نسخة الكترونية
مجانية للاتباع

تحصيلنا
رياضيات
٣ _ ٣

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي

بسم الله والحمدلله والصلاة

والسلام على رسول الله

اللهم علمنا ماينفعنا وانفعنا بما

علمتنا وزدنا علماً

يارب العالمين

السادة / نورة الحربي و روحية السلمي

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم المرسوم بـ :

سلسلة عروض رفعة الرياضيات (تحصيلنا رياضيات ٢-٣)

تحت رقم إيداع | 1445

تاريخ/ /1445

رقم الردمك

شكر و عرفان

أتقدم بالشكر الجزيل لمجموعة رِفعة التي تضم نخبة من المعلمين والمعلمات المبدعين والمبدعات شكرًا لكم ، ولنا الفخر بأن نكون أحد أعضاء هذه المجموعة المبدعة .

جميع حسابات مجموعة رِفعة

مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين،

أما بعد:

نبذة تعريفية لمجموعة رِفعَة

هي مجموعة تُدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة، وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات، وابتكار الافكار الإبداعية للتعليم العام، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم العام.

وبهدف التسهيل والتيسير لمادة الرياضيات، نقدم لكم " سلسلة رِفعة الرياضيات- تميز معنا في رياضيات3- 3 "

وأرجو من الله أن تجدو فيها الفائدة .

تنبيه :

كل الحقوق محفوظة ، نسخة الكترونية مجانية لاتباع عند إزالة شعار المجموعة أو اسم المؤلف / ة سوف يعرضك للمسائلة القانونية.

الإحداثيات القطبية و الأعداد المركبة

الاحتمال والإحصاء

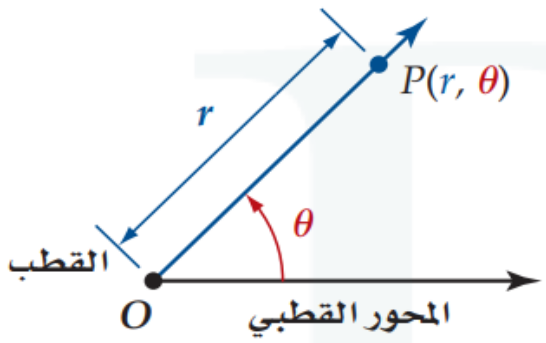
النهايات والاشتقاق

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الإحداثيات القطبية

ما تعرف عن الإحداثيات القطبية

تم التعرف فيما سبق على تمثيل الاحداثيات الديكارتية بالتفصيل والان سوف نتعرف على تمثيل الاحداثيات القطبية



القطب

في نظام الاحداثيات القطبية ، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تسمى القطب

المحور القطبي

هو نصف مستقيم يمتد افقيا من القطب إلى اليمين

تعيين النقطة $P(r, \theta)$

حيث ان r المسافة المتجهة من القطب الى النقطة P

و θ هي الزاوية المتجهة من المحور القطبي الى ضلع الانتهاء .

وكذلك لـ r (اذا كانت سالبة هي امتداد لضلع الانتهاء θ)

لها نوعان لـ θ (اما تكون موجبة عكس عقارب الساعة او تكون سالبة مع عقارب الساعة)

خطوات تمثيل الإحداثيات القطبية للنقطة $P(r, \theta)$

1. نرسم ضلع الابتداء (المحور القطبي)
2. باستعمال المنقلة نحدد الزاوية θ
3. نرسم ضلع الانتهاء ونحدد طول r

الإحداثيات القطبية

تمثيل نقاط في المستوى القطبي

كان سابقا تعين الاحداثيات الديكارتية في المستوى الاحداثي الذي يتخذ شكلا مستطيلا

اما في المستوى القطبي سوف نتعرف كيف يمكن تمثيل الاحداثيات القطبية ويكون شكلها على شكل دوائر

ملاحظة : r تمثل عدد الدوائر ، و θ تمثل الزوايا .

مثل النقاط الاتية في المستوى القطبي :

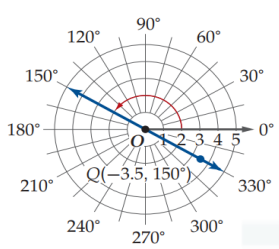
1) $P\left(3 ، \frac{4\pi}{3}\right)$

تمثل 3 عدد الدوائر ، ولذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها و لذا عين النقطة P تبعد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية

مثال

2) $Q\left(-3.5 , 150^\circ\right)$

ارسم ضلع الانتهاء للزاوية ، بحيث المحور القطبي ضلع الابتداء لها ولان r سالبة ، لذا مد ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه المقابل وعين النقطة و تبعد 3.5 وحدات عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء للزاوية .



تمثيلات قطبية متعددة

اذا كان n عددا صحيحا ، فانه يمكن تمثيل النقطة $(r ، \theta)$

بالإحداثيات $(r ، \theta + n360^\circ)$ او $(-r ، \theta + (2n+1)180^\circ)$

وبالمثل ، اذا كانت θ مقيسه بالراديان ، وكان n عددا صحيحا ، فإنه يمكن تمثيل النقطة $(r ، \theta)$

بالإحداثيات $(r ، \theta + 2n\pi)$ أو $(-r ، \theta + (2n+1)\pi)$

يمكن تمثيل النقطة $(r ، \theta)$ بأربعة ازواج مختلفة هي :

$(r ، \theta)$

$(r ، \theta + 360)$

$(-r ، \theta + 180)$

$(-r ، \theta - 180)$

مثال

اذا كانت $-360^o \leq \theta \leq 360^o$ ، أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة $(1,150^o)$

$$(1,150^o - 360) = (1, -210)$$

$$(-1,150^o + 180) = (-1,230)$$

$$(-1,150^o - 180) = (-1, -30)$$

الإحداثيات القطبية

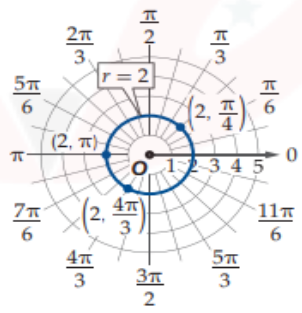
التمثيل البياني للمعادلات القطبية

- المعادلة القطبية : هي معادلة تعطى بدلالة الاحداثيات القطبية r ، θ .
- التمثيل القطبي : هو مجموعة من النقاط (r ، θ) التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية .
- المعادلة $r = k$ (و لـ k عدد حقيقي) تمثل بدائرة نصف قطرها k .
- المعادلة $\theta = h^\circ$ (ولـ h عدد حقيقي) تمثل بخط مستقيم يميل عن المحور القطبي بزاوية h°

