

الاحتمال والإحصاء Probability and Statistics

الفصل 3

فيما سبق:

درست إحصائيات العينة
ومعالم المجتمع واحتمالات
الحوادث المركبة.

والآن:

- أميز المسوحات،
والدراسات والتجارب.
- أكون التوزيعات
الاحتمالية، وتمثيلاتها
البيانية، وأستعملها في
إيجاد الاحتمال.
- أستعمل القانون التجريبي
لإيجاد الاحتمالات.
- أميز بين العينة
الإحصائية، والمجتمع
الإحصائي.

لماذا؟

🌐 **التربية:** يستعمل
الاحتمال والإحصاء في
دراسة الفرضيات التربوية
واختبارها. حيث تُستعمل
المسوحات، وتجري التجارب؛
لتحديد الطرائق التعليمية
التي تؤدي إلى تعلم أفضل.
ويستعمل الإحصاء في
تحديد الدرجات عند تمثيل
درجات الفصول بيانياً، أو
عندما يريد المعلمون تقييم
درجات الطلاب.

قراءة سابقة: كون قائمة
بالأشياء التي تعرفها عن
الاحتمال والإحصاء، ثم تنبأ
بما ستتعلمه في هذا الفصل.



التهيئة للفصل 3

مراجعة المفردات

التباديل (Permutations) :

هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها مهماً.

التوافيق (Combinations) :

هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

الحادثتان المستقلتان (Independent Events) :

تكون A و B حادثتين مستقلتين، إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B .

الحادثتان غير المستقلتين (Dependent Events) :

تكون A و B حادثتين غير مستقلتين، إذا كان احتمال حدوث A يغير بطريقة ما احتمال حدوث B .

الحادثتان المتنافيتان (Mutually Exclusive Events) :

تكون A و B حادثتين متنافيتين، إذا لم يكن وقوعهما ممكناً في الوقت نفسه.

نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem) :

إذا كان n عدداً طبيعياً، فإن :

$$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

فضاء العينة (Sample Space) :

هو مجموعة النواتج الممكنة لتجربة ما.

الاحتمال (Probability) :

هو النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثة معينة.

اختبار سريع

حدّد ما إذا كانت الحوادث الآتية مستقلة، أو غير مستقلة.

(1) اختيار قصة وكتاب آخر لا يمثل قصة من مكتبة.

(2) اختيار رئيس، ونائب رئيس، وسكرتير، ومحاسب في نادٍ، على افتراض أن الشخص الواحد لا يشغل سوى منصب واحد.

(3) اختيار طالب ومعلم ومشرف اجتماعي للمشاركة في تنظيم الرحلات المدرسية.

حدّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تتطلب تطبيق التباديل أو التوافيق في حلّها:

(4) اصطفاة سبعة أشخاص في صف واحد عند المحاسب في أحد المتاجر.

(5) ترتيب أحرف كلمة «مدرسة».

(6) اختيار نكهتين مختلفتين لفطيرة من بين 6 نكهات.

اكتب مفكوك كل من العبارات الآتية:

$$(a - 2)^4 \quad (7)$$

$$(2a + b)^6 \quad (8)$$

$$(3x - 2y)^5 \quad (9)$$

$$\left(\frac{a}{2} + 2\right)^5 \quad (10)$$



الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة

Experiments, Surveys, and Observational Studies

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لماذا؟

يرغب الطلاب في تشكيل فريق لكرة السلة في مدرستهم، وكي يجدوا دعماً لمشروعهم، فقد نفذوا دراسة مسحية شملت الطلاب وأولياء الأمور؛ لمعرفة الموافقين منهم والمعارضين.

فيما سبق:

درست تصميم دراسة
مسحية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أميز الدراسات المسحية، والدراسات القائمة على الملاحظة والدراسات التجريبية.
- أميز بين الارتباط والسببية.

المفردات:

- الدراسة المسحية
- survey
- المجتمع
- population
- التعداد العام
- census
- العينة
- sample
- المتحيزة
- biased
- غير المتحيزة
- unbiased
- الدراسة القائمة على الملاحظة
- observational study
- المجموعة التجريبية
- treatment group
- المجموعة الضابطة
- control group
- الارتباط
- correlation
- السببية
- causation

الدراسات التجريبية والمسحية تُستعمل الدراسات المسحية في جمع البيانات، وإذا شملت عملية جمع البيانات جميع الطلاب في مدرسة ما، نقول: إن الدراسة شملت المجتمع، وفي هذه الحالة تُسمى هذه العملية **تعداداً عاماً**. أما إذا تم اختيار عدد محدود من طلاب المدرسة مثل 100 طالب، فتكون الدراسة المسحية قد اعتمدت على **العينة**. وتكون العينة **متحيزة** عندما يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام، فمثلاً: إذا شملت الدراسة المسحية الواردة في فقرة "لماذا؟" رأي لاعبي كرة السلة وأولياء أمورهم فقط، تكون العينة متحيزة. وتكون العينة **غير متحيزة** إذا تم اختيارها عشوائياً، أي إذا كان لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة، فإذا أرسلت استبانة في دراسة مسحية لـ 100 طالب تم اختيارهم عشوائياً عندها تكون العينة غير متحيزة.

العينات المتحيزة وغير المتحيزة

مثال 1 من واقع الحياة

دراسات مسحية: حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفّر إجابتك:

(a) سؤال كل عاشر شخص يخرج من قاعة الندوات عن عدد مرات حضوره ندوات ثقافية؛ لتحديد مدى دعم سكان المدينة للندوات الثقافية.

(b) استطلاع آراء أفراد في سوق الماشية؛ لمعرفة ما إذا كان سكان المدينة يحبون تربية الماشية أو لا.

(c) يحتوي صندوق على أسماء طلاب المدرسة جميعهم، سُحب من الصندوق 100 اسم عشوائياً، وسُئل أصحابها عن رأيهم في مقصف المدرسة.

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفّر إجابتك:

(1A) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز.

(1B) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائياً عن رياضتهم المفضلة.

لتجنّب التحيز في الدراسات المسحية المعتمدة على العينات لا بدّ من تحقّق أمرين هما: أن تكون العينة العشوائية مناسبة، وذلك بأن تكون غير متحيزة وحجمها كبير نسبياً، وألا تكون الأسئلة المطروحة متحيزة.

تصميم الدراسات المسحية

مثال 2 من واقع الحياة

دراسات مسحية في المدرسة: يريد خالد أن يُحدّد أفضل الأماكن للرحلة المدرسية. ما الأسئلة التي تعطيه الإجابة التي يبحث عنها دون تحيز؟

(a) هل تحب الذهاب إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي؟

(b) هل تحب الذهاب إلى حديقة الحيوان، أم إلى منتزه سلام؟

(c) أين تفضل أن تذهب في الرحلة؟

تحقق من فهمك

أي مما يأتي يُحدّد أفضل مادة بالنسبة إلى الطلاب دون تحيز؟

(2A) هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟

(2B) أيهما تفضل أكثر: العلوم أو الرياضيات؟

(2C) ما مادتك المفضلة؟

إرشادات للدراسة

العينة المتحيزة

تعدّ العينة متحيزة إذا وفقط إذا كانت غير عشوائية.

إرشادات للدراسة

المعالجة الشكلية

التي يخضع لها أفراد المجموعة الضابطة، والتي ليس لها أي تأثير في نتائج الدراسة، والهدف الأساسي منها هو التأكد من عدم معرفة الأفراد لأي المجموعتين التجريبية أو الضابطة ينتمون، لضبط محاولة تأثير بعضهم في نتائج الدراسة، وذلك ببذل المزيد من الجهد مثلاً أو العكس.

في الدراسة القائمة على الملاحظة، تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج. وفي الدراسة التجريبية، يتم إجراء معالجة خاصة على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة، وتجرى ملاحظة استجاباتهم.

دراسة تجريبية

- من 100 شخص، اختر 50 شخصاً خضعوا للمعالجة.
- اجمع البيانات، وحللها، وفسرها.
- من 100 شخص، اختر من بينهم 50 شخصاً عشوائياً وأخضعهم للمعالجة المقصودة بالتجريب، بينما لا تخضع الآخرين لأي معالجة أو لمعالجة شكلية.
- اجمع البيانات، وحللها، وفسرها.

في الدراسة التجريبية، يُسمّى الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي تخضع للمعالجة المجموعة التجريبية. أمّا الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء الذين لا يخضعون للمعالجة أو يخضعون لمعالجة شكلية، فيسمون المجموعة الضابطة. وتعطى المعالجة الشكلية لكي لا يعرف أفراد المجموعات لأي المجموعتين ينتمون، وتصبح الدراسة التجريبية عندها غير متحيزة.

الدراسات التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة

مثال 3 من واقع الحياة

حدّد ما إذا كان كل موقف ممّا يأتي يمثل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة. وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلاً من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا.

(a) اختر 200 طالب نصفهم خضع لأنشطة إضافية في مادة معينة، وقارن بين درجاتهم في تلك المادة.

(b) اختر 200 طالب واقسمهم عشوائياً إلى نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي معيّن، أمّا الأخرى فلا تخضعها لأي برنامج تدريبي.

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كان الموقف الآتي يمثل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلاً من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا.

(3) اختر 80 طالباً جامعياً نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية، وقارن نتائج المجموعتين في مساق الإحصاء تم تدريسه في الجامعة.

كيف تعرف متى تُستعمل الدراسات المسحية أو الدراسات التجريبية أو الدراسات القائمة على الملاحظة؟ تستعمل الدراسات المسحية عند الرغبة في جمع بيانات، أو آراء أفراد المجتمع حول موضوع معين، بينما تُستعمل الدراسات القائمة على الملاحظة عند الرغبة في دراسة أثر معالجة سابقة تعرض لها أفراد من المجتمع دون أي تأثير عليهم من الباحث، وتستعمل الدراسات التجريبية عند الرغبة في اختبار طريقة جديدة، أو في دراسة نتائج معالجة مقصودة يؤثر الباحث بها في مجموعة من الأفراد يتم تعيينهم عشوائياً.

الدراسات المسحية والتجريبية والقائمة على الملاحظة

مثال 4

حدّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفّر إجابتك:

(a) تريد أن تختبر طريقة معالجة لمرض ما.

(b) تريد أن تجمع آراء حول القواعد المعمّدة في انتخاب رئيس الصف.

(c) تريد أن تعرف ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنوات يؤثر في سعة الرئة أو لا.

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت الحالة الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، فّر إجابتك.

(4) تريد استطلاع آراء طلاب مدرسة ثانوية حول وسيلة المواصلات المدرسية باستعمال مقياس متدرج من 1 (لا أوافق مطلقاً) إلى 5 (أوافق بشدة).

التمييز بين الارتباط والسببية إن أي علاقة تظهر بين نتائج التجربة والمعالجة لا تعني بالضرورة أن المعالجة هي السبب في النتيجة.

فعندما يوجد ارتباط بين ظاهرتين، فإن كلاً من الظاهرتين تؤثر في الأخرى فإن معرفتك بقيم الظاهرة الأولى يمكنك من التنبؤ بقيم الظاهرة الثانية، والعكس صحيح، فمثلاً: هناك ارتباط بين كتل الأشخاص وأطوالهم، فكلما زاد طول الشخص زادت كتلته بشكل عام، فإذا عرفت طول شخص يمكنك التنبؤ بكتلته. وعندما يوجد سببية، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سبباً مباشراً في وقوع الظاهرة الأخرى لذا فإن السببية تتضمن الترتيب الزمني، فوقع الظاهرة الأولى أو لا يكون سبباً في وقوع الظاهرة الثانية لاحقاً كنتيجة لذلك، فمثلاً: دوران الأرض حول محورها هو السبب الوحيد في تعاقب الليل والنهار. وبينما يكون من السهل ملاحظة الارتباط بين ظاهرتين، فإنه من الصعب البرهنة على وجود سببية بين الظاهرتين.

الارتباط والسببية

مثال 5

بين ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطاً، أو سببية، ثم فّر إجابتك:

(a) أظهرت الدراسات أن الطلاب يكونون أقل نشاطاً بعد تناول الغداء.

(b) إذا رُفعت أثقالاً، أُستطيع الالتحاق بفريق كرة القدم.

(c) عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع.

تحقق من فهمك

بين ما إذا كانت العبارة الآتية تُظهر ارتباطاً، أو سببية، ثم فّر إجابتك.

(5) عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز.

إرشادات للدراسة

السببية

إذا لم يوجد أي سبب آخر يعطي النتيجة فإنك تفترض السببية.



تدرب وحل المسائل

(9) وجد عادل 100 شخص، نصفهم متطوعون في مأوى الفقراء، وقارن بين متوسطي الدخل السنوي لأفراد المجموعتين.

(10) اختر 300 شخص، واقسمهم عشوائياً إلى مجموعتين: إحداهما تقرأ القرآن لمدة ساعة قبل النوم، والأخرى لا تفعل شيئاً، ثم قارن بين كيفية نوم كل من المجموعتين.

(11) اختر 250 شخصاً نصفهم في الفرق الرياضية، وقارن بين كمية الوقت الذي يمضونه في حل الواجبات.

(12) اختر 100 طالب نصفهم في نادي اللغة الإنجليزية، وقارن بين درجاتهم في اللغة الإنجليزية.

حدّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفّر إجابتك: (مثال 4)

(13) تريد اختبار علاج لمعالجة الصلع عند الرجال.

(14) تريد استطلاع آراء أشخاص حول سياسة جديدة لشركة.

(15) تريد معرفة ما إذا كان عدد سنوات الركض يؤثر في حركة الركبة أو لا.

(16) تريد معرفة ما إذا كانت المشروبات الغازية تؤثر في جدار المعدة أو لا.

(17) تريد اختبار معالجة معينة تبعد الحيوانات عن البساتين التي تحوي غزلاً.

بيّن ما إذا كانت كل من العبارات الآتية تظهر ارتباطاً، أو سببية، وفّر إجابتك: (مثال 5)

(18) عندما أمارس الرياضة، أكون في وضع نفسي أفضل.

(19) عندما يكون الجو بارداً وممطراً بغزارة، لا نذهب إلى المدرسة.

(20) عندما يكون الطقس حاراً في فصل الصيف، يكثر بيع المشروبات الباردة.

(21) كثرة القراءة تجعلك أكثر ذكاءً.

(22) دلّت الأبحاث على أن من يتقن أكثر من لغة، يكون أقل إمكانية للإصابة بالمرض.

(23) النوم بحذائك يؤدي إلى شعورك بالصداع.

(24) **استبانات:** توزّع شركة استبانات على العاملين الذين تركوا العمل في الشركة، وكان أحد أسئلة الاستبانة هو كيف يرى العامل خبرته التي اكتسبها في الشركة؟ هل هذه دراسة مسحية متحيزة؟ فّر السبب.

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنّى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفّر إجابتك: (مثال 1)

(1) استطلاع رأي كل ثالث شخص يخرج من مطعم للمشويات؛ لمعرفة الوجبة المفضلة للناس.

(2) الاستفسار من طلاب صف معين من المتميزين في مادة العلوم عن أفضل المواد لديهم.

(3) الاستفسار من الطالب الذي ترتيبه 20 من كل 20 طالباً يخرجون من مدرستك، عن الطالب الذي سيصوتون له في انتخابات المجلس الطلابي.

(4) **دراسة مسحية:** بيّن ما إذا كانت الدراسة المسحية الآتية تتبنّى عينة متحيزة أو غير متحيزة، فّر إجابتك.
استطلاع آراء طلاب في كلية الطب؛ لمعرفة المهنة المستقبلية المفضلة لدى الشباب.

