الدوال الرئيسية (الأم) و التحويلات الهندسية

فيما سبق:

درستُ التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها. (الدرس 1–4)

والآن:

- أقومُ بتعيين الدوال الرئيسة (الأم)، وأصفها، وأمثلها بيانيًّا.
- أقومُ بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة، وأمثلها بيانيًّا.

المفردات:

الدالة الرئيسة (الأم)
parent function

الدالة الثابتة
constant function

الدالة المحايدة
identity function

الدالة التربيعية
quadratic function

الدالة التكعيبية
cubic function

دالة الجذر التربيعي
square root function

دالة المقلوب
reciprocal function

دالة القيمة المطلقة
absolute value function

الدالة الدرجية
step function

دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function

التحويل الهندسي
transformation

الإزاحة (الانسحاب)
translation

الانعكاس
reflection

التمدد
dilation

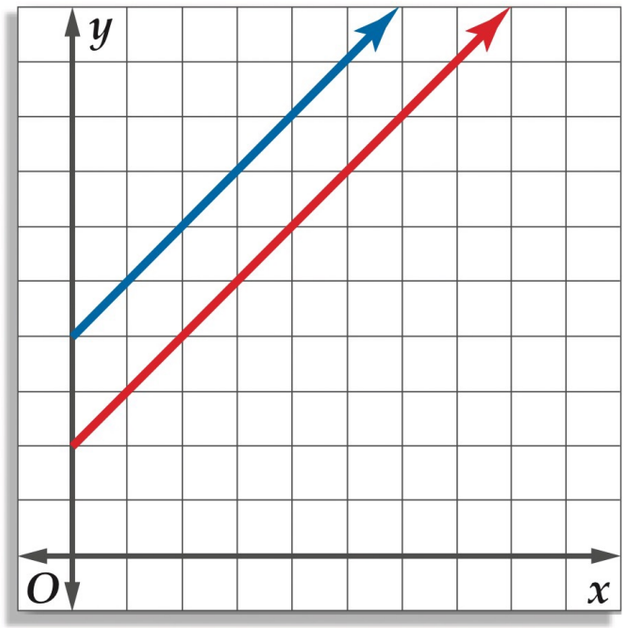
قدرات

اكمل النمط : ١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ...

٢٤٣ ٣٤٥ ٢٣٤ ١٩٩

لماذا

استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها.
ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.



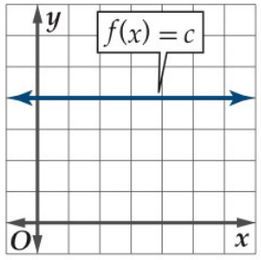
الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

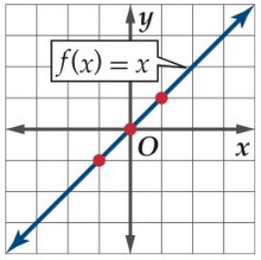
مفهوم أساسي

الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

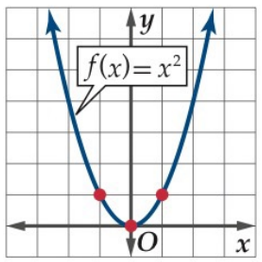
تكتب الدالة الثابتة على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّلُ بمستقيم أفقي.



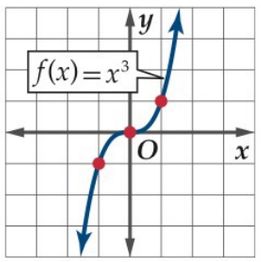
تمر الدالة المحايدة $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى الدالة التربيعية $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.

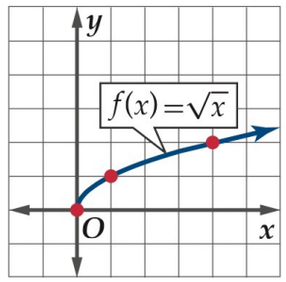


كما ستدرسُ أيضًا منحنيات دوال الجذر التربيعي ودوال المقلوب.

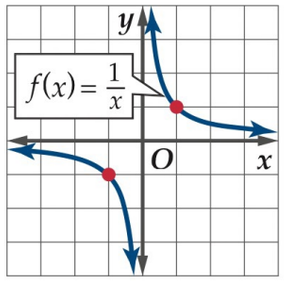
مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}\ , x \geq 0$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}\ , x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



كما تُعَدُّ دالة القيمة المطلقة إحدى الدوال الرئيسة (الأم).

مفهوم أساسي

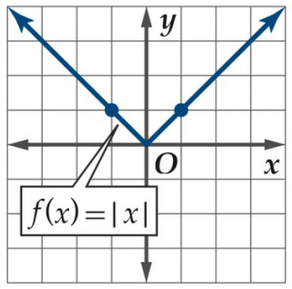
دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

التعبير اللفظي: يُرمز **لدالة القيمة المطلقة**، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5, |0| = 0, |4| = 4$

النموذج



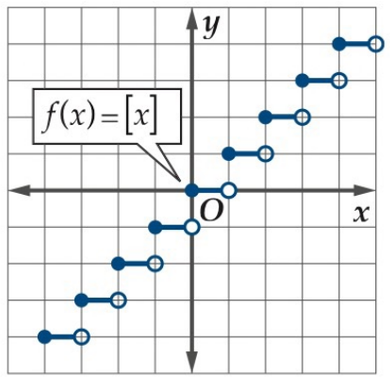
أما **الدالة الدرجية**، فهي دالة متعددة التعريف يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

مفهوم أساسي — **دالة أكبر عدد صحيح**

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [x]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.

أمثلة: $[-4] = -4, [-1.5] = -2, [\frac{1}{3}] = 0$

النموذج



باستعمال ما تعلمته في الدروس السابقة، فإنه يمكنك وصف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم). ممّا يساعدك على تعرف منحنيات دوال أكثر تعقيدًا من العائلة نفسها وتحليلها.

الدالة الثابتة $f(x) = c$

المجال :

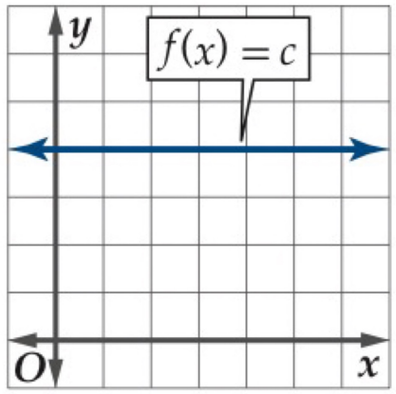
المدى :

اصفار الدالة :

المقطع **y** :

التماثل :

التزايد والتناقص :



القيم القصوى :

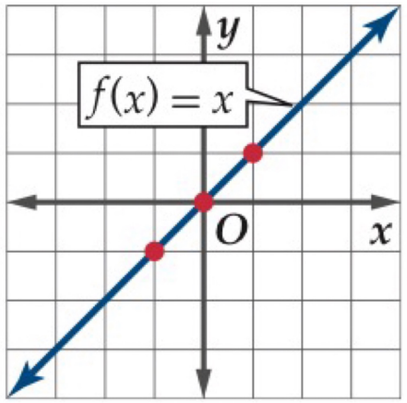
الدالة الخطية $f(x) = x$

المجال :

المدى :

اصفار الدالة :

المقطع **y** :



التماثل :

التزايد والتناقص :

القيم القصوى :

