مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الفصل الرابع
رياضيات ١-٢

العام الدراسي ١٤٤٣هـ

إعداد: أ/عبدالعزيز الشريف

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

4-2

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

أكبر أسرار التفوّق
هو البداية
الصحيحة والقويّة
بتنظيم الوقت
والاستذكار

DES: ABDULAZIZ ALSHARIF

A_Shark_s

التاريخ:

اليوم:

المادة:

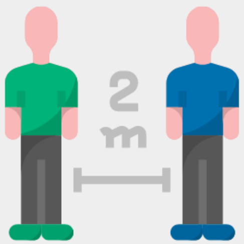
نعود بحذر

الالتزام بارتداء الكمامة

عدم المصافحة

غسل اليدين

التباعد الاجتماعي



القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

رابط الدرس الرقمي

فيما سبق

درستُ الأعمدة المنصَفة ومنصفات الزوايا في المثلث واستعمالها.

و الآن

- أتعرَف القطع المتوسطة في المثلث وأستعملها.
- أتعرَف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

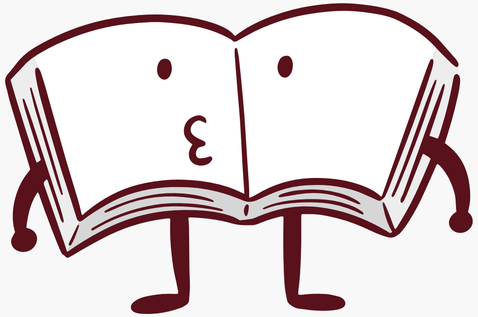
المفردات

القطعة المتوسطة
median

مركز المثلث
centroid

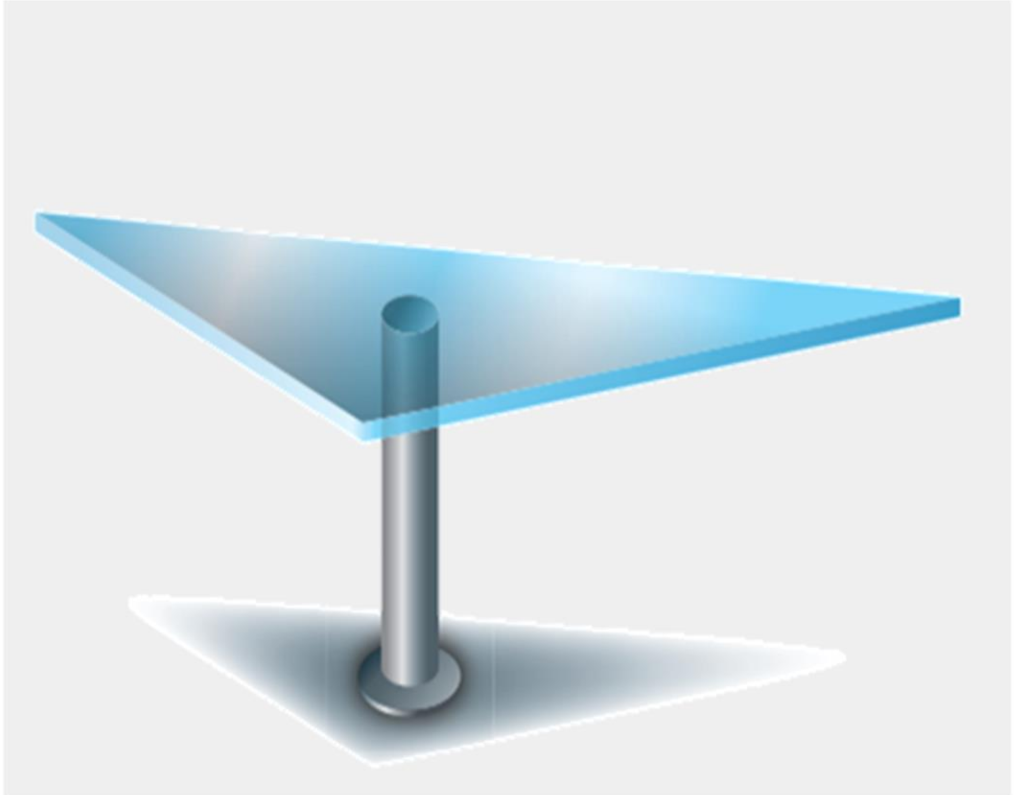
الارتفاع
altitude

ملتقى ارتفاعات المثلث
orthocenter



القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

لماذا؟

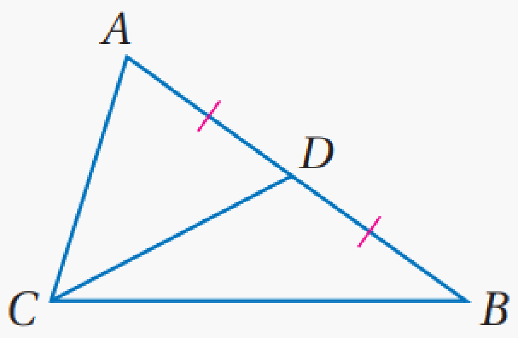