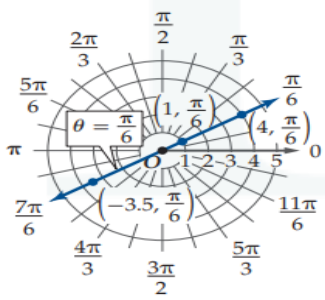
مثال

مثل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيا .

a) $r = 2$

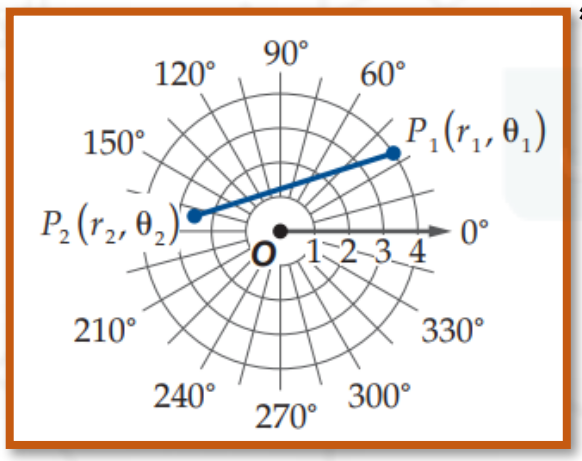


b) $\theta = \frac{\pi}{6}$



المسافة بالصيغة القطبية

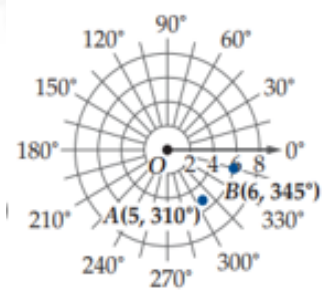
يمكن إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستعمال الصيغة الاتية :



- اذا كانت $P_1 = (r_1 , \theta_1)$ ، $P_2 = (r_2 , \theta_2)$ نقطتين في المستوى القطبي فان المسافة P_1P_2 تعطي بالصيغة

$$P_1P_2 = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

يتابع مراقب الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسة ، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما (A(5 ، 310°) ، B (6 ، 345°) ، وتقاس المسافة المتجه بالأميال .



$$AB = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(345^\circ - 310^\circ)}$$

$$\approx 3.44$$

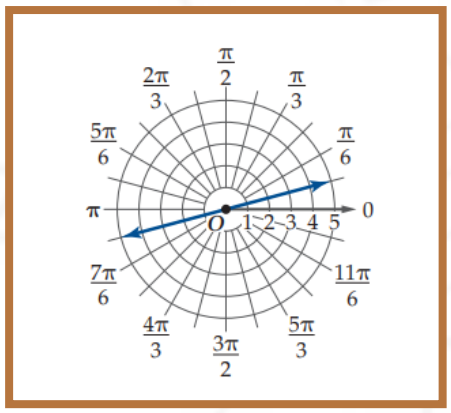
قيم نفسك

اذا كانت المسافة بين النقطتين $P_1 = (r , 0°)$ ، $P_2 = (4 , 90°)$ تساوي 5 وحدات ، فما قيمة r ؟

1	2	3	4

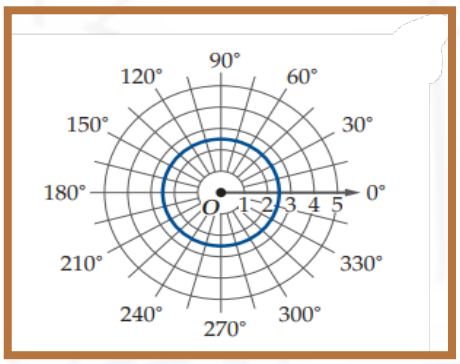
المعادلة القطبية $r = 2$ تمثيلها البياني عبارة عن دائرة طول قطرها ..

1	2	4	6



المعادلة القطبية التي تمثل الشكل المجاور هي .....

.....



المعادلة القطبية التي تمثل الشكل المقابل هي .....

.....

المسافة بين النقطتين التاليتين $(5 , 120°)$, $(2 ، 30°)$: تساوي

.....

الصورة القطبية و الصورة الديكارتيه للمعادلات

تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتيه $(r,\theta) \rightarrow (x,y)$

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

مثال

حول من الصورة القطبية الى الصورة الديكارتية :

P(- 2 , 135 °)

الحل :

(r , θ) → (x , y)

X = r$\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

(-2 , 135°) = ($-2\cos 135°$, $-2\sin 135°$)

($\sqrt{2}$, - $\sqrt{2}$) =

تحويل الإحداثيات الديكارتيه إلى الإحداثيات القطبية $(x,y) \rightarrow (r,\theta)$

$x < 0$	$x > 0$	$x = 0$
$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$	$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$	$y < 0$: $\theta = -\frac{\pi}{2}$; $y > 0$: $\theta = \frac{\pi}{2}$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$r = \lvert y \rvert$

مثال

S (-3 ، 6)

بما ان إحداثيات النقطة (6 ، -3) = (x ، y) ∴ فان x = -3 ، y = 6

وبذلك قيمة x < 0 نستخدم الصيغة التالية

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{-3}\right) + 180°$$

$$= \tan^{-1}(-2) + 180°$$

$$\approx 117°$$

ثانيا : نوجد قيمة r

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2} \approx 6.71$$

(6.71 , 117 °) = (6 , -3)

الصورة القطبية و الصورة الديكارتيه للمعادلات

تحويل معادلة قطبية إلى معادلة ديكارتيه

عدد r =

1. نربع الطرفين .
2. نعوض عن $r^2 = x^2 + y^2$

زاوية θ =

1. نأخذ tan للطرفين .
2. نعوض عن $tan\theta = \frac{y}{x}$
3. نضرب الطرفين

$r = acos\theta$
$r = asin\theta$
$r = acos\theta + bsin\theta$

1. نضرب الطرفين بـ r .
2. نعوض عن :

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$x = rcos\theta$$
$$y = rsin\theta$$

A. $\theta = \frac{\pi}{6}$

خذ tan للطرفين

$$\tan\frac{\pi}{6} = \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

اضرب الطرفين في x

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

b) $r = 7$

المعادلة الاصلية $r = 7$

نربع الطرفين

$$r^2 = 49$$
$$x^2 + y^2 = 49$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

قيم نفسك

ما الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ؟

- $r = \sin\theta$
- $r = 2\sin\theta$
- $r = 4\sin\theta$
- $r = 8\sin\theta$

المعادلة القطبية $\tan\theta = 4$ صورتها الديكارتية هي :