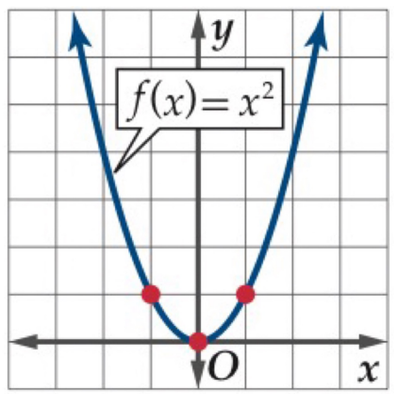
الدالة التربيعية $f(x) = x^2$

المجال :

المدى :

اصفار الدالة :

المقطع **y** :



التماثل :

التزايد والتناقص :

القيم القصوى :

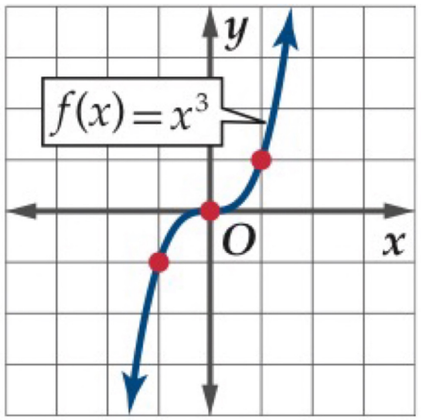
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$

المجال :

المدى :

اصفار الدالة :

المقطع **y** :



التماثل :

التزايد والتناقص :

القيم القصوى :

دالة الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{x}$

المجال :

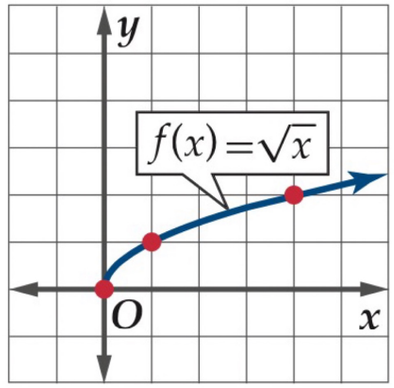
المدى :

اصفار الدالة :

المقطع **y** :

التماثل :

التزايد والتناقص :



القيم القصوى :

دالة المقلوب $f(x)=\frac{1}{x}$

المجال :

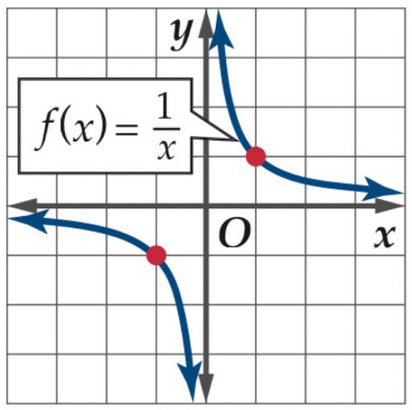
المدى :

اصفار الدالة :

المقطع **y** :

التماثل :

التزايد والتناقص :



القيم القصوى :

دالة القيمة المطلقة $f(x)=|x|$

المجال :

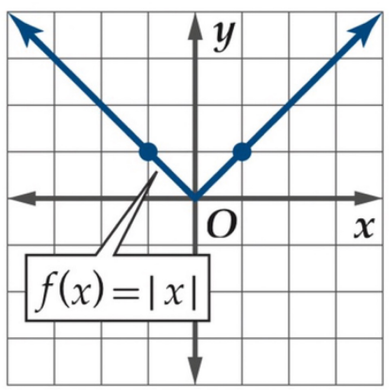
المدى :

اصفار الدالة :

المقطع **y** :

التماثل :

التزايد والتناقص :



القيم القصوى :

دالة أكبر عدد صحيح (الدراجية) $f(x)=[x]$

المجال :

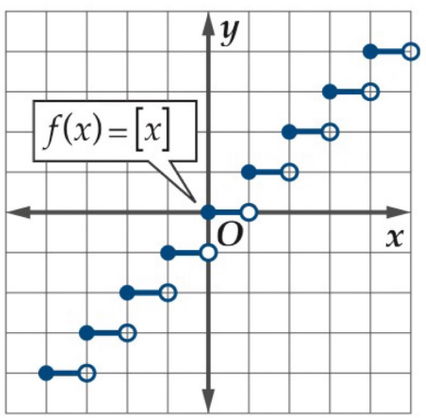
المدى :

اصفار الدالة :

المقطع **y** :

التماثل :

التزايد والتناقص :

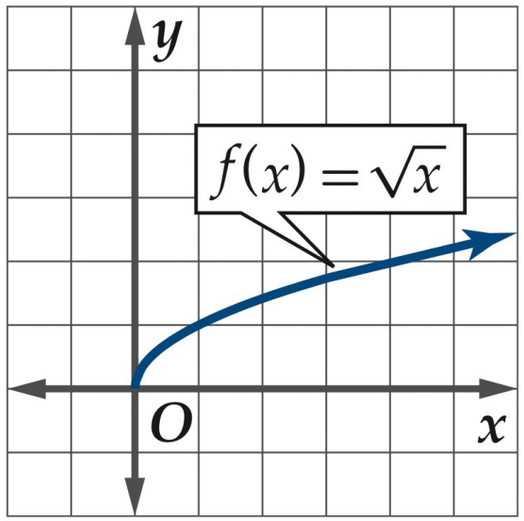


القيم القصوى :

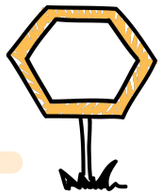
وصف خصائص الدالة الرئيسة (الأم)

مثال

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.



الشكل 1.5.1



تحقق من فهمك

رسم الدالة المعطاة وحدد المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

1) $f(x) = |x|$

التحويلات الهندسية : تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعضُ التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط، ولا تغير أبعاده أو شكله، وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

الانسحاب (الإزاحة) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

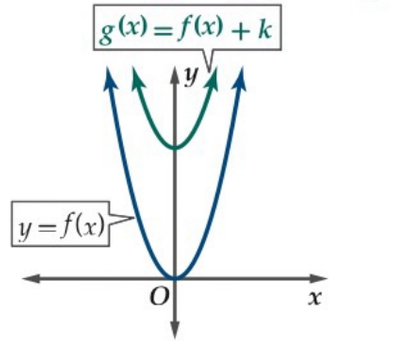
مفهوم أساسي

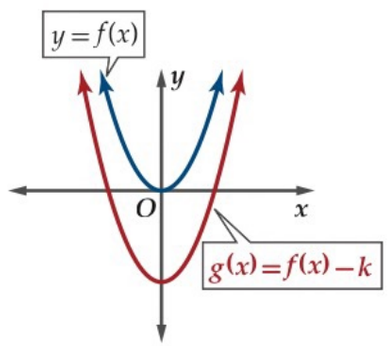
الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

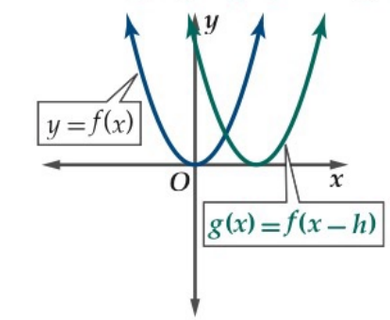


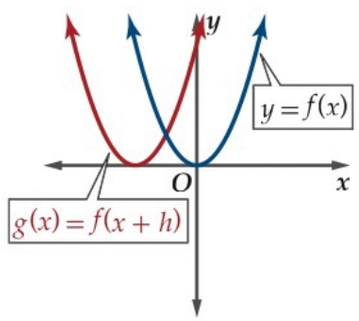


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.