صمّم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن، يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يرتكز على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو في حاجة إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها، ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسطة، وتعيين نقطة تقاطعها.

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

القطع المتوسطة : **القطعة المتوسطة** لمثلث قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقَى في نقطة تُسمّى **مركز المثلث**، وتقع داخله دائمًا.

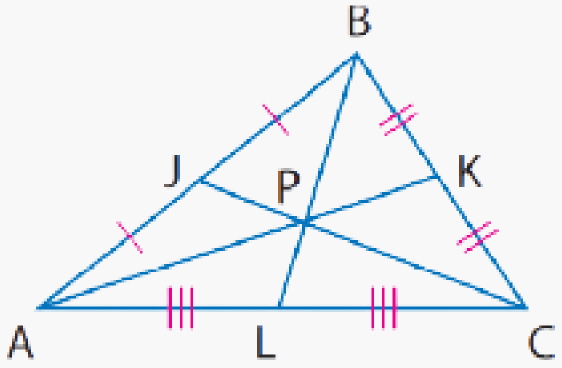


$\overline{CD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$.

نظرية مركز المثلث

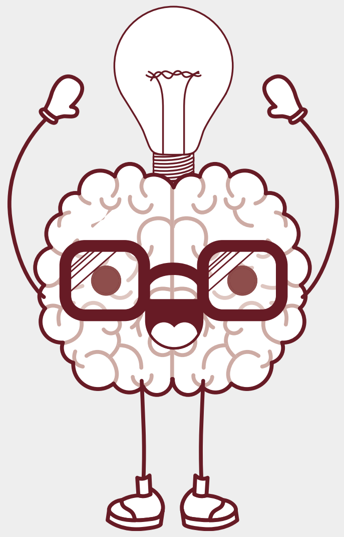
نظرية
4.7

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثُلُثَي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.



مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ

$$AP = \frac{2}{3}AK,\ BP = \frac{2}{3}BL,\ CP = \frac{2}{3}CJ$$

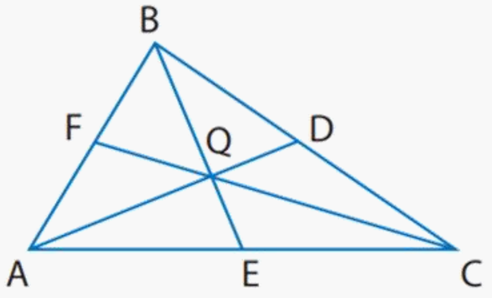


استعمال نظرية مركز المثلث

مثال ١

إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$، $BE = 9$.

فأوجد كلًّا من QE , BQ .