حدّد سؤال الدراسة المسحية الذي تحصل منه على الإجابة المطلوبة بشكل أفضل. (مثال 2)

(5) يريد زاهر أن يحدد فريق كرة القدم الأكثر شعبية في المملكة.

(a) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في مدينة الرياض؟

(b) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في المملكة؟

(c) ما مدى تقديرك لفرق كرة القدم في المملكة؟

(6) يريد سليمان أن يحدد الرغبة في تكوين أول نادٍ للشطرنج في المدرسة.

(a) في أي يوم ترغب في أن تتأخر في المدرسة؟

(b) هل تحب الشطرنج؟

(c) هل تحب أن تنضم إلى نادي الشطرنج في المدرسة؟

(7) يريد هاني أن يتعرف إلى الطالب المثالي في المدرسة.

(a) من ترى أنه الطالب المثالي في المدرسة؟

(b) هل تفضّل الطالب الذي لا يبادر بالمساعدة، أم الذي يبادر بها؟

(c) إذا طُلب إليك إبداء الرأي، فهل تفعل؟

حدّد ما إذا كان كل موقف من المواقف الآتية يمثل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، اذكر كلاً من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا: (مثال 3)

(8) قبل الاختبار، قام المعلم باختيار شعبتين من الصف نفسه بشكل عشوائي، وقام بمراجعة المادة لطلاب إحداها، بينما لم يراجع المادة لطلاب الشعبة الأخرى. ثم قام بمقارنة نتائج الاختبار لهما.

مراجعة تراكمية

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 6 \rangle$ ، فأوجد كلاً مما يأتي: (الدرس 1-2)

$$2\mathbf{u} \quad (30)$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (31)$$

$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (32)$$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي: (الدرس 1-4)

$$A(2, 2, 7), B(1, 3, -4) \quad (33)$$

$$A(4, 5, 10), B(7, 1, 8) \quad (34)$$

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي: (الدرس 2-2)

$$(3, 90^\circ) \quad (35)$$

$$(2, 210^\circ) \quad (36)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \quad (37)$$

عبّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (الدرس 2-3)

$$6 + 8i \quad (38)$$

$$-1 - i \quad (39)$$

تدريب على اختبار

حدّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة، وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدّد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم بيّن ما إذا كانت متحيزة أو لا.

(40) اختر 220 شخصاً عشوائياً، وقسمهم عشوائياً إلى مجموعتين. إحداهما تقوم بالتدريبات الرياضية مدة ساعة واحدة يومياً، والأخرى لا تقوم بهذه التدريبات، ثم قارن بين كتلة الجسم لكل من المجموعتين.

(41) اختر 200 طالب، نصفهم يمارس كرة القدم، وقارن فترة النوم بين المجموعتين.

(42) اختر 100 طالب جامعي، نصفهم لديه وظيفة بدوام جزئي، وقارن معدلاتهم التراكمية.

مسائل مهارات التفكير العليا

(25) **اكتشف الخطأ:** طُلب إلى كل من سامي وهشام أن يصمم دراسة تجريبية غير متحيزة. هل وفق أي منهما في ذلك؟ فسّر إجابتك.

سامي

- خذ مجموعة من 20 شخصاً بطريقة عشوائية.
- اطلب إلى نصفهم عشوائياً الالتزام بحمية تعتمد على الفواكه بالكامل لمدة 3 أسابيع.
- قارن بين أوزانهم بعد الأسابيع الثلاثة.

هشام

- خذ 20 لاعباً لكرة القدم.
- اطلب إلى نصفهم عشوائياً أن يقفوا 500 قفزة إلى أعلى في اليوم.
- قارن عدد مرات القفز إلى أعلى التي تستطيع كل مجموعة تنفيذها بعد الأسابيع الثلاثة.

(26) **تحّد:** كيف تظهر الدراسة المسحية عبر الهاتف تحيزاً للعينة؟

(27) **اكتب:** قارن من خلال ذكر أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين العينة العشوائية في اختيار الأفراد من المجتمع، وبين الاختيار العشوائي لأفراد المجموعة الضابطة في الدراسة التجريبية.

(28) **مسألة مفتوحة:** اذكر مثلاً من واقع الحياة لكل دراسة مما يأتي، وحدّد عدد أفراد العينة، وكيفية اختيارها.

(a) مسحية

(b) قائمة على الملاحظة

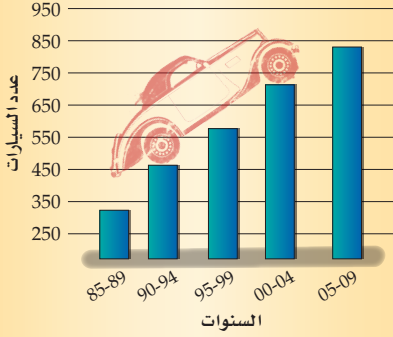
(c) تجريبية

(29) **تبرير:** كيف يحدث التحيز في الدراسة التجريبية؟ وكيف يؤثر في النتيجة؟ أعط مثلاً على ذلك.



معمل الحاسبة البيانية : تقويم البيانات المنشورة Evaluating Published Data

عدد السيارات المباعة



يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، مع تطبيق القوائم وجدول البيانات لتقويم البيانات التي يمكن الحصول عليها في الواقع.

يبين الجدول أدناه عدد السيارات التي باعها معرض للسيارات خلال الفترة 1985-2009، وقد قام المعرض بتمثيل هذه البيانات بالأعمدة البيانية كما في الشكل المجاور؛ وعرضها في إحدى الصحف، وذلك لدعم المقولة بأن مبيعات المعرض تزداد بشكل كبير جداً. هل هذا صحيح؟

السنوات	عدد السيارات المباعة
2005-2009	823
2000-2004	704
1995-1999	561
1990-1994	451
1985-1989	316

نشاط

تقويم التمثيل البياني للبيانات .

الخطوة 1 أدخل البيانات في صفحة من تطبيق القوائم وجدول البيانات.

- اضغط **on** ومنها اختر **ctrl**.

- اكتب عنوان البيانات (years) في أعلى العمود (A) و (cars) في أعلى العمود (B).

- لإدخال فئات السنوات في كل خلية بالضغط على **ctrl** ثم اختيار "،" ، فمثلاً لإدخال الفئة الأولى من السنوات في الخلية A₁ اكتب "85-89" ثم اضغط **enter** ، وكرر ذلك لبقية فئات السنوات.

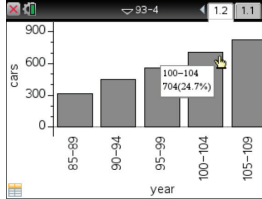
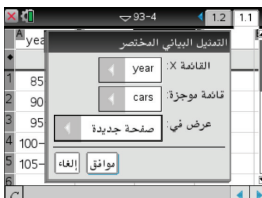
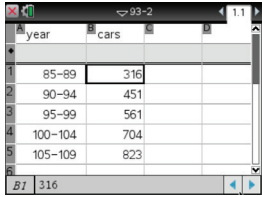
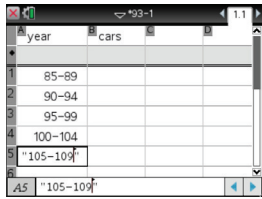
- استعمل الأسهم لإظهار الخلية B₁، ثم أدخل البيانات لكل فئة من السنوات.

الخطوة 2 مثل البيانات التي تم إدخالها بالأعمدة.

- اضغط **menu** ثم اختر **3:البيانات** ومنها **8:التمثيل البياني المختصر**

- اختر years في القائمة X: year ، و cars في القائمة Y: cars ، و صفحة جديدة من عرض في: صفحة جديدة لإظهار التمثيل البياني على صفحة جديدة، ثم اضغط **موافق** .

- لمشاهدة المعلومات عن أي عمود في التمثيل البياني، قم بالإشارة إلى ذلك العمود فتظهر معلوماته كما هو موضح في الشكل المجاور.



حلّ النتائج

قارن تمثيلك البياني بتمثيل الصحيفة.

- (1) هل يعرض التمثيلان البيانات نفسها؟
- (2) أي التمثيلين يُظهر أن مبيعات المعرض تزداد بشكل أكبر؟ ولماذا؟
- (3) لماذا اختار المعرض أن يعرض بياناته بهذه الطريقة؟ هل هي مقبولة؟ ولماذا؟





7:20	6:59	7:29	6:49	7:03	6:51
6:48	6:52	6:50	7:01	6:49	6:57
6:53	7:07	6:54	6:56	7:09	7:02

التحليل الإحصائي Statistical Analysis

3-2

لماذا؟

شارك أمجد في 18 سباقًا جليًا للدراجات خلال العام الماضي، ويُمثل الجدول المجاور الزمن بالدقائق والثواني الذي استغرقه للوصول إلى خط النهاية في كل منها. أي من مقاييس النزعة المركزية يفضل أن يستعمله أمجد لوصف هذه الأزمنة؟ إن إيجاد أحد مقاييس النزعة المركزية لوصف البيانات وتلخيصها، والوصول إلى الاستنتاجات المتعلقة بالدراسة يُسمى **التحليل الإحصائي** لها.

التحليل الإحصائي البيانات الموجودة في الجدول أعلاه تشتمل على متغير؛ لذا تُسمى بيانات في متغير واحد. ولوصف مثل هذه البيانات، يُستعمل أحد مقاييس النزعة المركزية، الذي يشير إلى متوسط البيانات أو منتصفها (مركزها)، وأبرز هذه المقاييس هو المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال. والآن: اختار مقياس لوصف البيانات يمكن استعمال الجدول أدناه:

مقاييس النزعة المركزية		مفهوم أساسي
المقياس	التعريف	أكثر فائدة عندما
المتوسط الحسابي	مجموع القيم مقسومًا على عددها	لا توجد في البيانات قيم متطرفة.
الوسيط	العدد الذي يشغل موقع المنتصف عند ترتيب القيم تنازليًا أو تصاعديًا في مجموعة بيانات عددها فردي، أو هو المتوسط للعددين الموجودين في المنتصف، في مجموعة بيانات عددها زوجي ومرتبطة ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا.	توجد في البيانات قيم متطرفة، ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات.
المنوال	القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا بين القيم.	تحتوي البيانات قيمًا متكررة.

مقاييس النزعة المركزية

مثال 1 من واقع الحياة

(a) **زمن السباق:** إشارة إلى البيانات في سباق الدراجات أعلاه، أي مقاييس النزعة المركزية يصف البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

17	15	17	16
15	16	16	12
18	18	18	14
1	48	16	40

(b) أي من مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المجاور؟ ولماذا؟

تحقق من فهمك

(1) تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال، و30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال، أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

يوجد نوعان من المقاييس يمكن استعمالهما لمجموعة من البيانات، هما **المُعَلِّمة** وهو مقياس يصف خاصية في المجتمع. و**الإحصائي** وهو مقياس يصف خاصية في العينة. فمتوسط دخل الفرد في المملكة هو مثال على المُعَلِّمة، أما دخل الفرد في مدينتك التي تسكنها، فهو مثال على الإحصائي. ويتم تحديد مجتمع الدراسة في ضوء الهدف من الدراسة، فإذا أراد باحث مثلًا تعرف مدى رضا معلّمي الرياضيات عن المناهج الجديدة في المملكة، فإن مجتمع الدراسة يكون جميع معلّمي الرياضيات الذين يدرّسون المناهج الجديدة في المملكة، ولصعوبة إجراء الدراسة على جميع المعلمين، فإنه يتم اختيار مجموعة صغيرة والتي تمثل عينة الدراسة.

فيما سبق:

درست مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت. (مهارة سابقة)

والآن:

- أختار مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات.
- أجد هامش خطأ المعاينة وأستعمله.
- أستعمل مقاييس التشتت لمقارنة مجموعات من البيانات.

المفردات:

التحليل الإحصائي

statistical analysis

المتغير

variable

بيانات في متغير واحد

univariate data

مقاييس النزعة المركزية

measure of central tendency

المُعَلِّمة

parameter

الإحصائي

Statistic

هامش خطأ المعاينة

margin of sampling error

مقياس التشتت

measure of variation

التباين

variance

الانحراف المعياري

standard deviation

إرشادات للدراسة

القيمة المتطرفة

هي واحدة من البيانات أكبر أو أصغر كثيرًا من بقية البيانات.

وعند سحب عينة من مجتمع فهناك خطورة من وجود خطأ في المعاينة ناتج عن إجراء الدراسة على عينة من المجتمع وليس على المجتمع بأكمله يسمى هامش خطأ المعاينة. وكلما زاد حجم العينة قلّ هامش خطأ المعاينة، ويُحدّد هامش خطأ المعاينة الفترة التي تدل على مدى اختلاف استجابة العينة عن المجتمع، وهذا يعني أنه يصف المدى الذي تقع فيه نسبة المجتمع فيما إذا أجريت الدراسة على المجتمع بأكمله.

هامش خطأ المعاينة

مفهوم أساسي

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

هامش خطأ المعاينة

مثال 2

في دراسة مسحية عشوائية شملت 2148 شخصاً، أفاد 58% منهم أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة.
(a) ما هامش خطأ المعاينة؟

(b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة؟

تحقق من فهمك

في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصاً، قال 41% منهم: إنهم مرتاحون للنهضة العلمية.

(2A) ما هامش خطأ المعاينة؟

(2B) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية؟

مقاييس التشتت تصف مقاييس التشتت مقدار تباعد البيانات أو تقاربها، ومن أشهر مقاييس التشتت **التباين**، **الانحراف المعياري**. ويصف هذان المقياسان مدى بعد مجموعة البيانات عن المتوسط أو قريبها منه.

يُمثل الرمز $\bar{x}$ المتوسط للعينة ويُقرأ « $\bar{x}$ بار»، ويمثل الرمز μ المتوسط للمجتمع ويُقرأ « μ يو». وبحسب كل من المتوسط للعينة والمتوسط للمجتمع بالطريقة ذاتها، أما طريقة حساب الانحراف المعياري لكل من بيانات العينة وبيانات المجتمع، فتختلف، وفيما يأتي توضيح لطريقة حساب كل من الانحراف المعياري للعينة (ويُرمز له بالرمز s ، والانحراف المعياري للمجتمع (ويُرمز له بالرمز σ ويُقرأ «سيجما»).

قانون الانحراف المعياري

مفهوم أساسي

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2}{n}}$$

حيث n عدد قيم المجتمع و μ المتوسط الحسابي للمجتمع و x_k قيم المجتمع.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث n عدد قيم العينة و $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة و x_k قيم العينة.

إرشادات للدراسة

كتابة هامش خطأ المعاينة
نكتب هامش خطأ المعاينة
عادة على صورة نسبة مئوية.

إرشادات للدراسة

مقاييس التشتت
درست سابقاً مقاييس التشتت
(المدى، الربيعات، المدى
الربيعي، الانحراف المتوسط).

الانحراف المعياري

مثال 3 من واقع الحياة

درجات اختبار: حصل طلاب المعلم صالح في اختبارين متتاليين على المتوسط نفسه في اختبار الرياضيات وهو 75. إذا علمت أن درجات الاختبارين كما يأتي:

الاختبار B	الاختبار A
100, 100, 90, 10, 100, 95, 10, 95, 100, 100, 85, 15, 95, 20, 95, 90, 100, 100, 90, 10, 100, 100, 25	85, 80, 75, 75, 70, 75, 75, 65, 75, 75, 75, 80, 75, 75, 70, 80, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 75

(a) بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعاً، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات الاختبار A.

الخطوة 1

الخطوة 2

(b) استعمل الحاسبة البيانية؛ لإيجاد الانحراف المعياري للاختبار B.

