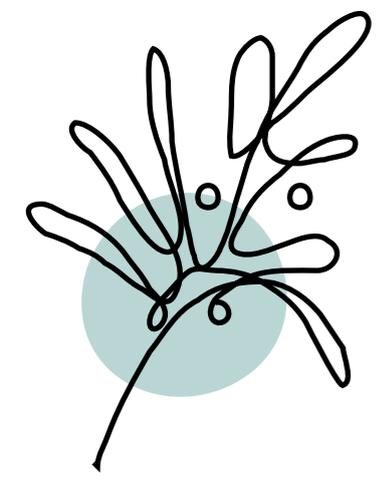


# المتطابقات المثلثية



## تهيئة

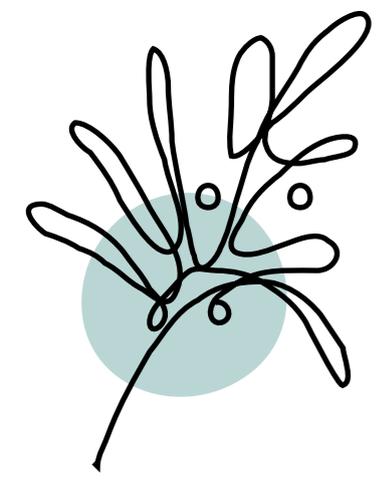
حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

$$5x^2 - 20 \quad (2)$$

$$-16a^2 + 4a \quad (1)$$

$$2y^2 - y - 15 \quad (4)$$

$$4x^2 - x + 6 \quad (3)$$



## تهيئة

حُلّ كلاً من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

$$x^2 + 2x - 35 = 0 \quad (7)$$

$$x^2 + 6x = 0 \quad (6)$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad (9)$$

$$x^2 - 9 = 0 \quad (8)$$

## بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  أن:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

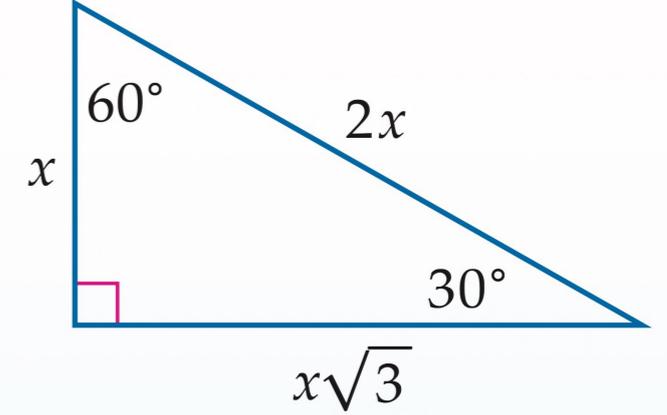
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

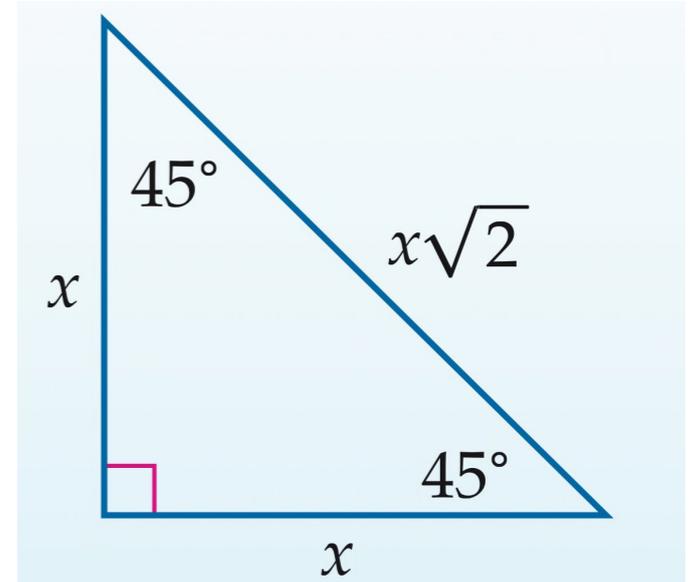


نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه  $45^\circ-45^\circ-90^\circ$  أن:

