التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين نبينا محمد صلى الله عليه وسلم

اللهم يا معلم آدم الأسماء علمنا و يا مفهم سليمان فهمنا ،

اللهم علمنا ما ينفعنا و أنفعنا بما علمتنا وزدنا علما يا رب العالمين

أمل باجوده

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

رياضيات ٦
أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

بسم الله الرحمن الرحيم

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

ماذا أعرف	ماذا أريد أن أعرف	ماذا تعلمت	الربط بالواقع

أمل باجوده

التاريخ :　　　　　　　　　　　　الموضوع :

الحصة :

المادة :

فيما سبق:

درست إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحوّلُ الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
- أجدُ حاصلَ ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وأجدُ جذورها وقواها في الصورة القطبية.

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

المفردات:

المستوى المركب
complex plane

المحور الحقيقي
real axis

المحور التخيلي
imaginary axis

القيمة المطلقة لعدد مركب
absolute value of a complex number

الصورة القطبية
polar form

الصورة المثلثية
trigonometric form

المقياس
modulus

السعة
argument

الجذور النونية للعدد واحد
*n*th roots of unity

أمل باجوده

التاريخ :   الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الحصة :

المادة : رياضيات٦

لماذا؟

يستعمل مهندسو الكهرباء الأعداد المركبة لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. فالكميات: فرق الجهد V، والمعاوقة Z، وشدة التيار I ترتبط بالعلاقة $V = I \cdot Z$، التي تستعمل لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$، حيث j العدد التخيلي (ويستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز شدة التيار I).

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

(**إرشاد:** استعملت كلمة المعاوقة بدلًا من كلمة المقاومة؛
لأن مجموعة الأعداد المستخدمة هنا هي مجموعة الأعداد
المركبة، حيث تستعمل كلمة المقاومة في مجموعة الأعداد الحقيقية).

https://www.youtube.com/watch?v=8d7CXai9kVo

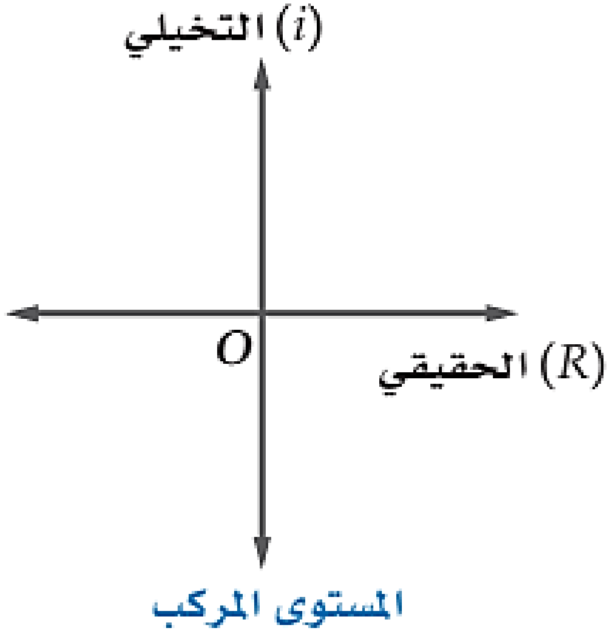
فيديو درس الأعداد المركبة و نظرية ديموافر

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الصورة القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$، هو a والجزء التخيلي bi . ويمكنك تمثيل العدد المركب على **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال في المستوى الإحداثي، فإننا نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب، ويُعيَّنُ الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمَّى **المحور الحقيقي** ويرمز له بالرمز R ، في حين يُعيَّنُ الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمَّى **المحور التخيلي** ويرمز له بالرمز i .



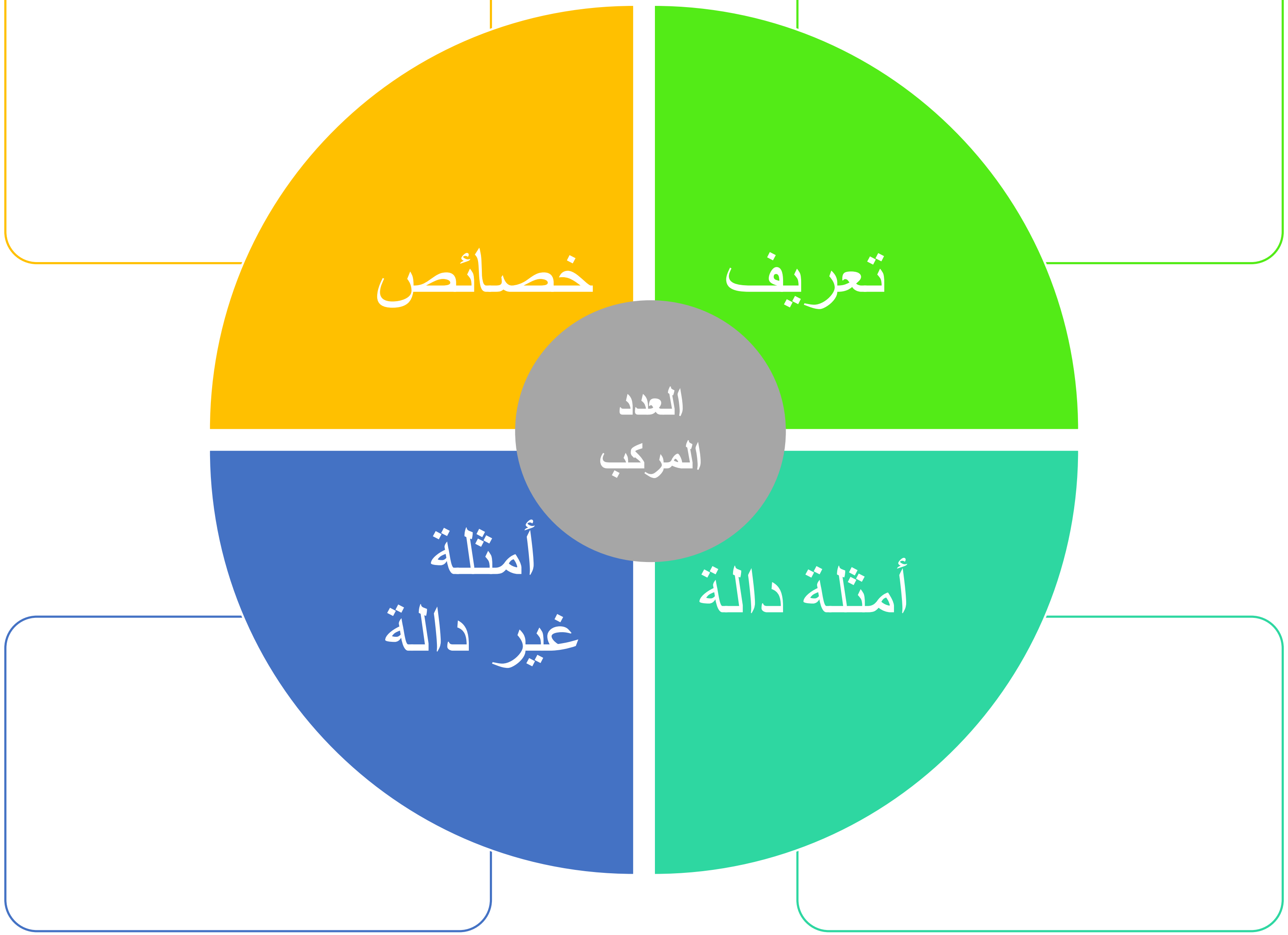
أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

