مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

الفصل الثالث

رياضيات ١-٢

العام الدراسي ١٤٤٣هـ

إعداد: أ/عبدالعزيز الشريف

4-1

المنصفات في المثلث

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF
A_Shark_s

التاريخ:

اليوم:

المادة:

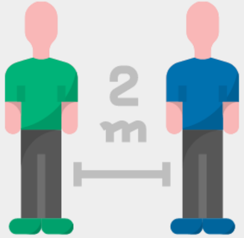
نعود بحذر

الالتزام بارتداء الكمامة

عدم المصافحة

غسل اليدين

التباعد الاجتماعي



رابط الدرس الرقمي

المنصفات في المثلث

فيما سبق

درستَ منصّف القطعة المستقيمة ومنصّف الزاوية.

والآن

- أتعرّف الأعمدة المنصّفة في المثلثات وأستعملها.
- أتعرّف منصّفات الزوايا في المثلثات وأستعملها.

المفردات

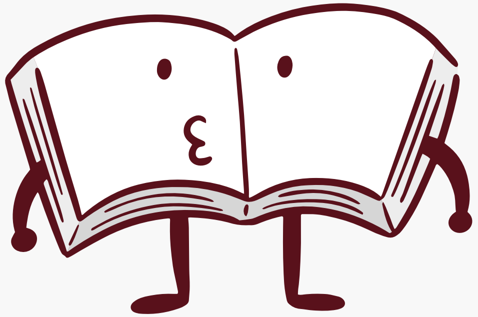
العمود المنصّف
perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية
concurrent lines

نقطة التلاقي
point of concurrency

مركز الدائرة الخارجية للمثلث
circumcenter

مركز الدائرة الداخلية للمثلث
incenter



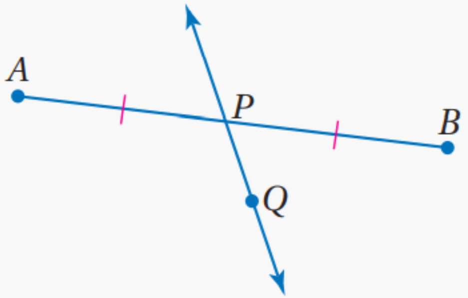
المنصفات في المثلث

لماذا؟

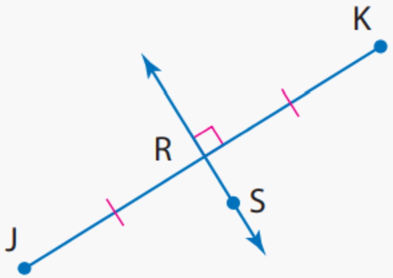
إن تصميم منطقة العمل على شكل مثلث كما في الصورة المجاورة يجعل إعداد الطعام أسرع؛ وذلك بتقليل عدد الخطوات التي تخطوها سيدة البيت. ولتعيين النقطة المتساوية البعد عن كلٍّ من الفرن ومصدر الماء والثلاجة، يمكنك استعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

المنصفات في المثلث

الأعمدة المنصّفة: تعلمت سابقًا أن منصّف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند نقطة منتصفها، وإذا كان المنصّف عموديًّا على القطعة سُمِّي **عمودًا منصّفًا** .



$\overleftrightarrow{PQ}$ منصّف لـ $\overline{AB}$



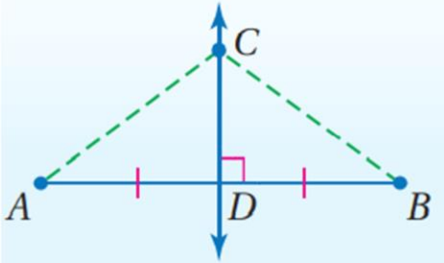
$\overleftrightarrow{RS}$ عمود منصّف لـ $\overline{JK}$

تذكّر أنّ المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا، فالعمود المنصّف لقطعة مستقيمة هو المحل الهندسي لمجموعة نقاطٍ في المستوى، تقع كلٌّ منها على بُعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة، وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

الأعمدة المنصفة

نظريات

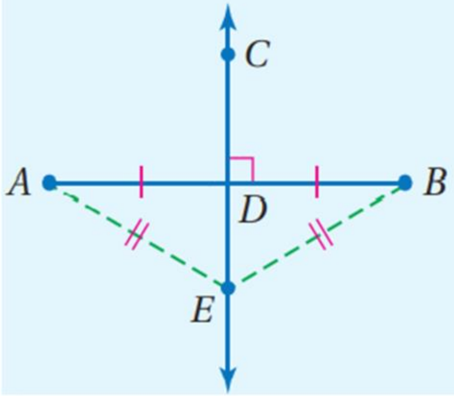
4.1 نظريّة العمود المنصّف



كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة.