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

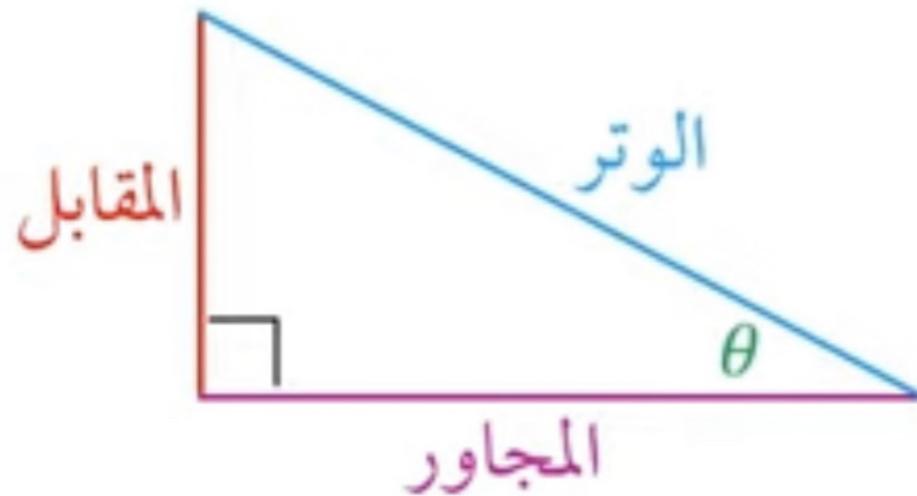
$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$



## تهيئة حساب المثلثات

### الدوال المثلثية في المثلث قائم الزاوية



$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

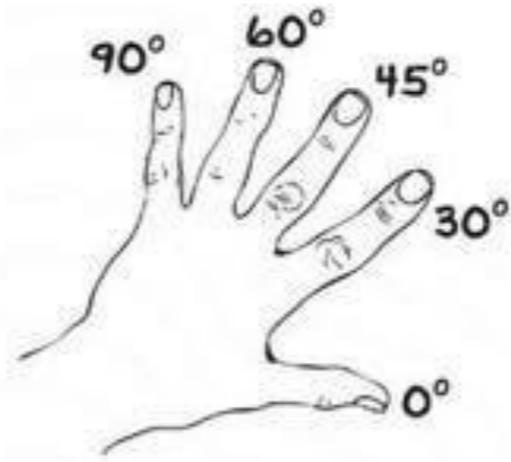
$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

## تهيئة حساب المثلثات



يمكن إيجاد قيم الدوال

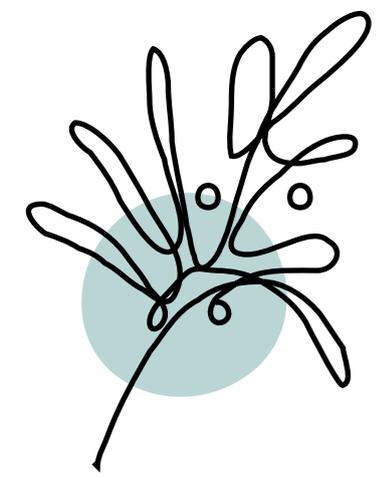
المثلثية عن طريق أصابع

اليد اليسرى كالتالي :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع تحت الزاوية}}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع فوق الزاوية}}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع تحت الزاوية}}}{\sqrt{\text{عدد الأصابع فوق الزاوية}}}$$