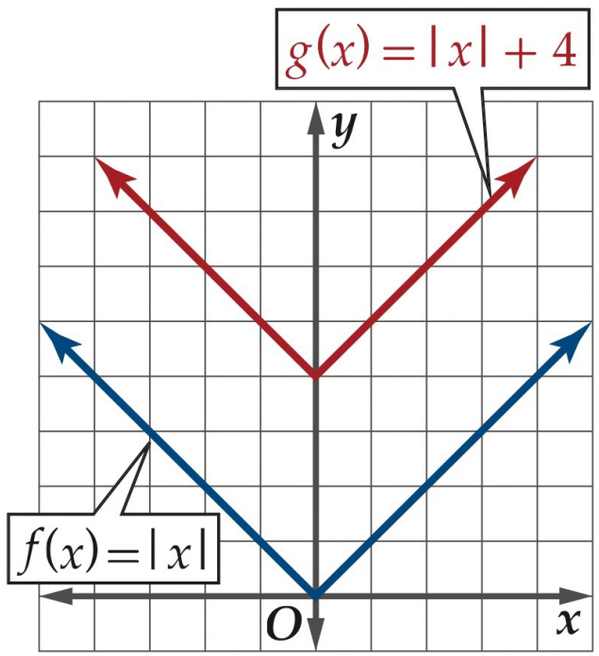




انسحاب منحنى الدالة

مثال استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 4$

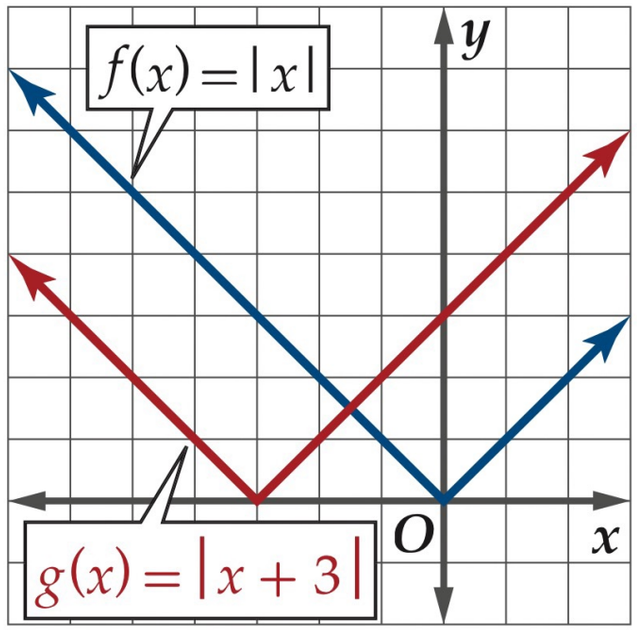


الشكل 1.5.2

انسحاب منحنى الدالة

مثال استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

b) $g(x) = |x + 3|$

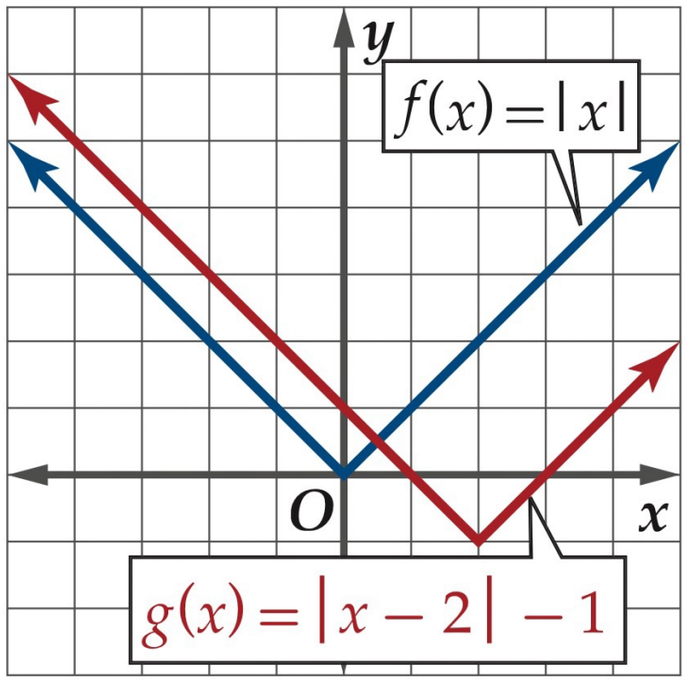


الشكل 1.5.3

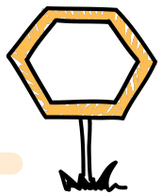
انسحاب منحنى الدالة

مثال استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

c) $g(x) = |x - 2| - 1$



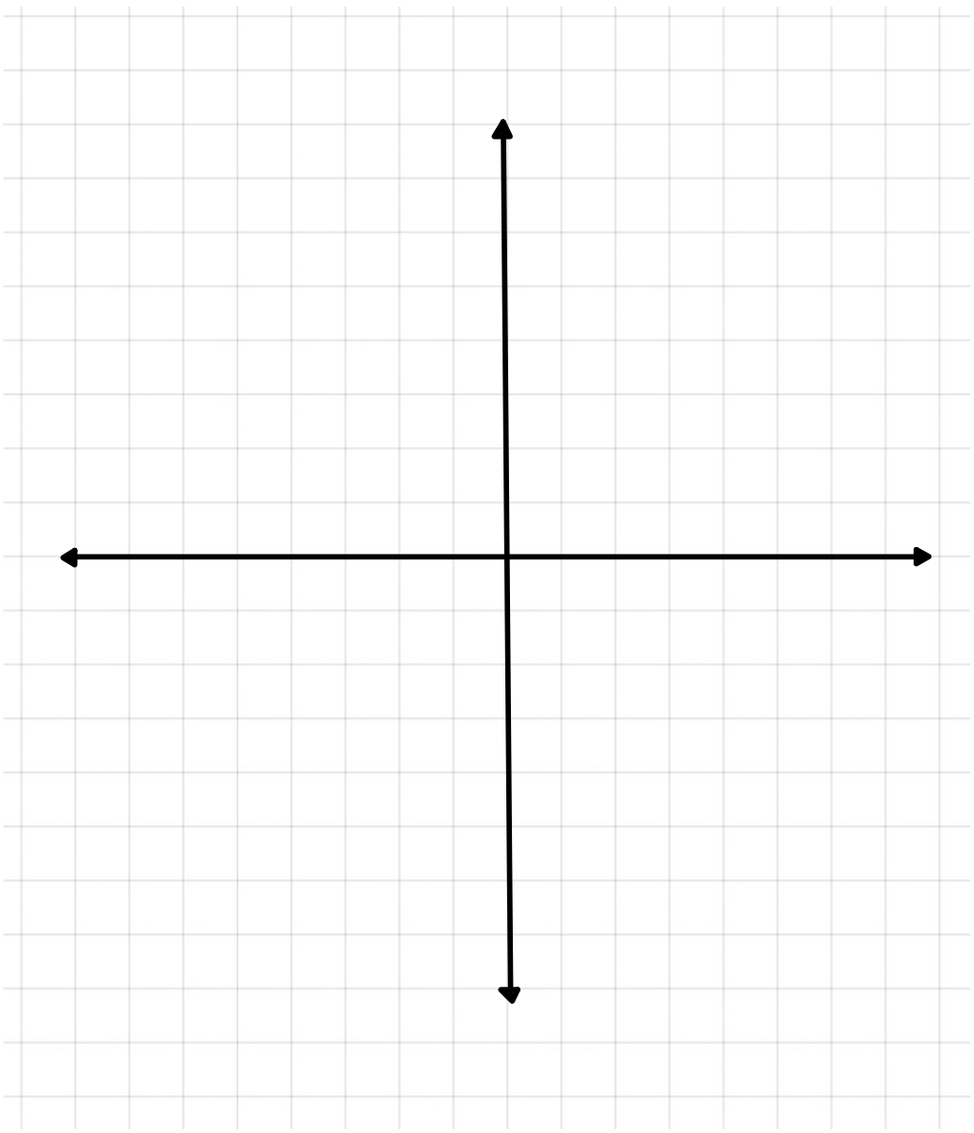
الشكل 1.5.4

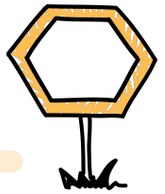


تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

2A) $h(x) = x^3 - 5$

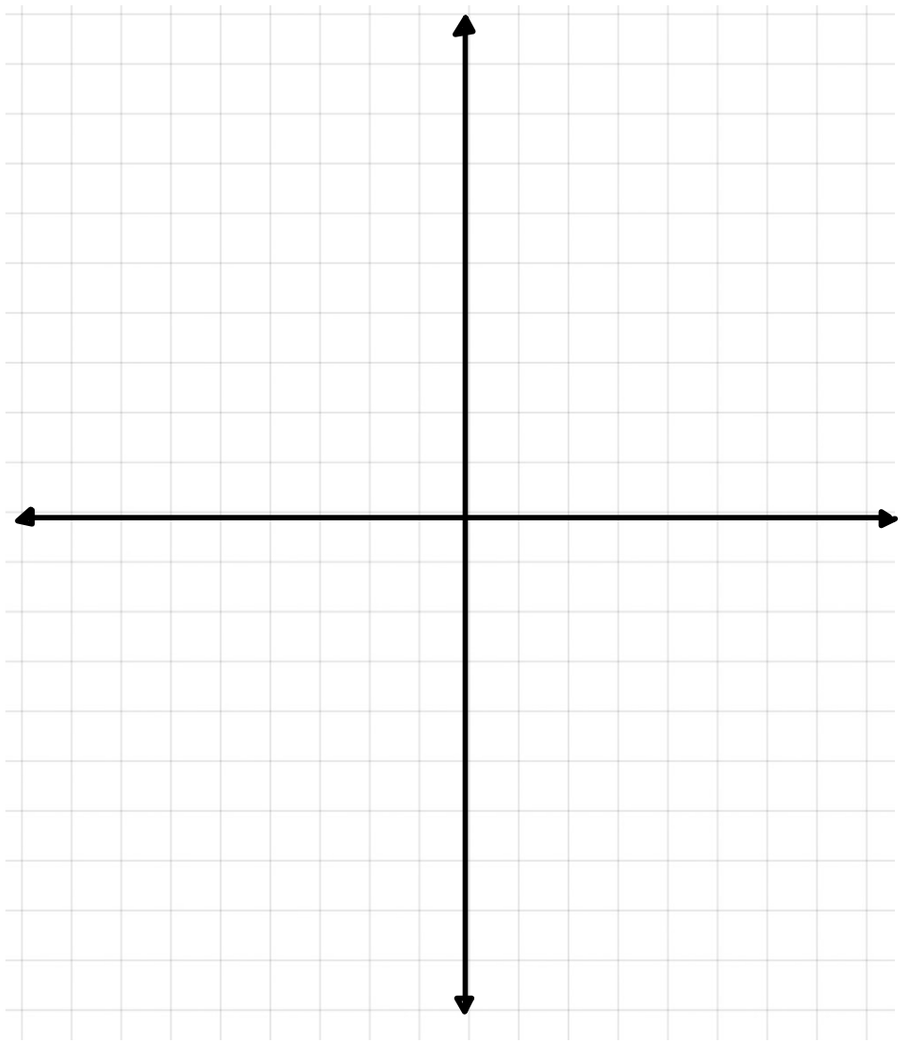


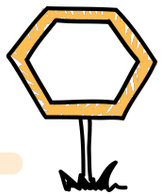


تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

2B $h(x) = 8 + x^3$

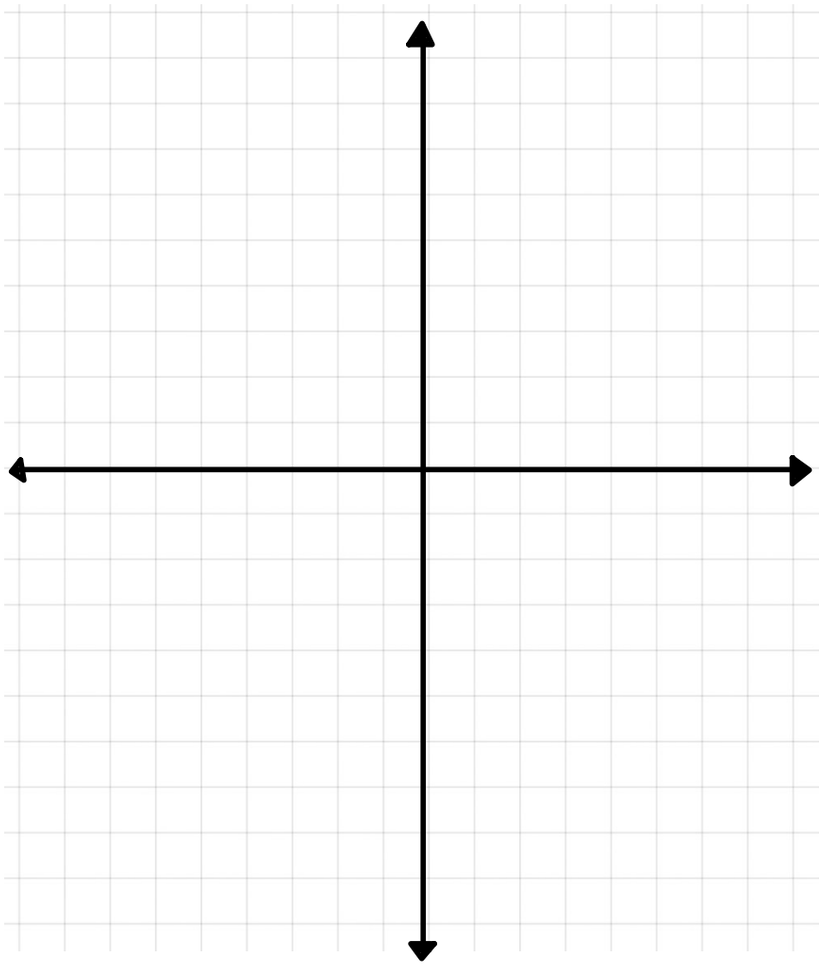




تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

2C) $h(x) = (x + 2)^3 + 4$



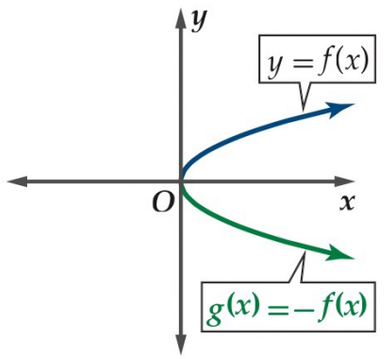
من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس**، والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

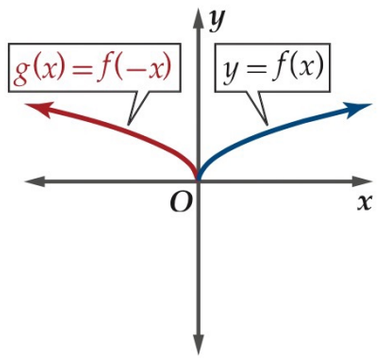
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x.

