العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تهيئة

بسّط كلَّ عبارة فيما يأتي:

1) $\sqrt{28}$

2) $\sqrt{\frac{25}{4}}$

بسّط كلًّا من العبارات الآتية مستعملًا القسمة التركيبية:

4) $(5x^2 - 22x - 15) \div (x - 5)$

العمليات على الدوال

فيما سبق

درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

والآن

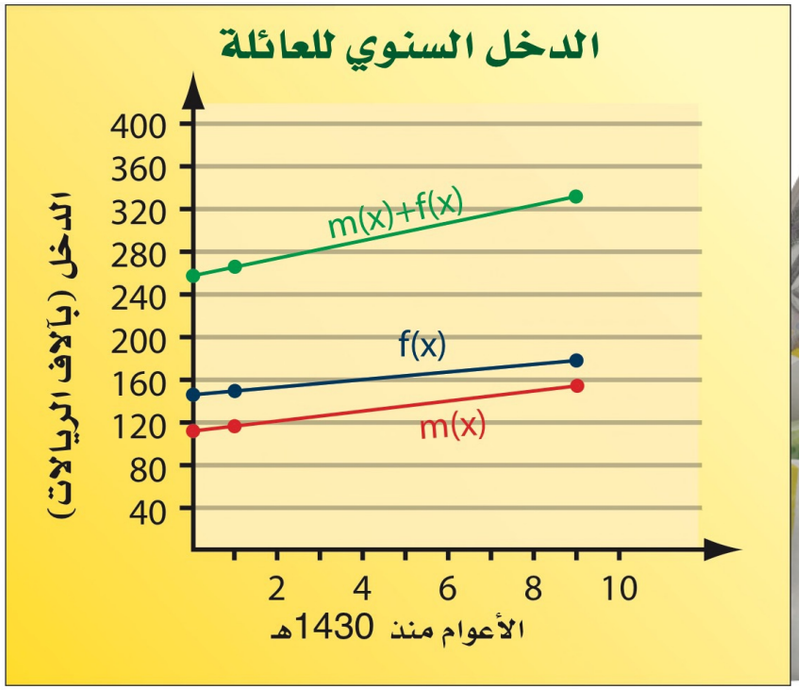
- أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما.
- أجد تركيب دالتين.

المفردات

تركيب دالتين

composition of functions

لماذا



تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1430هـ؛ حيث $f(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوج، و$m(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.

العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا.

يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي — **العمليات على الدوال**

أضف إلى مطويتك

العملية	التعريف	مثال لتكن $f(x) = 2x$, $g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5}, x \neq 5$

جمع الدوال وطرحها

مثال

إذا كان $f(x) = x^2 - 4,\ g(x) = 2x + 1$، فأوجد كلّ دالة فيما يأتي:

a) $(f + g)(x)$

b) $(f - g)(x)$

تحقق من فهمك

$$f(x) = x^2 + 5x - 2, g(x) = 3x - 2$$

(1A $(f + g)(x)$

(1B $(f - g)(x)$

في المثال **1**، الدالتان $g(x)$ و $f(x)$ لهما المجال نفسه، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية. وكذلك الدالتان $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ مجالاهما مجموعة الأعداد الحقيقية. يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $g(x)$ و $f(x)$ من تقاطع مجاليهما. كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين، ويرمز له بالرمز ∩.

تنبيه !

قسمة دالتين

بما أنه قد تم تعلُّم قسمة كثيرات الحدود في الفصل 3، فإنه سيُكتفي عند إيجاد ناتج قسمة دالتين (في هذا الدرس) بكتابتهما في صورة دالة نسبية، وتحديد مجالها من دونٍ إجراء عملية القسمة.

مثال

ضرب الدوال وقسمتها

إذا كان $f(x) = x^2 + 7x + 12, g(x) = 3x - 4$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

(a $(f \cdot g)(x)$

(b $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

تحقق من فهمك

$$f(x) = x^2 - 7x + 2, g(x) = x + 4$$

(2A $(f \cdot g)(x)$

(2B $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند **تركيب دالتين** فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.

قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$، وتقرأ f بعد g.