- $x\,y = 4$
- $x + y = 4$
- $y = 4x$
- $y = \frac{1}{2}x$

اذا كان (3 , $3\sqrt{3}$) الاحداثي الديكارتي للنقطة P فما الاحداثي القطبي لها ؟

- $(6,90^o)$
- $(6,30^o)$
- $(6,60^o)$
- $(9,30^o)$

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

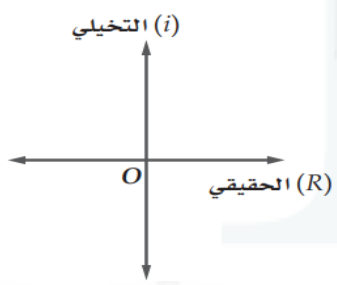
الصورة الديكارتيه للعدد المركب

$a + bi$

- الوحدة التخيلية قيمتها $\sqrt{-1}$
- الجزء التخيلي
- الجزء الحقيقي

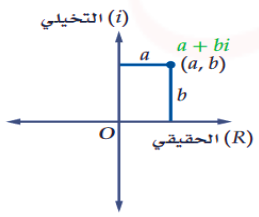
المستوى المركب

يمكن تمثيل العدد المركب بالنقطة (a ، b) كما في المستوى الاحداثي ، فإننا نحتاج الى محورين وهما المحور الحقيقي وهو المحور الافقي ويرمز له R والمحور التخيلي وهو المحور الرأسي ويرمز له i



تمثيل نقطة في المستوى المركب

يمثل العدد المركب $a + ib$ على المستوى المركب بالنقطة (a ، b) عندما $b \neq 0$ ، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي .

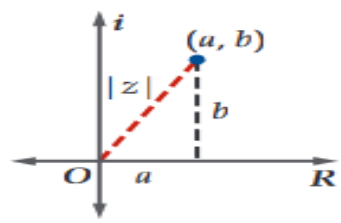


القيمة المطلقةللعدد المركب

هي المسافة بين العدد و الصفر في المستوى المركب .

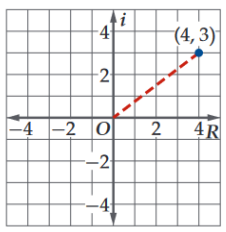
القيمة المطلقة : للعدد $z = a + bi$ هي :

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مثال

مثل العدد التالي في المستوى المركب ، و أوجد قيمته المطلقة :،



$$Z = 4 + 3i$$

$$= (4, 3)\ (a, b)$$

إيجاد القيمة المطلقة

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{4^2 + 3^2} =$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الصورة القطبية للعدد المركب

الصورة القطبية أو المثلثية للعدد $z = a + bi$ هي :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حيث ان : $a = r\cos\theta$; $b = r\sin\theta$

تمثيل القيمة المطلقة r أو المقياس للعدد المركب

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

نوجد تمثيل سعة العدد المركب θ عن طريق

$a > 0$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$a < 0$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$$

$a = 0$

$b > 0$: $\theta = \frac{\pi}{2}$

$b < 0$: $\theta = -\frac{\pi}{2}$

مثال

الصورة القطبية للعدد المركب الاتي :

$9 + 7i$

$a = 9$, $b = 7$

نوجد المقياس r والسعة θ

$$r = \sqrt{9^2 + 7^2}$$

$$= \sqrt{130} \approx 11.4$$

بما ان $a > 0$ نوجد θ

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \quad \tan^{-1}\frac{7}{9} = 0.66$$

الصورة القطبية $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$Z = 11.4\,(\cos(0.66) + i\sin(0.66))$$

نحوله الى الصورة الديكارتيه

العدد $z = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$$3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{1}{2})\right]$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

للعددين المركبين : $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ فإن :

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

اوجد ناتج ما يلي على الصورة القطبية ، ثم اعبر عنه بالصورة الديكارتية :

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

/ الحل

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$ الصورة القطبية

نوجد الصورة الديكارتية

$$8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)8 = 4\sqrt{3} - 4i$$

قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

r_2 و $z_2 \neq 0$ ،

$$4\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$4\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$ الصورة القطبية

نوجد الصورة الديكارتية

$$2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

ماذا تعرف نظرية ديموافر

تساعدنا نظرية ديموا فر في حل الكثير من المسائل ذات القوى النونية للعدد المركب

نظرية ديموافر والجذور النونية للعدد المركب :

❖ النظرية : اذا كان n عددا صحيحا موجبا فإن ...

$$z^n = \left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

❖ نظرية ديموا فر تطبق على العدد المركب اذا كان على الصورة القطبية .

❖ الجذور النونية المختلفة للعدد المركب $r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^r$ و $n \geq 2$ يمكن ايجادها باستعمال الصيغة التالية :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$ و حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

❖ الجذور النونية المختلفة لأي عدد مركب لها المقياس نفسة وهو $r^{\frac{1}{n}}$

❖ سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$ ثم تزداد الجذور الأخرى بإضافة $\frac{2\pi}{n}$

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مثال

اوجد $\left(4+4\sqrt{3}\,i\right)^6$ بالصورة القطبية ، وعبر عنه بالصورة الديكارتية

اكتب $4+4\sqrt{3}\,i$ بالصورة القطبية

نوجد r

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{4^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2}$

$= 8$

نوجد θ

$\tan^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4} = \theta$

$= \frac{\pi}{3}$

وتكون الصورة القطبية : $8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

نستخدم نظرية ديموافر ،لإيجاد القوة السادسة

$\left(4+4\sqrt{3}\,i\right)^6 = \left[8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6$

$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 262144$

اوجد الجذور التكعيبية للعدد 2 + 2i .

نكتب العدد على الصورة القطبية

$r = \sqrt{2^2+2^2}$

$= \sqrt{8}$

نوجد θ

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45°$

$z = \sqrt{8}\left(\cos 45° + i\sin 45°\right)$

سعة الجذر الأول هي $\frac{\theta}{3}$ ، وتزداد الجذور على التوالي بإضافة $\frac{360°}{3}$

الجذر الأول : k = 0

$\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos 15° + i\sin 15°\right)$, 1.37+ 0.33i

وبإضافة لكل جذر 120°

الجذر الثاني : k = 1

$\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos 135° + i\sin 135°\right)$, -1 + i

الجذر الثالث : k = 1

$\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos 255° + i\sin 255°\right)$, - 0.4 - 1.4i

قيم نفسك

اذا كان $z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ فان ناتج $z_1 z_2$

$10\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ | $10\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ | $10\left(\cos\frac{\pi^2}{18} + i\sin\frac{\pi^2}{18}\right)$ | $10\left(\cos\frac{\pi^2}{18} - i\sin\frac{\pi^2}{18}\right)$

اذا كان $z_1 = 4(\cos 135° + i\sin 135°)$, $z_2 = 2(\cos 45° + i\sin 45°)$ فان ناتج $\frac{z_1}{z_2}$ على الصورة الديكارتية

$2 + 2i$ | $-2i$ | -2 | $2i$

اكتب العدد $3\sqrt{3} + 3i$ على الصورة القطبية .