## تهيئة

$$\cos 225^\circ \text{ (12)}$$

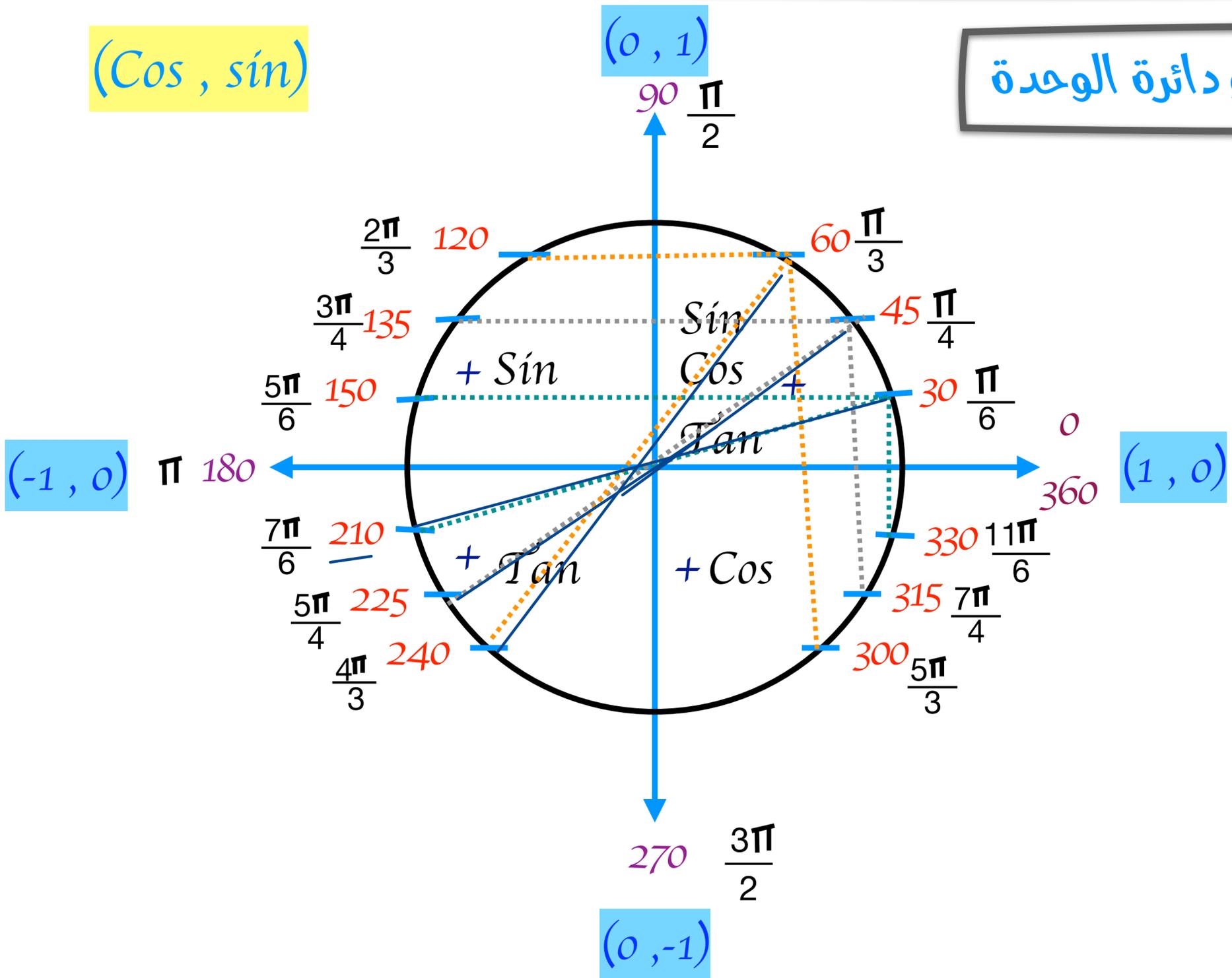
$$\sin 45^\circ \text{ (11)}$$

$$\sin 120^\circ \text{ (14)}$$

$$\tan 150^\circ \text{ (13)}$$

$(\cos, \sin)$

جدول قيم الدوال المثلثية و دائرة الوحدة



	330 $\frac{11\pi}{6}$	315 $\frac{7\pi}{4}$	300 $\frac{5\pi}{3}$
	210 $\frac{7\pi}{6}$	225 $\frac{5\pi}{4}$	240 $\frac{4\pi}{3}$
	150 $\frac{5\pi}{6}$	135 $\frac{3\pi}{4}$	120 $\frac{2\pi}{3}$
	30 $\frac{\pi}{6}$	45 $\frac{\pi}{4}$	60 $\frac{\pi}{3}$
<b>Sin</b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<b>Cos</b>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<b>Tan</b>	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