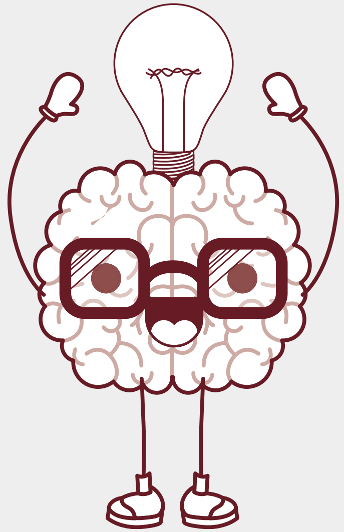
مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ عمودًا منصّفًا لـ $\overline{AB}$، فإن $AC = BC$.

4.2 عكس نظريّة العمود المنصّف



كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.

مثال: إذا كان $AE = BE$ ، و $\overleftrightarrow{CD}$ هو العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$، فإن E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$.

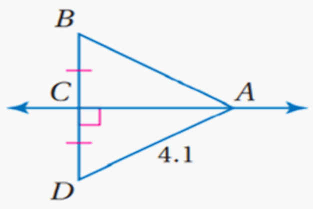


استعمال نظريات العمود المنصّف

مثال ١

أوجد كلّ قياس مما يأتي :

a) AB

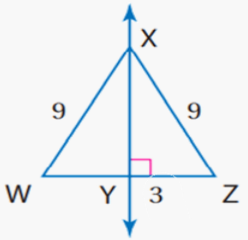


من المعطيات في الشكل المجاور ، نعلم أن $\overleftrightarrow{CA}$ عمودٌ منصّف لِـ $\overline{BD}$

$AB = AD$ نظريّة العمود المنصَف

$AB = 4.1$ عوّض

b) WY



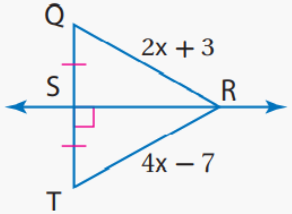
$WX = ZX, \overleftrightarrow{XY} \perp \overline{WZ}$ معطيات

$\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصّف لِـ $\overline{WZ}$ عكس نظرية العمود المنصَف

$WY = YZ$ تعريف منصَف قطعة مستقيمة

$WY = 3$ عوّض

c) RT



$\overleftrightarrow{SR}$ عمود منصّف $\overline{QT}$.

$RT = RQ$ نظريّة العمود المنصَف

$4x - 7 = 2x + 3$ عوّض

$2x - 7 = 3$ اطرح $2x$ من الطرفين

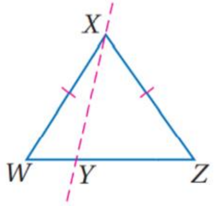
$2x = 10$ اجمع 7 إلى الطرفين

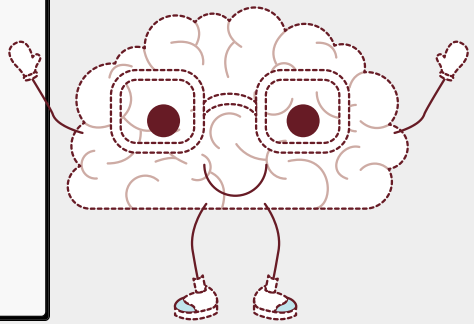
$x = 5$ اقسم الطرفين على 2

إذن $RT = 4(5) - 7 = 13$.

إرشادات للدراسة

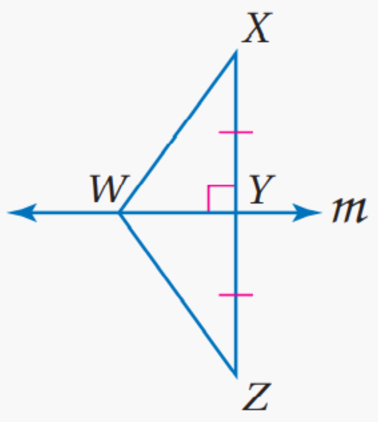
المعلومة $WX = ZX$ لوحدها لا تعدُ كافية لاستنتاج أن $\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصف لـ $\overline{WZ}$.