$3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ | $6\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ | $6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ | $6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

عند إيجاد الجذور الخماسية للعدد المركب $3\ (\cos\pi + i\sin\pi)$ ، فإن : سعة للجذر الأول تساوي

$\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{3}$ | π | 5π

الاحتمال و الإحصاء

الدراسات التجريبية و المسحية و القائمة على الملاحظة

يعتبر باب الإحصاء والاحتمالات من افضل الأبواب في رياضيات 6 واجملها وهو يعتمد على التصنيف وأساليب جمع البيانات ومن اهم الأساليب المستخدمة في جمع البيانات هي :

الدراسات المسحية

يقصد بها جمع البيانات وذلك عن طريق اخذ آراء واستطلاع افراد المجتمع حول موضوع معين وذلك لتحليله و تفسيره .

الدراسة المسحية تشتمل على

تعداد عام

اذا شملت عملية جمع البيانات جميع افراد المجتمع الذي هم محور الدراسة مثال اذا شملت الدر اسة الطلاب جميعهم في المدرسة

العينة

يتم فيها اختيار عدد معين من افراد المجتمع او محدود مثال اختيار عدد من الطلاب مثلا 100 طالب من بين 1000 طالب

حسب الحيادية

متحيزة

يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام

غير متحيزة

اذا تم اختيار العينة بطريقة عشوائية

مثال

حدد ما اذا كانت الدراسة المسحية تتبنى عينة منحازة او غير منحازة :

استطلاع رأي كل شخص ثالث يخرج من مطعم للمشويات لمعرفة الوجبة المفضلة للناس .

الإجابة / منحازة ؛ لان الأكثر احتمالا من وجهة نظرهم ستكون المشويات .

2) الاستفسار من الطالب الذي ترتيبة 20 من كل 20 طالبا يخرجون من مدرستك ، عن الطالب الذي سيصوتون له في انتخابات المجلس الطلابي .

الإجابة / غير منحازة ؛ لان لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة .

شروط التحيز في الدراسة المسحية

1) عشوائية العينة وذلك بان تكون كبيرة نسبيا وغير منحازة .

2) أساليب غير منحازة لإجراء المسح يعني تكون الأسئلة واضحة ودقيقة ضنن الشي الذي نريده .

➢ تصميم الدراسة المسحية ؛

يريد زاهر ان يحدد فريق كرة القدم الأكثر شعبية في المملكة ؟

1. ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضلة في مدينة الرياض. — متحيز لأنه ذكر مدينة ولم يذكر غيرها
2. ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضلة في المملكة. — غير متحيز لأنه يعطي الإجابة المرتبطة بالسؤال
3. ما مدى تقديرك لفرق كرة القدم في المملكة . — متحيز لأنه لا يخدم الدراسة المسحية

الدراسات التجريبية و المسحية و القائمة على الملاحظة

الدراسة القائمة على الملاحظة

هي الدراسة التي تتم فيها ملاحظة الافراد دون تدخل او محاولة تأثير في النتائج (لاتوجد مجموعات ضابطة بها) .

اختر 100 طالب نصفهم خضع لأنشطة إضافية في مادة معين ، وقارن بين درجاتهم في تلك المادة .
نظرا لوجود كلمه لاحظ او قارن تسمى دراسة قائمة على الملاحظة .

الدراسة التجريبية

عملية يتم اجراء فيها معالجة خاصة على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة وتجرى ملاحظة استجاباتهم .

من 100 شخص ، اختر من بينهم 50 شخصا عشوائيا وأخضعهم للمعالجة المقصودة بالتجريب ، بينما لا تخضع الآخرين لاي معالجة أو لمعالجة شكلية .

هناك نوعان للدراسة التجريبية

المجموعة التجريبية

تخضع للمعالجة

المجموعة الضابطة

لا تخضع لمعالجة او تخضع لمعالجة شكلية

ما الفرق بين المجموعة التجريبية و المجموعة الضابطة مع ذكر مثال ؟

حسب الحيادية

متحيزة

يعرف افراد الدراسة إلى أي مجموعة ينتمون

غير متحيزة

لا يعرف افراد الدراسة الى أي مجموعة ينتمون (المعالجة الشكلية)

الدراسات التجريبية و المسحية و القائمة على الملاحظة

الفرق بين الدراسة القائمة بالملاحظة أو الدراسة التجريبية والدراسة المسحية

الدراسة المسحية

عبارة عن جمع البيانات لاستطلاع آراء افراد المجتمع حول موضوع معين .

القائمة على الملاحظة

ملاحظة الأفراد دون أي تدخل أو محاولة للتغيير في النتائج .

الدراسة التجريبية

عملية يتم اجراء فيها معالجة خاصة على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة وتجرى ملاحظة استجاباتهم .

مثال

حدد ما اذا كانت كل من الحالات الاتية تتطلب دراسة مسحية ،أو دراسة قائمة على الملاحظة ،أو دراسة تجريبية

تريد أن تختبر طريقة معالجة لمرض ما .

دراسة تجريبية ، التجريبية تخضع للعلاج والضابطة تخضع للعلاج الشكلي .

تريد أن تجمع آراء حول القواعد المعتمدة في انتخاب رئيس الصف . دراسة مسحية .

تريد ان تعرف ما اذا كان التدخين لمدة 10 سنوات يؤثر في سعة الرئة او لا . الإجابة دراسة بالملاحظة .

التمييز بين الارتباط والسببية

الارتباط

وجود ظاهرتين كل منهما تؤثر في الاخرى

السببية

وقوع ظاهرة معينة يكون سبب في وقوع ظاهرة أخرى

مثال

بين ما اذا كان العبارات الاتية تظهر ارتباط أم سببية ؟

1. اذا رفعت أثقالا أستطيع الالتحاق بفريق كرة القدم . الإجابة / ارتباط

2. عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع . الإجابة / سببية .

قيم نفسك

ما نوع الدراسة المستخدمة في معرفة ما اذا كان التدخين لمدة 15سنة يؤثر في سعة الرئة أم لا .

- دراسة بالملاحظة
- دراسة مسحية
- دراسة تجريبية
- سببية

اذا اختير 100 طالب ، ويتم تقسيمهم عشوائيا إلى نصفين مع إخضاع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي والأخرى عدم إخضاعها لأي برنامج ، فما نوع الدراسة المستخدمة ؟

- دراسة مسحية
- دراسة بالملاحظة
- دراسة تجريبية
- ارتباط

عندما امارس الرياضة ، أكون في وضع نفسي افضل .

