البرمجة الخطية والحل الأمثل

قدرات

ما هو العدد الذي إذا ضرب في ١٥ كان الناتج ٨١٠

٥٠ ٥٤ ٥٢ ٦٠

فيما سبق:

درست حل أنظمة متباينات خطية بيانيًّا.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة الحل.
- أستعمل البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.

المفردات:

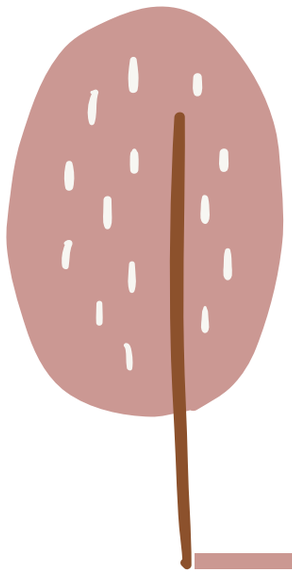
القيود
constraints

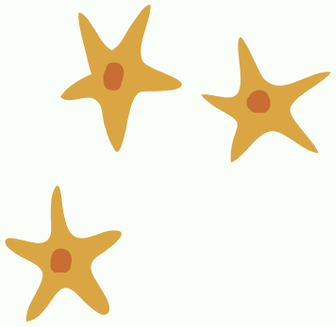
البرمجة الخطية
linear programming

محدودة
bounded

غير محدودة
unbounded

الحل الأمثل
optimize





لماذا

يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة في اليوم الواحد من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالًا
كبير	800	1700	70 ريالًا

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوبًا من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

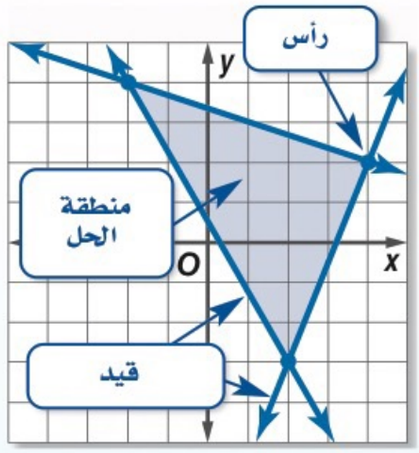
هناك **قيود** إضافية على إنتاج المصنع ناجمة عن الطلب والشحن وكفاءة المصنع. وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

القيمة العظمى والقيمة الصغرى: تواجه المصانع في كثير من الأحيان أوضاعًا ضمن قيود مختلفة وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه الأوضاع يمكن التعامل معها عادة باستعمال البرمجة الخطية.

البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا، وتقع القيمة العظمى أو الصغرى - إن وجدت - للدالة ذات الصلة دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل.

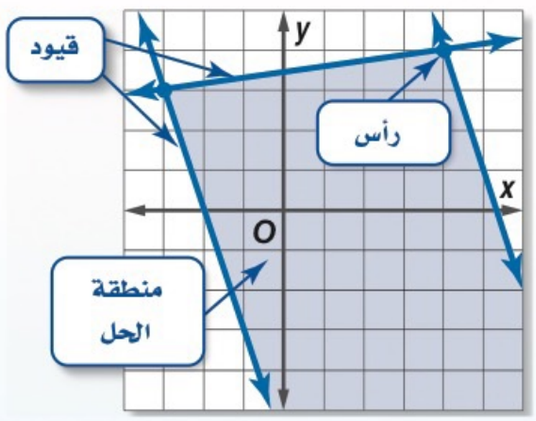
مفهوم أساسي

منطقة الحل



إذا كانت منطقة الحل **محدودة** (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل أعلاه، فإن القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة تظهر دائمًا عند رؤوس منطقة الحل.