$BQ = \frac{2}{3}\ BE$	نظرية مركز المثلث
$= \frac{2}{3}(9) = 6$	$BE = 9$
$BQ + QE = 9$	جمع أطوال القطع المستقيمة
$6 + QE = 9$	$BQ = 6$
$QE = 3$	اطرح 6 من الطرفين

استعمال نظرية مركز المثلث

تحقق من فهمك

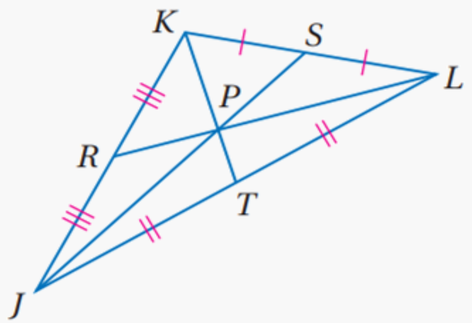
في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين :

1A) FQ

1B) QC

مثال ٢

استعمال نظرية مركز المثلث



في $\triangle JKL$، إذا كان $PT = 2$ ، فأوجد KP.

بما أنّ $\overline{JR} \cong \overline{RK}$ ، فإن R نقطة منتصف $\overline{JK}$ ، وتكون $\overline{LR}$ قطعة متوسطة في $\triangle JKL$ ، وبالمثل نستنتج أن S, T هما نقطتا منتصفَي $\overline{KL}, \overline{LJ}$ على الترتيب؛ لذا فإن $\overline{KT}, \overline{JS}$ قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$ ، لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3} KT$	نظرية مركز المثلث
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	جمع القطع المستقيمة والتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3} KP + \frac{4}{3}$	خاصيّة التوزيع
$\frac{1}{3} KP = \frac{4}{3}$	اطرح $\frac{2}{3} KP$ من الطرفين
$KP = 4$	اضرب الطرفين في 3

إرشادات للدراسة

استعمال الحسّ العددي

في المثال 2 ، يمكنك أيضًا استعمال الحسّ العددي لإيجاد KP . بما أن $KP = \frac{2}{3} KT$ ، فإن $PT = \frac{1}{3} KT$ وكذلك $KP = 2PT$ ؛ لذا إذا كان $PT = 2$ فإن $KP = 2(2) = 4$.

استعمال نظرية مركز المثلث

تحقق من فهمك

في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $JP = 9$, $RP = 3.5$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين:

2A) PL

2B) PS

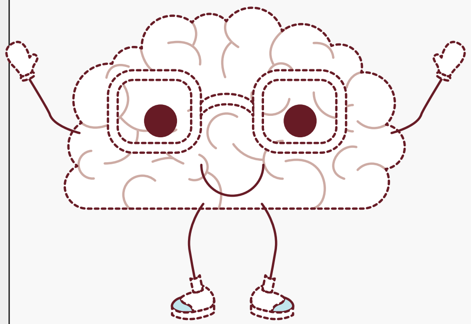
إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

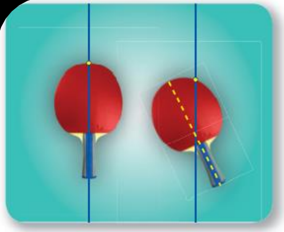
مثال ٣

فن الأداء: في مهرجان رياضي يُخطط عبدالعزيز لاتزان قطع مثلثية من المعدن كما في الشكل المجاور، وعندما وُضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(1, 10), (5, 0), (9, 5)$.
ما إحداثيات النقطة التي يجب على عبدالعزيز أن يثبّت المثلث عندها حتى يحفظه متوازنًا؟ وضح إجابتك.

افهم: تحتاج إلى إيجاد مركز المثلث من خلال الإحداثيات المعطاة، وستكون هذه هي النقطة التي سيتزن عندها المثلث.

خطّط: ارسم المثلث الذي رؤوسه $A(1, 10), B(5, 0), C(9, 5)$، وبما أن مركز المثلث هو النقطة التي تتلاقَى عندها القطع المتوسطة للمثلث؛ إذن استعمل نظرية نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث، فيكون مركز المثلث واقعًا على القطعة المتوسطة وعلى بُعدٍ من الرأس يساوي ثُلثَي طول القطعة المتوسطة.





