ضرب المصفوفات

قدرات

مبنى فيه 5 شقق لكل شقة 4 غرف كل غرفة فيها 3 لوحات كم عدد اللوحات ؟؟

40

50

60

70

فيما سبق:

درستُ ضرب المصفوفات في عدد ثابت. (الدرس 2-2)

والآن:

- أضرب المصفوفات.
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات.

استعد

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

نوع القلم	الشهر وعدد الأقلام			
	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 3 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام $\underline{B}$، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر بيع كل نوع من الأقلام بالمصفوفة $\underline{P}$.

مصفوفة عدد الأقلام $\underline{B}$

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

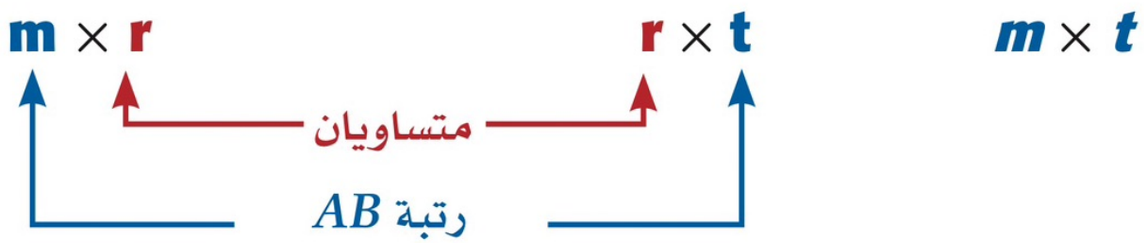
مصفوفة الأسعار $\underline{P}$

الحبر الجاف	الحبر السائل	قلم الرصاص
2	3	1

وباستعمال ضرب المصفوفات، تجد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة $\underline{A}$ ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة $\underline{B}$ ذات الرتبة $r \times t$ ، فإن الناتج هو المصفوفة $\underline{A}\,\underline{B}$ ذات الرتبة $m \times t$.

$$\underline{A} \quad \cdot \quad \underline{B} \quad = \quad \underline{A}\,\underline{B}$$



مثال رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $\underline{A} \cdot \underline{B}$ في كلٍّ مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

a) $\underline{A}_{3 \times 4} \bullet \underline{B}_{4 \times 2}$

b) $\underline{A}_{5 \times 3} \bullet \underline{B}_{5 \times 4}$

تحقق من فهمك

(1A $\underline{A}_{4 \times 6} \cdot \underline{B}_{6 \times 2}$

(1B $\underline{A}_{3 \times 2} \cdot \underline{B}_{3 \times 2}$

يمكنك إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب المصفوفات

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة $\underline{AB}$ هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة $\underline{A}$، بعناصر العمود r من المصفوفة $\underline{B}$ بالترتيب.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

الرموز:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times5+3\times7 & 2\times6+3\times8 \\ 1\times5+4\times7 & 1\times6+4\times8 \end{bmatrix}$$

مثال

ضرب المصفوفات المربعة

أوجد $\underline{Y}\ \underline{X}$ إذا كانت $\underline{X} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

تحقق من فهمك

2) إذا كانت $\underline{V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$، فأوجد $\underline{U}\,\underline{V}$.

مثال ضرب المصفوفات

سباحة : في مسابقة للسباحة بين أربع فرق سجلت 7 نقاط لمن يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج مسابقة السباحة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.

الفريق	المركز الأول	المركز الثاني	المركز الثالث
A	4	7	3
B	8	9	1
C	10	5	3
D	3	3	6

تحقق من فهمك

3) مبيعات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل ضرب المصفوفات لتحديد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

نوع القلم	الشهر وعدد الأقلام			
	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

خصائص ضرب المصفوفات: تذكّر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات.

مثال اختبار الخاصية الإبدالية

إذا كانت $\underline{H} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{G}\,\underline{H}$

b) $\underline{H}\,\underline{G}$

تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، فهل $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A}$ ؟

اتضح في المثال 4 أن الخاصية الإبدالية لا تتحقق في ضرب المصفوفات. لذا فإن الترتيب يُعدّ في غاية الأهمية عند ضرب المصفوفات.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خصائص ضرب المصفوفات

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$، ولأي عدد k، على أن تكون عمليتا ضرب أو جمع أيٍّ منها معرفتين:

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات	$(\underline{A}\underline{B})\underline{C} = \underline{A}(\underline{B}\underline{C})$
الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد	$k(\underline{A}\underline{B}) = (k\underline{A})\underline{B} = \underline{A}(k\underline{B})$
خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات	$\underline{C}(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{C}\underline{A} + \underline{C}\underline{B}$
خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات	$(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{A}\underline{C} + \underline{B}\underline{C}$

مثال اختبار خاصية التوزيع

إذا كانت $\underline{L}=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}, \underline{K}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}, \underline{J}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -5 & -2\end{bmatrix}$ ، فجد ناتج كل مما يأتي:

a) $\underline{J}\,(\underline{K}+\underline{L})$

b) $\underline{J}\,\underline{K}+\underline{J}\,\underline{L}$

تحقق من فهمك

5) إذا كانت $\underline{T}=\begin{bmatrix}-3 & 7\\ -4 & 8\end{bmatrix}$, $\underline{S}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & 5\end{bmatrix}$, $\underline{R}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ ، فحدِّد ما إذا كانت المعادلة $(\underline{S}+\underline{T})\underline{R}=\underline{S}\,\underline{R}+\underline{T}\,\underline{R}$ صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا.

تأكد

حدد إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرّفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) $\underline{A}_{2 \times 4} \cdot \underline{B}_{4 \times 3}$

2) $\underline{C}_{5 \times 4} \cdot \underline{D}_{5 \times 4}$

3) $\underline{E}_{8 \times 6} \cdot \underline{F}_{6 \times 10}$

تأكد

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

4) $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$

تأكد

إذا كانت $\underline{Z}=\begin{bmatrix}-1 & -5\\ -4 & -8\end{bmatrix}$، $\underline{Y}=\begin{bmatrix}6 & -5\\ 9 & -1\end{bmatrix}$، $\underline{X}=\begin{bmatrix}-3 & -10\\ -8 & 2\end{bmatrix}$، فحدِّد ما اذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

13) $\underline{X}\,\underline{Y}=\underline{Y}\,\underline{X}$

48) في مشغل ثلاث آلات حياكة، فإذا كان إنتاج كل آلة في 3 أشهر كما في الجدول أدناه ، وسعر بيع القطعة الواحدة من إنتاج كل آلة معطى أيضًا، فما المبلغ الذي سيحصل عليه المشغل من مبيعات الأشهر الثلاثة؟

	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	سعر بيع القطعة
الآلة 1	26	19	36	28
الآلة 2	48	27	16	19
الآلة 3	36	11	18	31

A 6012 ريالًا
B 5400 ريال
C 1221 ريالًا
D 2320 ريالًا

49) رتبة المصفوفة: ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A 1×4
B 3×3
C 4×1
D 4×3

تحصيلي

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ فإن $\underline{A} \cdot \underline{A}$ تساوي ..

Ⓐ $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Ⓑ $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Ⓒ $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

Ⓓ $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

الواجب

أوجد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي. إذا كان ذلك ممكنًا.

7) $\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix}2 & -2\\4 & 5\\-3 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 0\end{bmatrix}$