(c) قارن الانحراف المعياري في كلا الاختبارين. وماذا تستنتج؟

تحقق من فهمك

31	33	33	34	28
31	36	34	29	33
36	28	32	29	30
28	28	29	33	29
29	27	28	31	26

3A احسب المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع للبيانات المحددة في الجدول المجاور.

3B ضع 70 مكان 30 في الجدول المجاور. ماذا تتوقع أن يحدث لكل من المتوسط والانحراف المعياري؟ أعد الحسابات للتحقق.

3C اختير (5) طلاب عشوائياً من فصل دراسي، وقيست أطوالهم فكانت: 175 سم، 170 سم، 168 سم،

167 سم، 170 سم. بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعاً، ثم أوجد الانحراف المعياري لأطوال هؤلاء الطلاب.



الربط مع الحياة

يستعمل المعلمون الأنواع المختلفة من الأسئلة الموضوعية والمقالية لتقدير درجات طلابهم.

إرشادات للدراسة

المتوسط للمجتمع

عندما يكون المتوسط للمجتمع μ معلوماً، يمكنه أن يحل مكان المتوسط للعينة $\bar{x}$.

إرشادات للدراسة

المتوسط والانحراف المعياري للعينة

إذا قارن المعلم صالح درجات طلابه بدرجات طلاب آخرين في اختبار وطني مثلاً، فإن درجات طلابه تُعد عينة من درجات كل الطلاب الذين تقدموا للاختبار، وعليه أن يحسب $\bar{x}$ ، s في هذه الحالة.

تدرب وحل المسائل

أي مقياس النزعة المركزية يصف بصورة أفضل البيانات الآتية؟
ولماذا؟ (مثال 1)

(1) 833, 796, 781, 776, 758

(2) 37.2, 36.8, 40.4, 19.2

(3) 65, 70, 17, 60, 55, 65, 63, 58, 60, 69

(4) 53, 61, 46, 59, 61, 55, 49

(5) **تغذية:** يوضح الجدول أدناه عدد السرعات لكل طبق خضار.

الخضار	السرعات	الخضار	السرعات	الخضار	السرعات
زهرة	10	بركلي	25	باذنجان	14
بندورة	17	ملفوف	17	فاصوليا	30
حبوب	66	جزر	28	فلفل	20
كوسا	17	سبانخ	9	خس	9

(6) **طقس:** يبين الجدول أدناه، درجات الحرارة في أثناء النهار ولمدة أسبوع بالدرجات الفهرنهايتية:

اليوم	درجة الحرارة
السبت	64°F
الأحد	73°F
الاثنين	69°F
الثلاثاء	70°F
الأربعاء	71°F
الخميس	75°F
الجمعة	74°F

(7) **ألعاب أولمبية:** في دراسة مسحية عشوائية شملت 5824 شخصاً، أفاد 29% منهم أنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز. (مثال 2)

(a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

(b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين سوف يشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز ؟

(8) **رياضة:** في دراسة مسحية عشوائية شارك فيها 5669 شخصاً، وجد أن 31% منهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهرياً.

(a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

(b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهرياً ؟

(9) **تمارين رياضية:** في دراسة مسحية شملت 4213 شخصاً اختيروا بطريقة عشوائية، أفاد 78% منهم أنهم يمارسون الرياضة لمدة ساعة أسبوعياً على الأقل.

(a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

(b) ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الذين يمارسون الرياضة ساعة واحدة على الأقل أسبوعياً ؟

(10) **قيادة:** تُحدّد عادة السرعات القصوى على الطرق تفادياً للحوادث.

(a) فيما يأتي السرعات القصوى (mi/h) للطرق جميعها في إحدى الدول بين مدنها وقراها. بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعاً، ثم أوجد الانحراف المعياري للسرعات في الجدول أدناه. (مثال 3)

السرعات القصوى للطرق جميعها (mi/h)									
70	70	65	65	75	70	70	75	65	70

(b) إذا كان الانحراف المعياري للسرعات القصوى (mi/h) للطرق جميعها في دولة أخرى (24). قارن الانحراف المعياري للسرعات في كلا الدولتين. وماذا تستنتج ؟

(11) **تدريب:** في أثناء التمرين سجّل سلطان الأزمنة التي ركض فيها مسافة 40 m. بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعاً، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات في الجدول أدناه.

(12) **اختبارات:** فيما يأتي درجات صف مكوّن من 10 طلاب في اختبار من 25 درجة.

درجات 10 طلاب في اختبار من 25 درجة									
20	17	21	22	20	21	20	21	21	23

(a) قارن بين المتوسط والوسيط للدرجات.

(b) أوجد الانحراف المعياري للبيانات، وقربه إلى أقرب جزء من مئة.

(c) على افتراض أن الدرجة 20 كانت خطأً، وتم تعديلها إلى 25، كيف يتأثر كلٌّ من المتوسط والوسيط بهذا التغيير ؟



أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v في كل مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أو لا. (الدرس 1-5)

$$u = \langle 1, 3, 5 \rangle, v = \langle -8, 1, 1 \rangle \quad (21)$$

$$u = \langle -2, 4, 6 \rangle, v = \langle 2, 3, 4 \rangle \quad (22)$$

$$u = \langle 3, 4, 5 \rangle, v = \langle -1, -3, -5 \rangle \quad (23)$$

$$u = 8i - 8j + 3k, v = 2i + 4j + 6k \quad (24)$$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كل مما يأتي: (الدرس 2-2)

$$(6, 11) \quad (25)$$

$$(-9, 2) \quad (26)$$

$$(3, 1) \quad (27)$$

تدريب على اختبار

(28) **إحصاء:** في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة، أي مما يأتي لا يؤثر في الوسيط؟

- A مضاعفة كل عدد
 B زيادة كل عدد بمقدار 10
 C زيادة القيمة الصغرى فقط
 D زيادة القيمة الكبرى فقط

(29) **درجات اختبار:** كانت درجات 5 طلاب اختيروا عشوائياً في فصل دراسي كما يلي 70, 50, 30, 45, 55. بيّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعاً، ثم احسب الانحراف المعياري لدرجاتهم إلى أقرب عدد صحيح.

- A 40
 B 15
 C 14
 D 13

(13) **مدارس:** يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب لكل معلم في مدارس إحدى المناطق التعليمية:

عدد الطلاب لكل معلم				
27	22	26	26	25
24	25	28	22	24
24	26	24	22	20
27	23	22	29	23
24	24	26	29	28
28	29	25	25	23

(a) ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لهذه البيانات؟ ولماذا؟

(b) بيّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعاً، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات، علماً بأن المتوسط الحسابي لها يساوي 25، وقربه إلى أقرب جزء من مئة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(14) **مسألة مفتوحة:** اجمع بيانات في متغيّر واحد، ثم صف مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت المناسبة لهذه البيانات.

(15) **تحذّر:** إذا أيد 67% من المستهدفين موضوع دراسة مسحية، وكانت الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المؤيدة هي 69.2% - 64.8%، فكم شخصاً تناولت الدراسة المسحية رأيهم؟

(16) **تبرير:** حذفت قيمة متطرفة كبيرة من مجموعة بيانات، كيف يؤثر ذلك في المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة البيانات؟ وضح ذلك.

(17) **تبرير:** إذا زيدت كل قيمة في مجموعة بيانات بمقدار 10، فكيف يؤثر ذلك في المتوسط والوسيط والانحراف المعياري؟ فسر إجابتك.

(18) **اكتب:** قارن بذكر أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتوسط والوسيط لمجموعة بيانات في متغيّر واحد.

مراجعة تراكمية

حدّد إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسر إجابتك. (الدرس 3-1)

(19) قام باحث بإرسال استبانة إلى كل شخص تنتهي بطاقة الهوية الخاصة به برقم معين.

(20) إيجاد أطوال أعضاء فريق كرة السلة لتحديد المتوسط الحسابي لأطوال طلاب المدرسة.



الاحتمال المشروط

Conditional Probability

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لماذا؟

يختبر هيثم دواءً يقي من بعض الأمراض. وتوجد مجموعتان من الأشخاص إحداهما تجريبية تم إعطاء الدواء الحقيقي لأفرادها، بينما تم إعطاء دواء شكلي (غير فعال) للمجموعة الأخرى (المجموعة الضابطة). وبعد الحصول على النتائج، يريد هيثم أن يجد احتمال بقاء المستهدفين أصحاء نتيجة الدواء. وهذا المثال يُفسّر مفهوم الاحتمال المشروط.

الاحتمال المشروط يُسمّى احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A ، احتمالاً مشروطاً. ويرمز له بالرمز $P(B|A)$ ، ويقرأ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A .

فيما سبق:

درست مفهوم الاحتمال وكيفية حسابه. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد احتمال وقوع حادثة إذا علم أن حادثة أخرى قد وقعت.
- أستعمل الجداول التوافقية لإيجاد احتمالات مشروطة.

المفردات:

الاحتمال المشروط

conditional probability

الجدول التوافقي

contingency table

التكرار النسبي

relative frequency

الاحتمال المشروط

مفهوم أساسي

إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين، فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة B ، إذا علم أن الحادثة A قد وقعت يعرف على النحو:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

الاحتمال المشروط

مثال 1

ألقت عبيد مكعب أرقام مرة واحدة. ما احتمال ظهور العدد 3، علماً بأن العدد الظاهر فردي؟

تحقق من فهمك



1) يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر، ورقمت بطاقات كل لون بالأعداد من 1 إلى 13. إذا سحبت بطاقة، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 علماً بأن ما سحبت كان العدد 11 أو 12 أو 13؟

وزارة التعليم

Ministry of Education

الجداول التوافقية هي جداول تكرارية ذات بعدين، يتم فيها تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تُمثل تكرارًا يسمى **تكرارًا نسبيًا**، إذ يكون منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط.

الجداول التوافقية

مثال 2 من واقع الحياة

الحالة	عدد الأشخاص	
	يمارس المشي (w)	لا يمارس المشي (Nw)
مريض (S)	1600	1200
معافى (H)	800	400

مشي: أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًا معافى، علمًا بأنه يمارس المشي.

إرشادات للدراسة

حل مختصر

يمكن اختصار الحل في المثال 2 باستعمال الجداول التوافقية وفضاء العينة المختصر على النحو الآتي: احتمال أن يكون الشخص معافى بشرط أنه يمارس المشي هو

$$P(H|W) = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$$

تحقق من فهمك

(2) أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًا معافى، علمًا بأنه لا يمارس المشي.

يمكن استعمال الجداول التوافقية لتمثيل أي عدد من الحالات الممكنة.

مثال 3 على اختبار

يوضح الجدول أدناه عدد الطلاب الجامعيين الذين يمارسون الرياضة بشكل منتظم، إذا اختير طالب عشوائيًا، فأوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي، علمًا بأنه في السنة الثالثة.

الرياضيون الجامعيون	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
ضمن المنتخب الجامعي (K)	7	22	36	51
ليس ضمن المنتخب الجامعي (S)	269	262	276	257

- A 11.5% تقريبًا
B 16.6% تقريبًا
C 13.0% تقريبًا
D 19.8% تقريبًا

إرشادات للدراسة

كتابة الاحتمال

تذكر أن الاحتمال يُعبّر عنه بكسر اعتيادي أو بكسر عشري أو بنسبة مئوية.

تحقق من فهمك

(3) أوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي، علمًا بأنه في السنة الأولى.

- A 2.6% تقريبًا B 2.5% تقريبًا C 8.4% تقريبًا D 7.7% تقريبًا

تدرب وحل المسائل

- (9) **اختيار من متعدد:** يُبين الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين حضروا مباراة كرة قدم، والذين تغيبوا عنها من السنوات الجامعية الأولى والثانية والثالثة والرابعة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا، فأوجد احتمال أن يكون قد حضر المباراة علمًا بأنه من السنة الثالثة. (مثال 3)

أولى	ثانية	ثالثة	رابعة
48	90	224	254
182	141	36	8
الحضور			
الغيب			

- A 48.6% تقريبًا
B 77.6% تقريبًا
C 86.2% تقريبًا
D 91.6% تقريبًا

- (10) **اختيار من متعدد:** يقارن عادل وإبراهيم وسعود مجموعة أمثال شعبية جمعوها. وتم تمثيل ذلك وفق الجدول أدناه. إذا اختير مثل شعبي مما جمعه عشوائيًا، فأوجد احتمال أن يكون المثل اجتماعيًا، علمًا بأنه ليس مما جمعه عادل.

فكاهي	اجتماعي	خليط
521	316	44
119	145	302
244	4	182
عادل		
إبراهيم		
سعود		

- A 35.9% تقريبًا
B 24.8% تقريبًا
C 17.2% تقريبًا
D 15% تقريبًا

إذا أقيمت أربع قطع نقد متميزة مرة واحدة، فأجب عما يأتي:

- (11) ما احتمال ظهور شعارين، علمًا بوجود كتابة على قطعة واحدة على الأقل؟
(12) ما احتمال ظهور 3 كتابات علمًا بوجود شعار واحد على الأقل؟
(13) ما احتمال عدم ظهور أي شعار علمًا بأنه توجد كتابة واحدة على الأقل؟
(14) ما احتمال عدم ظهور أي كتابة علمًا بأنه يوجد 3 شعارات على الأقل؟



يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و 6 كرات حمراء، و 10 كرات صفراء، و 6 كرات بيضاء، و 5 كرات خضراء. إذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًا، فأوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي: (مثال 1)

- (1) أن تكون الكرة خضراء، إذا عُلِم أنها ليست زرقاء.
(2) أن تكون حمراء، إذا عُلِم أنها ليست خضراء.
(3) أن تكون صفراء، إذا عُلِم أنها ليست حمراء وليست زرقاء.
(4) أن تكون خضراء أو بيضاء، إذا عُلِم أنها ليست حمراء.
(5) أن تكون زرقاء، إذا عُلِم أنها بيضاء.

(6) **قطاعات دائرية:** رُقمت قطاعات دائرية متطابقة في قرص من 1 إلى 8، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 8 إذا عُلِم أنه استقر عند عدد زوجي؟

- (7) **فحص القيادة:** يوضّح الجدول أدناه أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة، علمًا بأن بعضهم أخذ حصصًا تدريبية تحضيرًا للفحص، والبعض الآخر لم يأخذ. إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيًا، فأوجد احتمال كل مما يأتي: (مثال 2)

أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
64	48
18	32
ناجح	
راسب	

- (a) الشخص ناجح علمًا بأنه أخذ حصصًا.
(b) الشخص راسب علمًا بأنه لم يأخذ حصصًا.
(c) لم يأخذ حصصًا، علمًا بأنه ناجح.

(8) **دروس التقوية:** سجّلت مدرسة أعداد طلاب الصفين الثاني المتوسط والثالث المتوسط المشتركين وغير المشتركين في دروس التقوية. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا، فأوجد احتمال كل مما يأتي:

مشارك	غير مشارك
156	242
312	108
الثاني المتوسط	
الثالث المتوسط	

- (a) الطالب مشارك في التقوية علمًا بأنه في الصف الثاني المتوسط.
(b) الطالب غير مشارك في التقوية علمًا بأنه في الصف الثالث المتوسط.
(c) الطالب في الصف الثاني المتوسط علمًا بأنه غير مشارك.