استعمال نظريات العمود المنصّف

تحقق من فهمك



(1A إذا كان $WZ = 25.3$, $YZ = 22.4$, $WX = 25.3$ ، فأوجد طول $\overline{XY}$.

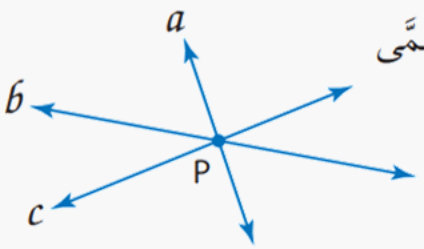
(1B إذا كان m عمودًا منصّفًا لـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = 14.9$ ، فأوجد طول $\overline{WX}$.

(1C إذا كان m عمودًا منصّفًا لـ $\overline{XZ}$ ، $WX = 4a - 15$, $WZ = a + 12$
فأوجد طول $\overline{WX}$.

نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث.

نظرية
4.3

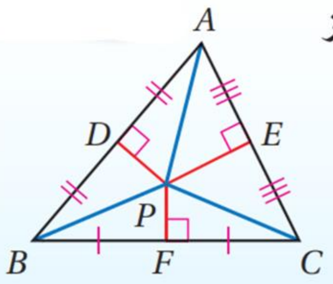
عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة، فإنّ هذه المستقيمات تُسمَّى **مستقيمات متلاقية**. والنقطة التي تلتقي فيها المستقيمات تسمّى **نقطة التلاقي**. وبما أنّ لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإنّ له ثلاثة أعمدة منصّفة. وهذه الأعمدة المنصّفة هي مستقيمات متلاقية. وتسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة **مركز الدائرة الخارجية للمثلث**.



تتلاقى المستقيمات a, b, c في النقطة P.

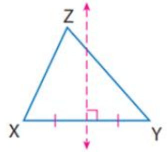
التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث في نقطة تُسمّى مركز الدائرة الخارجية للمثلث، وهي دائرة تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعاد متساوية من الرؤوس.

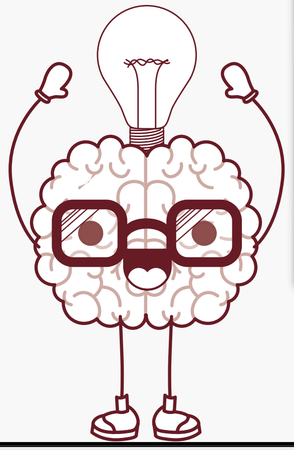
مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الخارجية للمثلث $\triangle ABC$، فإنّ $PB = PA = PC$



إرشادات للدراسة

العمود المنصّف
ليس من الضروري أن يمرّ العمود المنصّف لضلع مثلث برأس المثلث المقابل. فمثلًا في $\triangle XYZ$ أدناه العمود المنصّف لـ $\overline{XY}$ لا يمرُّ بالرأس Z.





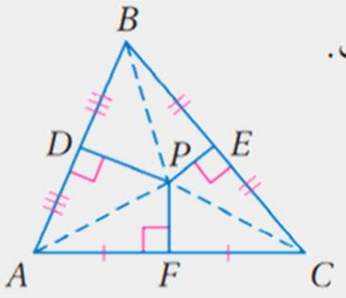
نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث

برهان

المعطيات: $\overline{PD}, \overline{PF}, \overline{PE}$ أعمدة منصّفة للأضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب.

المطلوب: $AP = CP = BP$

برهان حرّ:

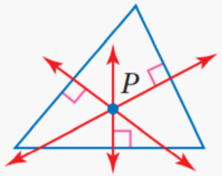


بما أنّ P تقع على العمود المنصّف لـِ $\overline{AC}$، فإنها متساوية البُعد عن A, C.
أي أن $AP = CP$. والعمود المنصّف لـِ $\overline{BC}$ يمر أيضًا بالنقطة P. لذلك يكون $CP = BP$ ، وتبعًا لخاصيّة التعدّي لعلاقة المساواة يكون $AP = BP$ ؛ إذن $AP = CP = BP$.