أ هبة الرشيد

## قدرات

◀ إذا كان ارتفاع المثلث = 6 ، وطول وتره = 10 ، فأوجد إحداثي النقطة ب؟

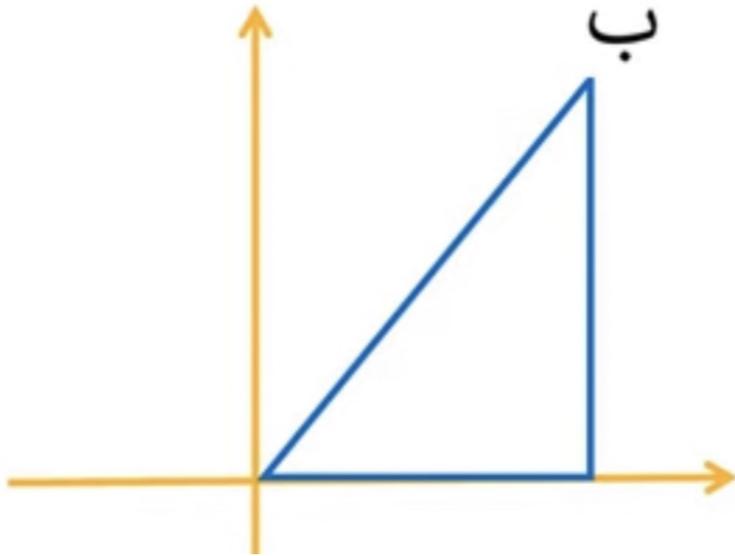
ب- (7، 6)

أ- (6، 8)

د- (6، 7)

ج- (5، 5)

الحل





## المفردات:

المتطابقة

identity

المتطابقة المثلثية

trigonometric identity

المتطابقات النسبية

quotient identities

متطابقات المقلوب

reciprocal identities

متطابقات فيثاغورس

pythagorean identities

متطابقات الزاويتين

المتتامتين

cofunction identities

متطابقات الدوال الزوجية

والدوال الفردية

odd-even identities

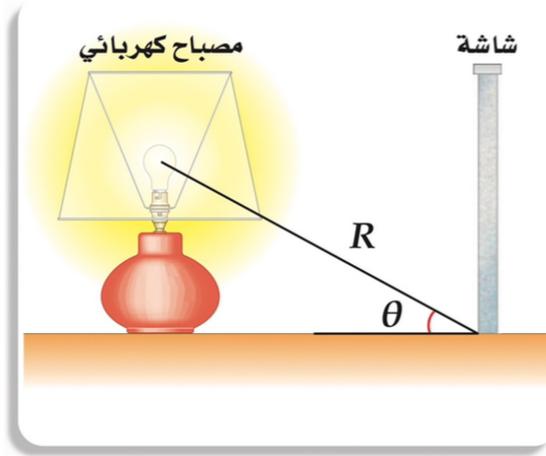
## فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال  
المثلثية. (مهارة سابقة)

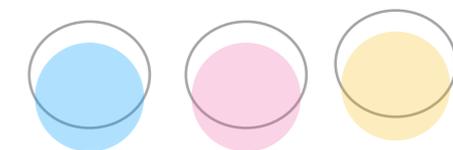
## والآن:

- أستعمل المتطابقات  
المثلثية لإيجاد قيم الدوال  
المثلثية.
- أستعمل المتطابقات  
المثلثية لتبسيط العبارات.

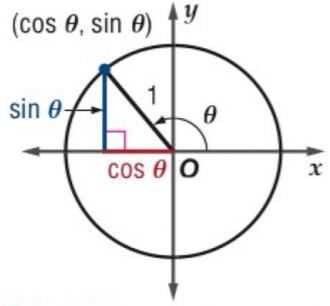
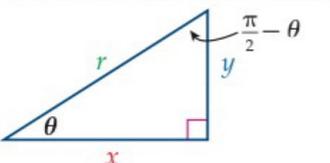
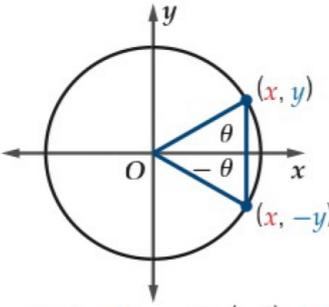
# لماذا



تُسمى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة ( $E$ ). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة  $R$  مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة  $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$ ، حيث  $I$  شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و  $\theta$  هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.