مراجعة تراكمية

(22) استعمل مسطرة ومنقلة، لرسم متجه يمثل $v = 20 \text{ km/h}$ ، باتجاه 60° مع الأفقي. (الدرس 1-1)

(23) **ثقافة مالية:** يوضح الجدول أدناه دخل 12 شركة في الأسبوع الأول من شهر محرم عام 1439هـ بالريال. (الدرس 3-2)

الدخل لكل شركة بالريال		
25778	25698	25200
23858	25580	27828
29173	22861	32903
27870	27124	23995

(a) أوجد كلاً من المتوسط الحسابي والوسيط.

(b) بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعاً، ثم أوجد الانحراف المعياري للبيانات وقربه إلى أقرب جزء من مئة.

(c) لنفترض أن تقريراً عن الشركات المذكورة ذكر أن القيمة 22861 ريالاً كانت خطأً، وهي في الحقيقة 24861. فكيف يتأثر كل من المتوسط والوسيط بهذا التعديل؟

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي، تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة. وفسر إجابتك. (الدرس 3-1)

(24) دراسة مسحية تتناول موظفي مطعم، لتقرر أكثر الأطباق شعبية.

(25) دراسة مسحية تتناول رأي مرتادي مكاتب البريد، لمعرفة أكثر ألوان السيارات شيوعاً.

تدريب على اختبار

(26) إذا كانت A, B حادثتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، بحيث كان $P(A) = 0.2, P(B) = 0.5, P(A \cup B) = 0.4$ ، فما قيمة $P(A | B)$ ؟

- A 0.5
- B 0.6
- C 0.7
- D 0.8

(27) سحبت كرة بشكل عشوائي من كيس يحتوي على كرتين حمراوين و3 زرقاء دون إرجاع وكانت زرقاء. ما احتمال سحب كرة زرقاء ثانية؟

(15) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 52 بطاقة مقسّمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق، ورُقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13. إذا سُحبت بطاقة واحدة عشوائياً، فما احتمال أن تحمل البطاقة الرقم 9 علماً بأنها حمراء اللون؟

(16) يبين الجدول أدناه أعداد الألعاب الإلكترونية الموجودة لدى شخص. إذا اختيرت لعبة عشوائياً فأوجد كلا من الاحتمالين الآتيين:

اللعبة	العدد
كرة قدم	5
كرة سلة	2
مصارعة	6
سباق سيارات	4
أخرى	3

(a) أن تكون من ألعاب المصارعة علماً بأنها ليست من ألعاب كرة القدم.

(b) أن تكون من ألعاب سباق السيارات علماً بأنها ليست من ألعاب كرة السلة وليست من ألعاب المصارعة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(17) **تحذّر:** ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 خمس مرات متتالية. ما احتمال ظهور الرقم 2 في الرميات الخمس علماً بأن الرقم 2 ظهر في الرميات الثلاث الأولى؟

(18) **اكتب:** فسر الاختلاف بين الاحتمال المشروط لحوادث غير مستقلة، والاحتمال المشروط لحوادث مستقلة. أعط مثالاً لكل نوع.

(19) **تبرير:** إذا مُثل احتمال حادثة مركبة من حادثتين بالرسم الشجري (شجرة الاحتمال)، فأی فروع الرسم الشجري يمثل الاحتمال المشروط. أعط مثالاً لموقف يمكن تمثيله بشجرة احتمال ثم مثله.

(20) **تبرير:** إذا رُميت قطعة نقد بشكل حر 21 مرة متتالية، فما احتمال أن تظهر الصورة في الرمية 21، إذا علمت أن الصورة ظهرت في الرميات العشرين الأولى؟ وضح تبريرك.

(21) **مسألة مفتوحة:** كوّن جدولاً توافقياً، واحسب احتمالاً مشروطاً يرتبط بالجدول.

- (8) يحاول باحث أن يحدد أثر إضاءة نوع جديد من المصابيح الكهربائية على أزهار للزينة المنزلية، حيث قام بتعريض مجموعة من الأزهار لإضاءة المصابيح الجديدة، ومجموعة أخرى لإضاءة المصابيح العادية. ويبيّن الجدول أدناه أعداد الأزهار التي عاشت أو ماتت في المجموعتين.

إضاءة عادية	إضاءة جديدة	
17	24	عاشت
13	6	ماتت

إذا اختيرت زهرة منها عشوائياً، فما احتمال: (الدرس 3-3)

- (a) أن تكون من الأزهار التي تعرضت لإضاءة المصابيح الجديدة علماً بأنها عاشت؟
(b) أن تكون من الأزهار التي عاشت علماً بأنها تعرضت لإضاءة المصابيح العادية؟

إذا أُلقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

(9) ظهور عدد فردي علماً بأن العدد الظاهر أكبر من 3.

(10) ظهور العدد 4 علماً بأن العدد الظاهر كان زوجياً.

(11) اختيار من متعدد: في القرص ذي المؤشر الدوار المقسم إلى (16) قطاعاً متطابقاً، ومرقمة بالأعداد 1-16، ما احتمال استقرار المؤشر على عدد فردي، إذا علم أنه استقر على عدد أكبر من 3؟ (الدرس 3-3)

A $\frac{13}{16}$

B $\frac{8}{16}$

C $\frac{8}{13}$

D $\frac{6}{13}$

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تبني عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفَسِّر إجابتك. (الدرس 3-1)

- (1) يتم اختيار كل ثاني شخص يخرج من مجمع تجاري يبيع بالجملة؛ لمعرفة عدد الأطفال في الأسر في تلك المدينة.
(2) يتم اختيار كل عاشر موظف يخرج من شركة؛ لمعرفة رأي الموظفين في عملهم.
(3) سؤال كل خامس طالب يدخل المدرسة عن مواصفات المعلم المثالي.

(4) اختيار من متعدد: حدّد أيّاً من العبارات الآتية توضح السببية: (الدرس 3-1)

A إذا تدرّبت كل يوم، فستصبح لاعباً محترفاً في كرة السلة.

B إذا قرأت كتابك المقرر، فستنجح في الاختبار.

C إذا تقدّمت لعشر وظائف مختلفة، فستتلقى عرضاً من واحدة على الأقل.

D إذا وقفت بالخارج تحت المطر من دون مظلة، فستبتل. حدد ما إذا كانت كل من الحالتين الآتيتين تمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة. وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة. (الدرس 3-1)

(5) اختر 250 طالباً في المرحلة المتوسطة نصفهم من المدارس الأهلية، وقارن بين عاداتهم الدراسية.

(6) خَصِّص لنصف الموظفين الذين اختيروا بطريقة عشوائية ساعة لتناول الغداء، وقارن اتجاهاتهم نحو العمل مع بقية زملائهم.

(7) أي مقاييس النزعة المركزية تصف بصورة أفضل البيانات الآتية؟ ولماذا؟ (الدرس 3-2)

عدد سنوات الخبرة						
2	1	4	2	3	2	2
1	2	4	3	1	3	2
4	1	3	2	3	2	3
0	1	1	1	4	3	2
3	2	2	2	1	2	1





الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

Probability and Probability Distributions

3-4



المادة ٩:
افترض أن شركة لديها 4 شواغر، وتشرط لتعيين الموظفين لديها اجتيازهم لمقابلة شخصية. إذا تقدم للشركة 8 أشخاص من المنطقة A، و 10 أشخاص من المنطقة B، وتمت مقابلة المتقدمين، واختير 4 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالوظائف 3 أشخاص من المنطقة A وشخص واحد من المنطقة B؟

الاحتمال تسمى النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثة معينة احتمالاً. ووقوع الشيء المرغوب فيه يُسمى **نجاحاً**، وعدم وقوعه يُسمى **فشلاً**. ومجموعة النواتج الممكنة تُسمى فضاء العينة. وكلما اقترب احتمال وقوع حادثة من 1، كانت فرصة أو إمكانية وقوعها أكبر.

احتمال النجاح والفشل

إذا كان عدد مرات نجاح وقوع حادثة S من المرات، وعدد مرات فشل وقوع الحادثة نفسها f من المرات، فإن احتمال النجاح يُكتب على النحو $P(S)$ ، كما يُكتب احتمال الفشل على النحو $P(F)$. ويُعطى كل من احتمال النجاح واحتمال الفشل بالصيغتين الآتيتين:

$$P(S) = \frac{S}{S+f}, \quad P(F) = \frac{f}{S+f}$$

لاحظ أن الصيغة: $P(S) = \frac{S}{S+f}$ لا تختلف في مضمونها عن الصيغة: $\frac{\text{عدد النواتج في الحادثة}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} P(\text{الحادثة})$

الاحتمال باستعمال التوافيق

مثال 1

رُشحت مدرسة 12 طالباً من الصف الثاني الثانوي، و 16 طالباً من الصف الأول الثانوي للتنافس على 6 جوائز؛ نظراً لتفوقهم الدراسي. إذا تمت مقابلة المرشحين، واختير 6 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالجوائز 3 طلاب من الصف الأول الثانوي و 3 طلاب من الصف الثاني الثانوي؟

الخطوة 1

الخطوة 2

الخطوة 3

فيما سبق:

درست إيجاد احتمال وقوع حادثة إذا علم أن حادثة أخرى قد وقعت. (الدرس 3-3)

والآن:

- أجد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق.
- أجد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية.
- أمثل بيانات التوزيعات الاحتمالية وأستعملها.

المفردات:

النجاح

success

الفشل

failure

المتغير العشوائي

random variable

المتغير العشوائي المنفصل

discrete random variable

التوزيع الاحتمالي

probability distribution

التوزيع الاحتمالي المنفصل

discrete probability

distribution

الاحتمال النظري

theoretical probability

الاحتمال التجريبي

experimental probability

القيمة المتوقعة

expected value

تنبيه!

احتمال النجاح والفشل

لاحظ أن الحرف الصغير s

يدل على عدد مرات النجاح

في وقوع حادثة، بينما الحرف

الكبير S يدل على حادثة

النجاح، وكذلك الأمر بالنسبة

للحرفين f و F.

تحقق من فهمك

1) في المثال 1 إذا كان عدد الذين رُشِّحوا من الصف الثاني الثانوي 3، ومن الصف الأول الثانوي 11، وكان عدد الجوائز 4، واختير 4 طلاب من الذين رُشِّحوا بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟

الاحتمال باستعمال التبديل

مثال 2 من واقع الحياة

لدى صالِح 6 أصدقاء تبدأ أسماءهم بالأحرف A, B, C, D, E, F ، ويتوقع من كل منهم اتصالاً هاتفياً للاتفاق على موعد رحلة ينوون القيام بها. ما احتمال أن يتصل A أولاً ثم B ثانياً، ويتصل كل من D, E, F أخيراً.

الخطوة 1

الخطوة 2

الخطوة 3

مراجعة المفردات

التبديل والتوافيق

عند اختيار مجموعة من الأشخاص أو الأشياء بترتيب معين، فإن الاختيار يُسمى تبديلاً، وعندما لا نهتم بعملية ترتيب الأشخاص أو الأشياء، فإن الاختيار يُسمى توفيقاً.

تحقق من فهمك

2) سباق: اشترك صلاح، وعبد الله، وسليم في سباق 400 m مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي يُسمى المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة متغيراً عشوائياً. والمتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم يُسمى متغيراً عشوائياً منفصلاً.

التوزيع الاحتمالي هو دالة تربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، مع احتمال وقوعها، ويعبر عنه بجدول أو معادلة، أو تمثيل بياني. ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين الآتيين:

- احتمال كل قيمة من قيم X محصور بين 0 و 1، أي أن $0 \leq P(X) \leq 1$.
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1، أي أن $\sum P(X) = 1$.

والتوزيع الاحتمالي المنفصل هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي منفصل.

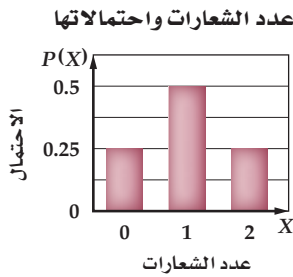
فعند رمي قطعتي نقد متميزتين مرة واحدة، فإن فضاء العينة هو $\{TT, TL, LT, LL\}$ ، حيث يُمثل L الوجه الذي يحمل الشعار، و T الوجه الذي يحمل الكتابة، إذا كان X متغيراً عشوائياً يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فإن X يأخذ القيم 0, 1, 2. ويمكنك حساب الاحتمال النظري لعدم الحصول على شعار، أو الحصول على شعار واحد، أو الحصول على شعارين، ثم تكوين جدول يمثل التوزيع الاحتمالي، كما يمكنك تمثيله بيانياً كما يأتي:

إرشادات للدراسة

البيانات المنفصلة

والبيانات المتصلة

تكون البيانات منفصلة إذا أمكن عدّ البيانات مثل عدد الأرناب في مزرعة. وتكون البيانات متصلة إذا كانت تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، فمثلاً أطوال جميع أفراد العينة تمثل بيانات متصلة.



$$P(0) = \frac{1}{4}, \quad P(1) = \frac{1}{2}, \quad P(2) = \frac{1}{4}$$

يُبين الجدول أدناه والتمثيل بالأعمدة المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

عدد الشعارات X	0	1	2
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

قراءة الرياضيات

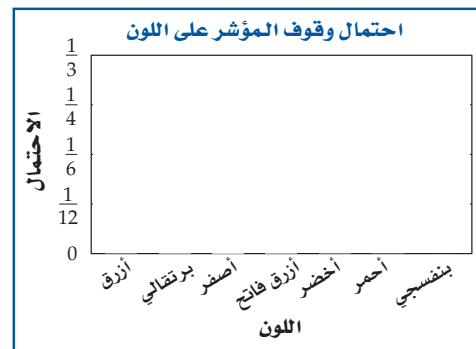
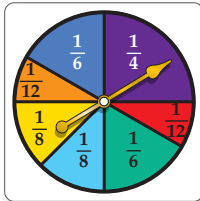
احتمالات المتغيرات العشوائية
يقراً الرمز $P(1)$ احتمال أن
يكون المتغير العشوائي X
مساوياً لـ 1.

التوزيع الاحتمالي المنفصل

مثال 3

يوضح القرص ذو المؤشر الدوار توزيعاً احتمالياً، حيث يمكن أن يتوقف المؤشر على أي من القطاعات الملونة، وقد كتب على كل قطاع احتمال ظهوره (لاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1).

(a) مثل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي:



(b) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحديد اللون الأكبر إمكانية لوقوف المؤشر عنده، ثم أوجد احتماله.

(c) أوجد (أخضر أو أزرق) P .

تحقق من فهمك

يوضح الجدول أدناه توزيعاً احتمالياً، حيث أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة، وسُجِّل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين واحتمال كل منها.

المجموع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

(3A) مثل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.

(3B) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحديد الناتج الأكثر إمكانية للوقوع؟ ثم أوجد احتماله.

(3C) أوجد (11 أو 5) P .

إن الاحتمالات التي تمت دراستها هنا هي **احتمالات نظرية**؛ لأنها مبنية على افتراضات يتوقع الحصول عليها، بينما **الاحتمالات التجريبية** يتم تقديرها من عدد من التجارب. والقيمة المتوقعة أو التوقع $E(X)$ هي المتوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي المنفصل؛ أي أن القيمة المتوقعة $E(x)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كل منها $P(X)$ ، ويمكن إيجادها باستعمال القانون $E(X) = \sum_{i=1}^n Xi \cdot P(Xi)$ ، وتنتج هذه القيمة من خلال اعتماد الاحتمال النظري كوزن للمتغير العشوائي. ويخبرك بما يمكن حدوثه على المدى البعيد، وذلك بعد محاولات كثيرة.

إرشادات للدراسة

البيانات الوصفية
يمكننا أن نتعامل مع البيانات الوصفية بوصفها متغيرات عشوائية منفصلة.

