الفصل الثالث

رياضيات ١-٢

العام الدراسي ١٤٤٣هـ

إعداد: أ/عبدالعزيز الشريف

3-2

زوايا المثلثات

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

التاريخ:

اليوم:

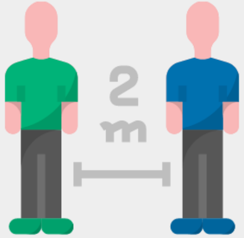
المادة:

نعود بحذر

الالتزام بارتداء الكمامة

غسل اليدين

عدم المصافحة



التباعد الاجتماعي

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

رابط الدرس الرقمي

زوايا المثلثات

فيما سبق

درست تصنيف المثلثات وفقًا لقياسات أضلاعها وزواياها.

والآن

- أطبق نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.

المفردات

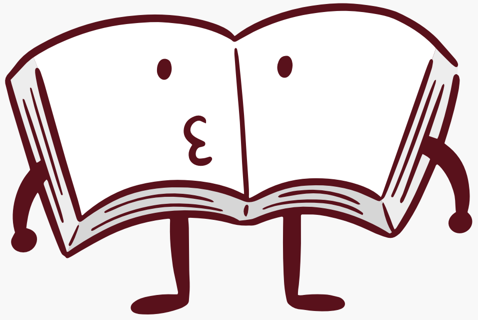
المستقيم المساعد
auxiliary line

الزاوية الخارجية
exterior angle

الزاويتان الداخليتان البعيدتان
remote interior angles

البرهان التسلسليّ
flow proof

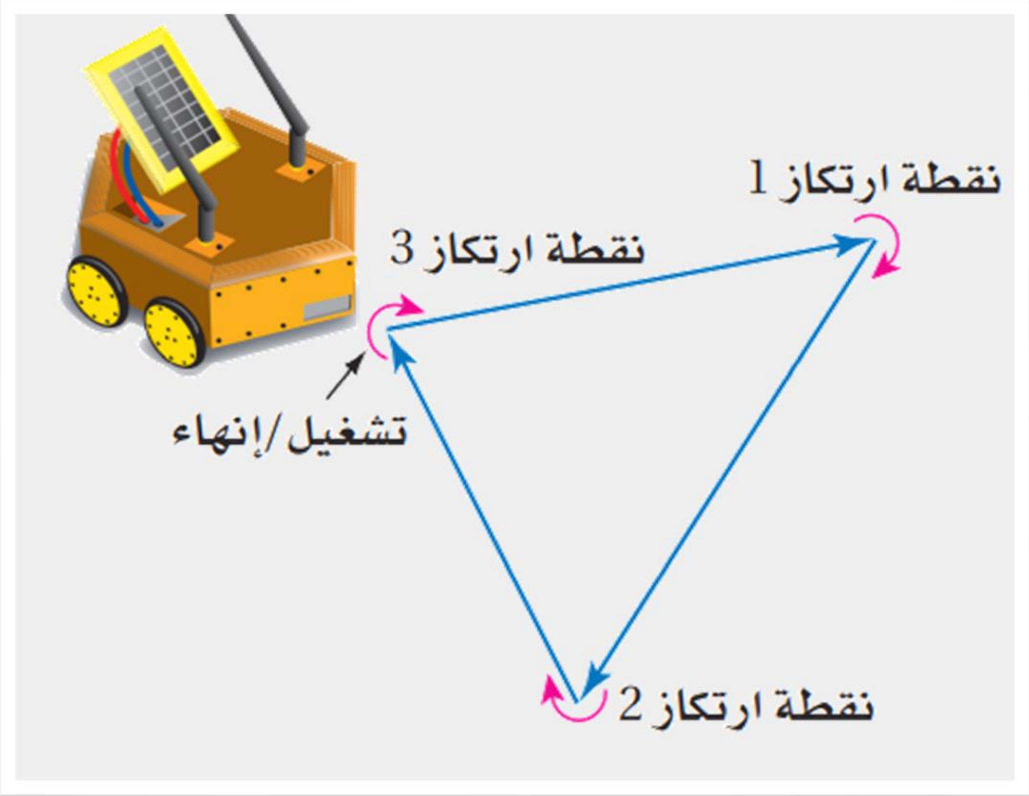
النتيجة
corollary



زوايا المثلثات

يرعى أحد معاهد التقنية مسابقة سنوية، حيث يصمِّم الطلاب روبوتًا آليًا يؤدّي مهامّ مختلفة. وقد تمَّت برمجة هذا الروبوت الآلي في أحد الاختبارات ليتحرك في مسار على شكل مثلث. على أن يكون مجموع قياسات الزوايا التي ينعطف فيها الروبوت الآلي عند نقاط الارتكاز الثلاث ثابتًا دائمًا.

لماذا؟



DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

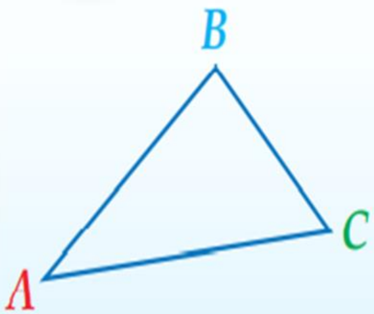
نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

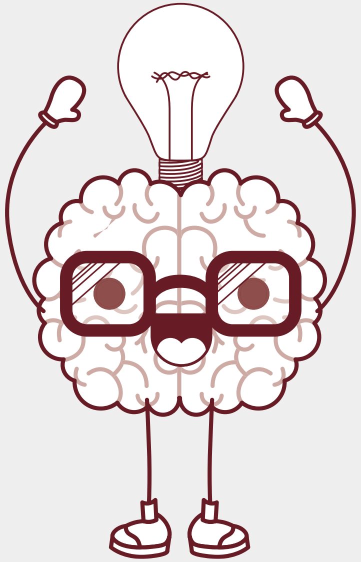
نظرية
3.1

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث: تُعبِّر نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث عن العلاقة بين الزوايا الداخلية لأيّ مثلث.

التعبير اللفظي: مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$

مثال: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$





نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

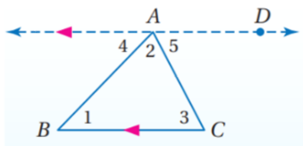
برهان

يتطلب برهان نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث استعمال مستقيم مساعِد، و**المستقيم المساعد** هو مستقيم إضافي (أو قطعة مستقيمة إضافية) يتم رسمه للمساعدة على تحليل العلاقات الهندسية، وكما تُبرر العبارات والاستنتاجات المُستعملة في البرهان، فإن خصائص المستقيم المساعِد يجب تبريرها.

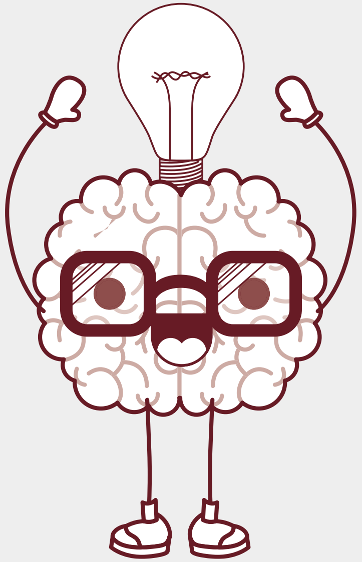
المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

البرهان: من النقطة A ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$ موازيًا لـ $\overline{BC}$.