- ارتباط
- سببية
- ارتباط وسببية
- ليست ارتباط ولا سببية

دراسة عينة غير ممثلة للمجتمع تسمى :

- دراسة متحيزة
- دراسة القائمة على الملاحظة
- دراسة تجريبية
- دراسة غير متحيزة

كيف تظهر الدراسة المسحية عبر الهاتف تحيزا للعينة ؟

.....

التحليل الإحصائي

التحليل الإحصائي

وصف البيانات وتلخيصها والوصول إلى الاستنتاجات المتعلقة بالدراسة

مقاييس النزعة المركزية

هي مقاييس تستخدم لوصف بيانات المتغير الواحد (التي تحتوي على متغير واحد) وتحدد عن طريقها نقطة تجمع البيانات

المتوسط الحسابي

هو مجموع البيانات مقسومًا على عددها

الوسيط

ترتيب البيانات مهم من الأصغر إلى الأكبر

إذا كان العدد فرديًا :

الوسيط هو العدد الواقع في المنتصف

إذا كان العدد زوجيًا :

الوسيط هو متوسط العددين المتجاورين في المنتصف

متى تستخدم

لاتوجد في البيانات قيم متطرفة

المنوال

هو العدد الأكثر تكرارًا

متى تستخدم

توجد في البيانات قيم متطرفة ولكن لاتوجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات

متى تستخدم

عندما تحوي البيانات على قيم متكررة

مقاييس التشتت

تصف مقدار تباعد البيانات أو تقاربها عن المتوسط

الانحراف المعياري

هو أحد مقاييس التشتت الذي يستخدم لمعرفة مقدار بعد البيانات أو قربها عن المتوسط

قانونا الانحراف المعياري

العينة

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث :

n عدد قيم العينة

$\bar{x}$ المتوسط للعينة

x_k قيم العينة

المجتمع

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$$

حيث :

n عدد قيم المجتمع

x المتوسط للمجتمع

x_k قيم المجتمع

التباين

مربع الانحراف المعياري

مثال

اختير 5 طلاب عشوائيا من فصل دراسي ، وقيست أطوالهم فكانت 175 سم ، 170 سم ، 168 سم ، 167 سم ، 170سم . بين ما اذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعا ، ثم أوجد الانحراف المعياري لأطوال هؤلاء الطلاب .

تمثل عينة

أولا : نوجد المتوسط الحسابي

$$\bar{x}=\frac{175+170+168+167+170}{5}$$

$$=170$$

ثانيا : نوجد الانحراف المعياري للعينة

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\sqrt{\frac{(175-170)^2+(170-170)^2+(168-170)^2+(167-170)^2+(170-170)^2}{5-1}}$$

$$=3.08$$

التحليل الإحصائي

يوجد نوعان من المقاييس يمكن استعمالها لمجموعة من البيانات هما :

المعلمة : هو مقياس يصف خاصية في المجتمع

مثال : متوسط دخل الفرد في المملكة ، يصف دولة

الإحصائي : هو مقياس يصف خاصية في العينة

مثال : متوسط دخل الفرد في مدينتك التي تسكنها ، يصف جزء

هامش خطأ المعاينة

هو الخطأ الناتج عن إجراء الدراسة على عينة من المجتمع وليس على المجتمع بأكمله .

كلما زاد عدد العينة كلما قل هامش الخطأ ، ويكتل على صورة نسبة مئوية .

قانون هامش خطأ المعاينة :

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي ، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة

$$\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

مثال

في دراسة مسحية عشوائية شملت 2148 شخصا ، أفاد 58% منهم أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة .

(a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

$$\text{هامش خطأ المعاينة} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2148}} = \pm\ 0.0216$$

$$= \pm 2.16\%$$

(b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة ؟

$$(58\% + 2.16\% \text{ ، } 58\% - 2.16\%)$$

$$(60.16\% \text{ , } 55.84\%)$$

قيم نفسك

أي من مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات التالية بشكل افضل 15 ،46 ،52 ،47 ،75 ،42 ،53 ، 45 ؟

الوسيط	الوسط	التباين	المنوال

في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة ، أي مما يأتي لا يؤثر في الوسيط ؟

مضاعفة كل عدد	زيادة كل عدد بمقدار 10	زيادة القيمة الصغرى فقط	زيادة القيمة الكبرى فقط

اذا كانت درجات 5 طلاب اختبروا عشوائيا في فصل دراسي كما يلي 55 ، 45 ، 30، 50 ،70
فان الانحراف المعياري لدرجاتهم الى اقرب عدد صحيح هي .

40	15	14	13

ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لمجموعة البيانات التي تتضمن قيما متطرفة ؟

المنوال	المتوسط الحسابي	الوسيط	التباين

أجريت دراسة مسحية على 625 شخص قالوا إن 47 % من القراءة مفيدة ، أي عينة من الأشخاص قالوا إنها مفيدة جميعهم .؟

بين 45% و 49%	بين 40% و 50%	بين 43% و 51%	بين 44% و 50%

الاحتمال المشروط

حادثتين غير مستقلتين ، فان الاحتمال المشروط A، B اذا كانت ، A بشرط وقوع الحادثة B هو وقوع الحادثة : قد وقعت ويعطي بالقانون التالي A اذا عُلم أن الحادثة ، B لوقوع الحادثة

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , P(A) \neq 0$$

ألقت سمر مكعب أرقام مرة واحدة . ما احتمال ظهور العدد 2 ، علما بأن العدد الظاهر زوجي ؟

البسط — المقام

علما بأن ← الاحتمال مشروط

فضاء العينة للمكعب هو $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

من اسهل الطرق للتحصيلي $P = \frac{1}{3}$

الجداول التوافقية

هي جداول تكرارية ذات بعدين يتم فيها تسجيل البيانات ضمن خلايا .

التكرار النسبي

هو تكرار صفة مقسوما علي مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية .

يمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط.

يوضح الجدول ادناه عدد الطلاب الجامعيين الذين يمارسون الرياضة بشكل منتظم ، اذا اختير طالب عشوائيا ،فأوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي ، علما بانه في السنة الثالثة .

الرياضيون الجامعيون	سنة أولى	سنة ثانية	سنةثالثة	سنةرابعة
ضمن المنتخب الجامعي(K)	7	22	36	51
ليس ضمن المنتخب الجامعي(S)	269	262	276	257

علما بأنه $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ احتمال مشروط

$P = \frac{36}{312} = 11.5\ \%$ ، حيث ان المقام $(36 + 276) = 312$

قيم نفسك

سحبت كرة بشكل عشوائي من كيس يحتوي على كرتين حمراوين و 3 زرقاء دون ارجاع وكانت زرقاء .
ما احتمال سحب كرة زرقاء ثانية

.....