أضف إلى مطويتك



إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك **غير محدودة**، ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

مثال

منطقة الحل المحدودة

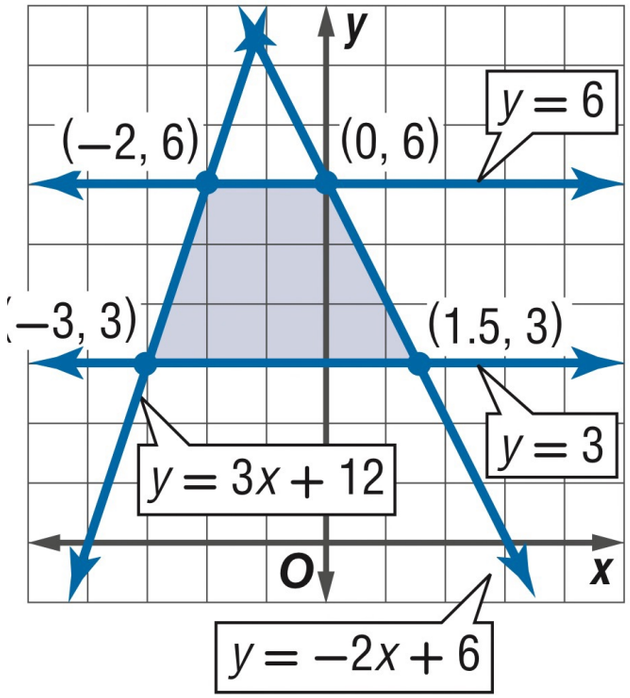
مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا، ثم حدِّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$3 \le y \le 6$$

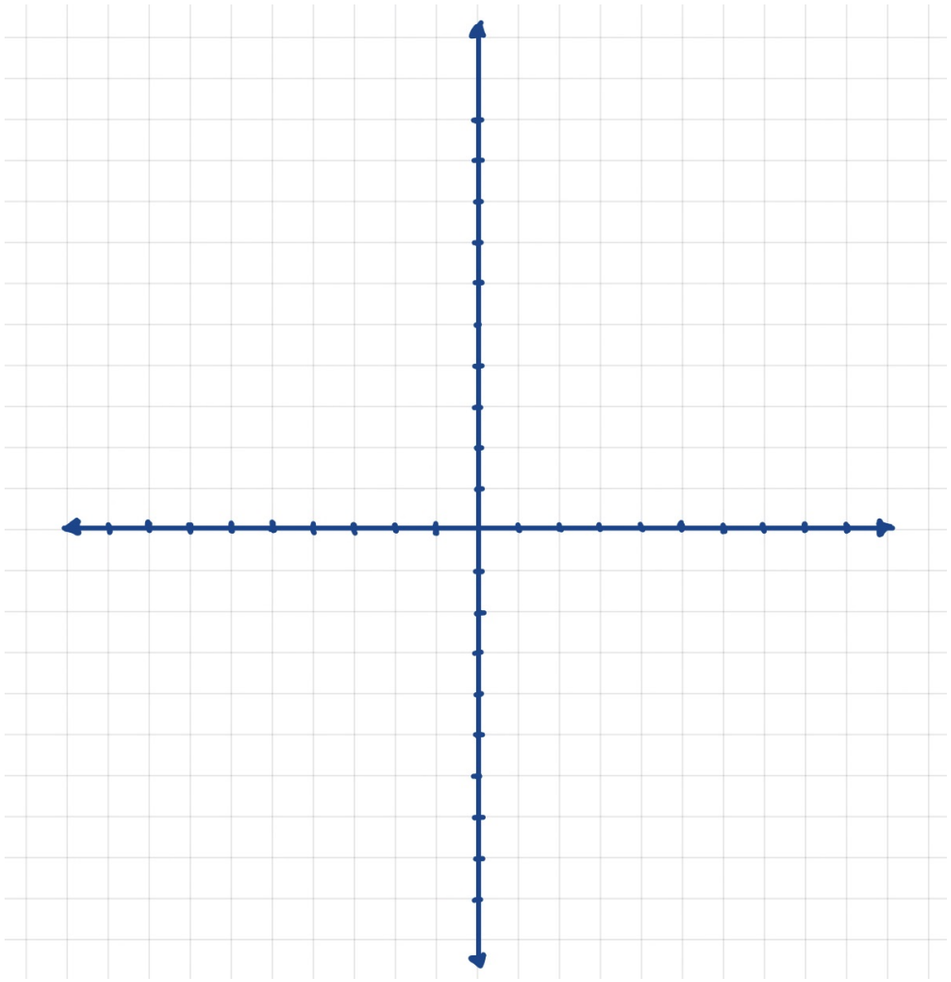
$$y \le 3x + 12$$

$$y \le -2x + 6$$

$$f(x, y) = 4x - 2y$$



(x, y)	4x − 2y	f(x, y)
(−3, 3)		
(1.5, 3)		
(0, 6)		
(−2, 6)		