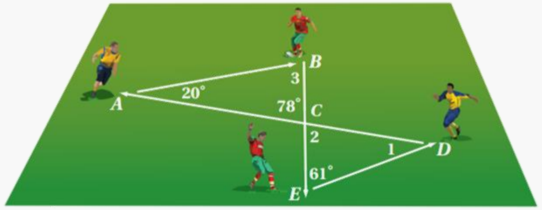


العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$	1) مُعطى
2) $\angle 4, \angle BAD$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.	2) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle 4, \angle BAD$ متكاملتان.	3) الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
4) $m\angle 4 + m\angle BAD = 180°$	4) تعريف الزاويتين المتكاملتين
5) $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	5) مسلّمة جمع قياسات الزوايا
6) $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180°$	6) بالتعويض
7) $\angle 4 \cong \angle 1, \angle 5 \cong \angle 3$	7) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
8) $m\angle 4 = m\angle 1, m\angle 5 = m\angle 3$	8) تعريف تطابُق الزوايا
9) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	9) بالتعويض



استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث

مثال ١



كرة قدم: يبيِّن الشكل مسار الكرة في تدريب على تمريراتٍ نفَّذها أربعة لاعبين. أوجد قياسات الزوايا المرقمة.

افهم: **المعطيات:** في الشكل أعلاه، قياس الزاويتين A, C في المثلث ABC $20°, 78°$، قياس الزاوية E في المثلث CED يساوي $61°$

المطلوب: إيجاد قياسات الزوايا المرقمة.

خطط: أوجد $m\angle 3$ باستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث مستعملًا قياسَيْ الزاويتين الأُخريين في $\triangle ABC$. ثم استعمل نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس لإيجاد $m\angle 2$، وعندها يمكنك إيجاد $m\angle 1$ في $\triangle CDE$

حُلّ:

$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 3 + 20° + 78° = 180°$ عوِّض

$m\angle 3 + 98° = 180°$ بسِّط

$m\angle 3 = 82°$ اطرح 98 من الطرفين

$\angle 2, \angle ACB$ متطابقتان؛ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس؛ لذا فإن $m\angle 2 = 78°$.

استعمل $m\angle 2$ و $m\angle CED$ في $\triangle CDE$ لإيجاد $m\angle 1$.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 78° + 61° = 180°$ عوِّض

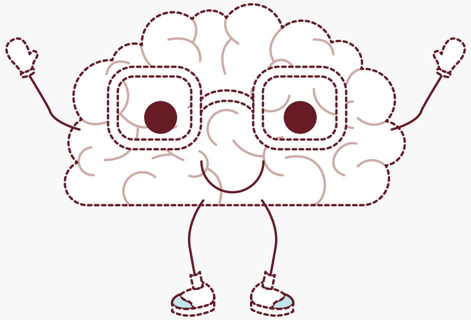
$m\angle 1 + 139° = 180°$ بسِّط

$m\angle 1 = 41°$ اطرح 139 من الطرفين

تحقَّق: يجب أن يكون مجموع قياسات زوايا كلٍّ من $\triangle ABC, \triangle CDE$ مساويًا لِـ $180°$

✓ $\triangle ABC: \ m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82° + 20° + 78° = 180°$

✓ $\triangle CDE: \ m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41° + 78° + 61° = 180°$



الربط مع الحياة

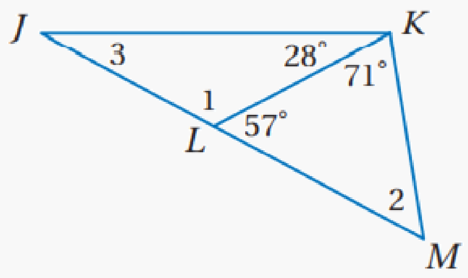
يدمج تمرين "مرِّر وتحرّك" في لعبة كرة القدم بين عدة مظاهر أساسية لعملية التمرير، حيث تكون جميع التمريرات في التدريب على شكل مثلثات، وهذا هو الأساس في جميع حركات الكرة، وبالإضافة إلى ذلك، على اللاعب أن يتحرك فورًا بعد تمريره الكرة.

استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث

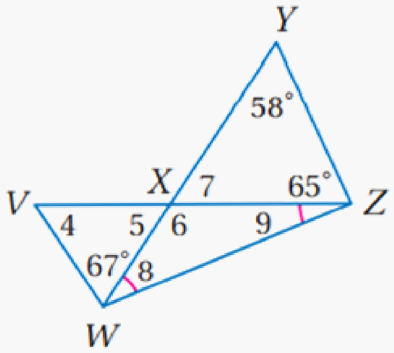
تحقق من فهمك

أوجد قياسات الزوايا المرقَّمة فيما يأتي:

(1A



(1B



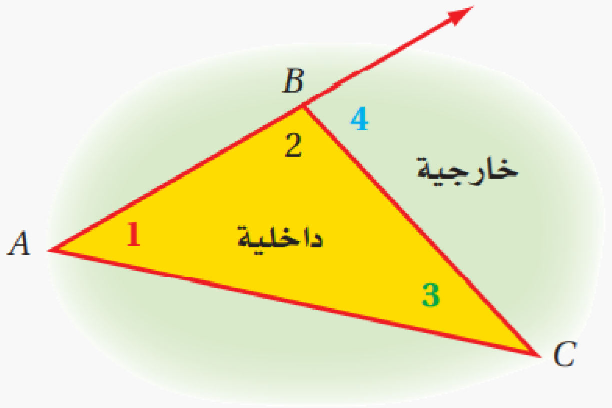
إرشادات للدراسة

تجزئة المسألة

تُجزأ المسائل المركبة إلى مسائل يمكن التعامل مع كلٍّ منها بسهولة؛ مما يساعد على حلّها. فمثلًا في المثال 1: عليك أن تجد $m\angle 2$ أولًا قبل أن تحاول إيجاد $m\angle 1$

زوايا المثلثات

نظرية الزاوية الخارجية للمثلث: بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث، يمكن أن يكون للمثلث **زوايا خارجية** كلٌّ منها تتشكل من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع مجاور له. ولكل زاوية خارجية **زاويتان داخليتان بعيدتان** غير مجاورتين لها.



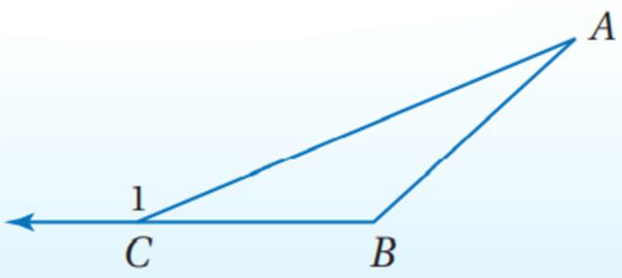
$\angle 4$ زاوية خارجية لِـ $\triangle ABC$،
وزاويتاها الداخليتان البعيدتان
هما $\angle 3$, $\angle 1$.

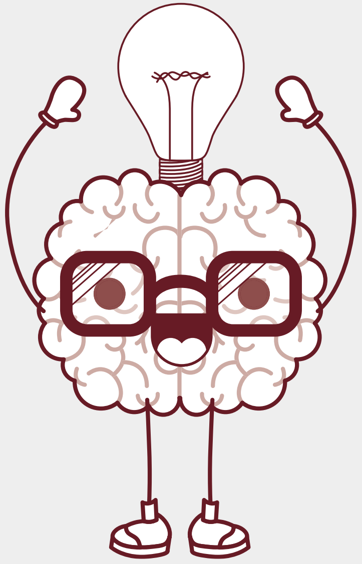
نظرية الزاوية الخارجية

نظرية
3.2

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسَيْ الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$





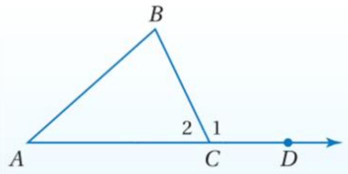
نظرية الزاوية الخارجية

برهان

في **البرهان التسلسلي** تُستعمل عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبيِّن التسلسل المنطقي لهذه العبارات. ويُكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرِّر العبارة المكتوبة داخله، ويمكنك برهنة نظرية الزاوية الخارجية باستعمال البرهان التسلسليٍّ كما يأتي.