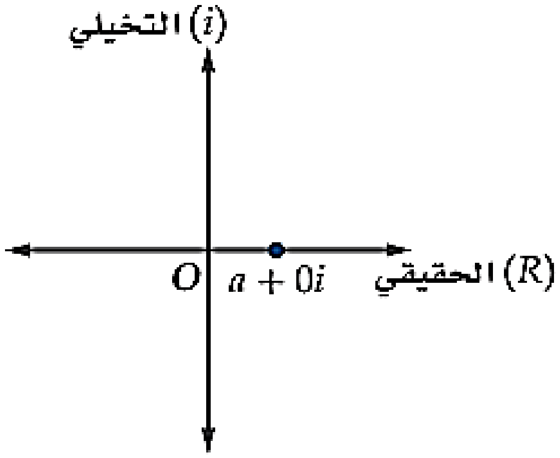


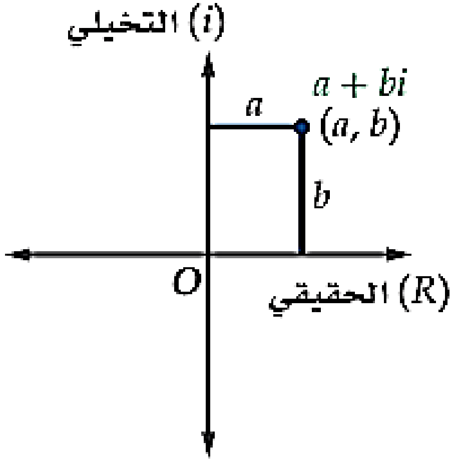
أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًّا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$ ، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.





تذكَّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد ، وبالمثل ، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب . وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب. فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

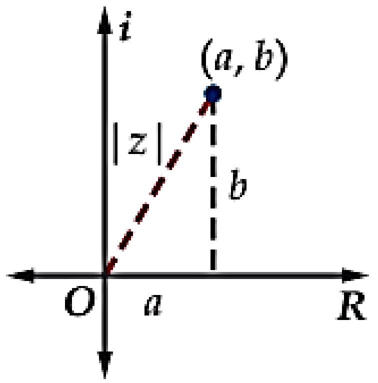
الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مفهوم أساسي

القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



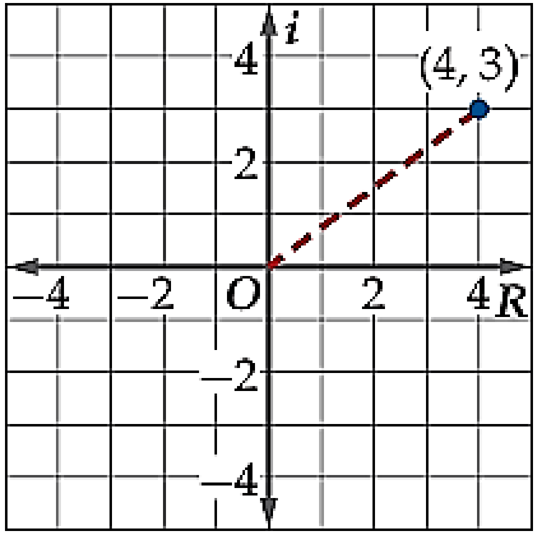
أمل باجوده

مثال 1 تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركَّب، وأوجد قيمته المطلقة:

a) $z = 4 + 3i$

$(a\,, b) = (4\,, 3)$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعريف القيمة المطلقة

$= \sqrt{4^2 + 3^2}$ $a = 4\,, b = 3$

$= \sqrt{25} = 5$ بسّط

القيمة المطلقة للعدد $4 + 3i$ تساوي 5.

