(34 $-4 - \sqrt{3}i$

(35 $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية:

(36 $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(37 $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(38 $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(39 $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية:

(40 $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(41 $8(\cos 225° + i\sin 225°) \cdot \frac{1}{2}(\cos 120° + i\sin 120°)$

(42 $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \div \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

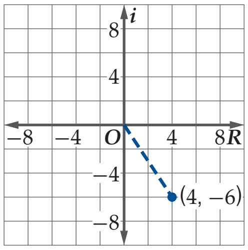
(43 $6(\cos 210° + i\sin 210°) \div 3(\cos 150° + i\sin 150°)$

(44 أوجد قيمة $(\sqrt{2} + 3i)^4$ بالصور القطبية، ثم اكتبه على الصورة الديكارتية.

(45 أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $1 + i$.

مثال 3

مَثِّل $4 - 6i$ في المستوى المركب، ثم عبِّر عنه بالصورة القطبية.



أوجد المقياس.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغة التحويل

$= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}$ $a = 4, b = -6$

أوجد السعة.

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ صيغة التحويل

$= \mathrm{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{4}\right)$ $a = 4, b = -6$

≈ -0.98 بسِّط

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 - 6i$ هي:

$2\sqrt{13}\,[(\cos(-0.98) + i\sin(-0.98)]$ تقريبًا.

مثال 4

أوجد ناتج $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم حوِّله إلى الصورة الديكارتية.

$3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ العبارة المعطاة

$= (3 \cdot 5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$ صيغة الضرب

$= 15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ بسِّط

والآن أوجد الصورة الديكارتية لناتج الضرب.

$15\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$ الصورة القطبية

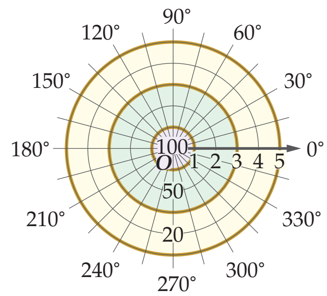
$= 15[-0.26 + i(-0.966)]$ أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام

$= -3.9 - 14.5i$ خاصية التوزيع

فتكون الصورة الديكارتية لناتج الضرب $-3.9 - 14.5i$ تقريبًا.

تطبيقات ومسائل

46) **ألعاب:** قُسِّمت لوحة السهام إلى 3 مناطق كما هو موضّح في الشكل أدناه، بحيث يحصل اللاعب على 100 نقطة عند إصابته المنطقة القريبة من القطب، وعلى 50 نقطة عند إصابته المنطقة المتوسطة، و 20 نقطة عند إصابته المنطقة البعيدة. (الدرس 1-2)



a) إذا أصاب اللاعب النقطة $(3.5, 165°)$، فما عدد النقاط التي يحصل عليها؟

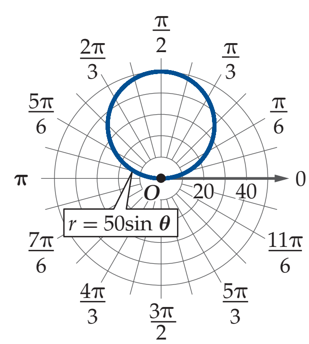
b) حدِّد موقعين، بحيث يحصل اللاعب على 50 نقطة عند إصابة أي منهما؟

47) **حدائق:** تستعمل شركة عناية بالحدائق رشاشًا قابلًا للتعديل، ويستطيع الدوران $360°$، ويروي منطقة دائرية طول نصف قطرها 20 ft. (الدرس 1-2)

a) مثِّل المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها في المستوى القطبي.

b) أوجد مساحة المنطقة التي يستطيع الرشاش ريَّها، إذا ضُبط ليدور في الفترة $-30° \leq \theta \leq 210°$.

48) **عجلة دوّارة:** يمكن تمثيل مسار العجلة الدوّارة في الشكل أدناه بالمعادلة $r = 50 \sin \theta$، حيث r بالقدم. (الدرس 2-2)



a) عيّن الإحداثيين القطبيين لموقع راكب إذا علمت أنه يقع عند $\theta = \frac{\pi}{12}$. (قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر).

b) عيّن الإحداثيين الديكارتيين لموقع الراكب مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

c) إذا وقع القطب على سطح الأرض، فما ارتفاع ذلك الراكب مقرّبًا إلى أقرب قدم؟

49) **كهرباء:** تُصمَّم معظم الدوائر الكهربائية لتتحمل فرق جهدٍ قدره 220V.