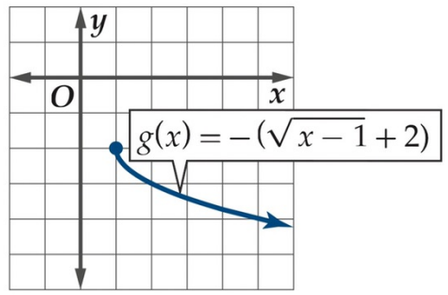


الانعكاس حول المحور y

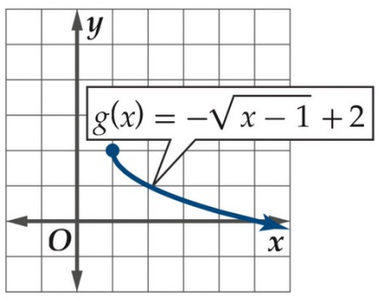
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y.



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -\left(\sqrt{x-1} + 2\right)$.



انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x.



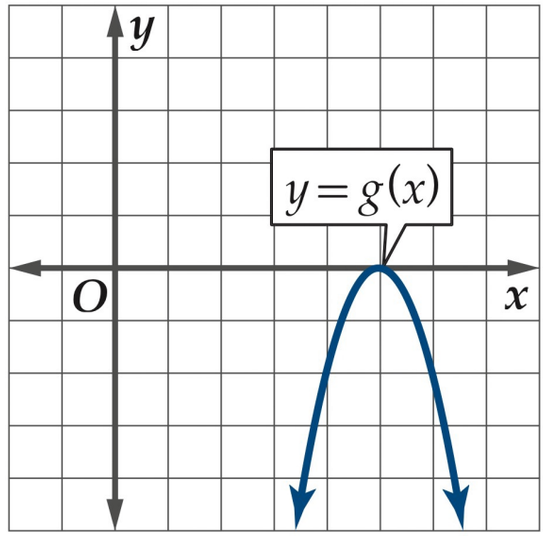
انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

كتابة معادلات التحويل

مثال

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:

(a

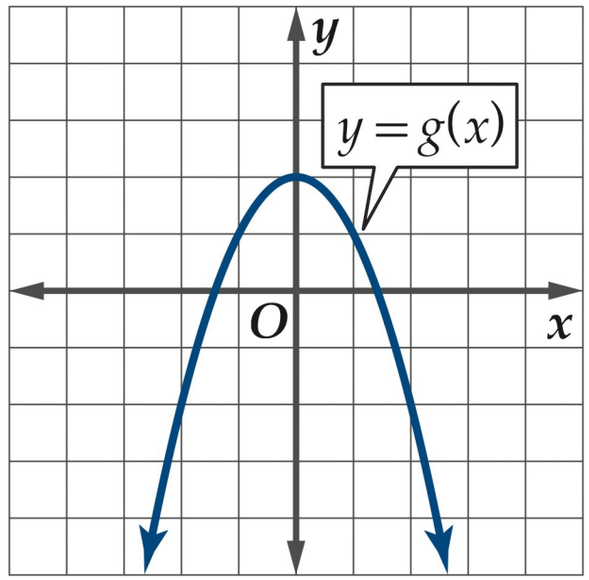


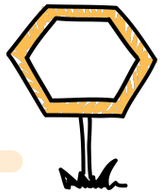
كتابة معادلات التحويل

مثال

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:

(b

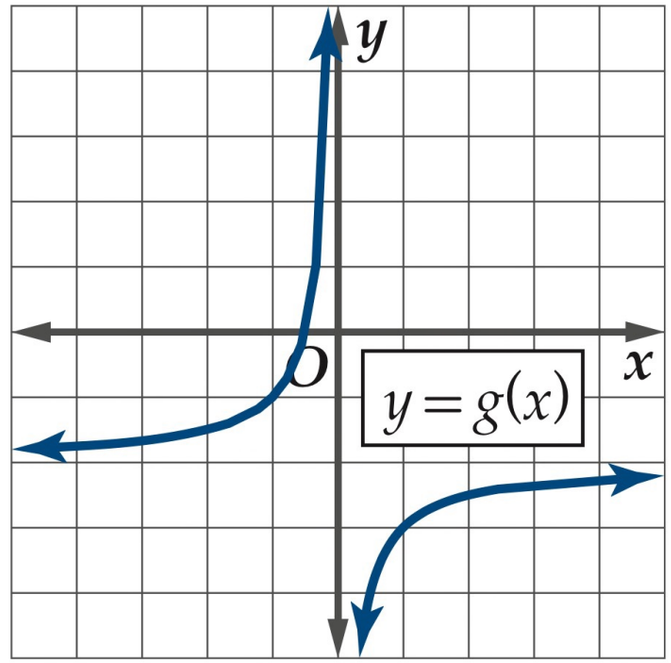


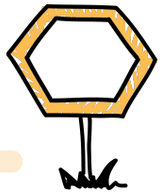


تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(3A

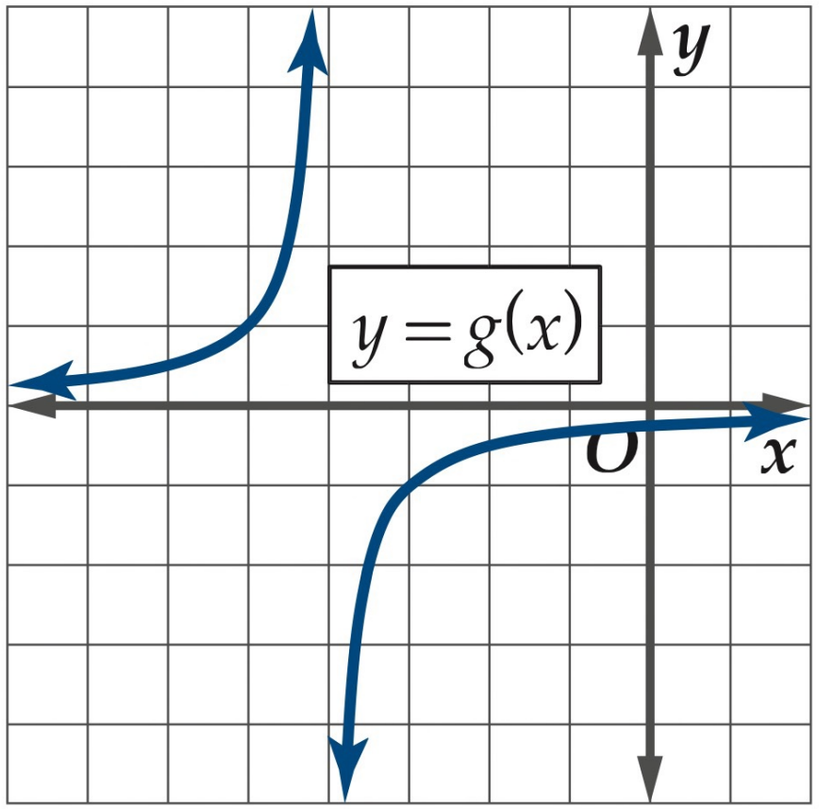




تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(3B



التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًّا أو أفقيًّا.