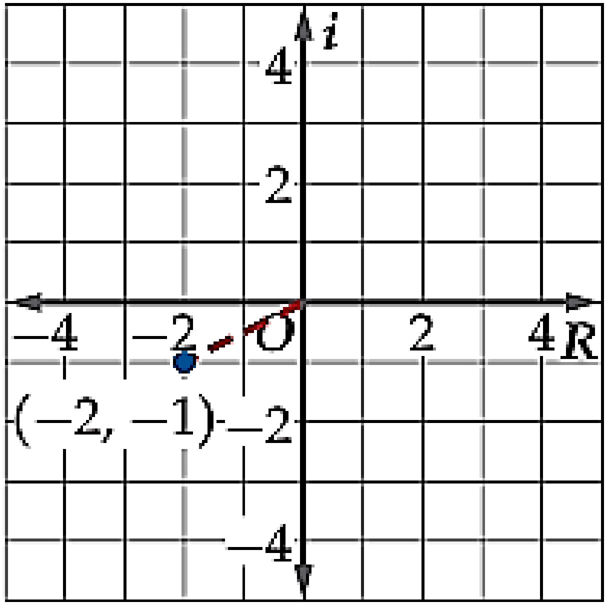
أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

b) $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



تعريف القيمة المطلقة $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = -2 , b = -1 \qquad = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$

بسّط $\qquad = \sqrt{5} \approx 2.24$

القيمة المطلقة للعدد $-2 - i$ تساوي 2.24 تقريبًا.

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

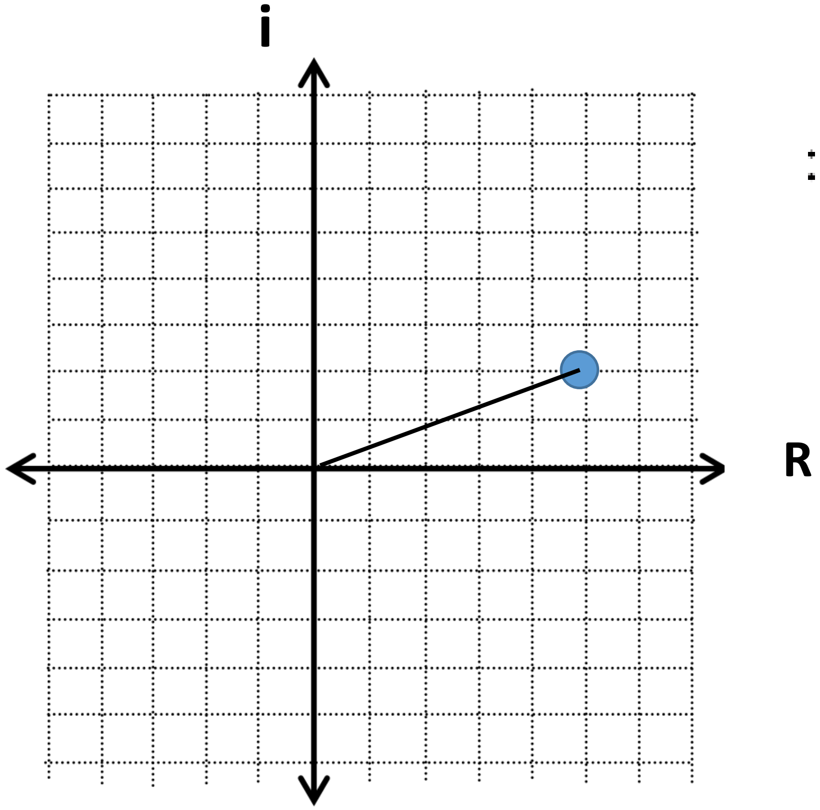
الحصة :

المادة : رياضيات٦

تحقق من فهمك

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

1A) $5+2i$

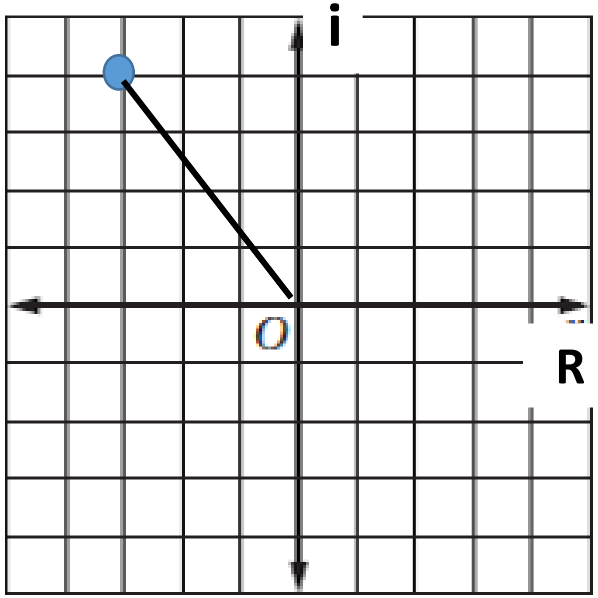


أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

$-3 + 4i$ (1B



أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

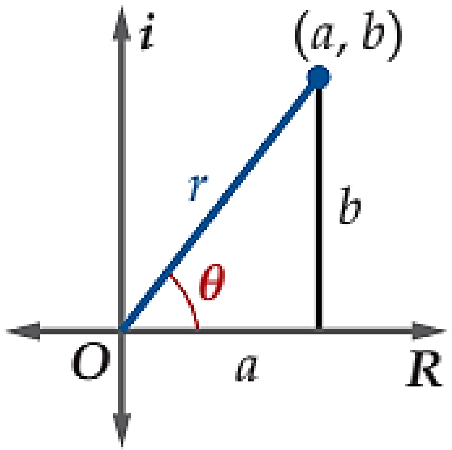
الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (a, b) التي تمثِّل عددًا مركبًا في المستوى المركب على الصورة القطبية.
وتُطبق الدوال المثلثية نفسها التي استُعملت في إيجاد قيم x , y لإيجاد قيم a , b.

$$\sin\theta = \frac{b}{r} \qquad , \qquad \cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$r\sin\theta = b \qquad\qquad r\cos\theta = a$$

اضرب كل طرف في r



أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a ، b ، يمكننا إيجاد **الصورة القطبية** أو **الصورة المثلثية** لعدد مركب.