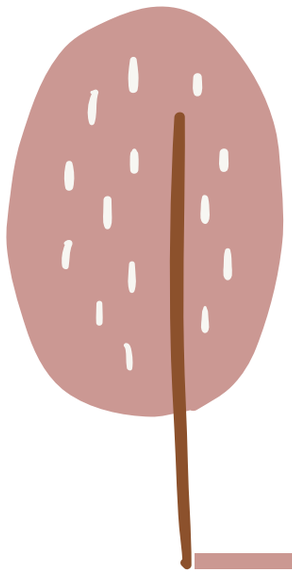
تحقق من فهمك

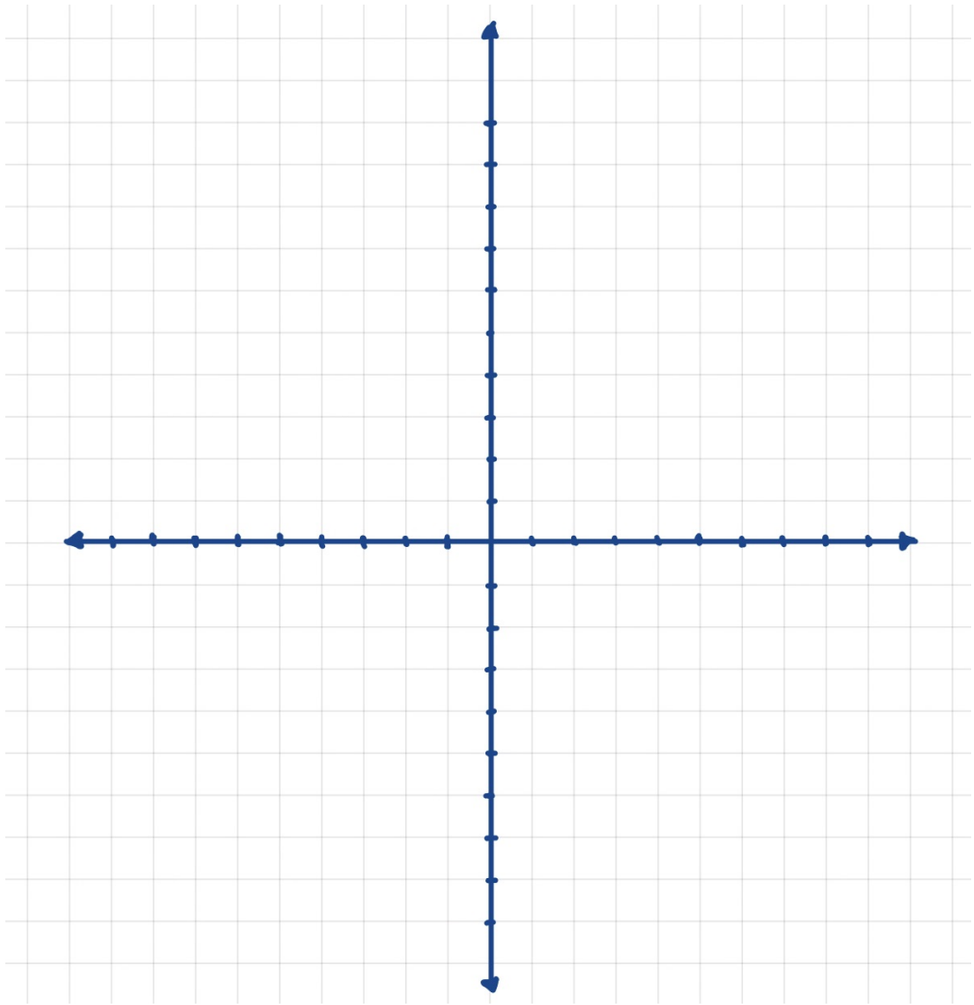
(1A $-2 \leq x \leq 6$

$1 \leq y \leq 5$

$y \leq x + 3$

$f(x, y) = -5x + 2y$





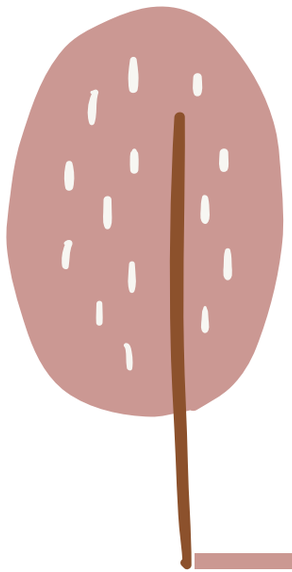
تحقق من فهمك

(1B $-6 \leq y \leq -2$

$y \leq -x + 2$

$y \leq 2x + 2$

$f(x, y) = 6x + 4y$



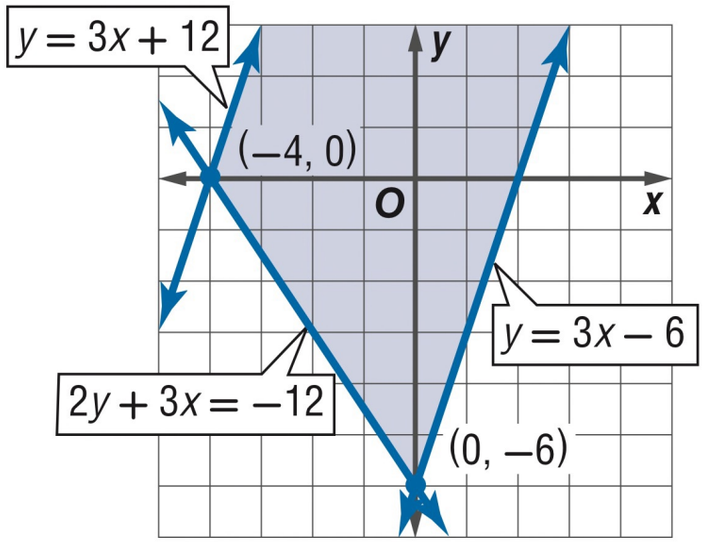
إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متبايناتٍ منطقة مفتوحة وممتدة، فإنها تكون غير محدودة.

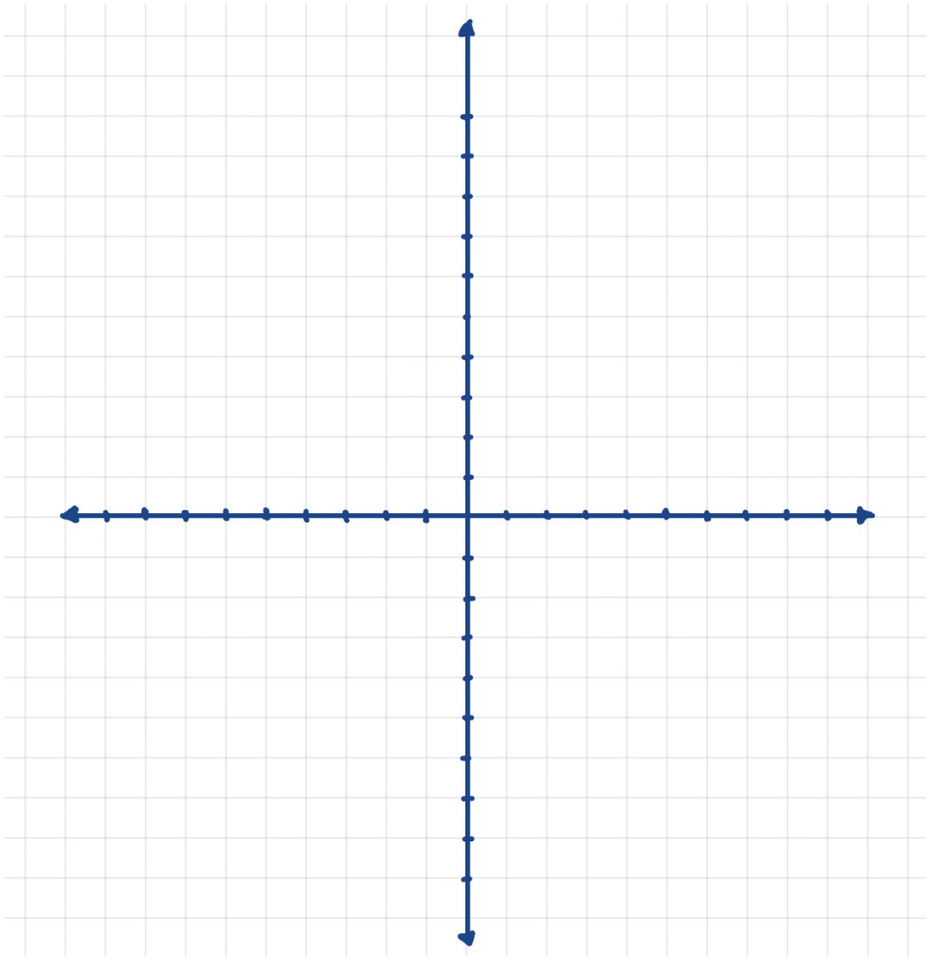
مثال

منطقة الحل غير المحدودة

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًّا ، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$2y + 3x \geq -12$, $y \leq 3x + 12$, $y \geq 3x - 6$, $f(x, y) = 9x - 6y$





