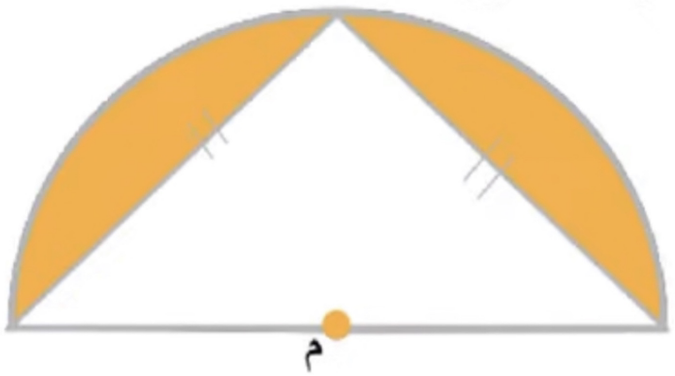
حل المعادلات المثلثية

قدرات

أوجد مساحة المنطقة المظللة إذا علمت أن قطر الدائرة= ٢٠.



أ- ١٠٠ ($\frac{ط}{٢}$ -١)　　ب- ١٠٠+ ٥٠ ط

ج- ١٥٠　　د- ٣٠٠ط

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية.

(الدروس من 2– 3 إلى 4–3)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية

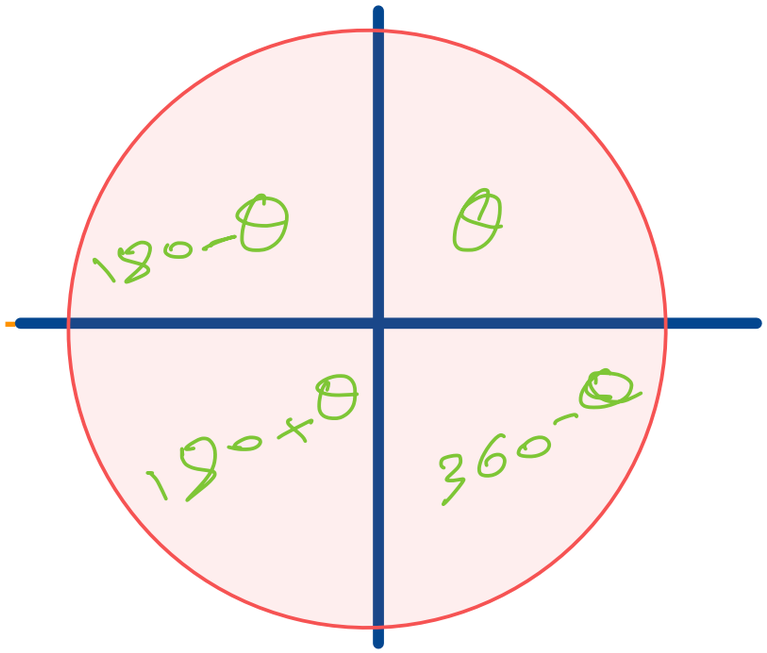
trigonometric equations

لماذا

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$$h = 21 - 20 \cos 3\pi t .$$

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟



حل المعادلات المثلثية: درست نوعًا خاصًّا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

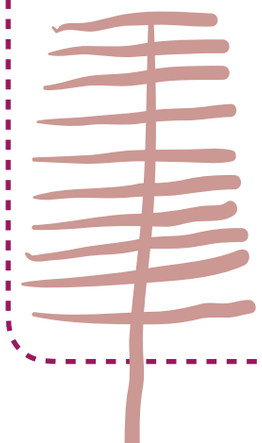
حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\cos\theta=0$ ، إذا كانت $0°\leq\theta\leq180°$.

تحقق من فهمك

1A) حُل المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$، إذا كانت $0 \le x \le 2\pi$.