مفهوم أساسي

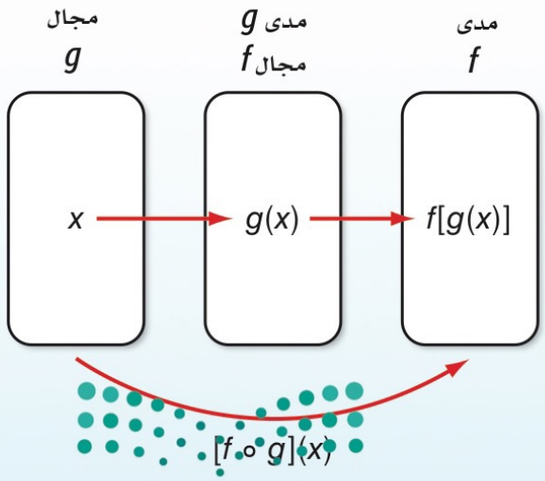
تركيب دالتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

النموذج:



يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفًا فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصرًا في مجال الدالة f. وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرّفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصرًا في مجال الدالة g.

تركيب دالتين

مثال

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

(a $f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}, g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$

مثال

تركيب دالتين

أوجد $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

(b $f(x) = 2x - 5, g(x) = 4x$

تحقق من فهمك

$f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}$ ، $g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\}$ **(3A**

$f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 6$ **(3B**

مثال

استعمال تركيب دالتين

سيارات: استعمل تركيب دالتين لحل المسألة الآتية: قدَّم معرض لبيع السيارات عرضًا بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضافًا إليه خصم مقداره 1500 ريال يقدمه وكيل شركة السيارات. فإذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها 64500 ريال، فهل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

تحقق من فهمك

4) **تسوق:** يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معًا على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالًا، وتخفيض نسبته 15% ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300 ريال، فأيُّهما يعطي سعرًا أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

تأكد

أوجد $(x)\left(\frac{f}{g}\right), (f \cdot g)(x), (f - g)(x), (f + g)(x)$ للدالتين $g(x)$, $f(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

1) $f(x) = x + 2$

$g(x) = 3x - 1$

2) $f(x) = x^2 - 5$

$g(x) = -x + 8$

تأكد

أوجد $f \circ g, g \circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

3) $f = \{(2, 5), (6, 10), (12, 9), (7, 6)\}$

$g = \{(9, 11), (6, 15), (10, 13), (5, 8)\}$

تأكد

أوجد $f \circ g, g \circ f$ لكلِّ زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

(5

$$f(x) = -3x$$

$$g(x) = 5x - 6$$

تدرب

39) اكتشف الخطأ: تقوم ريم والعنود بإيجاد الدالة $[f \circ g](x)$ ، حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8, g(x) = x^2 + 8$. من منهما إجابتها صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

ريم

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2(x^2 + 8) - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8$$
$$= x^4 + 18x^2 + 72$$

العنود

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= (x^2 + 8)^2 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8$$
$$= x^4 + 16x^2 + 2x + 56$$

تدرب

43 إذا كان $g(x) = x^2 + 9x + 21\,,\, h(x) = 2(x+5)^2$ فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$؟

A $k(x) = -x^2 - 11x - 29$

B $k(x) = x^2 + 11x + 29$

C $k(x) = x + 4$

D $k(x) = x^2 + 7x + 11$

44 إذا كان $f(x) = 2x + 4\,,\, g(x) = x^2 + 5$ فإن قيمة $f[g(6)]$ تساوي:

A 38

B 43

C 86

D 261

تحصيلي

إذا كانـــت $f = \{(3,5),(-1,6)\}$ و $g = \{(4,3),(2,-1)\}$ ؛ فـــإن $[f \circ g]$ تساوي ..

Ⓐ $\{(3,5),(-1,6)\}$

Ⓑ $\{(3,4),(6,2)\}$

Ⓒ $\{(4,3),(2,-1)\}$

Ⓓ $\{(4,5),(2,6)\}$

تحصيلي

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x - 3$ فما قيمة x التي تجعل $[f \circ g](x) = [g \circ f](x)$ ؟

Ⓐ 0

Ⓑ 1

Ⓒ 2

Ⓓ 3