تحقق من فهمك

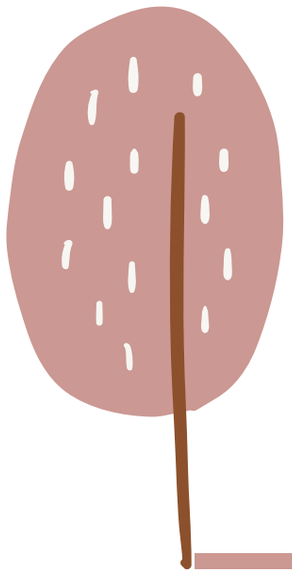
(2A

$$y \leq 8$$

$$y \geq -x + 4$$

$$y \leq -x + 10$$

$$f(x, y) = -6x + 8y$$



إيجاد الحل الأمثل: يُسمّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحل الأمثل**، ويمكنك الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

الخطوة 1 حدّد المتغيرات.

الخطوة 2 اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة.

الخطوة 3 مثل نظام المتباينات بيانيًّا.

الخطوة 4 جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.

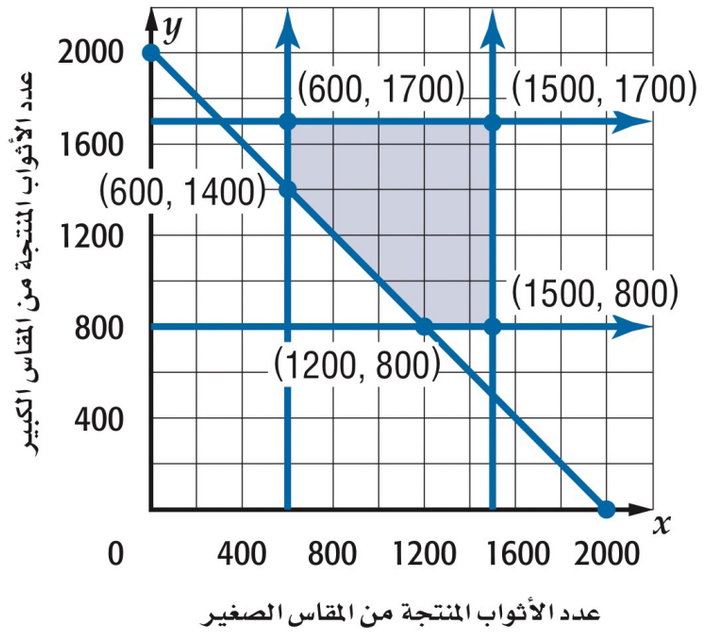
الخطوة 6 عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.

الخطوة 7 اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

مثال

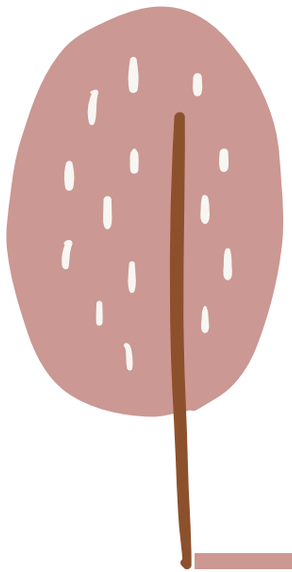
استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