ألقي مكعب مرقم من 1 الى 6 خمس مرات متتالية . ما احتمال ظهور الرقم 2 في الرميات الخمس علما بأن الرقم 2 ظهر في الرميات الثلاث الأولى

.....

اذا كانت A ، B حادثتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، بحيث كان $P(A \cup B) = 0.4$ ، $P(B) = 0.5$ ، $P(A) = 0.2$ فما قيمة P(A/B) ؟

0.5 | 0.6 | 0.8 | 0.7

اذا القي مكعب مرقم من 1 الى 6 مرة واحدة ، فما احتمال ظهور عدد زوجي علما بأن العدد الظاهر أقل من 4 ؟

$\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$

يبين الجدول التالي عدد الطلاب المشاركين والغير مشاركين في مسابقة كرة القدم في المرحلة المتوسطة ، اذا اختير طالب عشوائيا ، فما احتمال أن يكون مشاركا ؟ علما بأنه في الصف الثالث .

	الصف الثالث	الصف الرابع
مشارك	40	20
غير مشارك	80	60

$\frac{3}{5}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$

التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعية والملتوية

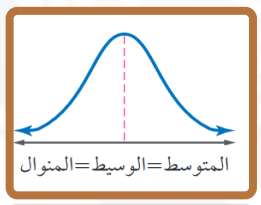
التوزيع الاحتمالي المتصل : هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل ، يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الاعداد الحقيقية .

أمثلة :

- أطوال أشخاص والاوزان لهم
- مستوى الدهنيات عند الأشخاص البالغين .

ما أفضل التوزيعات الاحتمالية المتصلة ؟ ← **هو التوزيع الطبيعي**

خصائص التوزيع الطبيعي

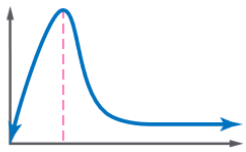


1. التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس ، ويكون متماثل حول المستقيم الراسي المار بالمتوسط
2. يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال (تقع في المركز)
3. المنحنى متصل
4. يقترب المنحنى من المحور x في جزئه الموجب والسالب بشرط لا يمسه

أنواع التوزيعات

توزيع طبيعي

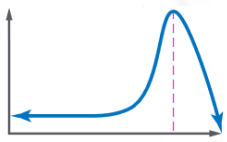
توزيعات ملتوية



التواء **موجب**

معظم البيانات تتركز في **اليسار**

وقليل منها في **اليمين**



التواء **سالب**

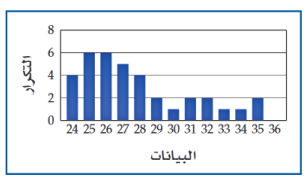
معظم البيانات تتركز في **اليمين**

وقليل منها في **اليسار**

مثال

حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواء موجبا أو سالبا أو موزعة توزيعا طبيعيا

البيانات	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
التكرار	4	6	6	5	4	2	1	2	2	1	1	2



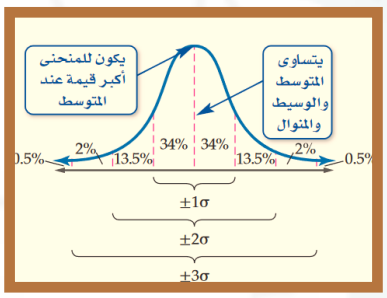
الإجابة : التواء لليمين (التواء موجب)

التوزيع الطبيعي

القانون التجريبي

يمكن استعماله لوصف المساحات تحت المنحنى الطبيعي .

يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ الاتية :



- تقع 68% تقريبا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - \sigma , \mu + \sigma)$
- تقع 95% تقريبا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 2\sigma , \mu + 2\sigma)$
- تقع 99% تقريبا من البيانات ضمن الفترة $(\pi - 3\sigma , \mu + 3\sigma)$

مثال

المتوسط لتوزيع طبيعي 34 ، وانحرافه المعياري 5 . اوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ X عن 24
(أي أوجد $(P(x) > 24$

خطوات الحل

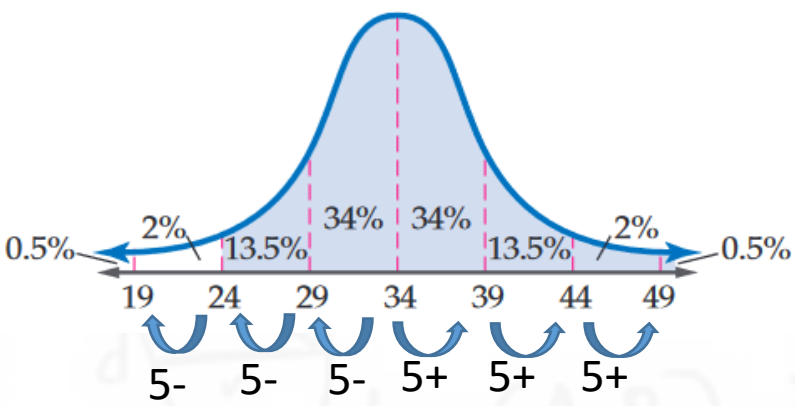
أولا : نضع المتوسط في المركز

ثانيا : نوجد القيم وذلك عن طريق إضافة الانحراف المعياري للمتوسط عن يمينه و طرح الانحراف المعياري من المتوسط عن يساره .

ثالثا : نرسم منحنى التوزيع

رابعا : نظلل المنطقة التي تمثل الاحتمال المطلوب

$$P(X > 24) = (13.5 + 34 + \ 34 + 13.5 + 2 + 0.5) = 97.5\%$$



قيم نفسك

توزعت درجات طلاب إحدى الكليات في امتحان للقبول توزيعا طبيعيا بمتوسط 78 ، وانحراف معياري يساوي 13 ، فما نسبة الطلاب الذين كانت درجاتهم بين 52 ، 78

.....

ارسم منحنى التوزيع الطبيعي ، ثم اجب عن المطلوب .

اذا كانت درجات الطلاب في مادة الرياضيات للصف الثالث الثانوي ، موزعة توزيعا طبيعيا بمتوسط 30 ، و انحراف معياري 5 ، فأوجد المئين الذي يقابل الدرجة 30 .

.....

.....

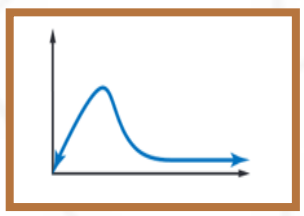
.....

.....

.....

.....