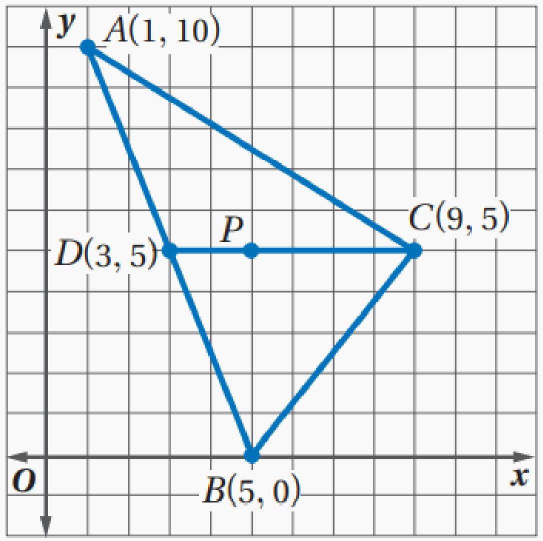
الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)
يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم، سواءً أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:
علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح، ارسم مستقيمًا رأسيًا من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيمًا رأسيًا منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.

إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

مثال ٣

حل: مثّل $\triangle ABC$ بيانيًّا .



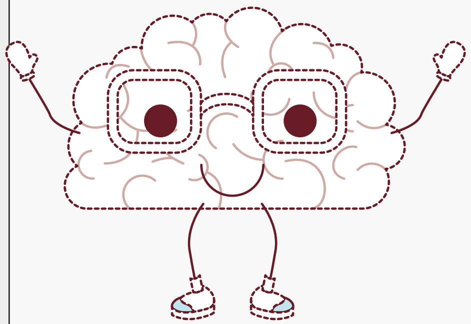
أوجد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ الذي طرفاه $A(1, 10)$, $B(5, 0)$.

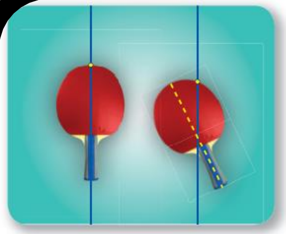
$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

عيّن النقطة D ، ولاحظ أن $\overline{DC}$ أفقيّة، والمسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تساوي $9 - 3$ ، أيْ 6 وحداتٍ.

فإذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ $PC = \frac{2}{3}DC$ ؛ ولذا يقع المركز على بُعد $\frac{2}{3}(6)$ ، أو 4 وحدات إلى اليسار من C، وتكون إحداثيات P هي $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5, 5)$.





الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)

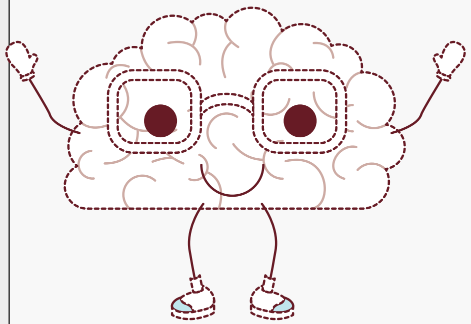
يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم، سواءً أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي: علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح، ارسم مستقيمًا رأسيًا من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيمًا رأسيًا منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.

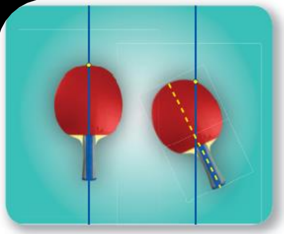
إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

مثال ٣

تحقق: استعمل قطعة متوسطة أخرى للتحقق من صحّة إجابتك. بما أنّ نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$، وأن $\overline{BF}$ رأسيّة فإن المسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$؛ أيْ 7.5 وحداتٍ، وعلى ذلك يكون $\overline{PB}$ يساوي $\frac{2}{3}(7.5)$ أيْ 5، إذن P تقع على بعد 5 وحداتٍ إلى أعلى من B.