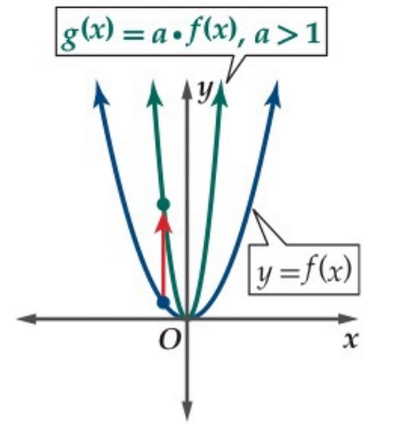
مفهوم أساسي

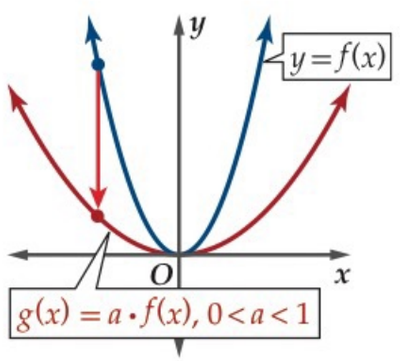
التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

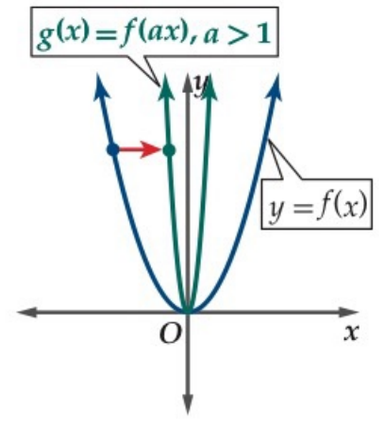


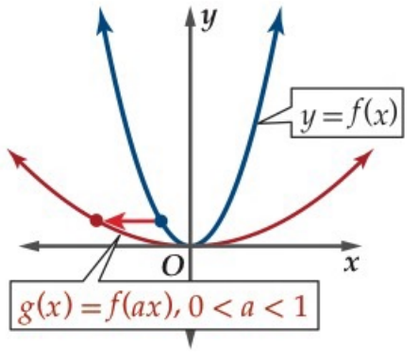


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



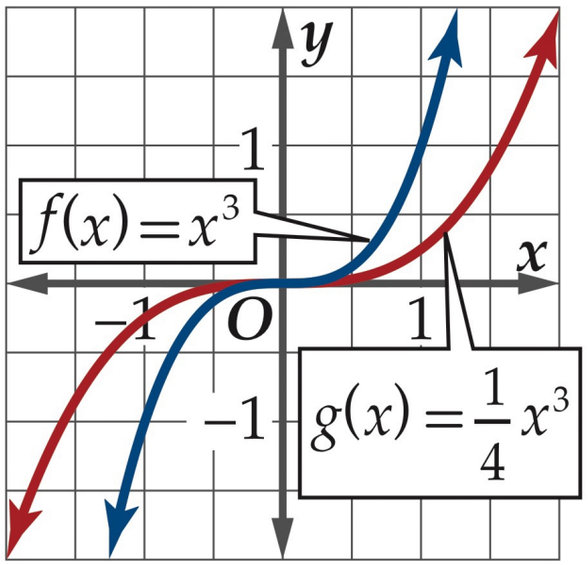


وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

مثال

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

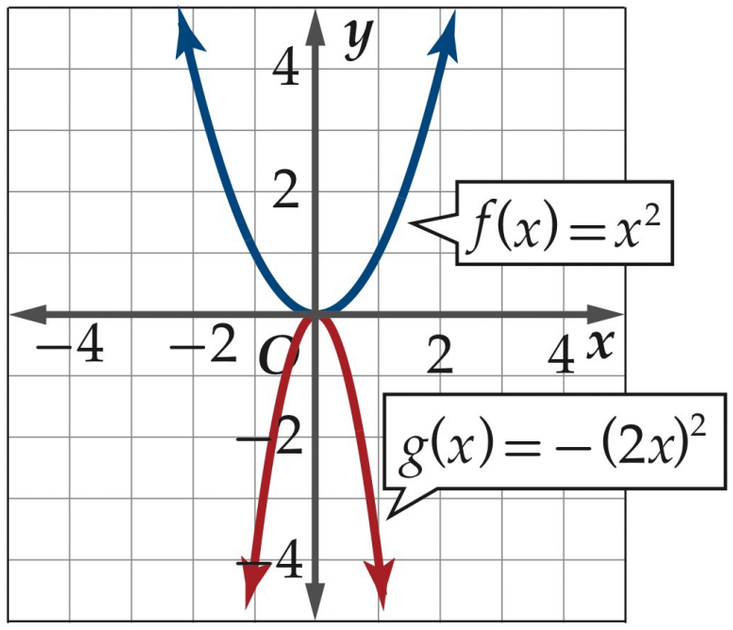


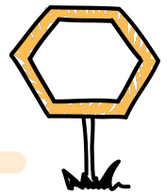
وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

مثال

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

b) $g(x) = -(2x)^2$





تحقق من فهمك

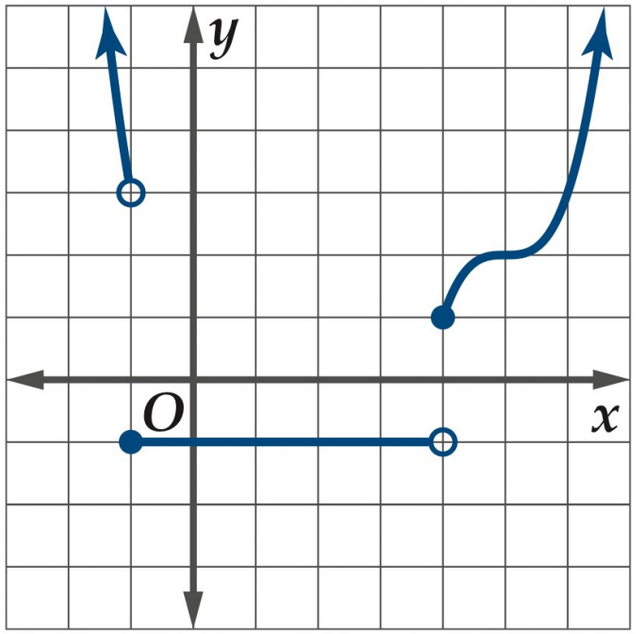
4A $g(x) = \frac{1}{2}[x]$

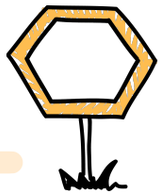
4B $g(x) = \frac{5}{x} + 3$

تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانيًّا

مثال

مثّل الدالة بيانيًّا: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x < -1 \\ -1 & , \quad -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$.





تحقق من فهمك

$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \le 0 \\ x^3 & , \quad 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & , \quad x > 2 \end{cases}$$ **(5A**

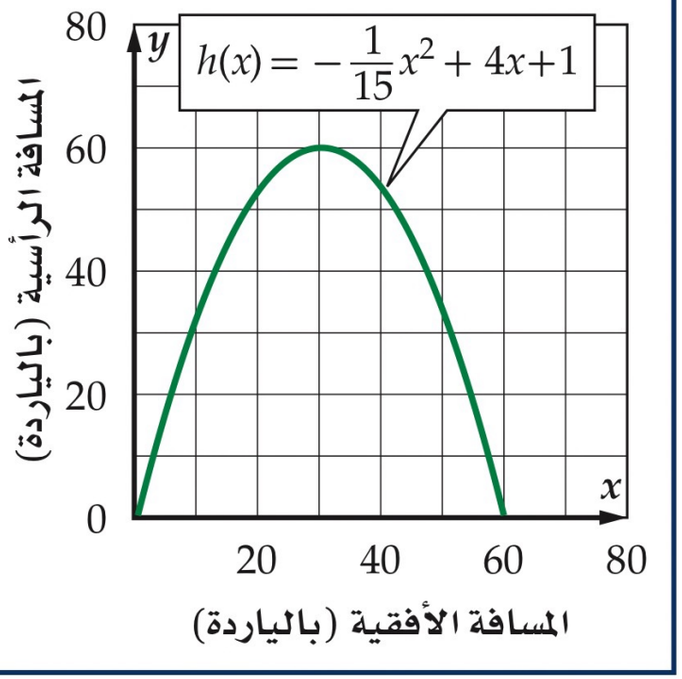
$$h(x) = \begin{cases} (x+6)^2 & , \quad x < -5 \\ 7 & , \quad -5 \le x \le 2 \\ |4 - x| & , \quad x > 2 \end{cases}$$ **(5B**

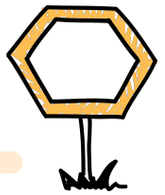
التحويلات الهندسية على الدوال

مثال

كرة قدم: ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة باليادرة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية باليادرة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.

