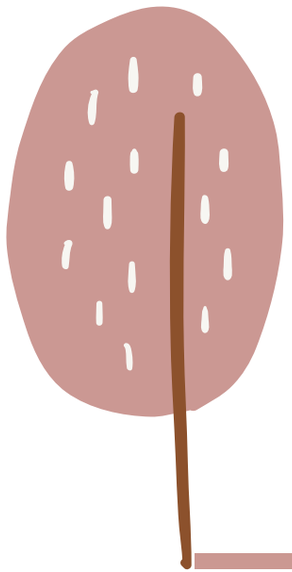
خصائص اللوغاريتمات

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية . (الدرس 3–2)

والآن:

- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
- أبسّط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.



قدرات

صرف محمد ٣٥ ريالاً زيادة عما صرفة اسامة الذي صرف ٧٥ ريالا اقل مما صرف خالد الذي صرف ٥٠ ريالا زيادة عما صرفه عادل اذا كان عادل قد صرف ٤٠ ريالا فكم ريالا صرف محمد؟

١٥ ٤٠ ٥٠ ٩٠

لماذا

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي.

لأن $pH = -\log_{10}[H^+]$، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$$-\log_{10}[H^+]_{\text{للماء النقي}} + \log_{10}[H^+]_{\text{للقهوة}} = pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}}$$ والتي تكتب بالشكل :

$$\log_{10}\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}}$$، وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

مفهوم أساسي **خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية**

التعبير اللفظي: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

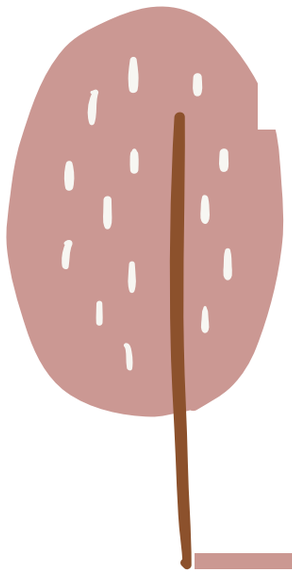
الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$.

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افترض أن $b^m = x$ ، و $b^n = y$، وباستعمال تعريف اللوغاريتمات، فإن $m = \log_b x , n = \log_b y$.

$b^m b^n = xy$	عوِّض
$b^{m+n} = xy$	خاصية ضرب القوى
$\log_b b^{m+n} = \log_b xy$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$m + n = \log_b xy$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$	عوِّض عن m , n بالقيمتين $\log_b y , \log_b x$ على الترتيب

يمكنك استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم عبارات لوغاريتمية.



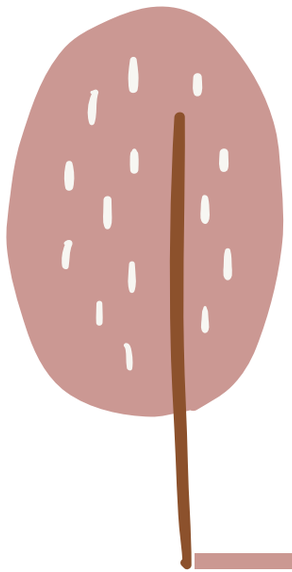
مثال

استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.



تذكّر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.

افترض أن $b^m = x$, $b^n = y$ ، إذن $\log_b x = m$, $\log_b y = n$

$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y}$	
$b^{m-n} = \frac{x}{y}$	**خاصية قسمة القوى**
$\log_b b^{m-n} = \log_b \frac{x}{y}$	**خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية**
$m - n = \log_b \frac{x}{y}$	**الخصائص الأساسية للوغاريتمات**
$\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$	عوّض عن m , n بالقيمتين $\log_b y$, $\log_b x$ على الترتيب

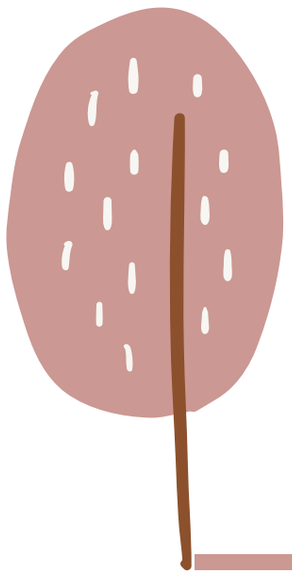
مفهوم أساسي — خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال:
$$\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$$



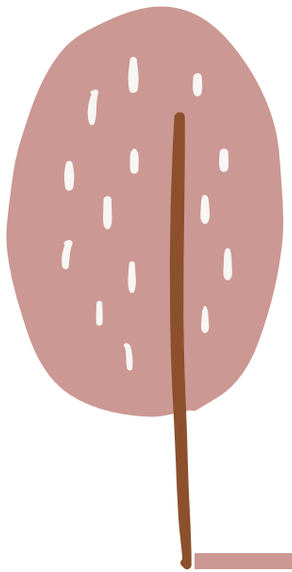
مثال

استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

تحقق من فهمك

2) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.