للفرعين a, b استعمل المعادلة $V = I \cdot Z$، حيث فرق الجهد V بالفولت، والمعاوقة Z بالأوم، وشدة التيار I بالأمبير (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). (الدرس 3-2)

a) إذا كانت شدة التيار المار بالدائرة $(2 + 5j)$ أمبير، فأوجد المعاوقة.

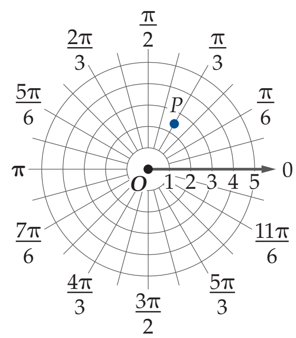
b) إذا كانت معاوقة الدائرة $(1 - 3j)\Omega$، فأوجد شدة التيار.

50) **تحويل جوكوسكي (Jowkoski):** يُعيِّن تحويل جوكوسكي لكل عدد مركب $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ عددًا مركبًا w يُعطى بالصيغة $w = z + \frac{1}{z}$. أوجد صورة العدد المركب $z = (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ وفق هذا التحويل. (الدرس 3-2)

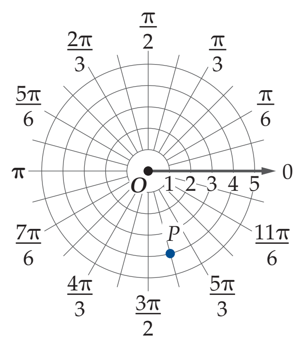
اختبار الفصل

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة يمثِّل كل منها إحداثيات قطبية للنقطة P في كل من التمثيلين 2 ,1 ، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

(1



(2



مَثِّل بيانيًّا في المستوى القطبي كلًّا من المعادلات الآتية:

(3 $\theta = 30°$ **(4** $r = 1$

(5 $r = 2.5$ **(6** $\theta = \frac{5\pi}{3}$

(7 **رادار:** يقوم مراقب الحركة الجوية بتتبع مسار طائرة موقعها الحالي عند النقطة $(66, 115°)$ ، حيث r بالأميال.

(a عيِّن الإحداثيين الديكارتيين للطائرة. مقرِّبًا الناتج إلى أقرب ميل.

(b إذا وُجدت طائرة عند نقطة إحداثياتها الديكارتية $(50, -75)$، فعيِّن الإحداثيين القطبيين لها مقرِّبًا المسافة إلى أقرب ميل، والزاوية إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

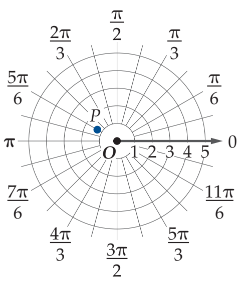
(c ما المسافة بين الطائرتين؟ قرِّب الناتج إلى أقرب ميل.

(8 عبِّر عن المعادلة $(x-7)^2 + y^2 = 49$ ، بالصورة القطبية.

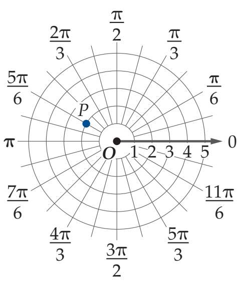
(9 **كهرباء:** إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية 135V، وكانت شدة التيار المار بها I هو $(3-4j)$ أمبير، فأوجد معاوقة الدائرة z بالإحداثيات الديكارتية مستعملًا المعادلة $V = I \cdot Z$.

(10 **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يبين تمثيل العدد المركب الذي إحداثياته الديكارتية $(-\sqrt{3}, -1)$ في المستوى القطبي؟

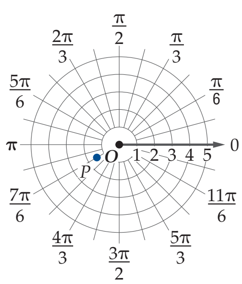
A



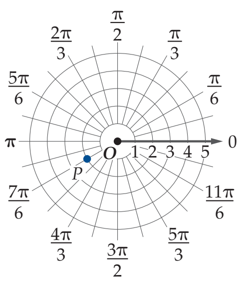
C



B



D



أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وقرِّب إلى أقرب عدد صحيح إذا لزم الأمر:

(11 $(-1+4i)^3$

(12 $(6+i)^4$