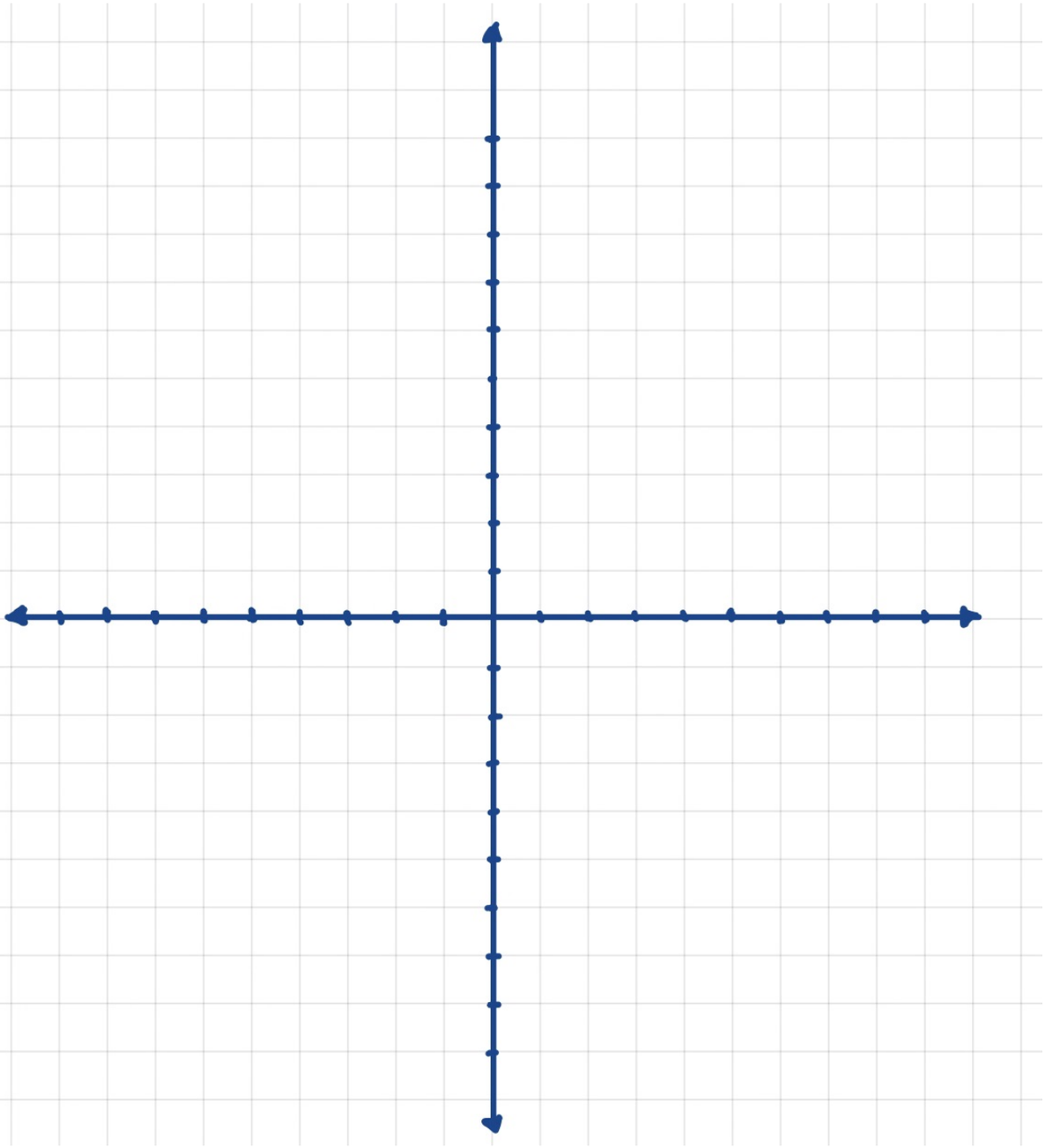
أعمال: عد إلى الموقف الوارد في بداية هذا الدرس، واستعمل البرمجة الخطية لإيجاد عدد القطع التي يتطلب إنتاجها من المقاسين، لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

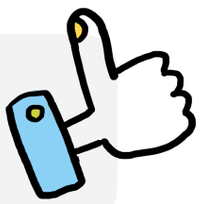


تحقق من فهمك

3) **مجوهرات:** تصوغ أسماء من 10 إلى 25 عقدًا، ومن 15 إلى 40 سوارًا شهريًّا. إذا كانت أجرة صياغة العقد 50 ريالًا. وأجرة صياغة السوار 30 ريالًا، وصاغت في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود والأساور على الأقل، فكم قطعة من كلا النوعين عليها صياغتها لتحصل على أكبر أجر؟