تنبيه

احتمال الحوادث المتنافية
تذكر أنه إذا كانت A و B حادثتين متنافيتين، فإن $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$.

القيمة المتوقعة

مثال 4

أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة.

إرشادات للدراسة

قانون الأعداد الكبيرة

ينص قانون الأعداد الكبيرة على أنه كلما ازداد عدد مرات إجراء التجربة، اقتربت قيمة معدل القيم الناتجة من القيمة المتوقعة.

تحقق من فهمك

(4) أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

تدرب وحل المسائل

الاحتمال	المصدر
0.35	التلفاز
0.31	المذياع
0.02	الأصدقاء
0.11	الصحف
0.19	الإنترنت
0.02	مصادر أخرى

(6) **أخبار:** أجرى موقع إلكتروني مسحاً للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس. والجدول المجاور يبين نتائج هذا المسح. (مثال 3)

(a) بين أن هذه البيانات تمثل توزيعاً احتمالياً.

(b) إذا اختير أحد الذين شملهم هذا المسح عشوائياً، فما احتمال أن يكون مصدر أخباره الرئيس الصحف أو الإنترنت؟

(c) مثل البيانات بالأعمدة.

(7) أوجد القيمة المتوقعة عند سحب قصاصة ورق عشوائياً من بين 5 قصاصات كتب على كل منها أحد الأرقام 1-5 دون تكرار.

(8) **جوائز:** باع أحد النوادي 500 تذكرة دخول لحضور إحدى مبارياته ثمن الواحدة 10 ريالات، وأجري سحب عشوائي على أرقام التذاكر خصصت فيه ثلاث جوائز للأرقام الرابعة، بحيث تربح تذكرة واحدة الجائزة الأولى وقيمتها 1000 ريال، وتربح تذكرتان الجائزة الثانية وقيمتها 100 ريال، وتربح 5 تذاكر الجائزة الثالثة وقيمتها 50 ريالاً. إذا اشترى شخص تذكرة، فما القيمة المتوقعة للربح في هذا الموقف؟ (مثال 4)

(1) صندوق فيه 10 كرات، منها 6 حمراء، إذا سحبت منه كرتان معاً عشوائياً، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟ (مثال 1)

(2) **فن:** اختار مسؤول متحف للفنون 4 لوحات بشكل عشوائي من بين 20 لوحة؛ لعرضها في أحد المعارض. ما احتمال أن تكون 3 منها لفنان واحد يشارك بـ 8 لوحات في المتحف؟ (مثال 1)

(3) دخل 8 لاعبين A, B, C, D, E, F, G, H في مباراة، إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائياً، فما احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A, C, E, G على الترتيب؟ (مثال 2)

(4) **مختبر:** دخلت طالبات صف وعددهن 26 إلى مختبر المدرسة. إذا اختارت المعلمة أسماء الطالبات عشوائياً لتشكيل مجموعات للعمل، فما احتمال أن تكون أول ثلاث طالبات ذُكرت أسماؤهن جميلة، وآمنة، وخديجة على الترتيب؟ (مثال 2)

(5) أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6، وسجل العدد الأكبر بين العددين الظاهرين على الوجهين العلويين إذا اختلفا، وأحدهما إذا تساويا. (مثال 3)

(a) مثل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.

(b) ما الناتج الأقل إمكانية للوقوع؟ وما احتمالها؟

(c) أوجد $P(2 \text{ أو } 1)$ ؟



(a) بين أن هذه البيانات تمثل توزيعاً احتمالياً.

(b) إذا اختير طالب عشوائياً، فما احتمال ألا يقل تقديره عن B؟

(c) مثل البيانات بالأعمدة.

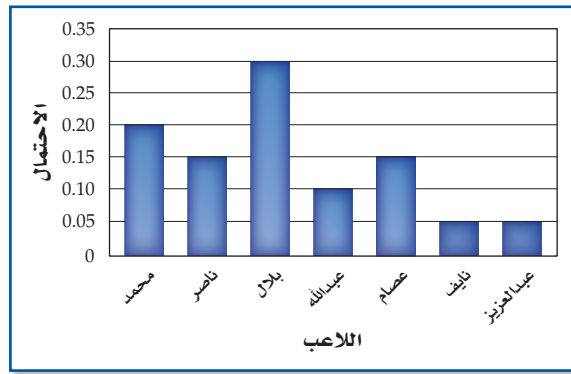
(14) **كرات زجاجية:** لدى زيد 35 كرة زجاجية؛ 8 منها سوداء، و 12 حمراء، و 9 خضراء، والبقية بيضاء. فإذا سحب كرتين معاً عشوائياً.

(a) مثل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي؟

(b) ما الناتج ذو الإمكانية الأقل للوقوع؟

(c) أوجد (إحدهما سوداء والأخرى خضراء) P .

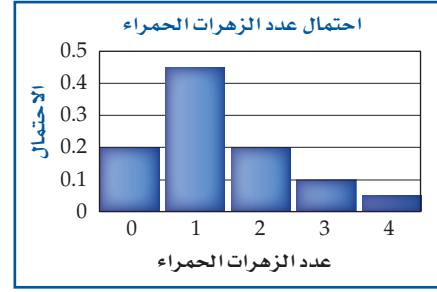
(15) **مسابقات:** يُبين التمثيل بالأعمدة احتمال أن يربح كل طالب جائزة.



(a) بين أن هذه البيانات تمثل توزيعاً احتمالياً؟

(b) أوجد (ربح محمد أو بلال) P .

(9) **أزهار:** يوضح التمثيل البياني أدناه التوزيع الاحتمالي لعدد الأزهار الحمراء عند زراعة 4 بذور.



(a) أوجد $P(0)$.

(b) ما احتمال أن تكون زهرتان على الأقل حمراوين؟

(10) **تبرعات:** قام طلاب الصف الثالث المتوسط في مدرسة بجمع بعض الأطعمة في طرود للتبرع بها للأسر الفقيرة. ولقد أحصى الطلاب أنواع المواد المقدمة كما في الجدول أدناه.

(a) أوجد احتمال أن يحتوي طرد اختير عشوائياً على القمح.

(b) أوجد احتمال أن يحتوي طرد اختير عشوائياً على وجبة طعام أو أرز.

(11) **جوائز:** تنافس 50 متسابقاً منهم جاسم وجلال وعلي في سحب عشوائي على أربع جوائز. ما احتمال أن يربح اثنان من الأسماء الثلاثة؟

(12) **ألعاب رياضية:** اختار معلم التربية الرياضية 5 طلاب عشوائياً من بين الطلاب البالغ عددهم 124 طالباً ليساعده على تطبيق بعض الألعاب. ما احتمال أن يختار واحداً على الأقل من بين عشرة أقارب له يجلسون مع الطلاب؟

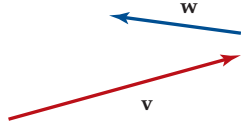
(13) **درجات:** أُجري اختبار في الرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي، والجدول أدناه يُبين نتائج هذا الاختبار.

نتائج اختبار الرياضيات	
التقدير	الاحتمال
A	0.29
B	0.43
C	0.17
D	0.11
F	0



مراجعة تراكمية

- (21) أوجد محصلة المتجهين أدناه مستعملًا قاعدة المثلث،
أو متوازي الأضلاع. ثم حدّد اتجاهه بالنسبة للأفقي. (الدرس 1-1)



- (22) اكتب المعادلة $r = 12 \cos \theta$ على الصورة الديكارتية.
(الدرس 2-2)

- (23) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء. سُحبت كرتان على التوالي دون إرجاع. ما احتمال أن تكون الثانية بيضاء إذا كانت الأولى حمراء؟ (الدرس 3-3)

تدريب على اختبار

- (24) يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 6 كرات صفراء، و 4 كرات خضراء، وكرتين زرقاوين. سُحبت 3 كرات معًا عشوائيًا. إذا كان X متغيرًا عشوائيًا يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فما جميع القيم الممكنة لـ X ؟

A 1, 2

B 0, 1, 2

C 1, 2, 3

D 0, 1, 2, 3

- (25) ما القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي المبين في الجدول أدناه؟

x	3	2	1
p(x)	0.1	0.8	0.1

A 0.1

B 2

C 0.56

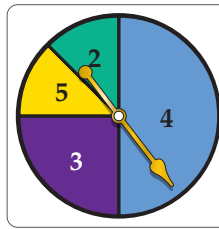
D 1

- (16) **أمطار:** التوزيع الاحتمالي أدناه يوضح عدد الأيام الممطرة في السنة في إحدى الدول. أوجد القيمة المتوقعة لعدد الأيام الممطرة.

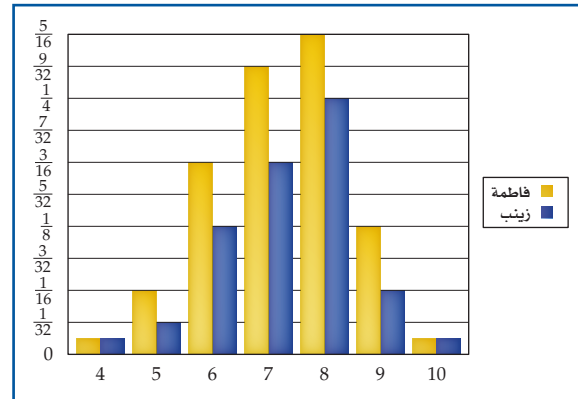
عدد الأيام	0	1	2	3	4	5	6	7	8
الاحتمال	0.1	0.1	0.15	0.15	0.25	0.1	0.08	0.05	0.02

- (17) **بطاقات:** رُفِّمَت مجموعة بطاقات على النحو الآتي: 3 بطاقات تم ترقيم كل منها بالرقم 8، وبطقتان تم ترقيم كل منهما بالعدد 10، و 4 بطاقات تم ترقيم كل منها بالرقم 6، و 3 بطاقات تم ترقيم كل منها بالرقم 5، وبطقتان تم ترقيم كل منها بالرقم 2، وبطاقة تم ترقيمها بالرقم 3. إذا سُحبت من هذه البطاقات واحدة عشوائيًا، فما القيمة المتوقعة لهذه البطاقة؟

مسائل مهارات التفكير العليا



- (18) **اكتشف الخطأ:** كَوْنَت كُلٌّ من فاطمة، وزينب توزيعًا احتماليًا باستعمال التمثيل بالأعمدة لمجموع العددين الناتجين عن دوران مؤشر القرص المجاور مرتين. أيهما يعدُّ تمثيلها صحيحًا؟ فسّر إجابتك.



- (19) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا: «يبنى الاحتمال النظري على نتائج التجارب». برّر إجابتك.

- (20) **مسألة مفتوحة:** كوّن توزيعًا احتماليًا منفصلًا فيه 5 نواتج مع تحديد احتمال كل منها.



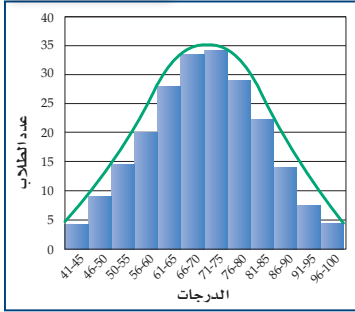
التوزيع الطبيعي

The Normal Distribution

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لماذا؟

مثّل المعلم عبدالعزيز درجات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بياناً كما هو مبين في الشكل المجاور. لاحظ أن هناك تجمعاً لدرجات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع الدرجات يشبه الجرس تقريباً. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعاً طبيعياً.

التوزيعات الطبيعية والملتوية في التوزيع الاحتمالي المتصل والذي هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل، يمكن للناتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، ومثال ذلك أطوال أشخاص وأوزانهم، ومستوى الدهون عند الأشخاص البالغين. وأفضل مثال على التوزيعات الاحتمالية المتصلة هو التوزيع الطبيعي.

فيما سبق:

درس التوزيعات الاحتمالية. (الدرس 3-4)

والآن:

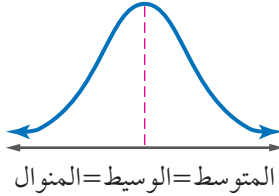
- أحد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزعة طبيعياً أو ملتوية.
- أستعمل القانون التجريبي لأجد الاحتمالات.

المفردات:

التوزيع الاحتمالي المتصل
continuous probability
distribution
التوزيع الطبيعي
normal distribution
التوزيع الملتوي
skewed distribution

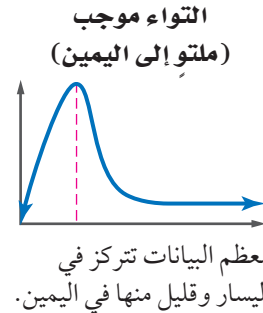
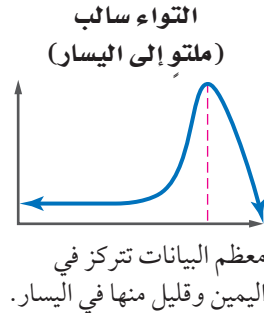
خصائص التوزيع الطبيعي

مفهوم أساسي



- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط.
- يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال.
- المنحنى متصل.
- يقترّب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب، ولكنه لا يمسه.

على الرغم من أن التوزيع الطبيعي متصل، فإن التوزيعات المنفصلة أيضاً يمكن أن يكون لها شكل التوزيع الطبيعي. ويمكن للتوزيعات أن تظهر بأشكال أخرى تُسمى توزيعات ملتوية.



تصنيف بيانات التوزيع

مثال 1

حدّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواء موجباً، أو التواء سالباً، أو موزعة توزيعاً طبيعياً:

21	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	البيانات
1	2	4	3	5	8	6	4	1	1	1	التكرار

(a)

حدّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواء موجباً، أو التواء سالباً، أو موزعة توزيعاً طبيعياً:

البيانات	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
التكرار	4	6	6	5	4	2	1	2	2	1	1	2

(b)

إرشادات للدراسة

«متصل» مقابل «متصل»

يأخذ التوزيع الاحتمالي المنفصل عدداً محدوداً من القيم، وغالباً ما تكون أعداداً صحيحة. أما التوزيع الاحتمالي المتصل، فيأخذ عدداً غير محدد من القيم تنتمي إلى فترة متصلة. وفي حالة التوزيع الاحتمالي المتصل يكون احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة واحدة فقط مساوياً للصفر.

تحقق من فهمك

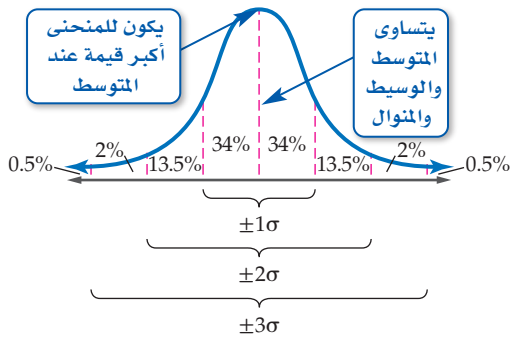
1) حدّد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تُظهر التواء موجباً، أو التواء سالباً، أو موزعة توزيعاً طبيعياً.

قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1

القانون التجريبي إن المساحة بين قيمتين من البيانات تمثل نسبة البيانات التي تقع بين هاتين القيمتين. ويمكن أن يستعمل القانون التجريبي لوصف المساحات تحت المنحنى الطبيعي، والتي تقع ضمن انحراف أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات معيارية من المتوسط.

القانون التجريبي

مفهوم أساسي



يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص الآتية:

• يقع 68% تقريباً من البيانات ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

وهذا يعني أن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.

• يقع 95% تقريباً من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

وهذا يعني أن الغالبية العظمى من البيانات (95%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ضعف قيمة الانحراف المعياري.