وتكون إحداثيات P هي $(5, 0+5)$ أي $(5, 5)$. ✓





الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)

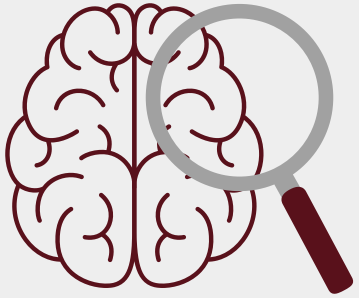
يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم، سواءً أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:

علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح. ارسم مستقيمًا رأسيًا من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيمًا رأسيًا منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.

تحقق من فهمك

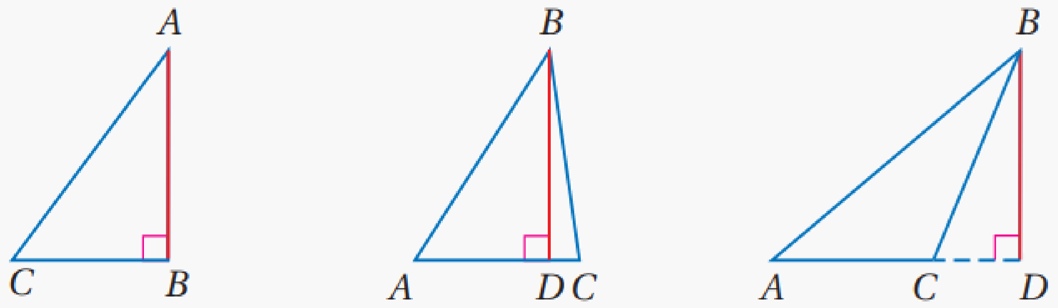
إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(12, 1)$, $(6, 11.5)$, $(0, 4)$، فما إحداثيات النقطة التي يتزن عندها هذا المثلث؟ وضّح إجابتك.



القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

ارتفاعات المثلث: **ارتفاع المثلث** هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



$\overline{AB}$ هو الارتفاع إلى $\overline{CB}$.

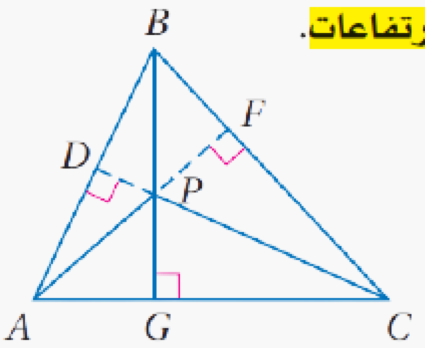
$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقَى المستقيمات التي تحويها في نقطة مشتركة.

ملتقى الارتفاعات

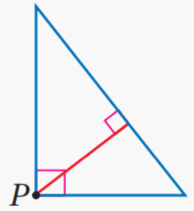
مفهوم أساسي

تتقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات أيّ مثلث في نقطة تُسمَى **ملتقى الارتفاعات**.

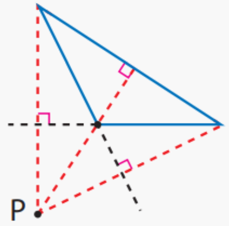


مثال: تتقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BG}$ عند النقطة P، وهي ملتقى الارتفاعات للمثلث ABC.

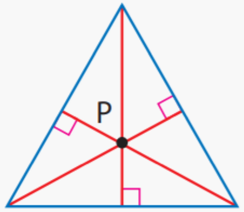
يمكن أن تلتقي الارتفاعات في مثلث داخله أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث قائم الزاوية