$z = a + bi$ العدد المركب الأصلي

$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$ $a = r\cos\theta$ ، $b = r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ خُذ العامل المشترك

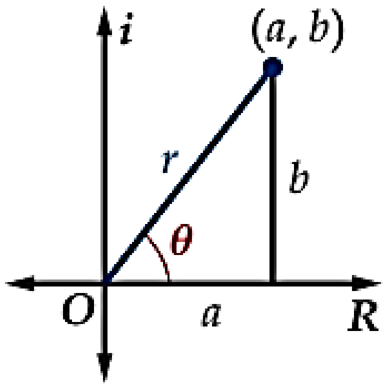
في حالة العدد المركب ، فإن r تمثِّل القيمة المطلقة أو **المقياس** للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمَّى الزاوية θ **سعة** العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y) ، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مفهوم أساسي
الصورة القطبية لعدد مركب



الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، $a = r\cos\theta$، $b = r\sin\theta$،

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : ريا

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تنبيه!

الصورة القطبية :

يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والإحداثيات القطبية للعدد المركب. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب . وسوف نناقش الإحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقًا في هذا الدرس .

إرشادات للدراسة

السعة :

كما في الإحداثيات القطبية ، فإن θ ليست وحيدةً ، مع أنها تُعطى عادةً في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مثال 2 الأعداد المركبة بالصورة القطبية

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

a) $-6+8i$

أوجد المقياس r والسعة θ.

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$$

صيغ التحويل، $a<0$

$a=-6\ ,\ b=8$

$$\theta=\operatorname{Tan}^{-1}\frac{b}{a}+\pi$$
$$=\operatorname{Tan}^{-1}\left(-\frac{8}{6}\right)+\pi\approx 2.21$$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $-6+8i$ هي $10(\cos 2.21+i\sin 2.21)$ تقريبًا.

أمل باجوده

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحويل العدد المركب إلى الصورة القطبية

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, x > o$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180° \quad , x < 0$

$\theta = 90°$ أو $270°, x = 0$

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحقق من فهمك

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

2A) $9 + 7i$

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

$-2 - 2i$ **(2B**

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحصيلي

القيمة المطلقة للعدد المركب $3 + 4i$ تساوي

B) 3

A) 2

D) 5

C) 4

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحصيلي

عدد مركب مقياسه 3 وسعته $30°$ ، صورته القطبية هي

A) $\cos 90° + i \sin 90$

B) $\sin 30° + i \cos 30°$

C) $3(\sin 30° + i \cos 30°)$

D) $3(\cos 30° + i \sin 90°)$

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحصيلي

سعة العدد المركب $z = (\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3})$ تساوي

B) $60°$

A) $30°$

D) $120°$

C) $90°$

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

ويمكنك استعمال الصورة القطبية لعدد مركب؛ لتمثيله في المستوى القطبي باستعمال (r, θ) كإحداثيات قطبية للعدد المركب. كما يمكنك تحويل عدد مركب مكتوب على الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية، وذلك باستعمال قيم r ، وقيم النسب المثلثية للزاوية θ المعطاة.

أمل باجوده

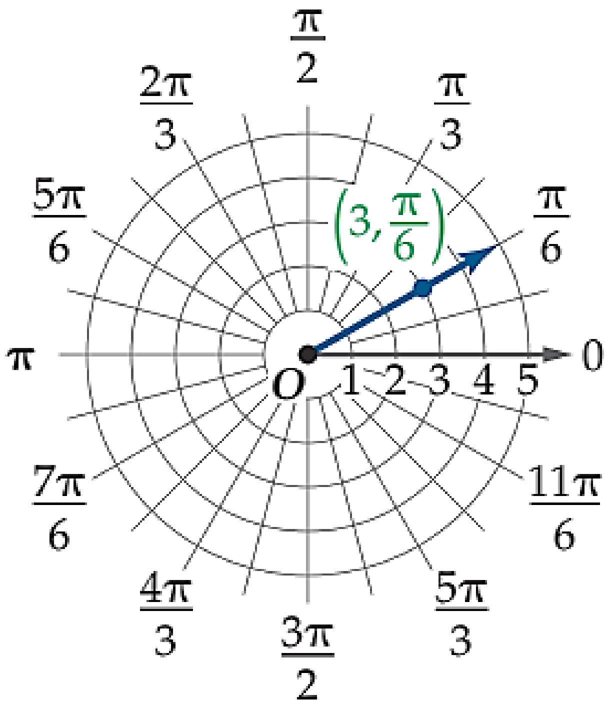
الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :
الحصة
المادة :

مثال 3 تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثِّل العدد $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية.

عَيِّن الإحداثيات القطبية $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$. لاحظ أن قيمة r هي 3، وقيمة θ هي $\frac{\pi}{6}$.