• يقع 99% تقريباً من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

وهذا يعني أن جميع البيانات تقريباً (99%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ثلاثة أمثال الانحراف المعياري.

التوزيع الطبيعي

مثال 2

المتوسط لتوزيع طبيعي 34، وانحرافه المعياري 5. أوجد احتمال أن تزيد قيمة X تم اختيارها عشوائياً في هذا التوزيع عن 24، (أي أوجد $P(X > 24)$).

$$\mu = 34, \sigma = 5$$

الخطوة 1

إرشادات للدراسة

التوزيع الطبيعي

في الحالات جميعها يجب أن يكون عدد البيانات كبيراً ليكون التوزيع طبيعياً تقريباً.



الخطوة 2

الخطوة 3

الخطوة 4

تحقق من فهمك

(2) أوجد احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًا في التوزيع الوارد في المثال 2 أقل من 49.

نُمثل العينة التي يكون توزيعها توزيعًا طبيعيًا بمنحنى طبيعي، وكأنها مجتمعًا.

عينة موزعة توزيعًا طبيعيًا

مثال 3 من واقع الحياة

أطوال: توزع أطوال 1800 يافع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط 66 in ، وانحراف معياري يساوي 2 in .

(a) ما العدد التقريبي لليافعين الذين تتراوح أطوالهم بين 62 in و 70 in ؟

(b) ما احتمال أن يتم اختيار أحد اليافعين عشوائيًا، بحيث يزيد طوله على 68 in ؟

تحقق من فهمك

درجات: إذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط حسابي مقداره 70 كيلوجرامًا، وانحراف معياري 10 كيلوجرامات، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين :

(3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 60, 80 كيلوجرامًا؟

(3B) ما احتمال أن يتم اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلوجرامًا؟



(1) **درجات:** يوضح الجدول أدناه نتائج أحد الاختبارات (النهاية العظمى للاختبار 40). حدد ما إذا كانت البيانات تُظهر التواءً موجباً، أو التواءً سالباً، أو موزعة توزيعاً طبيعياً. (مثال 1)

فئات الدرجات	عدد الطلاب
13-15	12
16-18	27
19-21	29
22-24	19
25-27	8
28-31	1
32-35	1

(2) حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول أدناه تُظهر التواءً موجباً، أو التواءً سالباً، أو موزعة توزيعاً طبيعياً:

عدد زوار المتنزهات	
عدد الزوار بالآلاف	عدد المتنزهات
3-4	10
5-6	2
7-8	2
9-10	1
11-12	1
13 فأكثر	4

(3) تتوزع مجموعة بيانات توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 161، وانحراف معياري 12، أوجد أن يتم اختبار قيمة لـ X عشوائياً من هذا التوزيع، بحيث تكون أقل من 149، أي أوجد $P(X < 149)$. (مثال 2)

إذا توزعت البيانات في الأسئلة 4-7 توزيعاً طبيعياً، وكان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل منها كما هو موضح، فأوجد الاحتمال المطلوب.

$$(4) \mu = 74, \sigma = 6, P(X > 86)$$

$$(5) \mu = 13, \sigma = 0.4, P(X < 12.6)$$

$$(6) \mu = 63, \sigma = 4, P(59 < X < 71)$$

$$(7) \mu = 91, \sigma = 6, P(73 < X < 103)$$

(8) **مدارس:** أعطى عمران اختباراً قصيراً لطلبته البالغ عددهم (50) طالباً، وكانت الدرجات موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 21، وانحراف معياري 2. (مثال 3)

(a) ما العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 19، 23؟

(b) ما احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 و 25؟

(9) **بطاريات السيارة:** إذا حُدد عمرُ بطارية السيارة بالمسافة التي تقطعها باستعمال هذه البطارية، وعلمت أن عمر أحد أنواع بطاريات السيارات يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 100000 km، وانحراف معياري 10000 km. وتنتج إحدى الشركات 20000 بطارية في الشهر، فأجب عما يأتي:

(a) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يتراوح عمرها بين 90000 km – 110000 km؟

(b) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يزيد عمرها على 120000 km؟

(c) ما العدد التقريبي للبطاريات التي يقلُّ عمرها عن 90000 km؟

(d) ما احتمال أن تشتري بطارية عشوائياً، ويتراوح عمرها بين 80000 km – 110000 km؟

(10) **صحة:** يتوزع مستوى الدهون (الكولسترول) في فئة الشباب الذكور في إحدى الدول توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 158.3، وانحراف معياري 6.6

(a) ما احتمال أن تقل نسبة الكولسترول عند الشباب الذكور عن 151.7؟

(b) كم شخصاً تقريباً من بين 900 شخص شملتهم الدراسة يتراوح مستوى الكولسترول عندهم بين 171.5 – 145.1؟

(11) **طعام:** تتوزع مدة صلاحية نوع معين من البطاطس توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 180 يوماً، وانحراف معياري 30 يوماً.

(a) ما احتمال أن تقع مدة صلاحية المنتج بين 150 يوماً، 210 أيام؟

(b) ما احتمال أن تقع مدة صلاحية المنتج بين 180 يوماً، 210 أيام؟

(c) ما احتمال أن تقل مدة صلاحية المنتج عن 90 يوماً؟

(d) ما احتمال أن تزيد مدة صلاحية المنتج على 210 أيام؟

(12) **طول:** تتوزع أطوال 880 طالباً في إحدى الجامعات توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي مقداره 67 in، وانحراف معياري مقداره 2.5 in

(a) كم طالباً تقريباً يزيد طوله على 72 in؟

(b) ما احتمال أن تقع أطوال الطلاب بين 59.5 in و 69.5 in؟

(13) **صناعة:** تُستعمل آلة لتعبئة عبوات بالمياه المعدنية، وتختلف كمية الماء اختلافاً ضئيلاً بين العبوات. إذا كان حجم الماء في 120 عبوة يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 1.1 L، وانحراف معياري 0.02 L، فأجب عما يأتي:

(a) كم عبوة تقريباً يكون حجم الماء فيها أقل من 1.06 L؟

(b) ما احتمال أن يكون حجم الماء في العبوات بين 1.08 L و 1.14 L؟

- (21) **مسابقات:** يبين الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين شاركوا في المسابقات الثقافية، والذين لم يشاركوا من الصفوف: الأول والثاني والثالث الثانوي في مدرسة ما. إذا اختير أحد الطلاب عشوائياً، فأوجد احتمال أن يكون قد شارك في المسابقات الثقافية علماً بأنه من الصف الثالث الثانوي؟ **(الدرس 3-3)**

	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
المشاركون	7	9	6
غير المشاركين	23	20	22

- (22) **جسور:** جسر لعبور المشاة فوق مسطح مائي على شكل قطع مكافئ فتحته إلى أسفل، أوجد معادلة الجسر، مفترضاً أن نقطة الأصل على سطح الماء تحت رأس القطع. **(مهارة سابقة)**

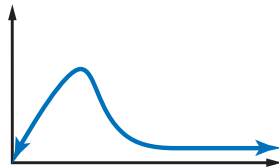


تدريب على اختبار

- (23) يتوزع عمر 10000 مصباح كهربائي توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 300 يوم، وانحراف معياري 40 يوماً. كم مصباحاً يقع عمره بين 260 يوماً، 340 يوماً؟

- A 2500
B 3400
C 5000
D 6800

- (24) ما الوصف الأفضل لمنحنى التوزيع الاحتمالي الممثل أدناه؟



- A توزيع سالب الالتواء
B توزيع متمائل
C توزيع طبيعي
D توزيع موجب الالتواء

- (25) **صناعة:** تتوزع قياسات أقطار مجموعة من الأقراص المدمجة التي تصنعها إحدى الشركات توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري مقداره 1 mm، وبمتوسط حسابي 120 mm.

- (a) ما احتمال أن يزيد طول قطر قرص اختير عشوائياً على 120 mm؟

- (b) إذا كانت الشركة تصنع 1000 قرص في الساعة، فما العدد التقريبي للأقراص المصنوعة في الساعة الواحدة، والتي يتراوح قطر كل منها بين 119 mm، 122 mm؟

- (14) **اكتشف الخطأ:** تتوزع أطوال أقطار نوع من الأشجار توزيعاً طبيعياً بمتوسط مقداره 11.5 cm، وانحراف معياري مقداره 2.5 cm ومدى من 3.6 cm إلى 19.8 cm، وقد حاولت كل من مريم وأمينة إيجاد مدى 68% من البيانات التي تقع في وسط التوزيع. أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

أمينة

تهتد النسبة 68% من $\mu + \sigma$ إلى $\mu - \sigma$ أي أن مدى 68% سيكون من 9 cm إلى 14 cm

مريم

مدى البيانات 16.2 cm، 68% من المدى يساوي تقريباً 11 cm، ويتوزع هذا المدى بالتساوي حول المتوسط 11.5 cm، أي أن مدى 68% سيكون من 6 cm إلى 17 cm

- (15) **تحذ:** في مستودع للأدوات الكهربائية عدد من المسجلات التي تعمل على البطارية. إذا كانت أعمار البطاريات تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 8.0 h، وانحراف معياري 0.7 h، فما العدد التقريبي للمسجلات في المستودع إذا علمت أن هناك 8 مسجلات يزيد عمر بطارياتها على 10.1 h؟

- (16) **اكتب:** اشرح الفرق بين التوزيعات الموجبة الالتواء، والتوزيعات السالبة الالتواء، والتوزيعات الطبيعية لمجموعة بيانات. أعط مثالاً على كل منها.

- (17) **تبرير:** بحسب القانون التجريبي، فإن معظم البيانات في التوزيع الطبيعي تقع ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. هل هذا صحيح أم خاطئ؟ برر إجابتك.

- (18) **مسألة مفتوحة:** أوجد بيانات واقعية تبدو كأنها تتوزع توزيعاً طبيعياً، أعط خصائص هذا التوزيع فيما يتعلق بالمتوسط الحسابي، والانحراف المعياري. ومثل البيانات بياناً.

- (19) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالاً على توزيع احتمالي منفصل، وآخر متصل. وصف الفرق بينهما.

مراجعة تراكمية

- (20) **طلاب:** رُشح 3 طلاب من الصف الأول الثانوي، و11 طالباً من الصف الثاني الثانوي لتوزيع بعض الطرود على الفقراء. إذا اختير من بينهم 4 طلاب عشوائياً، فما احتمال أن تتضمن العينة طالبين من الصف الأول الثانوي، وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟ **(الدرس 3-4)**



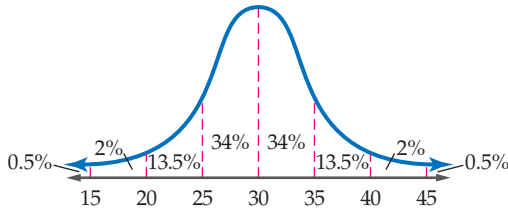
القانون التجريبي والمئينات

The Empirical Rule and Percentiles

عند معرفة المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع طبيعي، تستنتج أن 68%، 95%، 99% من البيانات ستكون ضمن انحراف معياري واحد، أو انحرافين معيارين أو ثلاثة انحرافات معيارية عن المتوسط على الترتيب، وهذا ما يُسمى القانون التجريبي. ويمكنك استعمال القانون التجريبي لتجد المئينات. والمئين n يقابل القيمة التي يقل عنها أو يساويها $n\%$ من قيم البيانات.

نشاط

في اختبار للرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي وُجد أن درجات الطلاب تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 30، وانحراف معياري 5



الخطوة 1 ارسم منحنى التوزيع الطبيعي لدرجات الطلاب المشابه للشكل المجاور، و عَيّن عليه المتوسط وأيضاً المتوسط مضافاً إليه أو مطروحاً منه مضاعفات الانحراف المعياري كما هو موضح في الشكل.

الخطوة 2 الدرجة 30 هي المتوسط، وبالرجوع إلى الشكل يمكن أن ترى أن 50% من الدرجات أقل من الدرجة 30 أو تساويها؛ لذا يمكنك القول: إن الدرجة 30 تقابل المئين 50.

ما المئين الذي يقابل الدرجة 35؟

الخطوة 3 ما المئين الذي يقابل الدرجة 40؟

الخطوة 4 ما الدرجة التي تقابل المئين 99.5؟

تمارين:

في كل من السؤالين التاليين، ارسم منحنى التوزيع الطبيعي، ثم أجب عن المطلوب.

(1) إذا كانت درجات الطلاب في اختبار مادة الفيزياء موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط 15، وانحراف معياري 2، فأوجد المئينات التي تقابل الدرجات 21، 15، 13.

(2) إذا كانت درجات الطلاب في اختبار مادة الكيمياء موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط 40، وانحراف معياري 4، فأوجد الدرجات التي تقابل المئينات 84، 50، 99.5.





التوزيعات ذات الحدين Binomial Distributions

3-6

لماذا؟

في لعبة الكرة الطائرة تبين أن اللاعب سلمان ينجح في لعب الإرسال الساحق الذي لا يصده الخصم في 36% من محاولاته، وبذلك يحصل فريقه على نقطة في كل مرة ينجح فيها.

فيما سبق:

درست استعمال نظرية ذات الحدين. (مهارة سابقة)

والآن:

- أميز تجربة ذات الحدين.
- أجد الاحتمالات باستعمال التوزيع ذي الحدين ومفكوكه.

المفردات:

تجربة ذات الحدين
binomial experiment
التوزيع ذو الحدين
binomial distribution

تجربة ذات الحدين

مفهوم أساسي

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

- يُعاد إجراء التجربة لعدد محدد (n) من المحاولات المستقلة (المرات).
- كل محاولة لها فقط نتيجتان متوقعتان؛ نجاح S ، أو فشل F .
- $P(S)$ ويرمز له بالحرف p هو نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$ ويرمز له بالحرف q هو نفسه في كل محاولة ويساوي $1 - p$.
- ويمثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

تمييز التجربة ذات الحدين

مثال 1

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

(a) تُبين نتيجة لمسح إحصائي داخل إحدى المدارس أن 68% من الطلاب يمتلكون حاسبة بيانية. إذا تم اختيار 6 طلاب عشوائياً، وسؤالهم عما إذا كانوا يمتلكون هذه الآلة؛ وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد الطلاب الذين يمتلكون الحاسبة البيانية، فإن:

(b) يحتوي صندوق على 52 بطاقة، وخُصص لكل 13 بطاقة أحد الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأبيض. سحبت منه 5 بطاقات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد البطاقات المسحوبة ذات اللون الأخضر.

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فيّّن السبب.

(1A) أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحد أن 61% يحبون الزي الجديد، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبًا بشكل عشوائي، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يحبون الزي الجديد. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.

(1B) أجاب خالد عن اختبار مكوّن من 20 فقرة من نوع «الاختيار من متعدد» لكل فقرة منها أربع إجابات، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار). وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة.

يُسمى توزيع النتائج المتوقّعة لتجربة ذات حدين والاحتمالات المرتبطة بها **توزيع ذات الحدين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستعمال الصيغة ${}_nC_X p^X q^{n-X}$ التي تمثل حدًا في مفكوك $(p + q)^n$.

صيغة احتمال ذات الحدين

مفهوم أساسي

احتمال النجاح في X مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو:

$$P(X) = {}_nC_X p^X q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!X!} p^X q^{n-X}$$

حيث p احتمال النجاح، و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

التوزيع ذو الحدين

مثال 2 من واقع الحياة

اختبار: في اختبار نهائي، أكد 35% من الطلاب أنهم أجابوا بشكل اعتيادي. إذا اختير 5 طلاب عشوائيًا، وتم سؤالهم عما إذا أدوا الاختبار بشكل اعتيادي. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم عن السؤال، فكوّن جدولاً للتوزيع ذي الحدين، ومثله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب 3 طلاب على الأقل عن السؤال بنعم.