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



برهان تسلسلي:

$\boxed{\triangle ABC}$
معطى
↓
$\boxed{m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180}$
نظرية مجموع زوايا المثلث

$\boxed{\angle 1, \angle 2 \text{ زاويتان متجاورتان على مستقيم}}$
تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
↓
$\boxed{\angle 1, \angle 2 \text{ متكاملتان}}$
الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
↓
$\boxed{m\angle 1 + m\angle 2 = 180}$
تعريف الزاويتين المتكاملتين

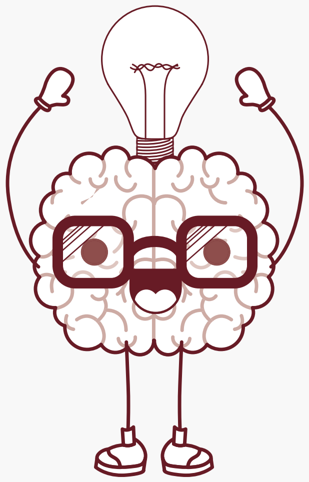
↓
$\boxed{m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 2}$
بالتعويض
↓
$\boxed{m\angle A + m\angle B = m\angle 1}$
بالطرح

قراءة الرياضيات

البرهان بالمخطط التسلسلي
يُسمَى البرهان التسلسلي أحيانًا البرهان بالمخطط التسلسلي.

إرشادات للدراسة

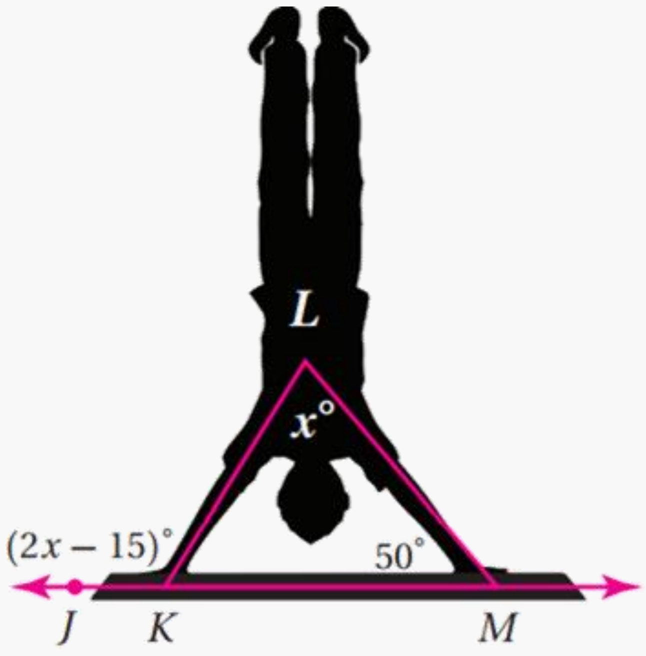
البرهان التسلسلي
يمكن أن يكتب البرهان التسلسليَ بصورة رأسيَة أو أفقيَة.



استعمل نظرية الزاوية الخارجية

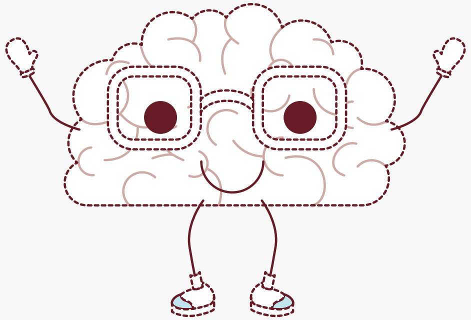
مثال ٢

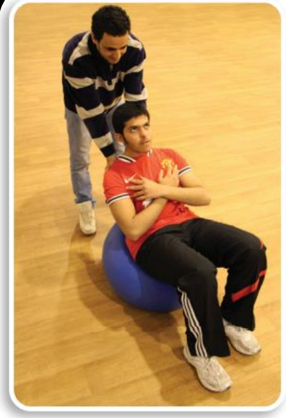
اللياقة البدنية : أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضع الذي يظهر فيه المتدرب في الصورة.