**المتطابقات المثلثية الأساسية:** تكون المعادلة متطابقة إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلاً:  
 $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$  متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم  $x$ ، والمتطابقة المثلثية هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثلاً مضاداً يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذ لا تكون متطابقة.

المتطابقات المثلثية الأساسية		مفهوم أساسي
$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$	المتطابقات النسبية:
$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$	$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$	متطابقات المقلوب:
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$	
$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$	$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$	
	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	متطابقات فيثاغورس: 
	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$	متطابقات الزاويتين المتتامتين:
	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ ← فردية $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ← زوجية $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ ← فردية	متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:
$\sin \theta = y$ $\cos \theta = x$	$\sin(-\theta) = -y$ $\cos(-\theta) = x$	

### إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين:  
يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:

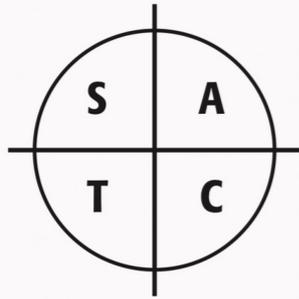
$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

## إرشادات للدراسة

الأرباع:

يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4.

-	+	الدالة
3, 4	1, 2	$\sin \theta$
		$\csc \theta$
2, 3	1, 4	$\cos \theta$
		$\sec \theta$
2, 4	1, 3	$\tan \theta$
		$\cot \theta$



**A** all functions

**S** sine

**T** tangent

**C** cosine

## استعمال المتطابقات المثلثية

# مثال



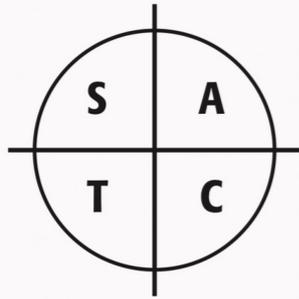
(a) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\cos \theta$ ، إذا كان  $\sin \theta = \frac{1}{4}$ ،  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ .

## إرشادات للدراسة

الأرباع:

يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4.

-	+	الدالة
3, 4	1, 2	$\sin \theta$
		$\csc \theta$
2, 3	1, 4	$\cos \theta$
		$\sec \theta$
2, 4	1, 3	$\tan \theta$
		$\cot \theta$



**A** all functions

**S** sine

**T** tangent

**C** cosine

## استعمال المتطابقات المثلثية

مثال

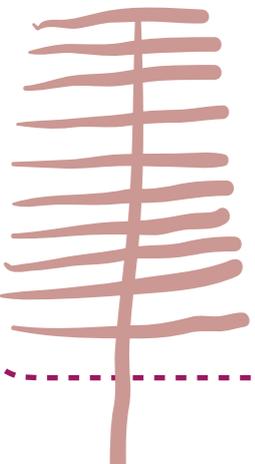


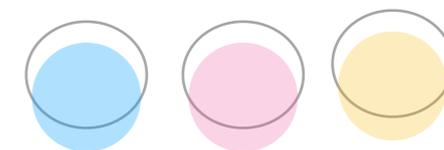
(b) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\csc \theta$  إذا كان  $\cot \theta = -\frac{3}{5}$ ;  $270^\circ < \theta < 360^\circ$

## تحقق من فهمك

**1A** أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\sin \theta$  إذا كان  $\cos \theta = \frac{1}{3}$  ،  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  .

**1B** أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\sec \theta$  إذا كان  $\sin \theta = -\frac{2}{7}$  ،  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  .