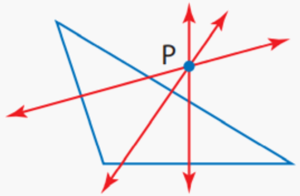
إرشادات للدراسة

مركز الدائرة الخارجية للمثلث: هو مركز الدائرة التي تمر برؤوس هذا المثلث.

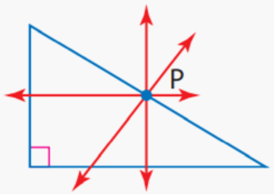
يمكن أن يقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



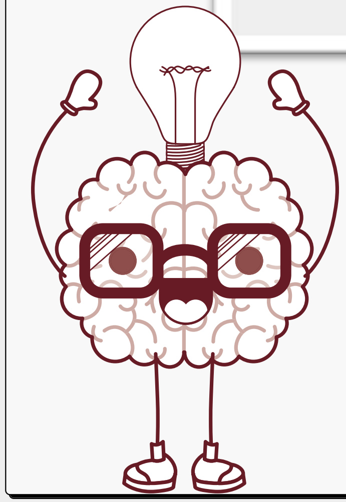
مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزاوية



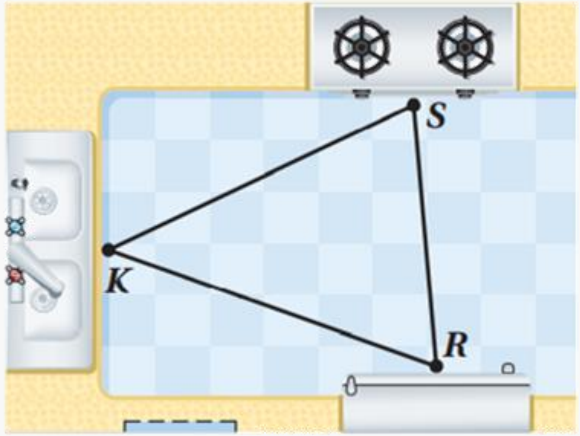
مثلث قائم الزاوية



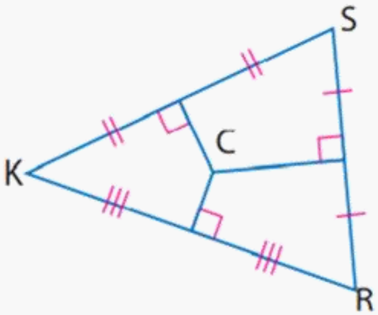
استعمال نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث

مثال ٢

تصميم داخلي: تطبيقًا للفكرة التي وردت في فقرة (لماذا؟)، إذا وُضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S, K, R.



بحسب نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث، يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث باستعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط.



انسخ $\triangle SKR$ واستعمل المسطرة والمنقلة لرسم الأعمدة المنصفة لأضلاعه، فتكون النقطة C مركز الدائرة الخارجية للمثلث SKR. وهي النقطة المطلوبة.

الربط مع الحياة

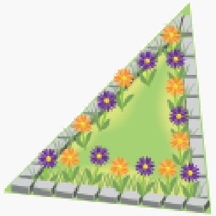
يتركز معظم النشاط داخل المطبخ حول ثلاث مناطق عمل أساسية هي: مصدر الماء، الثلاجة، فرن الطبخ، ويجب ألا يزيد مجموع أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث منطقة العمل على سبعة أمتار.

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

تحقق من فهمك

استعمال نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث



2) يريد عليّ أن يضع مرشَّة الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقته المثلثة الشكل .
فأين يتعين عليه وضع المرشّة؟

منصّفات الزوايا

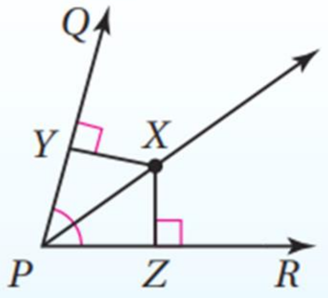
نظرية

4.4 نظرية منصّف الزاوية

كل نقطة تقع على منصّف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصّفًا لِـ $\angle DBE$، وكان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}$, $\overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$

فإن $DF = FE$.