$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$	نظرية الزاوية الخارجية
$x + 50 = 2x - 15$	عوّض
$50 = x - 15$	اطرح x من الطرفين
$65 = x$	اجمع 15 إلى الطرفين

لذا فإن $m\angle JKL = (2(65) - 15)^\circ = 115^\circ$.





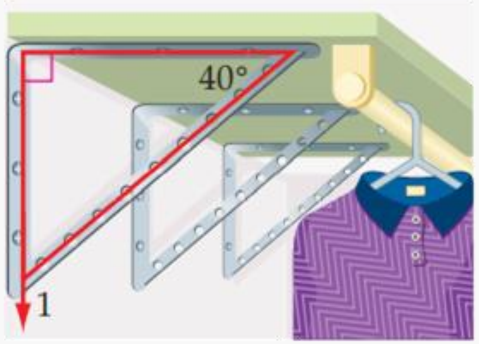
الربط مع الحياة

المدرب المتخصص

يعلّم مدرِّبو اللياقة البدنية المتدربين طرائق متنوعة ويحفزونهم على أدائها، ومن المهم أن يحمل هؤلاء المدربون شهادات تخصص في مجال عملهم.

استعمل نظرية الزاوية الخارجية

تحقق من فهمك



2) تنظيم خزانة الملابس: تثبّت لطيفة جسور الرفوف على جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$ التي يصنعها الجسر مع جدار الخزانة؟

مجموع زوايا المثلث

نظرية

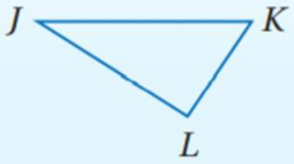
النتيجة هي نظرية يكون برهانها مبنيًّا على نظريةٍ أخرى، ويمكن استعمال النتيجة كأي نظرية أخرى لتبرير خطوات برهانٍ آخر، أو حلّ أسئلة ذات علاقة، وفيما يلي نتائج مباشرة لنظرية مجموع زوايا المثلث:

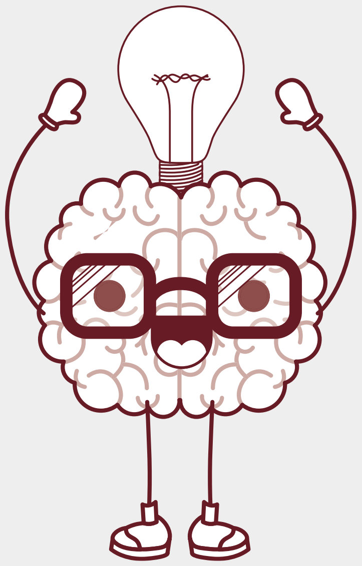
3.1 الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان.

مثال: إذا كانت $\angle C$ قائمة، فإن $\angle A, \angle B$ زاويتان متتامتان.

3.2 توجد زاوية قائمة واحدة، أو زاوية منفرجة واحدة على الأكثر في أي مثلث.

مثال: إذا كانت $\angle L$ قائمة، فإن $\angle J, \angle K$ زاويتان حادتان.

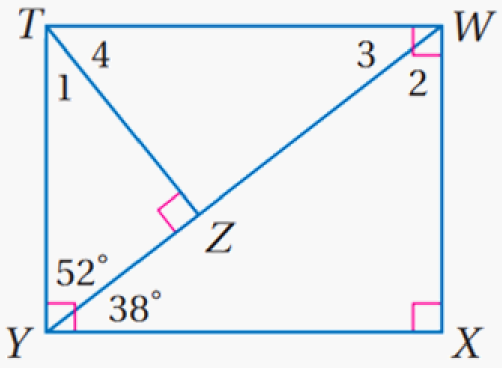




إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

مثال ٣

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور.