ولكتابة العدد على الصورة الديكارتية أوجد القيم المثلثية، ثم بَسِّط.

$$3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{الصورة القطبية}$$

$$= 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{بإيجاد قيم الجيب، وجيب التمام}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \quad \text{خاصية التوزيع}$$

فتكون الصورة الديكارتية للعدد $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ هي $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

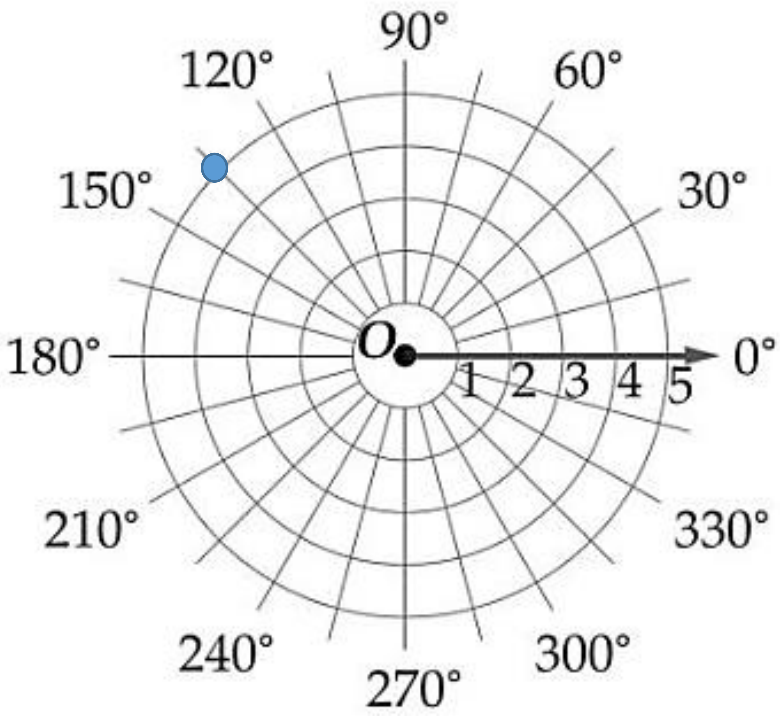
الحصة :

المادة : رياضيات٦

تحقق من فهمك

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

(3A $5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$



أمل باجوده

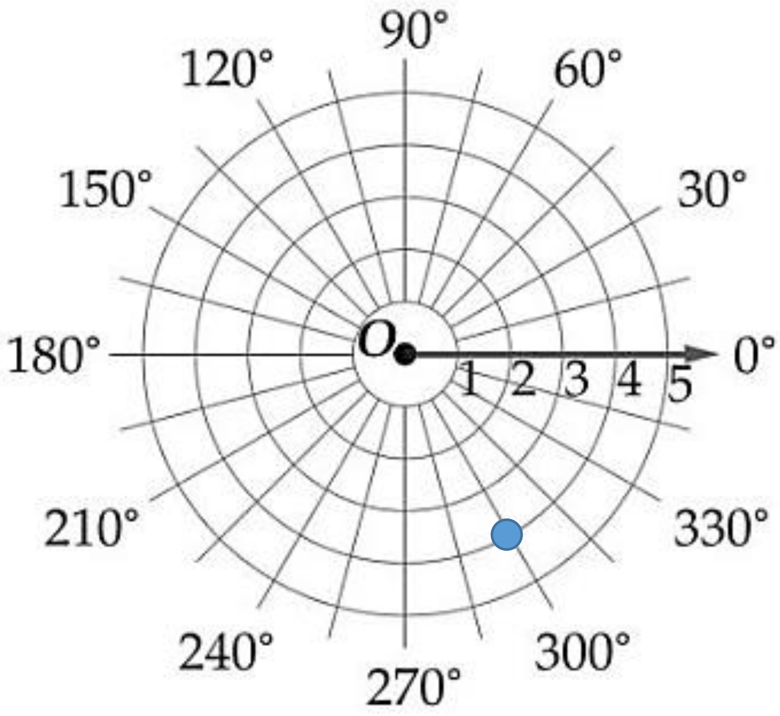
التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

3B) $4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$



أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

تحصيلي

الصورة الديكارتية للعدد المركب $2\,(\cos 45° + i\ \sin 45°)$ هي

A) $\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

B) $2i\sqrt{2}$

C) $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

D) $2 + 2i$

أمل باجوده

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

ماذا أعرف	ماذا أريد أن أعرف	ماذا تعلمت	الربط بالواقع

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدةً للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها.

مفهوم أساسي **ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها**

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

لاحظ أنه عند ضرب عددين مركبين، فإنك تضرب المقياسين وتجمع السعتين، وعند القسمة فإنك تقسم المقياسين وتطرح السعتين.

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مثال 4 ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

أوجد ناتج $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

العبارة المعطاة
$$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

صيغة الضرب
$$= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

بسّط
$$= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات

والآن أوجد الصورة الديكارتية للناتج.

$8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$	الصورة القطبية
$=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$	أوجد قيم الجيب وجيب التمام
$=4\sqrt{3}-4i$	خاصية التوزيع

فتكون الصورة القطبية للناتج $8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$،

والصورة الديكارتية $4\sqrt{3}-4i$.

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

(4A $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

4B) $6\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \cdot 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مثال 5 من واقع الحياة قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي $150\,V$، وكانت معاوقتها Z تساوي Ω $(3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)])$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

اكتب العدد 150 على الصورة القطبية.

$$150 = 150\ (\cos 0 + j \sin 0)$$

$$r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150,\ \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{0}{150} = 0$$

حُلّ $I \cdot Z = V$ بالنسبة لـ I.

$I \cdot Z = V$ المعادلة الأصلية

$I = \dfrac{V}{Z}$ اقسم كل طرف على Z

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

$$I = \frac{150\ (\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]}$$

$$V = 150\,(\cos 0 + j \sin 0)\ ,$$
$$Z = 3\sqrt{5}\ [\cos\,(-0.46) + j \sin\,(-0.46)]$$

صيغة القسمة
$$I = \frac{150}{3\sqrt{5}}\ \{\cos\,[0 - (-0.46)] + j \sin\,[0 - (-0.46)]\}$$

بسّط
$$I = 10\,\sqrt{5}\,(\cos 0.46 + j \sin 0.46)$$

أي أن شدة التيار تساوي $(10\,\sqrt{5}\,(\cos 0.46 + j \sin 0.46))$ أمبير تقريبًا.