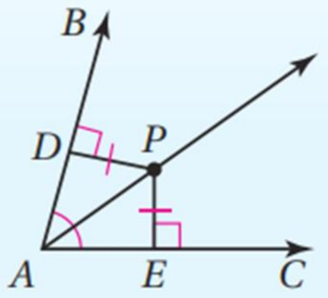


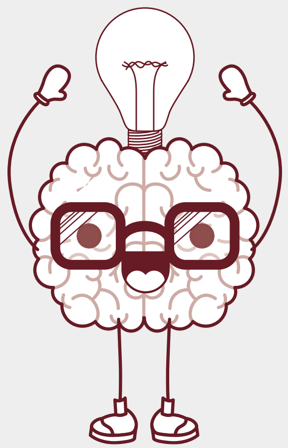
4.5 عكس نظريّة منصّف الزاوية

كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصّف الزاوية.

مثال: إذا كان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}, DF = FE$،

فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصّف $\angle DBE$

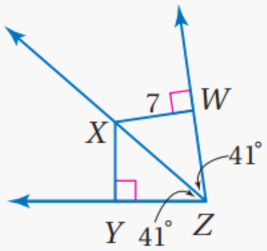




استعمال نظريتَي منصّفات الزاويا

مثال ٣

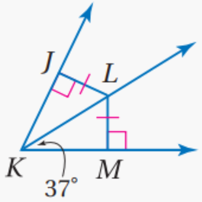
أوجد كلّ قياس مما يأتي :



a) XY

$XY = XW$ نظريّة منصّف الزاوية

$XY = 7$ عوّض



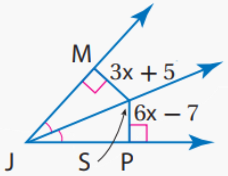
b) $m\angle JKL$

بما أن $LJ = LM$, $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}$, $\overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}$ ، فإن L على بعدين متساويين من ضلعي $\angle JKM$. وبحسب عكس نظرية منصّف الزاوية، فإن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$

$\angle JKL \cong \angle LKM$ تعريف منصّف الزاوية

$m\angle JKL = m\angle LKM$ تعريف الزوايا المتطابقة

$m\angle JKL = 37°$ عوّض



c) SP

$SP = SM$ نظريّة منصّف الزاوية

$6x - 7 = 3x + 5$ عوّض

$3x - 7 = 5$ اطرح $3x$ من الطرفين

$3x = 12$ اجمع 7 إلى الطرفين

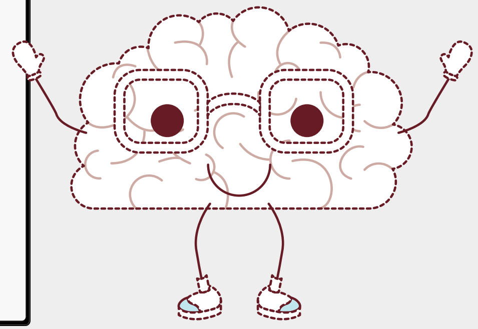
$x = 4$ اقسم الطرفين على 3

إذن $SP = 6(4) - 7 = 17$.

إرشادات للدراسة

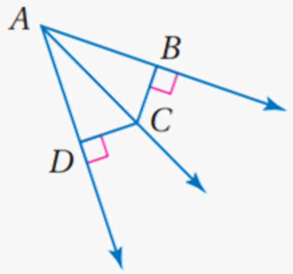
منصَف الزاوية

لا تعدّ المعلومة $JL = LM$ في الفرع b لوحدها كافية لاستنتاج أن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$.



استعمال نظريتَي منصّفات الزاوايا

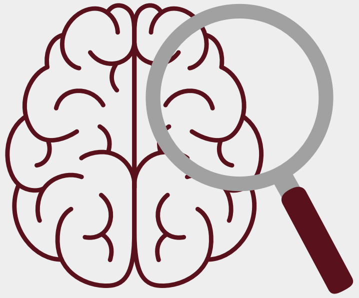
تحقق من فهمك



(3A إذا كان: $DC = 5$, $BC = 5$, $m\angle BAC = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle DAC$

(3B إذا كان: $DC = 10$, $m\angle DAC = 40^\circ$, $m\angle BAC = 40^\circ$ ، فأوجد BC

(3C إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصّف $\angle DAB$ ، و $DC = 9x - 7$, $BC = 4x + 8$
فأوجد BC



DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

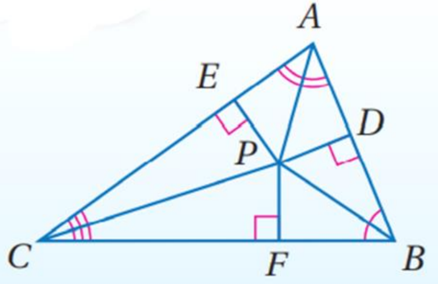
نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

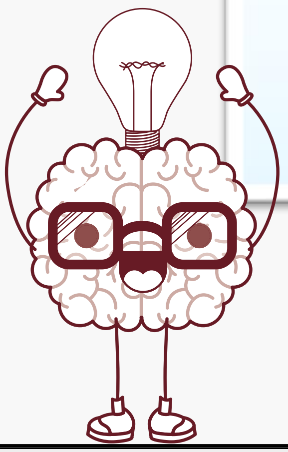
نظرية
4.6

وكما هو الحال في الأعمدة المنصّفة، بما أن للمثلث ثلاث زوايا، فإنّ له ثلاثة منصّفات للزوايا تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز الدائرة الداخلية للمثلث**.

التعبير اللفظي: تتقاطع منصّفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

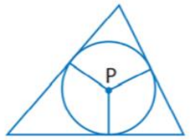
مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC، فإنّ $PD = PE = PF$





قراءة الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية للمثلث
هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع داخل المثلث دائمًا.

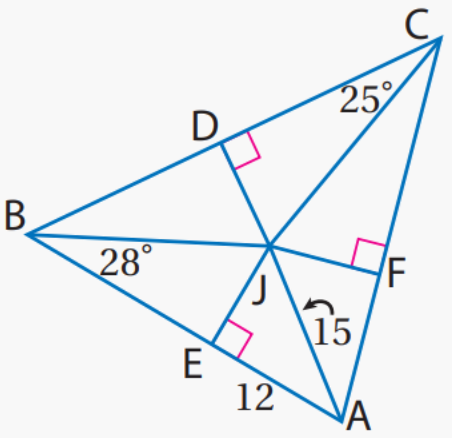


استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

مثال ٤

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لِـ $\triangle ABC$.

JF (a

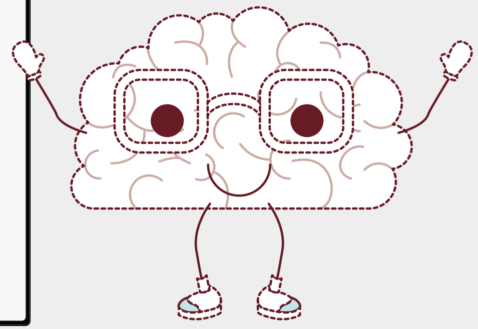


بما أن J على أبعادٍ متساوية من أضلاع $\triangle ABC$، بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فإن $JF = JE$ ؛ لذا أوجد JE باستعمال نظريّة فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$JE^2 + 12^2 = 15^2$	عوّض
$JE^2 + 144 = 225$	$12^2 = 144, 15^2 = 225$
$JE^2 = 81$	اطرح 144 من الطرفين
$JE = \pm 9$	خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا؛ إذن نأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط.

وبما أن $JE = JF$ فإنّ $JF = 9$



DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

مثال ٤

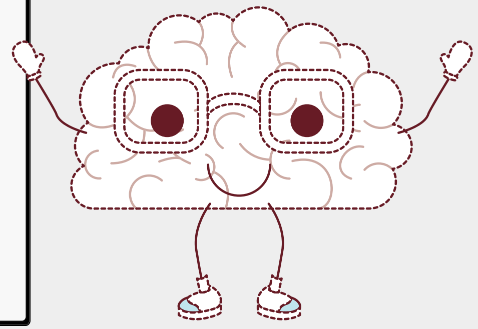
b) $m\angle JAC$

بما أنّ $\overrightarrow{BJ}$ ينصّف $\angle CBE$ ، فإنّ $m\angle CBE = 2m\angle JBE$ ؛ إذن $m\angle CBE = 2(28°) = 56°$.

وبالمثل؛ $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$ ؛ إذن $m\angle DCF = 2(25°) = 50°$.