مسار الكرة





تحقق من فهمك

6) كهرباء: إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

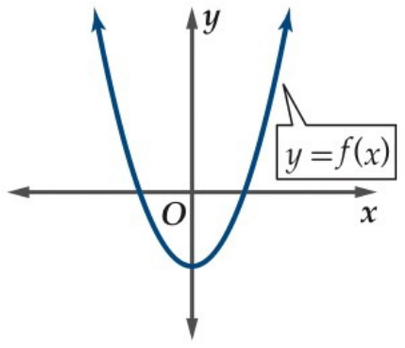
تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

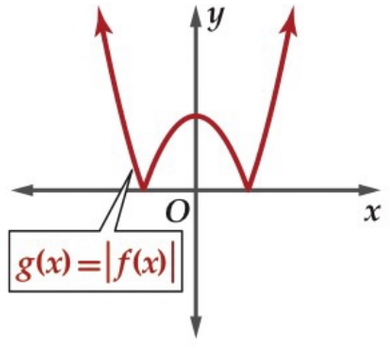
مفهوم أساسي

التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

$$g(x) = |f(x)|$$

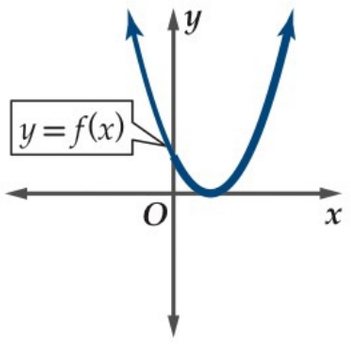
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

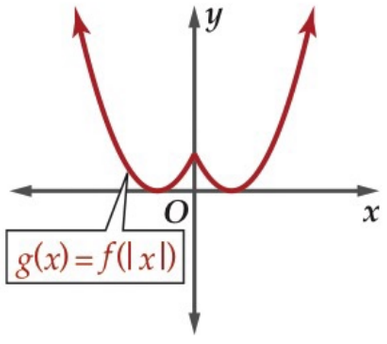




$$g(x) = f(|x|)$$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .



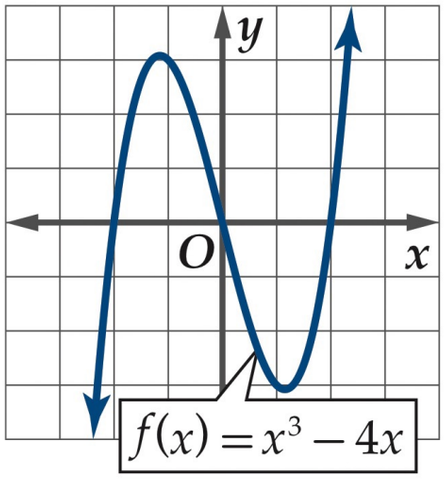


وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

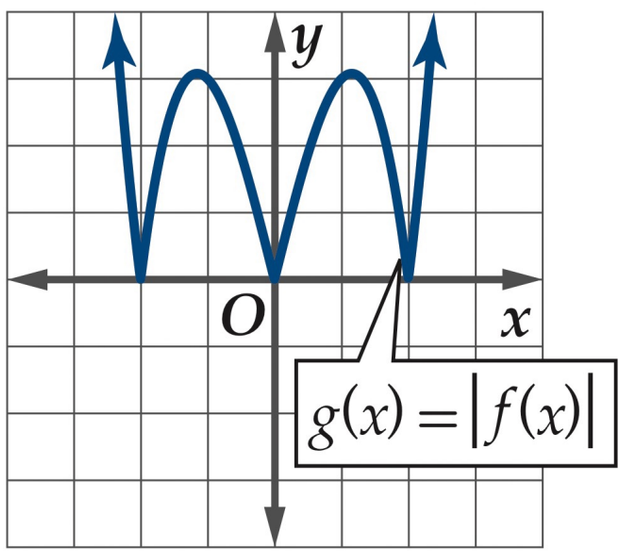
مثال

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

$$g(x) = |f(x)| \quad \text{(a}$$



الشكل 1.5.6

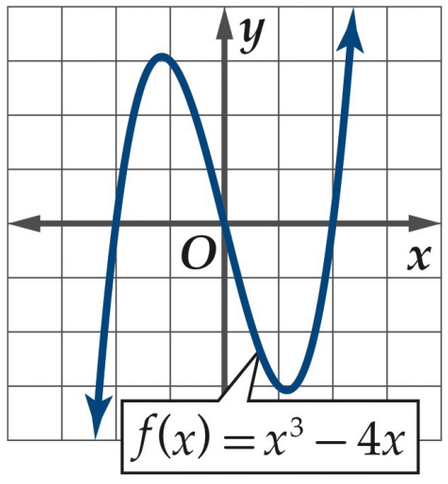


وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

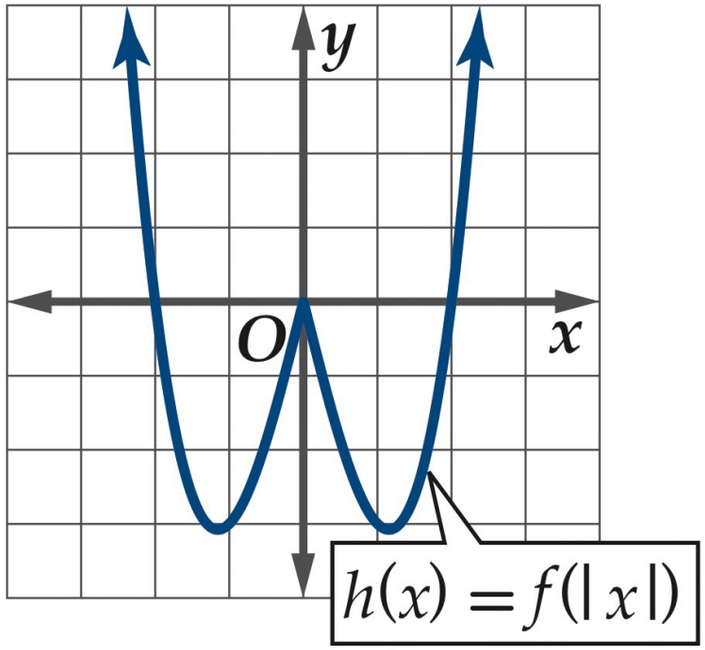
مثال

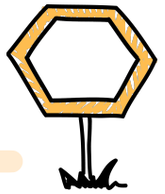
استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

b) $h(x) = f(|x|)$



الشكل 1.5.6

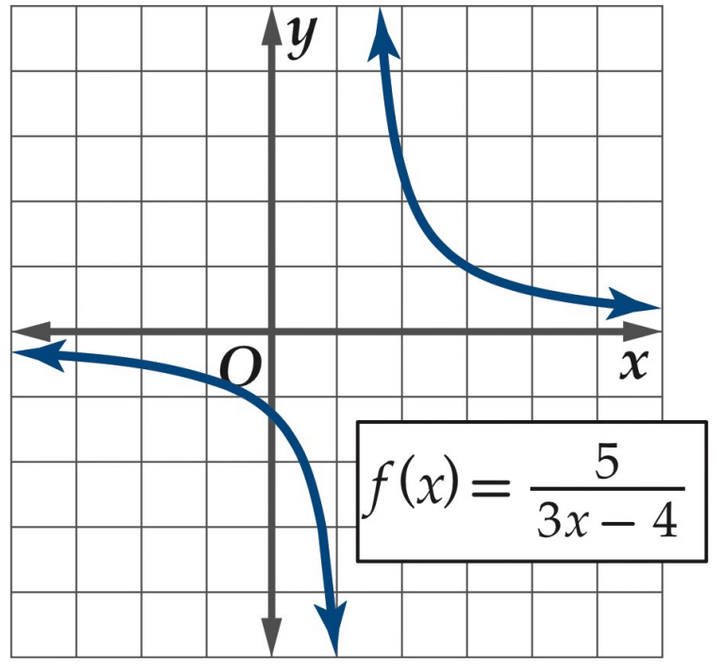


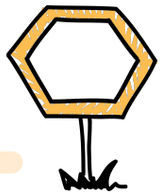


تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

7A)