مثلث منفرج الزاوية

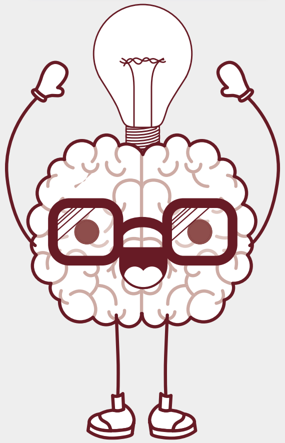


مثلث حاد الزوايا

قراءة الرياضيات

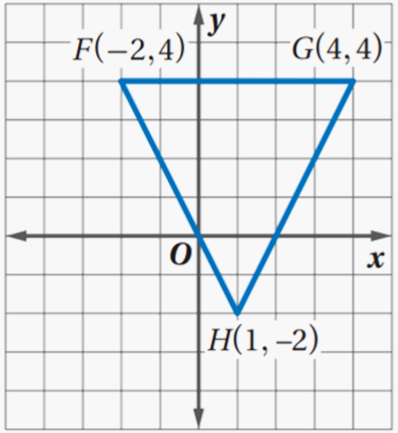
ارتفاع المثلث

يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة. ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.



إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

مثال ٤



هندسة إحداثيّة: إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2,4)$, $G(4,4)$, $H(1,-2)$، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.

الخطوة 1: مثّل $\triangle FGH$ بيانيًّا. ولإيجاد ملتقى الارتفاعات، أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من F إلى $\overline{GH}$

بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي $\frac{4-(-2)}{4-1}=2$

فإنّ ميل الارتفاع العمودي على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

$y-y_1=m(x-x_1)$	صيغة النقطة والميل
$y-4=-\frac{1}{2}[x-(-2)]$	$(x_1,y_1)=F(-2,4)$, $m=-\frac{1}{2}$
$y-4=-\frac{1}{2}(x+2)$	بسّط
$y-4=-\frac{1}{2}x-1$	خاصية التوزيع
$y=-\frac{1}{2}x+3$	اجمع 4 إلى الطرفين

ثم أوجد معادلة الارتفاع من G إلى $\overline{FH}$.

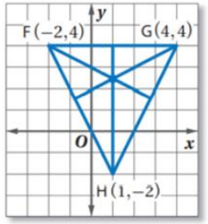
بما أن ميل $\overline{FH}$ يساوي $\frac{-2-4}{1-(-2)}=-2$، فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{FH}$ يساوي $\frac{1}{2}$

$y-y_1=m(x-x_1)$	صيغة النقطة والميل
$y-4=\frac{1}{2}(x-4)$	$(x_1,y_1)=G(4,4)$, $m=\frac{1}{2}$
$y-4=\frac{1}{2}x-2$	خاصية التوزيع
$y=\frac{1}{2}x+2$	اجمع 4 إلى الطرفين

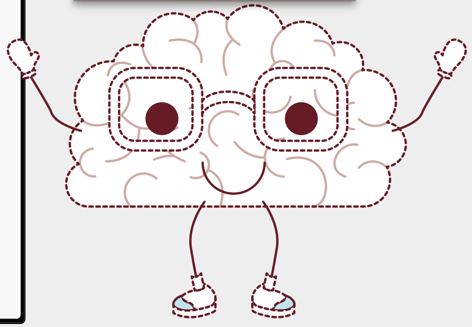
إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

استعمل ركن ورقة لرسم ارتفاعات المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريبًا عند $\left(1,2\frac{1}{2}\right)$؛ لذا فالجواب معقول.



إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

مثال ٤

الخطوة 3: حل نظام المعادلتين الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

اجمع المعادلتين لتحذف x ، فينتج أن $2y = 5$ ، ومن ثم فإن $y = \frac{5}{2}$

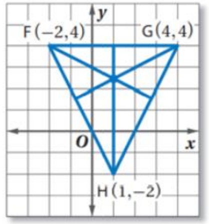
$y = \frac{1}{2}x + 2$	معادلة الارتفاع من G
$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$	$y = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$	اطرح $\frac{4}{2}$ ، أو 2 من الطرفين
$1 = x$	اضرب الطرفين في 2

إذن إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle FGH$ هي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$

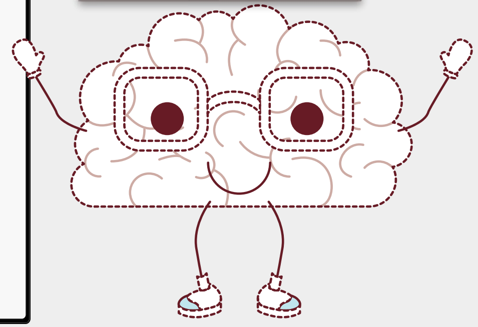
إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

استعمل ركن ورقة لرسم ارتفاعات المثلث.