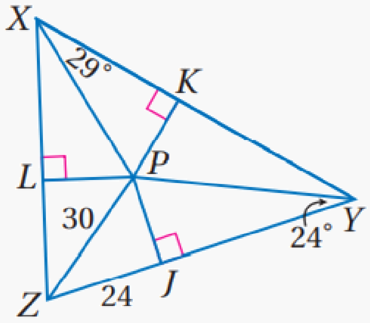
$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$56° + 50° + m\angle FAE = 180°$	$m\angle CBE = 56°; m\angle DCF = 50°$
$106° + m\angle FAE = 180°$	بسّط.
$m\angle FAE = 74°$	اطرح $106°$ من الطرفين.

وبما أنّ $\overline{AJ}$ ينصّف $\angle FAE$، فإنّ $2m\angle JAC = m\angle FAE$. وهذا يعني أنّ $m\angle JAC = \frac{1}{2} m\angle FAE$ ،
إذن $m\angle JAC = \frac{1}{2}(74°) = 37°$.



استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

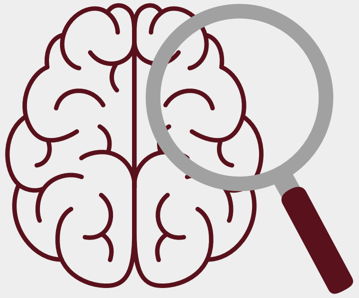
تحقق من فهمك



إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$، فأوجد القياسين الآتيين:

4A) PK

4B) $\angle LZP$

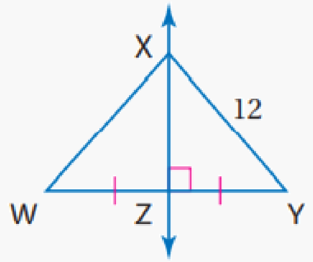


المنصفات في المثلث

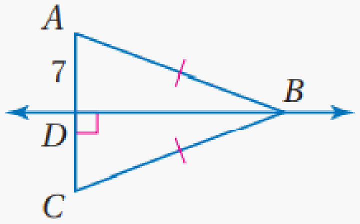
تأكد

أوجد كلًّ قياسٍ مما يأتي:

XW (1



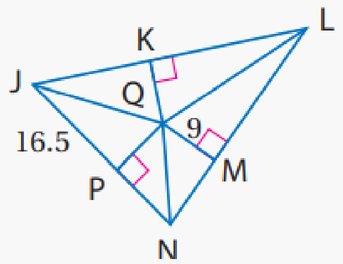
AC (2



المنصفات في المثلث

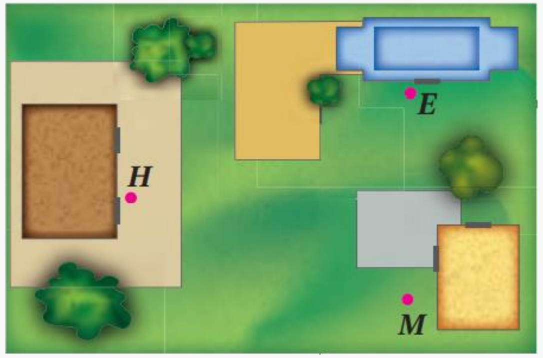
تأكد

8) إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$ ، فأوجد طول $\overline{JQ}$.

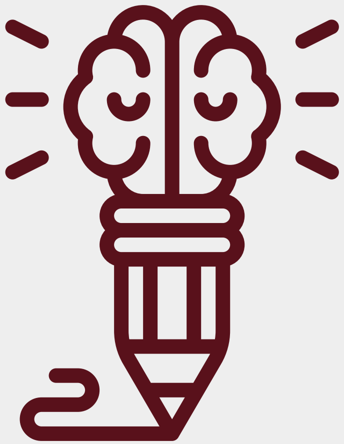


المنصفات في المثلث

تدرب وحل



12) **مدرسة:** يتكون مجمّع مدارس من مدرسة ابتدائية E ومدرسة متوسطة M ومدرسة ثانوية H في المواقع المبيّنة في الصورة المجاورة. انسخ مواقع النقاط E, M, H في دفترك، ثم عيّن موقع موقف الحافلات، على أن يكون على أبعاد متساوية من المدارس الثلاث.



المنصفات في المثلث

مهارات التفكير العليا

اكتب: قارن بين الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث ومنصّفات زواياه مبيّنًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف. وقارن بين نقطتَي التلاقي.

تم بحمد الله

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا

You Tube