مثال

استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $\mathrm{pH} = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[\mathrm{H}^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون .

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
المخلل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

تذكّر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي **خاصية لوغاريتم القوة**

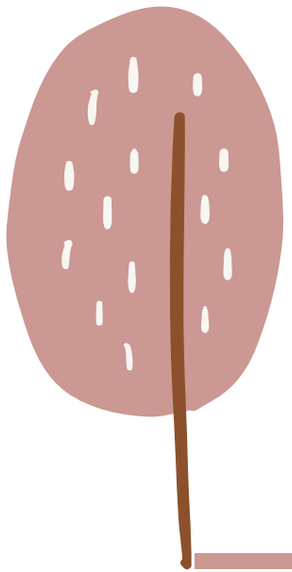
التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

ستبرهن خاصية لوغاريتم القوة في السؤال 48



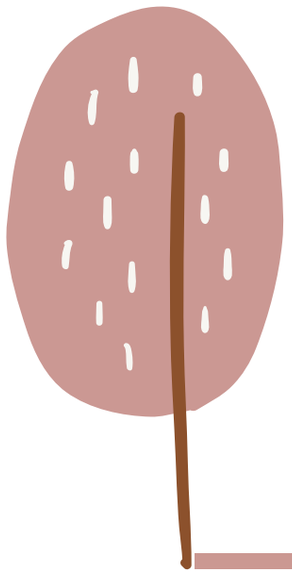
استعمال خاصية لوغاريتم القوة

مثال

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$، فقرّب قيمة $\log_2 25$

تحقق من فهمك

4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$.



خصائص اللوغاريتمات

خاصية الضرب ..

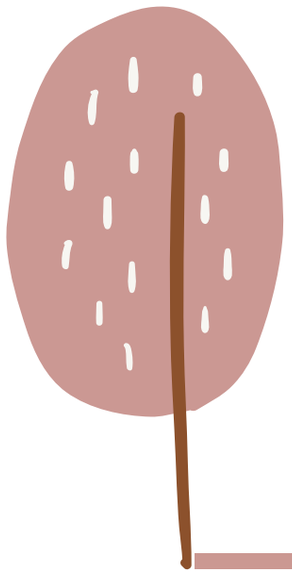
$$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$$

خاصية القسمة ..

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

خاصية لوغاريتم القوة ..

$$\log_x m^p = p \log_x m$$



$$\log_b 1 = 0 \qquad \log_b b = 1 \qquad \log_b b^x = x$$

مثال

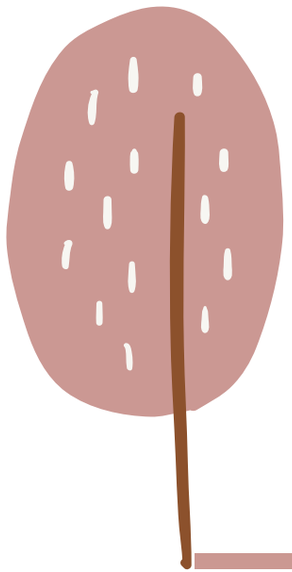
تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

تحقق من فهمك

(**5A** $\log_6 \sqrt[3]{36}$

(**5B** $\log_7 \sqrt[6]{49}$



كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

مثال

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a) $\log_2 12x^5y^{-2}$

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

مثال

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

(b $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

مثال

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

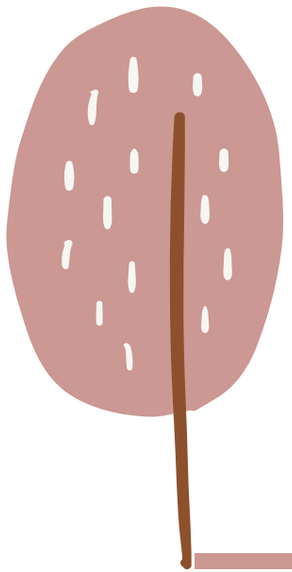
c) $\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}}$

