العلاقات والدوال العكسية

فيما سبق

درست كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

والآن

- أجد كلًّا من العلاقة العكسية والدالة العكسية.
- أحدّد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

المفردات

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

لماذا

يبين الجدول المجاور قيمة الريال السعودي مقارنة بالدولار الأمريكي، والدالة $d = 0.267\ r$ تمثل عدد الدولارات التي تحصل عليها مقابل كل ريال سعودي، ولمعرفة عدد الريالات التي تحصل عليها مقابل كل دولار أمريكي، حل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير r فتكون النتيجة $r \approx 3.75\ d$ وتمثل دالة عكسية للدالة السابقة .

	السعودية	أمريكا
السعودية		0.267
أمريكا	3.75	

إيجاد العلاقة العكسية: تذكّر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. **والعلاقة العكسية** هي مجموعة من الأزواج المرتبة، يمكنك الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب في العلاقة، فيصبح مجال العلاقة هو مدى العلاقة العكسية لها، ومداها هو مجال العلاقة العكسية لها.

مفهوم أساسي — العلاقة العكسية

أضف إلى مطويتك

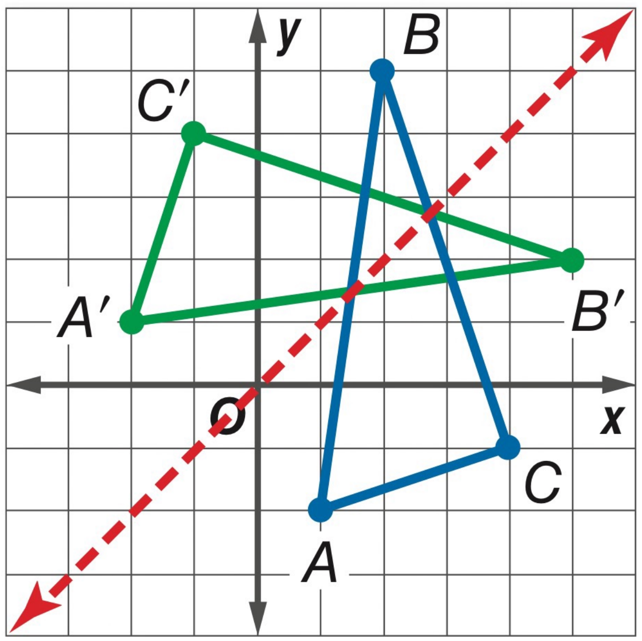
التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: كلما احتوت إحداهما على زوج مرتب (a, b)، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a).

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

$$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$$

إيجاد العلاقة العكسية

هندسة : يمكن تمثيل رؤوس $\triangle ABC$ بالعلاقة $\{(1, -2), (2, 5), (4, -1)\}$.
أوجد العلاقة العكسية لها، ثم مثِّل بيانيًّا العلاقة والعلاقة العكسية لها على مستوى إحداثي واحد، واذكر التحويل الهندسي الذي يحوّل العلاقة المعطاة إلى العلاقة العكسية لها.



تحقق من فهمك

1) **هندسة:** إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-8, -3), (-8, -6), (-3, -6)\}$، تمثّل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية، ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة ومعكوسها، وإذا كان معكوس الدالة يمثل دالةً أيضًا، فإنه يسمى **دالة عكسية**. ويرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

مفهوم أساسي — أضف إلى مطويتك

خواص الدالة العكسية

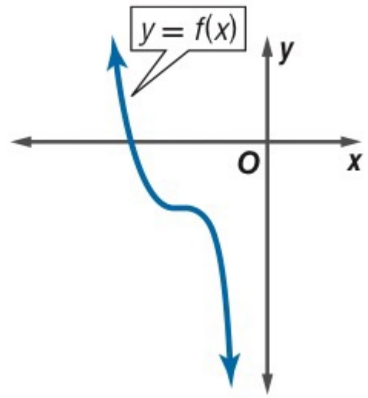
التعبير اللفظي: إذا كان كل من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

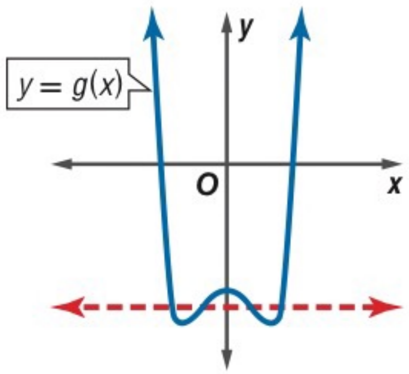
أوجد $f(6)$.	أوجد $f^{-1}(2)$.
$f(x) = x - 4$	$f^{-1}(x) = x + 4$
$f(6) = 6 - 4 = 2$	$f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

وبما أن كلًّا من $f(x), f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2, f^{-1}(2) = 6$.

اختبار الخط الأفقي: إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متباينة. تذكّر أنه يمكنك استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل يمكنك استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة (الدالة متباينة)؛ لذا يمثّل معكوس الدالة $y = f(x)$ دالة أيضًا.



يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة، في أكثر من نقطة (الدالة ليست متباينة)؛ لذا لا يكون معكوس الدالة $y = g(x)$ دالةً.