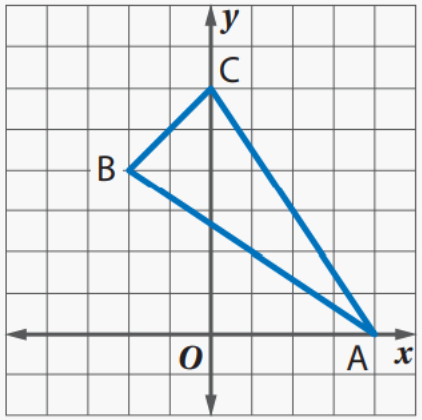


نقطة التقاطع تقع تقريبًا عند $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$؛ لذا فالجواب معقول.



إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

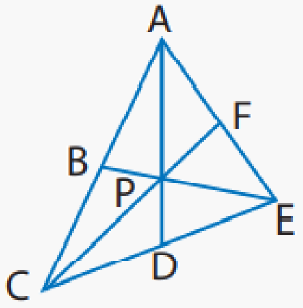
تحقق من فهمك



4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

تأكد



إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ACE$ ، $AD = 15$, $PF = 6$.
فأوجد كلّ طول مما يأتي:

1) PC

2) AP

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

تأكد

4) **هندسة إحداثيّة :** أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه:

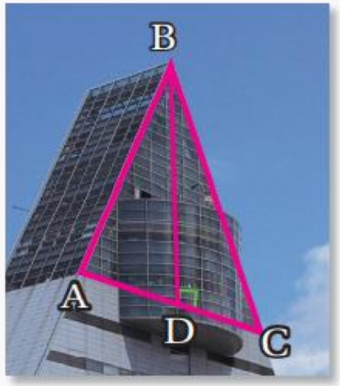
$A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

تدرب وحل

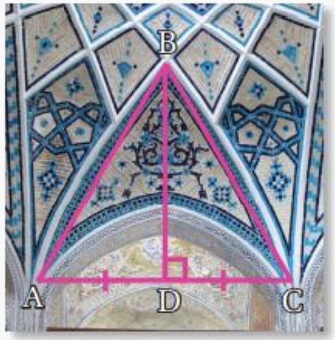
صنّف $\overline{BD}$ في كلٍّ من الأسئلة الآتية إلى ارتفاع، أو قطعة متوسطة، أو عمود منصّف:

13



14

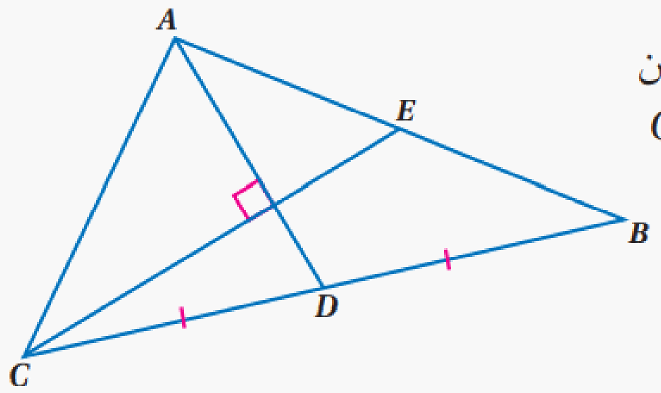
15



القطع المتوسطة

والارتفاعات في المثلث

مهارات التفكير العليا



29) **تحدّ:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ قطعتين متوسطتين في $\triangle ACB$ ، وكانت $CE = 9$, $AB = 10$, $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ ، فأوجد CA

تم بحمد الله

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

حساباتي على السوشيال ميديا

You Tube