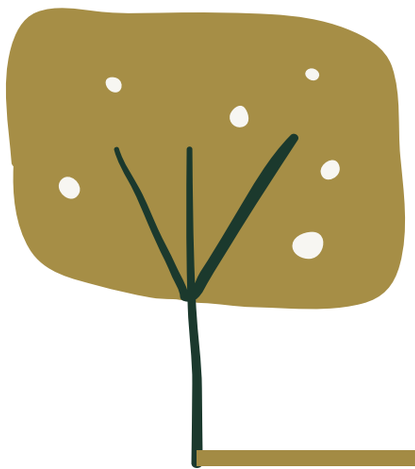
(1

$$y \leq 5$$

$$x \leq 4$$

$$y \geq -x$$

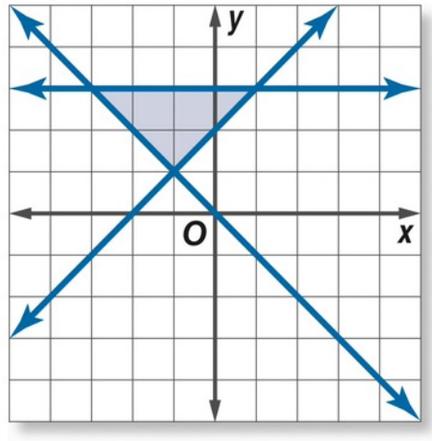
$$f(x, y) = 5x - 2y$$



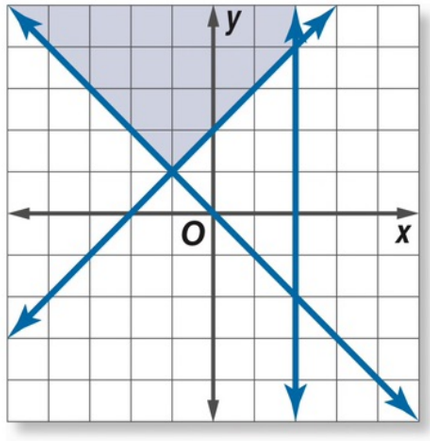
تدرب

24) حدِّد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى فيما يأتي، وضِّح إجابتك.

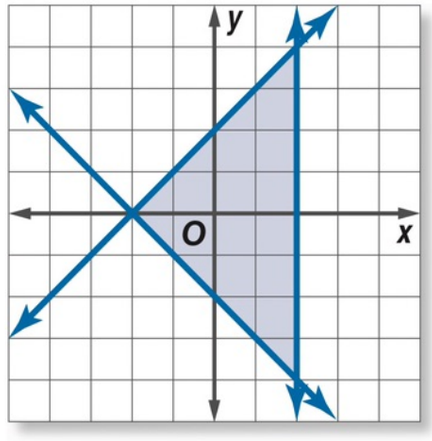
(a



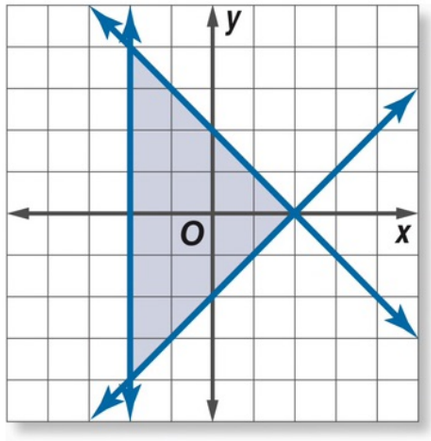
(b



(c



(d



تدرب

26) حصل عامل على مبلغ 1950 ريالًا أجرة تبليط مساحة من الأرضيات والجدران في أحد البيوت، فإذا كانت أجرة تبليط المتر المربع من الأرضيات 12 ريالًا، وأجرة تبليط المتر المربع من الجدران 15 ريالًا وكان عدد أمتار بلاط الأرضيات يقل عن 3 أمثال عدد أمتار بلاط الجدران بـ $16m^2$، فأي أنظمة المعادلات الآتية تمثّل هذا الموقف؟

A $x + y = 1950$
$3x = y$

B $12x + 15y = 1950$
$x + 16 = 3y$

C $2x + 3y = 15$
$x + y = 12$

D $x - y = 1950$
$12x + 15y = 3$

27) هندسة: أيٌّ مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني للمعادلتين $4y = 12x + 16$, $y = 3x - 5$؟

A مستقيمان لهما المقطع y نفسه .

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما المقطع x نفسه .

D مستقيمان متوازيان.