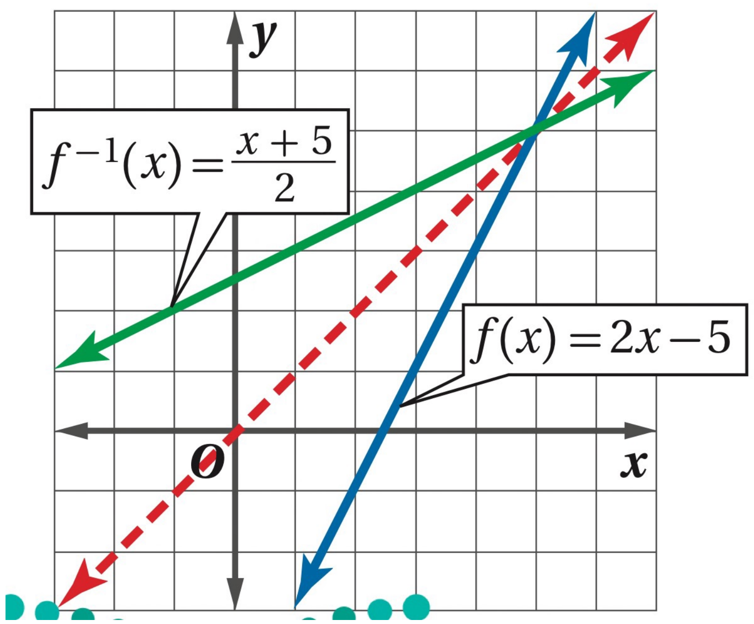
يمكنك إيجاد معكوس دالة بالتبديل بين x و y في قاعدة الدالة.

مثال

إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا

أوجد معكوس كلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

$f(x) = 2x - 5$ (a

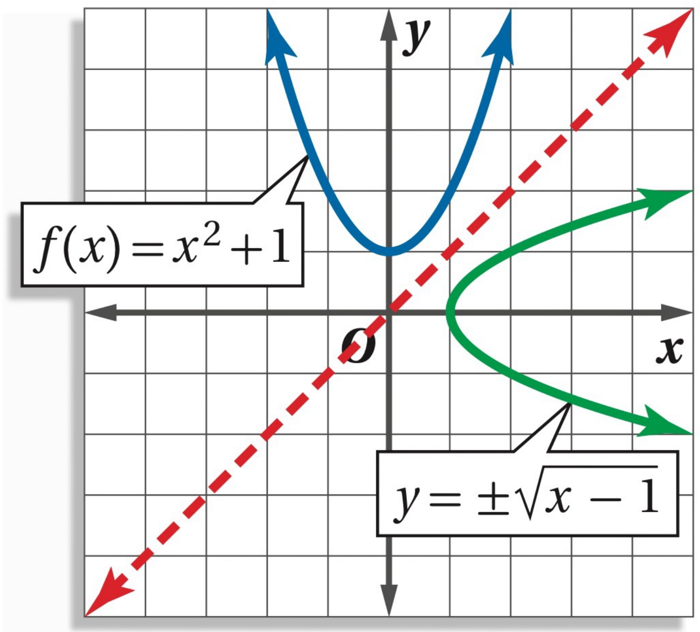


مثال

إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا

أوجد معكوس كلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد.

$f(x) = x^2 + 1$ (b



تحقق من فهمك

$f(x) = \dfrac{x-3}{5}$ **(2A**

$f(x) = 3x^2$ **(2B**

التأكد من الدالة العكسية: يمكنك تحديد ما إذا كانت دالتان، كلّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كلٍّ من تركيبَيهما.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الدالة العكسية

التعبير اللفظي: تكون كلٌّ من الدالتين f, g دالة عكسيةً للأخرى، إذا وفقط إذا كان تركيب كلٌّ منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = (x)$.

الرموز: الدالتان $f(x), g(x)$ كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$.

مثال

التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

$f(x) = 3x + 9 \ , \ g(x) = \frac{1}{3}x - 3$ (a

مثال

التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

في كلِّ زوجِ ممَّا يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

b) $f(x) = 4x^2, g(x) = 2\sqrt{x}$

تحقق من فهمك

3A) $f(x) = 3x - 3 \,,\, g(x) = \frac{1}{3}x + 4$

3B) $f(x) = 2x^3 - 1 \,,\, g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

تأكد

أوجد العلاقة العكسية لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين:

1) $\{(-9, 10), (1, -3), (8, -5)\}$

2) $\{(-2, 9), (4, -1), (-7, 9), (7, 0)\}$

تأكد

أوجد معكوس كلَ من الدوال الآتية، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا على مستوى إحداثي واحد:

(3 $f(x) = -3x$

تأكد

في كلِّ زوجِ ممَّا يأتي، حدد هل كلّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

6) $f(x) = x - 7$

$g(x) = x + 7$

تدرب

37) إذا كان $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = -x + 1$، فأيٌّ مما يأتي يمثل $f[g(x)]$؟

A $x^2 - x + 2$

B $-x^2 - 2$

C $-x^3 + x^2 - 3x + 3$

D $x^2 - 2x + 4$

38) أيُّ الدوال الآتية هي دالة عكسية للدالة: $f(x) = \frac{3x-5}{2}$؟

A $g(x) = \frac{2x+5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x+5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

تحصيلي

إذا كانت $\left(3x^{-1}\right)(2x+1)=f(x)$ فإن $f^{-1}(x)$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{3}{x-6}$

Ⓑ $5x+3$

Ⓒ $3x+5$

Ⓓ $\frac{5}{x-3}$

تحصيلي

ما هي الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x$ ؟

Ⓐ $\frac{x}{2}$

Ⓑ $2x + 3$

Ⓒ $2x + 5$

Ⓓ $\frac{2}{x}$