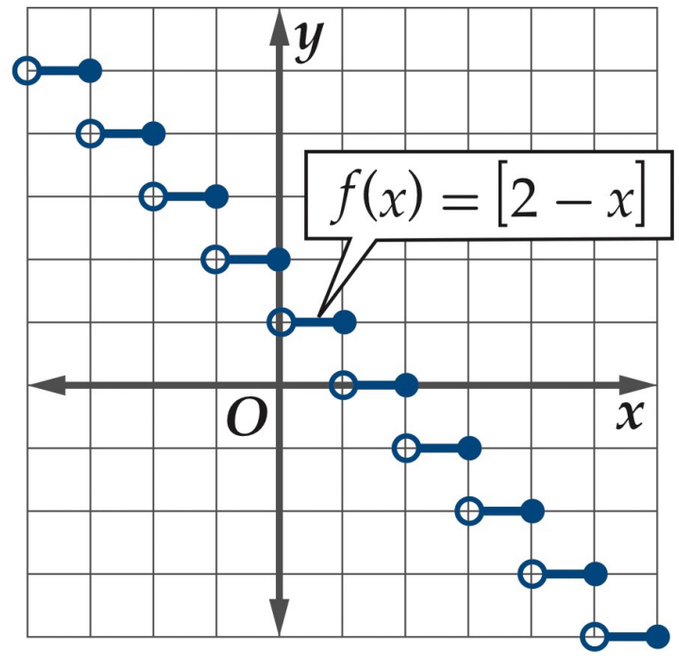




تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

(7B



صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع x ، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: **(مثال 1)**

1) $f(x) = [x]$ **2)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **3)** $f(x) = x^3$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: **(مثال 2)**

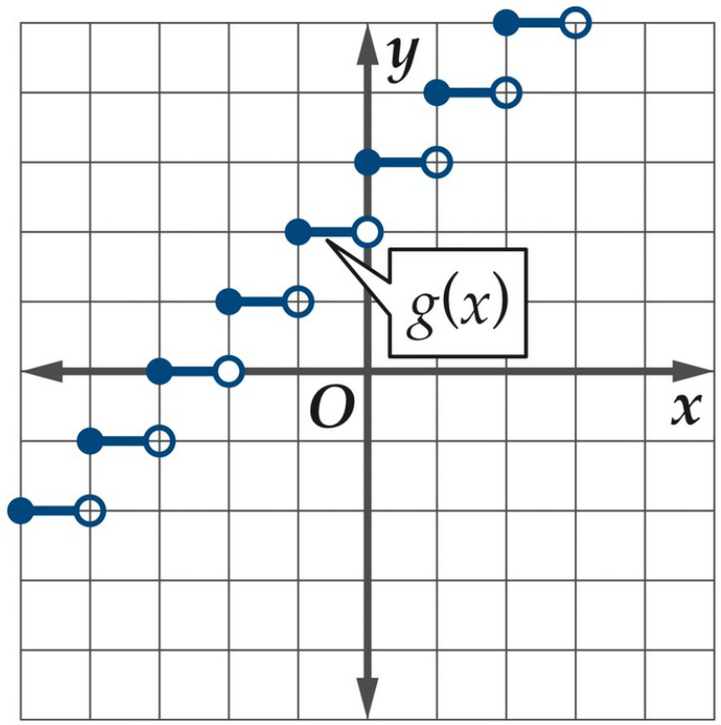
7) $g(x) = \sqrt{x - 4}$

8) $g(x) = \sqrt{x - 7} + 3$

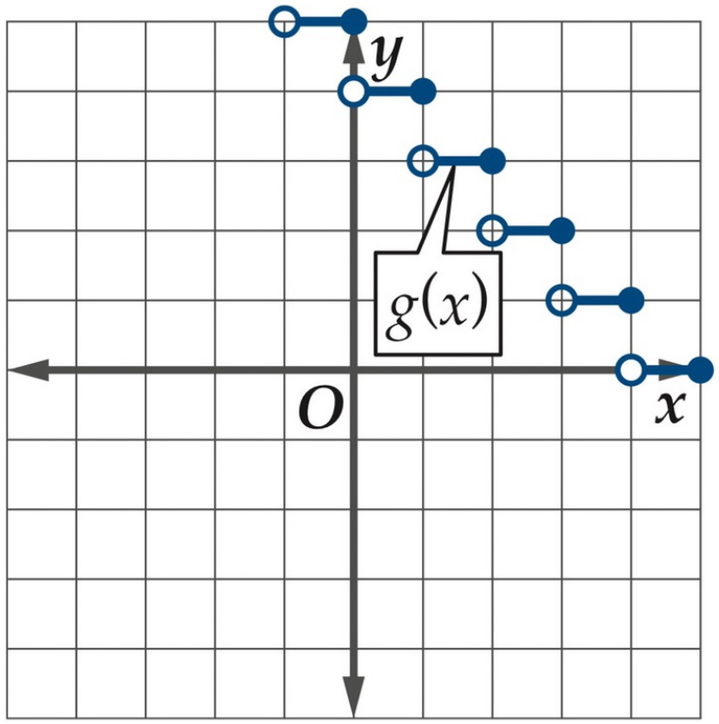
تدرب

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = [x]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. **(مثال 3)**

11)



12)



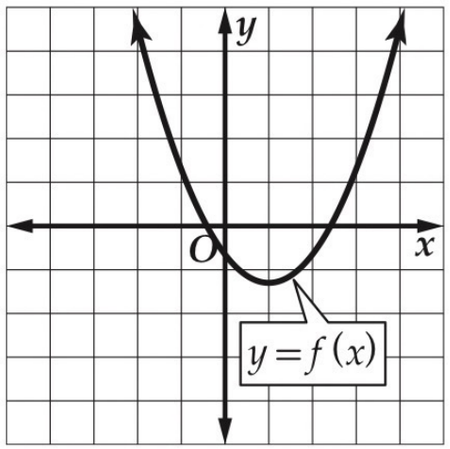
تدرب

اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما في مستوى إحداثي واحد . **(مثال 4)**

(20 $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{4}$

تدرب

66) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة الممثلة في الشكل أدناه؟



A $(0,\infty)$

B $(-\infty,1)$

C $(-1,\infty)$

D $(1,\infty)$

67) ما مدى الدالة $y = \frac{x^2 + 8}{2}$ ؟

A $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

B $\{y \mid y \geq 4\}$

C $\{y \mid y \geq 0\}$

D $\{y \mid y \leq 0\}$

تحصيلي

الدالة الرئيسة (الأم) للدالة $g(x) = (x-1)^2 + \frac{1}{2}$ هي ..

(A) $f(x) = x^2$

(B) $f(x) = x^3$

(C) $f(x) = \sqrt{x}$

(D) $f(x) = \frac{1}{x}$