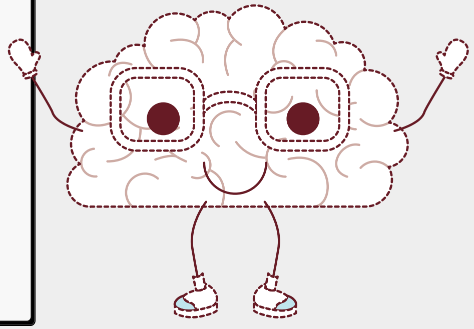


$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90°$	زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية
$m\angle 1 + 52° = 90°$	عوّض
$m\angle 1 = 38°$	اطرح 52 من الطرفين

إرشادات للدراسة

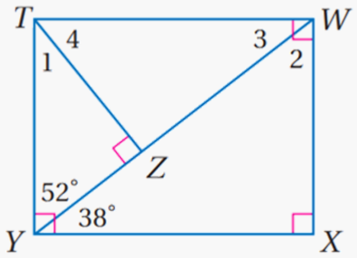
التحقق من المعقولية

عندما تجد قياسات زوايا مثلث، تأكد دائمًا أن مجموع هذه القياسات يساوي °180.



إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

تحقق من فهمك



3A) $\angle 2$

3B) $\angle 3$

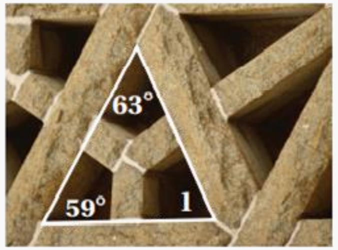
3C) $\angle 4$

زوايا المثلثات

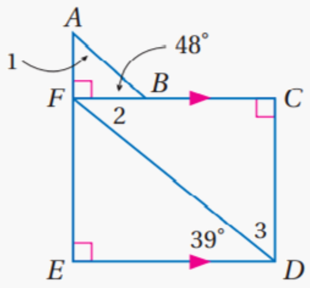
تأكد

أوجد قياس كلٍ من الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(1



(2



زوايا المثلثات

تأكد

كراسي الشاطئ: تشكل دعامة المقعد مع بقية الهيكل مثلثًا كما هو موضح في الشكل المجاور. أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

3) $m\angle 2$

4) $m\angle 4$

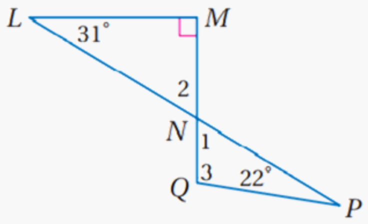
زوايا المثلثات

تدرب وحل

أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(10

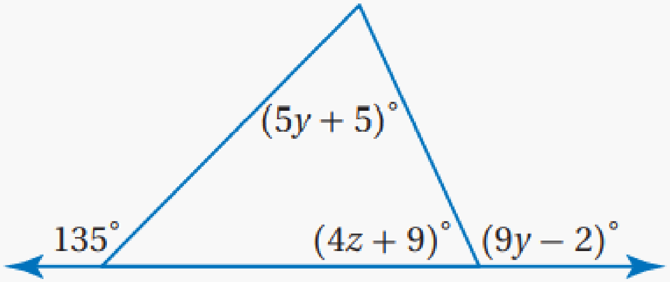
(11

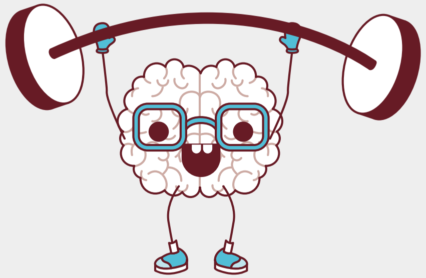


زوايا المثلثات

مهارات التفكير العليا

35) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من z, y في الشكل المجاور.





تم بحمد الله

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا

You Tube