أمل باجوده

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحقق من فهمك

5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية 120 V ، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير ، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية.

أمل باجوده

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

(23 $4\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

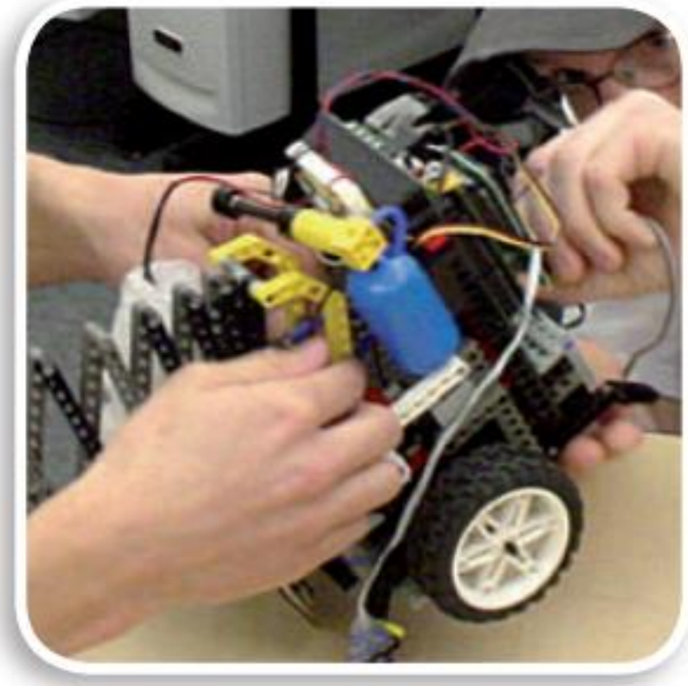
التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الربط مع الحياة

مهندسو الكهرباء يطور مهندسو الكهرباء تكنولوجيا جديدة لصناعة نظام تحديد المواقع والمحولات العملاقة التي تُشغِّل مدنًا كاملة ومحركات الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما أنهم يعملون على تطوير منتجات متعددة مثل الهواتف المحمولة والسيارات والرجل الآلي.



أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر، وقبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النمط الذي اكتشفه ديموافر.

أولًا: أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.

اضرب
$$z \cdot z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

صيغة الضرب
$$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i\sin(\theta + \theta)]$$

بسّط
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

$z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta)$	اضرب
$z^3 = r^3[\cos (2\theta + \theta) + i \sin (2\theta + \theta)]$	صيغة الضرب
$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$	بسِّط

لاحظ أنه عند حساب القوة النونية للعدد المركب، فإنك تجد القوّة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n .

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

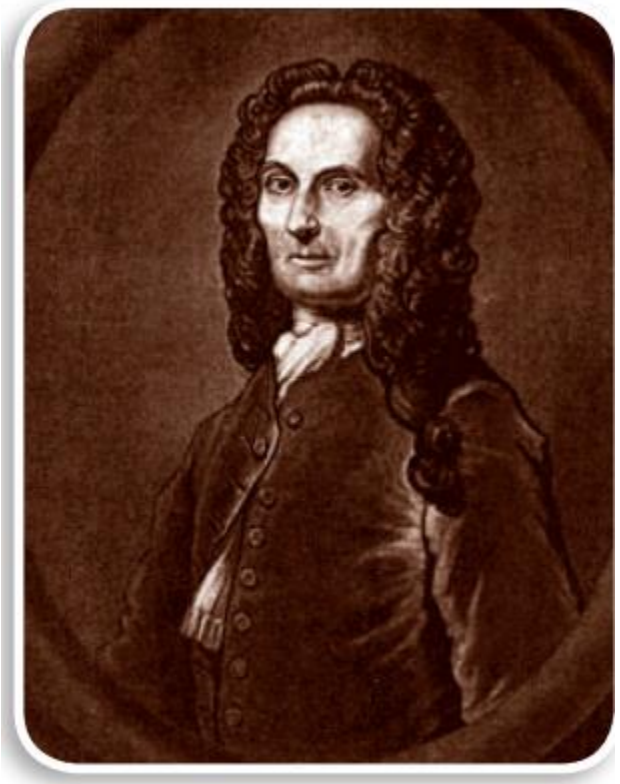
ويمكن تلخيص ذلك على النحو الآتي:

نظرية **نظرية ديموافر**

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:
$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر



تاريخ الرياضيات

إبراهام ديموافر

(1667 م – 1754 م)

رياضي فرنسي عُرف بالنظرية المسماة باسمه، وكتابه عن الاحتمالات هو *Doctrine of Chances*. ويُعدّ ديموافر من الرياضيين الروّاد في الهندسة التحليلية والاحتمالات.

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مثال 6 نظرية ديموافر

أوجد $(4+4\sqrt{3}i)^6$ بالصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

أولًا: اكتب $4+4\sqrt{3}i$ على الصورة القطبية.

$r=\sqrt{a^2+b^2}$	صيغ التحويل
$=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}$	$a=4\,,b=4\sqrt{3}$
$=\sqrt{16+48}$	بسّط
$=8$	بسّط

$$\theta=\text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$$
$$=\text{Tan}^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4}$$
$$=\text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$$
$$=\frac{\pi}{3}$$

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 + 4\sqrt{3}i$ هي $8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

والآن استعمل نظرية ديموافر؛ لإيجاد القوة السادسة.

$$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6$$ الصورة القطبيّة

$$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$ نظرية ديموافر

$$= 262144(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$$ بسّط

$$= 262144(1 + 0i)$$ أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام

$$= 262144$$ بسّط

أي أن $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262144$.