ما الوصف الأفضل لمنحنى التوزيع الاحتمالي الممثل أدناه؟



توزيع سالب الالتواء

توزيع طبيعي

توزيع متماثل

توزيع موجب الالتواء

التوزيعات ذات الحدين

التوزيعات ذات الحدين

توزيع ذات الحدين : هي تجربة احتمالية لها نتيجتان فقط نجاح أو فشل .

شروط تجربة ذات الحدين

1. يُعاد محاولة التجربة لعدد محدد (n) من المحاولات المستقلة .

2. كل محاولة لها نتيجتان متوقعتان ؛ نجاح S ، أو فشل F .

3. P(S) ويرمز له بالحرف P هو نفسه في كل محاولة . و احتمال الفشل P(F) ويرمز له بالحرف q .
العلاقة بين احتمال النجاح P ، واحتمال الفشل q هو $p + q = 1$.

4. المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات النجاح في n من المرات .

مثال

حدد ما اذا كانت تمثل هذه التجربة تجربة ذات الحدين ام لا .

تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6 ، ثم ألقي المكعب 10 مرات ، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5 .

الحل / ١. $P = \frac{1}{6}$ و $q = \frac{5}{6}$

٢. لها نتيجتان ظهور الرقم 5 أو عدم ظهوره

٣. المكعب يلقى 10 مرات إي (X = 0 ،1،2،34،5،6،7،8،9،10)

٤. $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$

تجربة ذات الحدين .

✓ سالت 15 شخصا عن أعمارهم ، والمتغير العشوائي X يدل على أعمار هؤلاء الأشخاص .

الإجابة / لا تمثل تجربة ذات الحدين لانه يسال اشخاص عن اعما هم فقط ولايوجد فشل او نجاح) الشرط الأول ما تحقق .

التوزيعات ذات الحدين

توزيع النتائج المتوقعة لتجربة ذات الحدين والاحتمالات المرتبطة بها تسمى بتوزيع ذات الحدين .

صيغة احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح في X مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو :

$$P(X) = {}_nC_X\, p^X\, q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!X!}\, p^X\, q^{n-X}$$

حيث P احتمال النجاح و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة .

مثال

إذا علمت أن نسبة النجاح في توزيع ذي حدين 60% ، ويوجد 18 محاولة ، فأجب .

- ما احتمال ألا توجد أي محاول ناجحة ؟

الحل /

$P=0.6$ ، $q = 0.4$ ، $n = 18$ ، $x = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 18\}$

$$P(X) = {}_nC_X\, p^X\, q^{n-X}$$

$$P(0) = {}_{18}C_0\, (0.6)^0\, (0.4)^{18}$$

$$= \% \; 0.0000069$$

- ما احتمال أن توجد 12 محاولة فاشلة ؟

$$P(X) = {}_nC_X\, p^X\, q^{n-X}$$

$$P(6) = {}_{18}C_6\, (0.6)^6\, (0.4)^{12}$$

$$= 1.45 \; \%$$

التوزيعات ذات الحدين

تستعمل الصيغ الاتية ، لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين :

المتوسط الحسابي لتوزيع ذات الحدين

$$\mu = n\,\rho$$

التباين لتوزيع ذات الحدين

$$\sigma^2 = npq$$

الانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$$

مثال

أوجد الوسط و الانحراف المعياري والتباين في اختبار نهائي ، أكد 35 % من الطلاب أنهم أجابوا بشكل اعتيادي . إذا اختبر 5 طلاب عشوائيا ، وتم سؤالهم عما إذا أدوا الاختبار بشكل اعتيادي .

$n = 5$ ، $p = 0.35$ ، $q = 1 - 0.35 = 0.65$

المتوسط الحسابي : $\mu = np$

$$\mu = 5(0.35) = 3.36$$

التباين : $\sigma^2 = npq$

$$\sigma^2 = 5(0.35)(0.65) = 1.747$$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{npq}$

$$\sigma = \sqrt{1.747} \approx 1.322$$

$$\mu = 3.36$$

$$\sigma^2 = 1.747$$

$$\sigma \approx 1.322$$

تقريبًا 3 طلبة من بين 7 يدرسون لغة عالمية في سنة التخرج

التوزيعات ذات الحدين

تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

في التوزيع ذي الحدين عندما تمثل n عدد المحاولات ، واحتمال النجاح p ، واحتمال الفشل q ، ويكون

$$np \geq 5, nq \geq 5$$

، يمكن تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = np$ ، وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$

مثال

اشارت دراسة سابقة الى ان 64% من الخريجين يرون ان سنوات الجامعة كانت ممتعة . وقد نفذ بلال دراسة مسحية على 300 من هؤلاء الخريجين اختارهم عشوائيا . ما احتمال ان يوافق 200 خريج منهم على الأقل على ما جاء في الدراسة الإحصائية السابقة ؟

الحل /

$q = 0.36$ ، $p = 0.64$ ، $n = 300$

وحيث ان :

$$np = 300(0.64) = 192 > 5$$

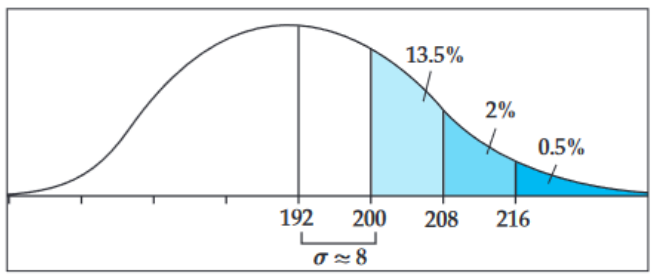
$$nq = 300\ (\ 0.36\ ) = 108 > 5$$

نستعمل التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو الاتي :

$$\mu = np$$
$$= 300(\ 0.64) = 192$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$
$$= \sqrt{300(0.64)(0.36)}$$
$$\approx 8.31$$

العدد 200 أكبرمن المتوسط بمقدار انحراف معياري واحد تقريبا ، ولذا يكون احتمال أن يوافق 200 خريج على الأقل يساوي 16% تقريبا .



قيم نفسك

اذا كان احتمال نجاح عملية جراحية 90 % ، فما احتمال نجاح عملية واحدة على الأقل إذا أجريت العملية ثلاث مرات ؟

0.999 | 0.9 | 0.1 | 0.001

كسب لاعب 50% من مباريات التي لعبها خلال مسيرته الرياضية ، ما احتمال أن يكسب3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة ؟

1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{5}{16}$

يتوزع عمر 10000 بطارية توزيعا طبيعيا بوسط 300 يوم وانحراف معياري 40 يوما ، كم بطارية يقع عمرها بين 340 – 260 يوما ؟

2500 | 3400 | 5000 | 6800

إذا كان احتمال النجاح 40% ، وكان المتوسط 20 في تجربة ذات الحدين ، فكم عدد المحاولات ؟

20 | 30 | 40 | 50

أخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام العشر القادمة 40% ، أوجد التباين .