إرشاد تقني

حساب احتمال ذات الحدين

لإيجاد كل احتمال لذات الحدين على الحاسبة البيانية؛ استعمل الأمر $\text{binomPdf}(n, p, x)$ من قائمة تطبيق الحاسبة.

مثال: لإيجاد $p(1)$ اكتب $\text{binomPdf}(5, 0.35, 1)$ ثم اضغط **Enter** فتحصل على 0.312386 كما يمكن إيجادها باستعمال الآلة الحاسبة العلمية كما يأتي:

اضغط على المفاتيح الآتية من اليسار إلى اليمين:

5 **SHIFT** **÷** 1 **×** 0.35 **=**
 x^* 1 **→** **×** (1 **-** 0.35 **=**
) x^* (5 **-** 1 **)** **=**

فتظهر الشاشة 0.3123859375

إرشادات للدراسة

اختيار الاحتمالات
أحياناً يكون من الأسهل أن تجد احتمال الفشل وتطرح هذه النتيجة من 1 لتجد احتمال النجاح، لأنهما احتمالان متتامان.

تحقق من فهمك

(2) **كليات:** يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج. إذا اختير 7 خريجين عشوائياً، وتم سؤالهم عما إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم، فكُون التوزيع ذا الحدين، ومثله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم.

تستعمل الصيغ الآتية؛ لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين.

المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

مفهوم أساسي

يحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي X في التوزيع ذي الحدين بالصيغ الآتية:

$$\mu = np$$

المتوسط

$$\sigma^2 = npq$$

التباين

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$$

الانحراف المعياري

المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

مثال 3

اختبار: بالرجوع إلى تجربة ذات الحدين في المثال 2. أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X ، ثم فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

تحقق من فهمك

(3) **كليات:** أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في تحقق من فهمك 2، وفسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.



عندما يزداد عدد المحاولات في تجربة ذات الحدين، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب التوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي

تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

في التوزيع ذي الحدين عندما تُمثّل n عدد المحاولات، واحتمال النجاح p ، واحتمال الفشل q ، ويكون $n p \geq 5, n q \geq 5$ ، يمكن تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = np$ ، وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$.

تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي

مثال 4

أشارت دراسة سابقة إلى أن 64% من الخريجين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة. وقد نفّذ بلال دراسة مسحية على 300 من هؤلاء الخريجين اختارهم عشوائياً. ما احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل على ما جاء في الدراسة الإحصائية السابقة؟

إرشادات للدراسة

التقريب إلى التوزيع الطبيعي

يُستعمل التقريب إلى التوزيع الطبيعي؛ لأنه مع زيادة n يصبح استعمال التوزيع ذي الحدين لإيجاد الاحتمال عملية معقّدة وصعبة.

تحقق من فهمك



(4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي. غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفهم الدراسة السابقة. ما احتمال ألا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوبَ تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية؟



(9) **رخصة قيادة:** اعتماداً على إحدى الدراسات المسحية السابقة، إذا علمت أن 85% من طلاب إحدى الجامعات لديهم رخص قيادة سيارة، فما احتمال أن يكون 6 طلاب على الأقل من بين 10 تم اختيارهم عشوائياً لديهم رخص قيادة سيارة؟

(10) **كرة قدم:** كسب فريق لكرة القدم 75.7% من مبارياته. أوجد احتمال أن يكسب 7 مباريات على الأقل من بين مبارياته العشر القادمة.

(11) **رياضيون:** وفق بعض الدراسات الحديثة، إذا علمت أن 80% من طلاب المدارس الثانوية يمارسون رياضة واحدة على الأقل في مدرستهم، إذا اختير 6 طلاب عشوائياً، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الذين يمارسون رياضة على الأقل.

(a) فأوجد الاحتمالات المرتبطة بعدد الطلاب الذي يمارسون رياضة واحدة على الأقل.

(b) ما احتمال ألا يزيد عدد الذين يمارسون الرياضة عن طالبين؟

(12) **غسيل سيارات:** يقوم بعض الأشخاص بغسيل السيارات لزبائن بعض المجمعات التجارية مقابل أجر معين. وقد أفادت دراسة مسحية أن 65% من الزبائن يدفعون أكثر من الحد الأدنى لأجرة غسيل سياراتهم. ما احتمال أن يدفع أربعة على الأقل من خمسة زبائن مبلغاً أكثر من الحد الأدنى للأجر.

(13) **حواجز دعائية:** تضع شركة للعصائر حواجز بحيث إن 30% من علب العصير تبيع علبه مجانية، وقد اشترت سعاد 10 علب. مثل بالأعمدة البيانية التوزيع الاحتمالي للتوزيع ذي الحدين إذا كان المتغير العشوائي يدل على عدد علب العصير الربحية.

(14) **برامج دينية:** بناءً على دراسة مسحية سابقة، إذا علمت أن 70% من الأشخاص تحت سن العشرين يتابعون برنامجاً دينياً على الأقل في التلفاز. إذا استطلع خليل رأي 200 شخص تحت سن 20 سنة، فما احتمال أن 146 شخصاً منهم على الأقل يتابعون برنامجاً دينياً على الأقل؟

إذا علمت أن نسبة النجاح في توزيع ذي حدين 60%، ويوجد 18 محاولة، فأجب.

(15) ما احتمال ألا توجد أي محاولة ناجحة؟

(16) ما احتمال أن توجد 12 محاولة فاشلة؟

حدد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها ذات حدين. وإن كانت كذلك، فاكتب قيم n, p, q ، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن تجربة ذات حدين، فبيّن السبب. (مثال 1)

(1) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6، ثم أُلقي المكعب 10 مرات، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5.

(2) أُلقيت قطعة نقد 20 مرة، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة.

(3) سألت 15 شخصاً عن أعمارهم، والمتغير العشوائي X يدل على أعمار هؤلاء الأشخاص.

(4) صندوق به 52 كرة، منها 13 كرة حمراء، و13 كرة زرقاء، و13 كرة بيضاء، و13 كرة صفراء. سحبت 10 كرات على التوالي دون إرجاع. والمتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

كوّن التوزيع ذا الحدين لكل متغير عشوائي مما يأتي، ومثله بالأعمدة، ثم أوجد المتوسط، وفّر معناه في سياق الموقف، ثم أوجد التباين، والانحراف المعياري. (المثالان 2, 3)

(5) إذا كان 89% من طلاب المرحلة الثانوية في إحدى المدارس يتابعون مباريات منتخبهم الوطني، وتم اختيار 5 طلاب عشوائياً من هذه المدرسة، وسؤالهم عما إذا كانوا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني.

(6) بيّنت دراسة أن 26% من موظفي إحدى الشركات يستعملون الإنترنت في عملهم. إذا تم اختيار 10 موظفين من هذه الشركة عشوائياً، وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون الإنترنت في عملهم.

(7) أفادت دراسة إحصائية أن 65% من طلاب الجامعات الذين يمتلكون سيارات يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم. إذا تم اختيار 8 طلاب عشوائياً ممن يمتلكون سيارات، وسؤالهم إن كانوا يستعملون أحزمة أمان في أثناء قيادة سياراتهم.

(8) **أعمال صيفية:** تبين في دراسة سابقة أن 90% من طلاب الصفوف العليا في مدرسة ثانوية يحصلون على أعمال صيفية، لكن منذراً قدر أن النسبة أقل من ذلك؛ لذا قام بدراسة مسحية شملت 400 طالب من الصفوف العليا تم اختيارهم عشوائياً. ما احتمال ألا يكون أكثر من 348 من الطلاب المستهدفين حصلوا على عمل صيفي؟ (مثال 4)



مراجعة تراكمية

حدّد ما إذا كانت المعادلة في كلٍّ مما يأتي تمثل دائرة، أو قطعاً مكافئاً، أو قطعاً ناقصاً، أو قطعاً زائداً، دون كتابتها على الصورة القياسية. وبرّر إجابتك: (مهارة سابقة)

$$x^2 + 4y^2 = 100 \quad (28)$$

$$5y^2 - 10x = 0 \quad (29)$$

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 16 = 0 \quad (30)$$

(31) **سرعة:** وضع نظام لمراقبة سرعة السيارات وتسجيلها في شارع قريب من إحدى المدارس، إذا توزّعت هذه السرعات توزيعاً طبيعياً بمتوسط 37 mi/h ، وانحراف معياري 4 mi/h ، فكم سيارة كانت تسير بسرعة تقل عن 33 mi/h في عينة حجمها 425 سيارة؟ (الدرس 3-5)

(32) **دراسة جامعية:** أوضح استطلاع في إحدى المدارس الثانوية أن 88% من الطلاب يريدون إكمال دراستهم الجامعية. وقد قام نواف باستطلاع آراء 150 طالباً تم اختيارهم عشوائياً. ما احتمال أن يكون في العينة 132 طالباً على الأقل يرغبون في استكمال دراستهم الجامعية؟ (الدرس 3-5)

تدريب على اختبار

(33) **اختبار:** تقدّمت سمر لاختبار من عشرة أسئلة من نوع الاختيار من متعدد لكل منها أربعة بدائل، لكنها أجابت عن الأسئلة من خلال التخمين (دون معرفة علمية بالموضوع)، ما احتمال أن تحصل على:

(a) 7 أسئلة صحيحة الإجابة؟

(b) 9 أسئلة صحيحة الإجابة؟

(c) 0 سؤال صحيح الإجابة؟

(d) 3 أسئلة صحيحة الإجابة؟

(34) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية 90%، فما احتمال نجاح عملية واحدة على الأقل إذا أُجريت العملية ثلاث مرات؟

(A) 0.001 (B) 0.1

(C) 0.9 (D) 0.999

(17) **تنس طاولة:** كسب لاعب 85% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية. أوجد الاحتمالات الآتية:

(a) أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة.

(b) أن يكسب مبارتين على الأقل من بين المباريات الخمس القادمة.

(c) أن يخسر مباراة واحدة على الأقل في مبارياته الخمس القادمة.

لكل من التوزيعات ذات الحدين الآتية، يدلّ الرمز n على عدد المحاولات، ويدلّ الرمز p على احتمال نجاح كل محاولة. أوجد احتمال الحصول على X من النجاحات.

$$n = 8, p = 0.3, X \geq 2 \quad (18)$$

$$n = 10, p = 0.2, X > 2 \quad (19)$$

$$n = 6, p = 0.6, X \leq 4 \quad (20)$$

$$n = 9, p = 0.25, X \leq 5 \quad (21)$$

$$n = 10, p = 0.75, X \geq 8 \quad (22)$$

$$n = 12, p = 0.1, X < 3 \quad (23)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(24) **تحديد:** في تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي، إذا علمت أن احتمال وجود 60 - 66 نجاحاً يساوي 34%، وكان $\bar{x} = 60$ ، واحتمال النجاح 36%، فكم كان عدد المحاولات؟

(25) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً. وبرّر إجابتك. « من الأفضل أن تجد احتمال الفشل وتطرّحه من 1 لتجد احتمال النجاح ».

(26) **مسألة مفتوحة:** صف حالة من أنشطة المدرسة أو المجتمع ينطبق عليها التوزيع ذو الحدين، وحدّد عدد المحاولات المستقلة (n)، وكلاً من: احتمال النجاح واحتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

(27) **اكتب:** فسّر العلاقة بين التجربة ذات الحدين والتوزيع ذي الحدين.



المفردات

الانحراف المعياري ص 93	الدراسة المسحية ص 86
الاحتمال المشروط ص 97	المجتمع ص 86
الجدول التوافقي ص 98	تعداد عام ص 86
التكرار النسبي ص 98	العينة ص 86
النجاح ص 102	المتحيزة ص 86
الفشل ص 102	غير المتحيزة ص 86
المتغير العشوائي ص 103	الدراسة القائمة على الملاحظة ص 87
المتغير العشوائي ص 103	الدراسة التجريبية ص 87
المنفصل ص 103	المجموعة التجريبية ص 87
التوزيع الاحتمالي ص 103	المجموعة الضابطة ص 87
التوزيع الاحتمالي ص 103	الارتباط ص 88
الاحتمال النظري ص 104	السببية ص 88
الاحتمال التجريبي ص 104	التحليل الإحصائي ص 92
القيمة المتوقعة ص 104	المتغير ص 92
التوزيع الاحتمالي ص 108	بيانات في متغير واحد ص 92
المتصل ص 108	مقياس النزعة المركزية ص 92
التوزيع الطبيعي ص 108	المُعْلَمَة ص 92
التوزيع الملتوي ص 108	الإحصائي ص 92
تجربة ذات حدين ص 114	هامش خطأ المعاينة ص 93
التوزيع ذو الحدين ص 115	مقاييس التشتت ص 93
	التباين ص 93

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي من القائمة أعلاه:

- 1) _____ لمتغير عشوائي معين هو دالة تربط فضاء العينة باحتمالات نواتج فضاء العينة .
- 2) _____ عندما توجد علاقة بين حادثتين، فإنه يوجد _____ بينهما.
- 3) الدراسة المسحية تكون _____ إذا صُممت لصالح نواتج معينة.
- 4) إذا أُعطيت مجموعة معالجة شكلية لا أثر لها في النتيجة، فإن هذه المجموعة تُسمى _____ .
- 5) يُحدّد _____ الفترة التي تبين الفرق في الاستجابة بين العينة والمجتمع .

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

العينة والمجتمع (الدرسان 3-1، 3-2)

- تكون العينة متحيزة إذا صُممت لصالح نواتج معينة .
- تكون العينة غير متحيزة إذا كانت عشوائية.

الارتباط والسببية

- عندما يوجد ارتباط بين ظاهرتين فإن كلاً منهما تؤثر في الأخرى، وعندما يوجد سببية، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سبباً مباشراً في وقوع الظاهرة الأخرى.

هامش خطأ المعاينة

- عند سحب عينة حجمها n من مجتمع، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$.

الانحراف المعياري	
العينة	المجتمع
$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$	$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2}{n}}$

الاحتمال المشروط (الدرس 3-3)

- الاحتمال المشروط: هو احتمال وقوع حادثة معينة إذا علم وقوع حادثة أخرى.
- الجداول التوافقية : هي جداول تكرارية ذات بعدين، يتم فيها تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تمثل تكراراً يسمى تكراراً نسبياً، إذ يكون منسوباً إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوباً إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوباً إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط .

التوزيعات الاحتمالية (الدروس 3-4، 3-5، 3-6)

المفهوم	الوصف
منفصل	عدد محدد من النواتج الممكنة
متصل	عدد غير محدد من النواتج الممكنة
طبيعي	منحنيات متماثلة
ملتوي	منحنيات غير متماثلة
تجربة ذات الحدين	تجربة احتمالية يكون لها نتيجتان فقط



دليل الدراسة والمراجعة



الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة (الصفحات 90 - 86)

3-1

مثال 1

اختار صاحب وكالة للسيارات 100 زبون عشوائياً قاموا بإجراء الصيانة الدورية لسياراتهم في الوكالة حديثاً، وطرح سؤالاً عليهم حول نوعية الخدمة التي تقدمها الوكالة. هل يُمثّل الزبائن الذين تم اختيارهم عينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسر إجابتك.

غير متحيزة؛ لأن لكل شخص من زبائن الوكالة الفرصة نفسها لأن يكون من بين العينة.