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

تحقق من فهمك

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية :

6A) $(1 + \sqrt{3}i)^4$

أمل باجوده

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تدرب وحل المسائل

(29 $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$

أمل باجوده

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تدرب وحل المسائل

(31 $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$

أمل باجوده

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

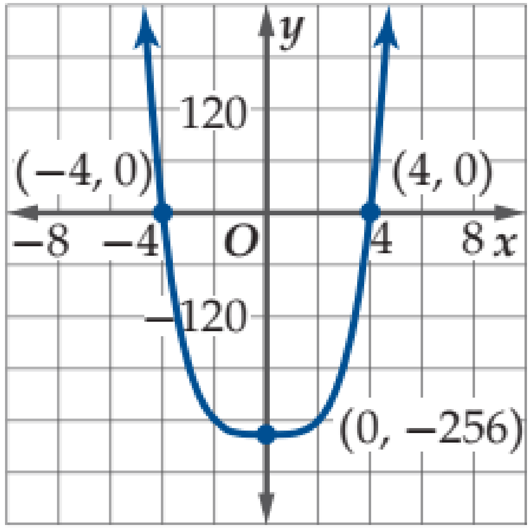
مسائل مهارات التفكير العليا

(42 **اكتشف الخطأ :** يَحسبُ كل من أحمد وباسم قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5$. فيستعمل أحمد نظرية ديموافر ويحصل على الإجابة $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$. ويقول باسمُ بأن أحمدَ قد أنجز جزءًا من المسألة فقط. أيهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر



يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية هما $4, -4$. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4, -4$، بينما في مجموعة الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.

درست سابقًا نتيجة النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة؛ لذا يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب على الصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4, -4, 4i, -4i$.

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلفٌ لأي عدد مركب لا يساوي الصفر حيث $n \geq 2$ ، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور رباعية...، وهكذا.

مراجعة المفردات

النظرية الأساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

أمل باجوده

ولإيجاد جميع جذور عدد مركب يمكن أن تستعمل نظرية ديموافر للوصول إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — الجذور المختلفة

لأي عدد صحيح $n \geq 2$، فإن للعدد المركب $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

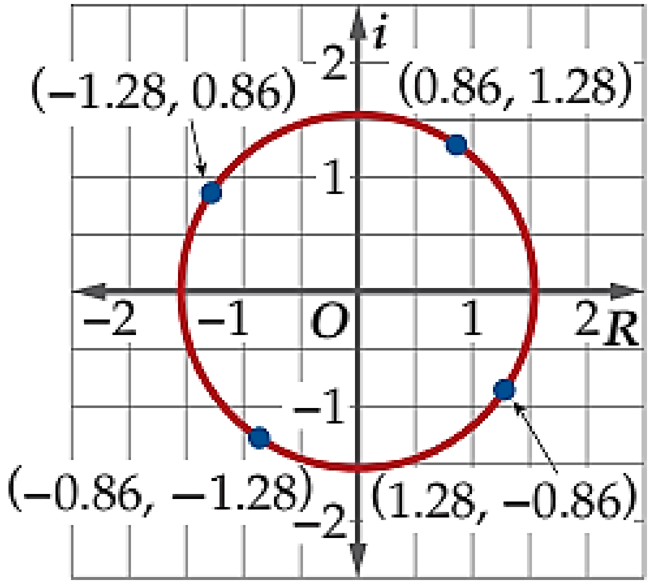
ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k = n - 1$ ، وعندما يساوي k العدد n، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالتكرار، كما يظهر في المعادلة:

$$\frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما $k = 0$

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦
الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

لاحظ أن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال **7** تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته $(\sqrt[8]{32} \approx 1.54)$، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.



أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

إرشادات للدراسة

الجذور النونية لعدد مركب

يكون للجذور المقياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$. سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$ ، ثم تزداد للجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

$r^{\frac{1}{n}}$

إيجاد الجذور المركبة

$\frac{\theta}{n}$

زيادة للسعة

$\frac{360°}{n}$

مرة n -1

$\frac{360°}{n}$

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

تحقق من فهمك

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحصيلي

عند إيجاد الجذور التكعيبية للعدد المركب $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2}\right)$
فإن مقياس الجذر الثاني يساوي

A) 1

B) 2

C) 4

D) 8

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

تحصيلي

عند إيجاد الجذور الخماسية للعدد المركب $3\,(\cos\pi + i\,\sin\pi)$ فإن سعة الجذر الأول تساوي

A) $\frac{\pi}{5}$

B) $\frac{\pi}{3}$

C) π

D) 5π

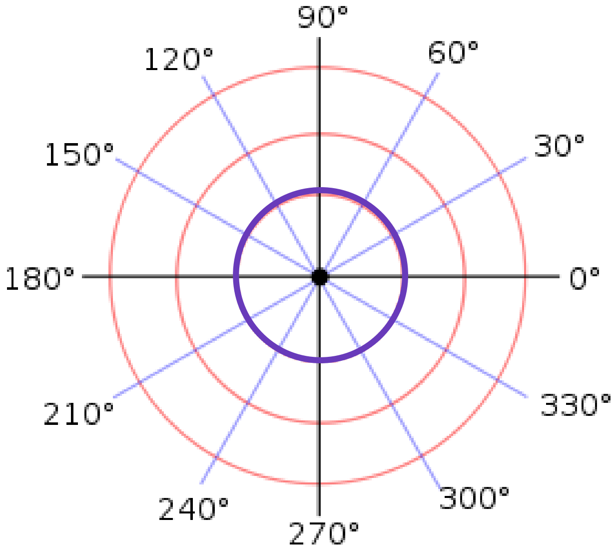
أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة عن تمثيل الجذور في المستوى المركب؛

لذا فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.