تحقق من فهمك

1B) حُل المعادلة $4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\ \sin\theta\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

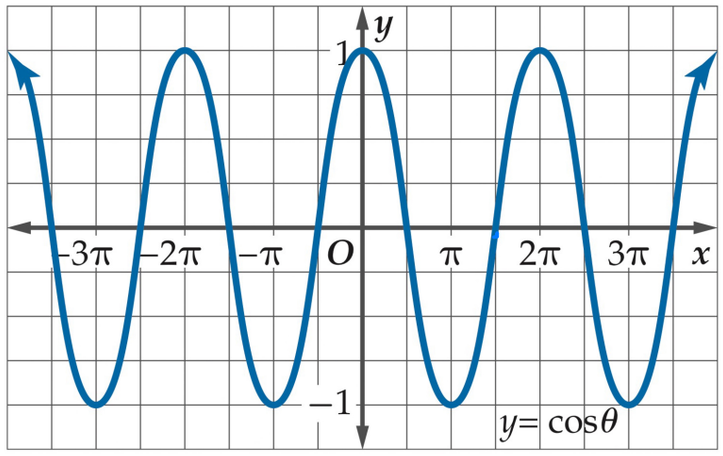
العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغيّر في الفترة $[0 , 2\pi]$ بالراديان، أو $[0° , 360°]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

مثال

معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

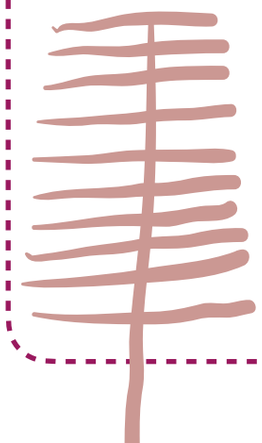
حُلّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.



تحقق من فهمك

2A) حُل المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حُل المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.



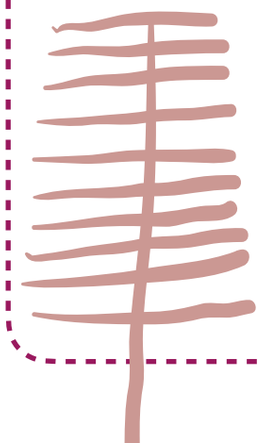
مثال

حل معادلات مثلثية

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟



الحلول الدخيلة : بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \leq \theta < 360°$

تحقق من فهمك

4) $\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta$

مثال

حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

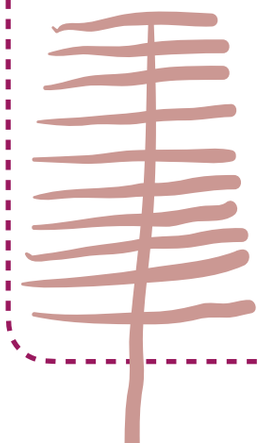
حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$



تدرب

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها :

1) $\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 = 0 \; ; 0° \leq \theta \leq 360°$

2) $2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 1 \; ; 0° \leq \theta \leq 360°$

تدرب

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات:

9) $\cos 2\theta - \sin^2 \theta + 2 = 0$

14) $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

تدرب

31) اكتشف الخطأ: حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2 \sin\theta \cos\theta = \sin\theta$ ، $0° \le \theta \le 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

هلا

$$2 \sin\theta \cos\theta = \sin\theta$$

$$\frac{2 \sin\theta \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$2 \cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60° , 300°$$

ليلى

$$2 \sin\theta \cos\theta = \sin\theta$$

$$-\sin\theta = -\sin\theta$$

$$2 \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = 90° , 270°$$

تدرب

47) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta \tan^2\theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ **B** $\frac{7\pi}{4}$ **C** 2π **D** $\frac{3\pi}{4}$

48) ماحَلّ المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0° < x < 360°$؟

A $150°$ أو $30°$

B $120°$ أو $60°$

C $330°$ أو $210°$

D $300°$ أو $240°$

تحصيلي

حل المعادلة $\sin\theta = \frac{1}{2}$ و $0° \leq \theta \leq 360°$ هو ..

Ⓐ $60°$

Ⓑ $45°$ أو $120°$

Ⓒ $60°$ أو $120°$

Ⓓ $30°$ أو $150°$

تحصيلي

حل المعادلة $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ و $0° \le \theta \le 360°$ هو ..

Ⓐ $30°$

Ⓑ $30°$ أو $210°$

Ⓒ $150°$ أو $210°$

Ⓓ ليس لها حل

تحصيلي

حل المعادلة $3\cos^2\theta - 4\cos\theta = 0$ و $0° < \theta \leq 180°$ هو ..

Ⓐ $30°$

Ⓑ $90°$

Ⓒ $30°$ أو $330°$

Ⓓ ليس لها حل

تحصيلي

أي مما يلي ليس حلاً للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta \tan^2\theta = 0$ ؟

$\frac{5\pi}{2}$ (A)

$\frac{7\pi}{4}$ (B)

2π (C)

$\frac{3\pi}{4}$ (D)