مثال 2

وزّع معلم الرياضيات طلابه مجموعتين عشوائياً، وطبق عليهم اختباراً، حيث طلب من المجموعة الأولى أداء تمارين رياضية قبل الاختبار، بينما أعطى المجموعة الثانية الاختبار دون أن يطلب منهم تأدية أي تمارين رياضية، وقارن نتائجهم في الاختبار. هل هذه الدراسة دراسة مسح أم دراسة قائمة على الملاحظة أم دراسة تجريبية؟ وإذا كانت تجريبية، فاذكر كلاً من المجموعتين الضابطة والتجريبية، ثم بين ما إذا كانت الدراسة متحيزة أم لا.

دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي الأولى، والضابطة هي الثانية، والدراسة التجريبية متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبني عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسر إجابتك:

(6) يتم اختيار كل عاشر متسوّق يخرج من مجمع تجاري؛ لمعرفة إن كان مرتاحاً أو مطمئناً لشرائه من المجمع.

(7) يتم اختيار كل عاشر طالب يخرج من المدرسة؛ لمعرفة أحب المواد الدراسية إليه في المدرسة.

(8) يطلب أحد مطاعم الوجبات السريعة إلى زبائنه أن يكملوا استبانة حول أفضل مطعم للوجبات السريعة.

حدّد ما إذا كانت كل حالة تحتاج إلى دراسة مسحية أو دراسة قائمة على الملاحظة أو دراسة تجريبية.

(9) اختبر 100 طالب نصفهم يعمل جزئياً بعد الدراسة، وقارن بين الأوساط لدرجاتهم.

(10) اختبر 100 شخص، وقسمهم إلى نصفين عشوائياً، ودع إحدى المجموعتين تتناول وجبات قليلة الدسم، بينما تتناول الأخرى وجبات اعتيادية. وقارن النتائج؛ لمعرفة أثر الوجبات القليلة الدسم على صحة الجسم.

التحليل الإحصائي (الصفحات 96 - 92)

3-2

مثال 3

قال 12% من عينة حجمها 2645 شخصاً: إن كرة القدم هي الأكثر تفضيلاً لديهم. ما هامش خطأ المعاينة؟

$$\begin{aligned} \text{هامش خطأ المعاينة} &= \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{2645}} \\ &\approx \pm 0.019 \end{aligned}$$

هامش خطأ المعاينة $\pm 1.9\%$ تقريباً.

(11) **فصول السنة:** في دراسة مسحية عشوائية شملت 3446 شخصاً، ذكر 34% منهم أن الربيع هو أفضل فصول السنة لديهم. ما هامش الخطأ في المعاينة؟

(12) **سباحة:** في أثناء تمرين السباحة، قاس خالد الأزمنة التي استغرقها في كل مرة لقطع مسافة 400m، وسجل النتائج الممثلة في الجدول أدناه. أوجد الانحراف المعياري للأزمنة التي حققها.

الزمن بالثواني					
307	312	308	320	311	301
302	304	308	309	315	313
306	314	316	313	313	311
309	306	310	319	326	329
309	314	318	315	318	320



3-3 الاحتمال المشروط (الصفحات 97 - 100)

مثال 4

دراسة: أوجد احتمال أن يأخذ طالب اختيار عشوائياً حصة إضافية علمًا بأنه طالب جديد.

ياخذ حصصاً إضافية (E)	لا ياخذ حصصاً إضافية (X)	
126	84	طالب جديد (N)
98	72	طالب قديم (O)

$$P(E | N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)}$$

$$P(E \cap N) = \frac{126}{380}, P(N) = \frac{210}{380}$$

$$= \frac{126}{380} \div \frac{210}{380}$$

$$= \frac{126}{210} = \frac{3}{5}$$

قانون الاحتمال المشروط

بسّط

13 كرة طائرة: يحصل طارق على نقطة في 65% من مرات قيامه بضربة الإرسال، ما احتمال ألا يحصل على نقطة في ضربة الإرسال الثانية علمًا بأنه حصل على نقطة في ضربة الإرسال الأولى؟

14 في الجدول أدناه إذا اختير طالب عشوائياً فأجب عما يأتي:

ياخذ نظارات	ليس نظارات	
15	6	الأول الثانوي
22	5	الثاني الثانوي

(a) ما احتمال أن يكون الطالب من الأول الثانوي علمًا بأنه ليس نظارات؟

(b) ما احتمال أن يكون من الذين لا يلبسون النظارات علمًا بأنه من الثاني الثانوي؟

3-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية (الصفحات 107 - 102)

مثال 5

لدى حمزة 5 كتب في حقيقته، هي الرياضيات والكيمياء واللغة الإنجليزية واللغة العربية والتاريخ. إذا قام بترتيبها على رفّ في صف واحد عشوائياً، فما احتمال أن تأتي كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار؟

الخطوة 1 حدّد عدد النجاحات.

$$3P_3 \quad \text{مكان الكتب الثلاثة إلى اليسار}$$

$$2P_2 \quad \text{أمكنة الكتابين الآخرين}$$

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s.

$$s = 3P_3 \cdot 2P_2 = 3! \cdot 2! = 12$$

الخطوة 2 أوجد عدد عناصر فضاء العينة f + s.

$$s + f = 120 \quad 5P_5 = 5! = 120$$

وتمثل عدد الترتيبات الممكنة للكتب الخمسة على الرف.

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

$$P(S) = \frac{s}{s+f} = \frac{12}{120} = 0.1$$

احتمال النجاح



احتمال وضع كتب اللغة الإنجليزية واللغة العربية والرياضيات في أقصى اليسار يساوي 0.1 أو 10%.

قرعة الألعاب: خلط يوسف بطاقات الألعاب جميعها في

صندوق، حيث تشكّلت البطاقات من 12 بطاقة لكرة القدم، 8 بطاقات لكرة الطائرة، 5 بطاقات لكرة السلة وجميعها متماثلة. إذا تم اختيار 3 بطاقات بصورة عشوائية، فأوجد احتمال كل من:

15 (3 بطاقات لكرة الطائرة)

16 (3 بطاقات لكرة القدم) P

17 (بطاقة لكرة السلة وبطاقة لكرة الطائرة) P

18 (بطاقتان لكرة السلة وبطاقة لكرة القدم) P

19 بطاقات: مجموعة بطاقات مرقّمة مكوّنة من 3 بطاقات عليها

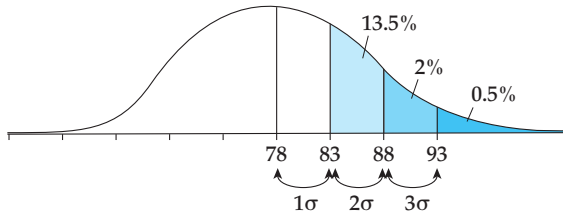
الرقم 9، 4 عليها العدد 10، 5 عليها الرقم 6، 4 عليها الرقم 5، وبطاعتين على كلّ منهما الرقم 2، وبطاقة عليها الرقم 3. إذا سحب بطاقة عشوائياً من مجموعة البطاقات، فما القيمة المتوقعة لهذه البطاقة؟

التوزيع الطبيعي (الصفحات 112 - 108)

3-5

مثال 6

تتوزع مجموعة من البيانات توزيعاً طبيعياً بمتوسط 78، وانحراف معياري 5. أوجد احتمال أن تزيد قيمة X اختيرت عشوائياً عن 83.



بما أن $\mu + \sigma = 78 + 5 = 83$ ؛ لذا فإن الاحتمال المطلوب يكون مساوياً $13.5\% + 2\% + 0.5\% = 16\%$

في كل من السؤالين الآتيين توزيع طبيعي بمتوسط وانحراف معياري. أوجد الاحتمال المطلوب في كل منهما.

$$\mu = 121, \sigma = 9, P(X > 103) \quad (20)$$

$$\mu = 181, \sigma = 12, P(X > 169) \quad (21)$$

(22) **زمن الركض:** أزمته الركض لمسافة 40 m لفريق كرة القدم المدرسي تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 4.7 s، وانحراف معياري 0.15 s. ما نسبة اللاعبين الذين يقل زمن قطعهم المسافة عن 4.4 s؟

التوزيعات ذات الحدين (الصفحات 119 - 114)

3-6

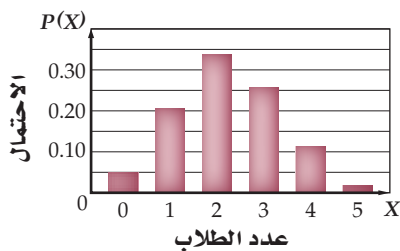
مثال 7

رسم هندسي: أجريت دراسة في إحدى المدارس، فتبين أن 45% من الطلاب يستطيعون رسم مخروط. إذا تم اختيار 5 منهم بشكل عشوائي، ومثل المتغير العشوائي X عدد الطلاب الذين لديهم مقدرة على رسم مخروط، فأجب عما يأتي:

(a) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X ، ومثله بالأعمدة.

في هذه المسألة $n = 5, p = 0.45, q = 1 - 0.45 = 0.55$

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0.050	0.206	0.337	0.276	0.113	0.018



(b) أوجد المتوسط والانحراف المعياري والتباين للتوزيع.

$$\mu = np = 5(0.45) = 2.25$$

$$\sigma^2 = npq = 5(0.45)(0.55) = 1.2375$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.2375} \approx 1.1124$$

(23) **أشخاص مشهورون:** في إحدى الدراسات تبين أن 63% من الشباب يفضلون أداء أحد الرياضيين المشهورين. إذا اختير 5 من الشباب عشوائياً، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يفضلون أداء هذا الرياضي أو لا.

(a) إذا مثل المتغير العشوائي X عدد الشباب الذين يفضلون أداء هذا الرياضي، فكوّن جدول التوزيع الاحتمالي لذات الحدين للمتغير X ، ومثله بالأعمدة.

(b) أوجد احتمال أن يكون أكثر من 2 من الشباب يفضلون أداء هذا الرياضي.

(24) **ساعات:** أشارت دراسة مسحية للبالغين أن ما نسبته 74% من البالغين يلبسون ساعة يد. وقد قام بكر باستطلاع رأي 200 شخص من البالغين عشوائياً. ما احتمال أن يكون 160 شخصاً على الأقل ممن شملهم الاستطلاع يلبسون ساعة يد؟

تطبيقات ومسائل

(28) رُميت 3 قطع نقد مرة واحدة. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، ثم مثله بالأعمدة. (الدرس 3-4)

(29) سكة حديد: إذا كانت الفترات الزمنية للانتظار التي يقضيها 16000 مسافر في إحدى محطات سكك الحديد موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط 72 min، وانحراف معياري 15 min، فأوجد نسبة المسافرين الذين ينتظرون أكثر من 42 min. (الدرس 3-5)

(30) إجازات: في دراسة مسحية سابقة وجد أن ما نسبته 70% من العاملين يأخذون إجازاتهم السنوية في الصيف، لكن محسناً يعتقد أن هذا الرقم مبالغ فيه، فقام باستطلاع رأي 650 عاملاً عشوائياً. ما احتمال ألا يأخذ أكثر من 420 عاملاً إجازاتهم في الصيف؟ (الدرس 3-6)

(25) حدّد ما إذا كان كل موقف مما يأتي يمثل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية، اذكر كلاً من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بين إن وجد تحيز أو لا: (الدرس 3-1)

(a) اختر 100 طالب نصفهم يأتي إلى المدرسة مبكراً، وقارن بين تحصيلهم في مادة معينة.

(b) اختر 100 موظف، واقسمهم نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى دورة في اللغة الإنجليزية، أما الأخرى فلا تخضعها لأي دورة تدريبية.

(26) اختير 10 طلاب بصورة عشوائية من الصف الثالث الثانوي، وقيست أطوالهم بالاستمترات فكانت كما يلي:

170, 165, 155, 168, 177, 180, 168, 167, 160, 161

بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعاً، ثم اوجد الانحراف المعياري لهذه الأطوال. (الدرس 3-2)

(27) سجّلت أعداد الطلاب ذوي العيون الزرقاء أو غير الزرقاء في أحد المعاهد.

سنة أولى	سنة ثانية	
5	10	عيون زرقاء
95	80	عيون ليست زرقاء

إذا اختير أحد الطلاب عشوائياً، فأوجد احتمال أن تكون عيونه زرقاء علماً بأنه في السنة الثانية. (الدرس 3-3)



- (11) اختبارات:** أعطى المعلم أيمن طلابه الفرصة لإعادة أحد الاختبارات، كما عقد درس مراجعة اختياري يوم الخميس قبل إعادة الاختبار لمن يرغب. بعض الطلاب تحسّن أداؤهم، والبعض الآخر لم يتحسن، والجدول أدناه يبين ذلك. إذا اختير طالب عشوائياً، فأوجد:

تحسن	لم يتحسن
12	3
4	6

- (a) احتمال أن يكون قد تحسّن علماً بأنه حضر المراجعة.
(b) احتمال أنه لم يحضر المراجعة علماً بأنه لم يتحسن.

- (12) اختيار من متعدد:** شارك 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، و 12 طالباً من الصف الثاني الثانوي في السحب على 5 جوائز. إذا كان السحب عشوائياً، فما احتمال أن يكون الرابعون 3 من الصف الأول الثانوي، وطالبين من الصف الثاني الثانوي؟

- A 0.46% تقريباً
B 0.25% تقريباً
C 70% تقريباً
D 30% تقريباً

- (13)** سُحبت كرتان معاً من صندوق يحتوي على 3 كرات زرقاء، وكرتين حمراوين. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فكُون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

- (14) طقس:** أخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام السبعة القادمة 40%. أوجد احتمال أن يسقط المطر في يومين من هذه الأيام على الأقل.

- (15) حديقة:** يخطط يعقوب لزراعة 24 شجرة أزهار، إذا علمت أن البذور التي أحضرها لأزهار من اللونين الأبيض والأزرق، وأنها لم تزهر بعد، ولكنه يعلم أن احتمال الحصول على زهرة زرقاء 75%، فما احتمال حصوله على 20 زهرة زرقاء على الأقل؟

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية تصف ارتباطاً أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

- (1) عندما يرى محمود البرق، فإنه يسمع الرعد بعد ذلك.
(2) عندما يركض نايف عند مدخل المدرسة، فإنه يكون متأخراً عن المدرسة.

حدّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسّر إجابتك:

- (3) استطاع صاحب مخزن بيع من خلال الشبكة العنكبوتية زبائنه عن أهمية وجود الإنترنت في المنزل.
(4) يختار معلم 5 أسماء لطلاب يدرسهم؛ لإلقاء كلمة الصباح بعد أن يقوم بوضع الأسماء جميعها في سلة ويخلطها.

أي مقياس النزعة المركزية يصف كلاً من البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟

(5) درجات اختبار

3	3	3	4	4
4	4	5	5	4
4	3	3	3	3
4	4	3	3	3
3	4	3	5	4

(6) الطول بالبوصة

64	61	62	64	61
83	66	61	65	63
61	65	62	63	84
61	63	66	62	61

فيما يأتي المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات تتوزع توزيعاً طبيعياً، أوجد الاحتمال المطلوب في كل منها:

$$\mu = 54, \sigma = 5, P(X > 44) \quad (7)$$

$$\mu = 35, \sigma = 2.4, P(X < 37.4) \quad (8)$$

يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية زرقاء، و8 كرات حمراء، و12 خضراء، وجميعها متماثلة، سحبت كرتان واحدة تلو الأخرى، أوجد الاحتمال لكل من:

(9) الكرة الثانية حمراء، علماً بأن الكرة الأولى زرقاء دون إرجاع.

(10) الكرة الثانية زرقاء، علماً بأن الكرة الأولى خضراء مع الإرجاع.