أمل باجوده

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مثال 8 الجذور النونية للعدد واحد

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحقق من فهمك

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

أمل باجوده

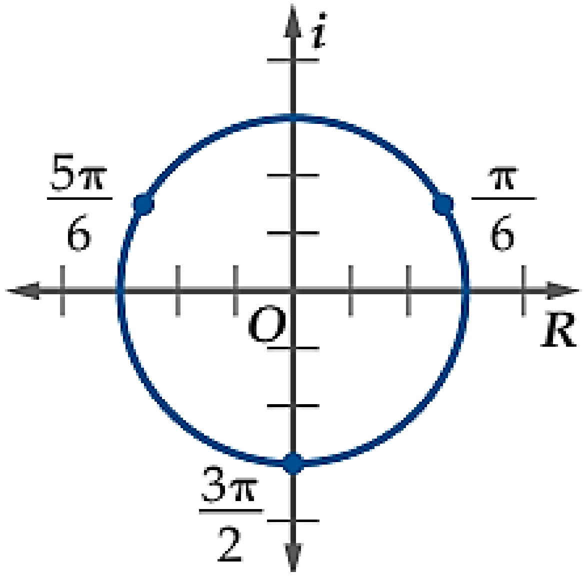
التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: أوجد الجذور المحدّدة على كل من المنحنيين أدناه على الصورة القطبية، ثم عيِّن العدد المركب الذي له هذه الجذور.

(43



أمل باجوده

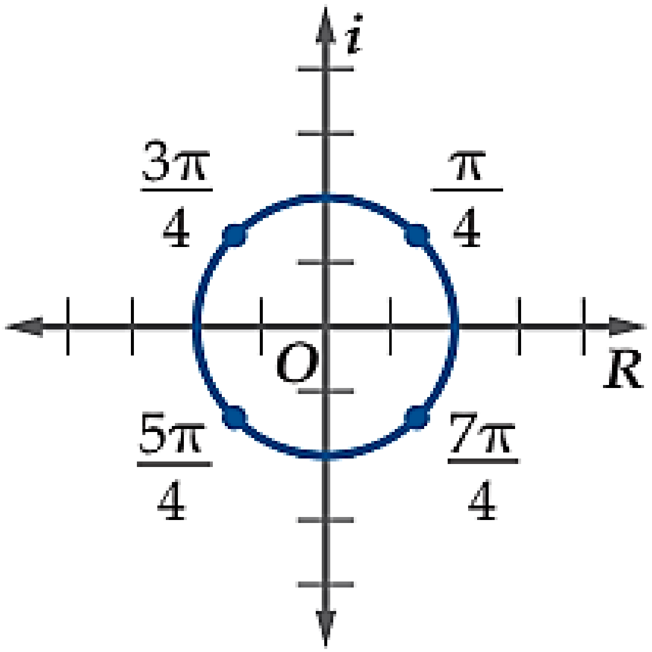
التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مسائل مهارات التفكير العليا

44)

تحدٍّ: أوجد الجذور المحدّدة على كل من المنحنيين أدناه على الصورة القطبية، ثم عيِّن العدد المركب الذي له هذه الجذور.



أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تدريب على اختبار

56) أي مما يأتي يمثّل $\overrightarrow{AB}$ وطوله،

إذا كان $A(3, 4, -2)$, $B(-5, 2, 1)$ ؟

A $\langle -8, -2, 3 \rangle, \sqrt{77}$

B $\langle 8, -2, 3 \rangle, \sqrt{77}$

C $\langle -8, -2, 3 \rangle, \sqrt{109}$

D $\langle 8, -2, 3 \rangle, \sqrt{109}$

أمل باجوده

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تدريب على اختبار

57) ما المسافة بين النقطة $\left(-3, \frac{5\pi}{3}\right)$ والنقطة $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$ ؟

A 3.97

B 4.97

C 5.97

D 6.97

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة مما يأتي:

1) ________ هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق معادلة قطبية معطاة.

2) المستوى الذي يحوي محورًا يمثّل الجزء الحقيقي، وآخر يمثل الجزء التخيلي هو ________ .

3) يُحدّدُ موقع نقطة في ________ باستعمال المسافة المتجه من نقطة ثابتة إلى النقطة نفسها، وزاوية متجهة من محور ثابت.

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

4) ________ هي الزاوية θ لعدد مركب مكتوب على الصورة: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

5) تُسمَّى نقطة الأصل في نظام الإحداثيات القطبية بـ ________ .

6) تُسمَّى القيمة المطلقة لعدد مركب بـ ________ .

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

7) _________ هو اسم آخر للمستوى المركب.

8) _________ هو نصف مستقيم ممتد من القطب، ويكون أفقيًا باتجاه اليمين.

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

تحصيلي

قيمة المقدار

$$=(\cos 15° + i \cos 75°)^6$$

A) 1

B) -1

C) i

D) $-i$

أمل باجوده

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

تحصيلي

قيمة المقدار $(1+\sqrt{3}\,i)^3$ =

A) -8

B) -3

C) 3

D) 8

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحصيلي

عند إيجاد الجذور الرباعية للعدد واحد فإن مقياس الجذر الثالث يساوي

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

أمل باجوده

التاريخ :

الحصة :

المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

ماذا أعرف	ماذا أريد أن أعرف	ماذا تعلمت	الربط بالواقع

أمل باجوده

التاريخ :
الحصة :
المادة : رياضيات٦

الموضوع : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

للتذكير غاليتي
أرجعي لمنصة مدرستي
وشاهدي الإثراء ثم حلي الواجب والاختبار لتثبيت معلوماتك .

سبحانك اللهم وبحمدك أشهد أن لا إله إلا أنت أستغفرك وأتوب إليك.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين .

أمل باجوده