**تبسيط العبارات المثلثية :** تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

## تبسيط العبارة المثلثية

مثال

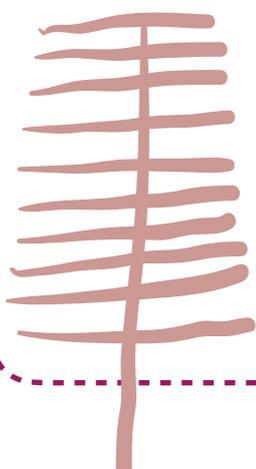


بسط العبارة :  $\frac{\sin \theta \csc \theta}{\cot \theta}$

## تحقق من فهمك

$$\frac{\sec \theta}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) \quad (2B)$$

$$\frac{\tan^2 \theta \csc^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta} \quad (2A)$$



## إعادة كتابة الصيغ الرياضية

مثال



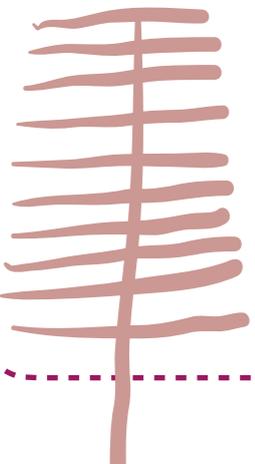
الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

(a) حل المعادلة  $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$  بالنسبة لـ  $E$ .

(b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة  $R^2 = \frac{I \tan \theta \cos \theta}{E}$ ؟ فسّر إجابتك.

## تحقق من فهمك

(3) تعلم أن مقدار العزم ( $\tau$ ) يساوي حاصل ضرب القوة ( $F$ ) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة  $\tau = Fr \sin \theta$ . أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة ( $F$ ).



# تدریب



(1)  $\tan \theta$  ، إذا كان  $\cot \theta = 2$  ،  $0^\circ < \theta < 90^\circ$

# تدریب



$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta \quad (10)$$

$$\tan \theta \cos^2 \theta \quad (9)$$

# تدرب



(32) **اكتشف الخطأ:** بسّط كل من علاء وسامي المقدار  $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$  كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

سامي

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{1} \\ &= \sin^2 \theta \end{aligned}$$

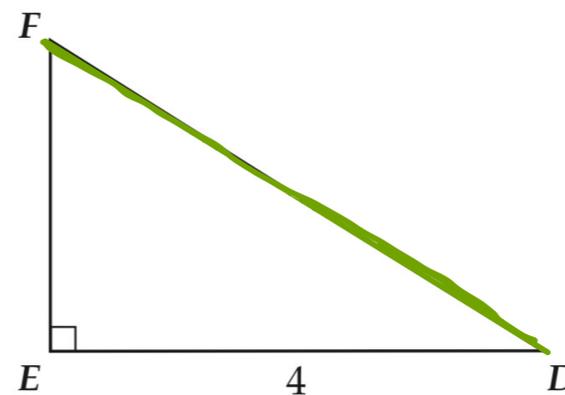
علاء

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \tan^2 \theta + 1 \\ &= \sec^2 \theta \end{aligned}$$

# تدرب



(39) في الشكل أدناه، إذا كان  $\cos D = 0.8$ ، فما طول  $\overline{DF}$ ؟ (40) إذا كان  $\sin x = m$  و  $0^\circ < x < 90^\circ$ ، فما قيمة  $\tan x$ ؟



$\frac{1}{m^2}$  **A**

$\frac{m \sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$  **B**

$\frac{1-m^2}{m}$  **C**

$\frac{m}{1-m^2}$  **D**

3.2 **C**

10 **D**

5 **A**

4 **B**



## المتطابقات المثلثية للزاويتين المتتامتين



$$\sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

$$\tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta$$

## متطابقات فيثاغورس



$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

## تحصيلي

المتطابقة  $\tan \theta \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)$  تكافئ ..

$\sin \theta$  (A)

$\tan \theta$  (B)

$\cos \theta$  (C)

$\cot \theta$  (D)

## تحصيلي

أي مما يلي مثال مضاد للعلاقة  $\sin \theta + \cos \theta = 1$  ؟

0° (A)

90° (B)

180° (C)

360° (D)

# تحصيلي

قيمة المحددة  $|\sin x \cos x - \cos x \sin x|$  تساوي ..

0 (A)

1 (B)

$\cos 2x$  (C)

$2 \sin^2 x$  (D)

## تحصيلي

إذا كانت  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  و  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$  فأوجد  $\sin \theta$ .

$\frac{1}{2}$  (A)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)

$-\frac{1}{2}$  (D)