تحقق من فهمك

(6A $\log_{13} 6a^3bc^4$

(6B $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

(6C $\log_4 \dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$



مثال

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a) $4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x + 6)$

كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

مثال

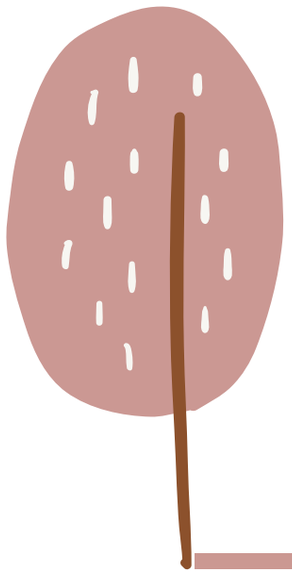
اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

b) $0.5 \log_7 (x + 2) + 6 \log_7 2x$

تحقق من فهمك

7A $-5 \log_2 (x + 1) + 3 \log_2 (6x)$

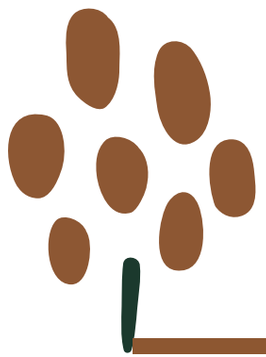
7B $\log_3 (2x - 1) - \frac{1}{4} \log_3 (x + 1)$



استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$، $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: **(المثالان 1, 2)**

1) $\log_4 15$

2) $\log_4 \frac{5}{3}$



تدرب

إذا كان $\log_3 5 \approx 1.465, \log_5 7 \approx 1.2091, \log_6 8 \approx 1.1606$, $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، فقرّب قيمة كل مما يأتي: (مثال 4)

12) $\log_3 25$

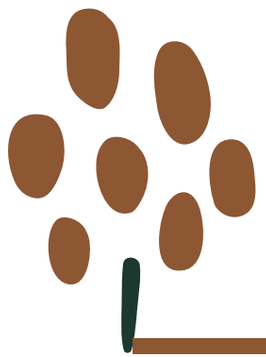
13) $\log_5 49$

تدرب

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

18) $\log_5 \sqrt[4]{25}$

19) $\log_2 \sqrt[5]{32}$



تدرب

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

24) $\log_9 6x^3y^5z$

25) $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$

تدرب

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

30) $3 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 (6 - x)$

تدرب

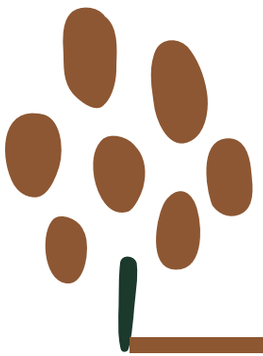
50) اكتشف المختلف: حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك:

$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$

$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$

$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$

$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$



تدرب

65) ما قيمة $2\log_5 12 - \log_5 8 - 2\log_5 3$ ؟

A $\log_5 2$

B $\log_5 0.5$

C $\log_5 3$

D 1

66) ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x+1) + 3$ ؟

A 3

B 2

C 1

D 0

تحصيلي

ما قيمة المقدار $\log_3 13 - \log_3 5$ ؟

(A) $\log_5 13$

(B) $\log_3 \frac{13}{5}$

(C) $\log_{13} 5$

(D) $\frac{13}{5}$

تحصيلي

ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$ ؟

(A) -5

(B) $-\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) 5

تحصيلي

ما قيمة $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ ؟

Ⓐ 1

Ⓑ 2

Ⓒ 3

Ⓓ 6

تحصيلي

قيمة العبارة اللوغاريتمية $3\log_3(9) - \log_5\left(\frac{1}{25}\right)$ تساوي ..

Ⓐ 12

Ⓑ 10

Ⓒ 8

Ⓓ 4

تحصيلي

المقدار $\log_5(x+1) + \log_5 x - 2\log_5(1+x)$ يساوي ..

Ⓐ $3\log_5 x - \log_5 1$

Ⓑ $3\log_5 x$

Ⓒ $\log_5 x^3$

Ⓓ $\log_5 \frac{x}{1+x}$