2.4 | 4 | 6 | $\sqrt{2.4}$

النهايات والاشتقاق

تقدير النهايات بيانيًا

في هذا الباب يتمحور علم التفاضل و التكامل حول مسألتين :

- إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعه عليه .
- إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لدالة والمحور x .

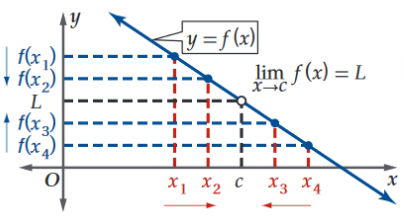
وتعد مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين .

النهاية هي أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات وبشكل خاص في التفاضل والتكامل

نهاية الدالة

كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين (يمين ويسار c) ، فإن نهاية f(x) عندما تقترب x من c هي L .

وتكتب علي الصورة :



$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

يمكنك تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية f(x) عندما تقترب x من العدد c وذلك من خلال تمثيل الدالة بيانيا ، أو إنشاء جدول لقيم f(x) .

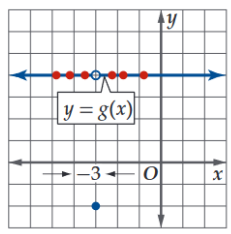
نتعلم النهايات في نوعين وهما

1. النهاية عند نقطة $\lim_{x \to c} f(x)$

توجد حالتان لذلك

❖ موجودة (عندما تكون نهاية f(x) تقترب من c . اذا وفقط اذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين و متساويتين أي) :

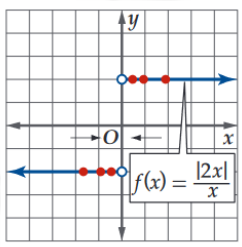
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$



❖ النهاية غير موجودة

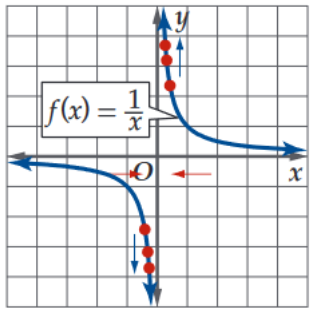
a) اذا كانت النهايتان من اليسار ومن اليمين غير متساويتين لكل منها قيمه مختلفة عن الأخرى) .

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$$

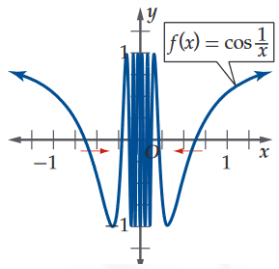


تقدير النهايات بيانيًا

b) لا تكون النهاية موجودة عند زيادة او نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x \to c$



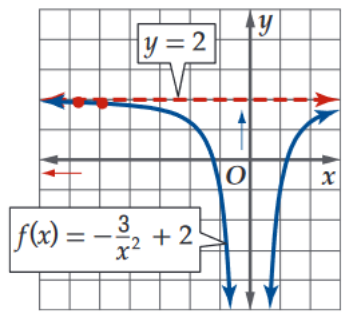
c) عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c



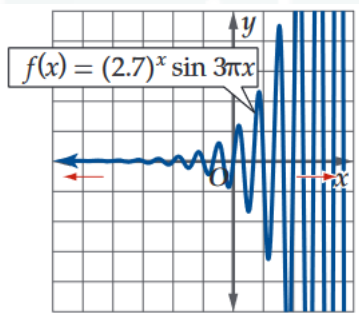
٢. النهاية عند المالانهاية (تدرس عند الأطراف) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

تدرس حالتين هما

➢ موجودة (تقترب قيم $f(x)$ من عدد معين عندما يوجد خط تقارب افقي وبذلك تزداد القيم او تنقص بشكل غير محدود.



➢ غير موجودة (تتذبذب قيم الدالة بين قيمتين مختلفتين (والتذبذب متباعد)



تقدير النهايات بيانيًا

حساب النهايات جبريًا

من الطرق الجبرية لإيجاد قيمة نهايات الدوال نقوم أولا بالتعويض المباشر :

نهايات الدوال عند نقطة

نهايات الدوال الثابتة عند أي نقطة c

$$\lim_{x\to c} k = K$$

نهايات الدالة المحايدة عند نقطة c

$$\lim_{x\to c} x = c$$

خصائص النهايات

اذا كان k, c عددين حقيقيين ، n عددا صحيحا موجبا ، وكانت النهايتان $\lim_{x\to c} f(x)$, $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودتين فان

الخصائص الاتية صحيحة :

خاصية المجموع

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

خاصية الفرق

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$$

خاصية الضرب في عدد

$$\lim_{x\to c}\left[k\ f(x)\right] = k \lim_{x\to c} f(x)$$

خاصية الضرب

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)\ .\ g(x)\right] \cdot \lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} f(x)$$

خاصية القسمة

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$ ، حيث ان $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة

$$\lim_{x\to c} (f(x))^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$$

خاصية الجذر النوني

خاصية الجذر النوني : $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ، اذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$

$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ، حيث n عدد زوجي .واذا كان n عدد فردي فان

تقدير النهايات بيانيًا

التحليل لحساب النهايات

يسمى ناتج التعويض المباشر في النهاية على الصورة $\lim_{x\to c} f(x) = \frac{0}{0}$ بالصيغة غير محددة .

التخلص منها يكون بـ .....

- نحلل البسط أو المقام أوكليهما ، ثم نختصر العوامل المشتركة .
- نضرب كلا من البسط والمقام بمرافق المقام أو بمرافق البسط للتخلص الجذر التربيعي من المقام او البسط (الدوال الجذرية) .
- نأخذ عامل مشترك اذا وجد .
- التعويض مباشرة مره أخرى .

نهايات الدوال عند الما لانهاية

نهايات دوال القوى

لاي عدد صحيح موجب n

n عدد زوجي فإن $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$

n عدد فردي فإن $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$

نهايات دوال كثيرات الحدود

نعوض في الحد الرئيس (ذو الدرجة الأكبر) تعويض مباشر .

اذا كانت $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود فان

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

نهايات دالة المقلوب

نهاية دالة المقلوب عند الموجب او سالب ما لانهاية هي الصفر .

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

تقدير النهايات بيانيًا

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام

النهاية تساوي $\lim_{x\to\infty}$ (الحد الرئيس للبسط) / (الحد الرئيس للمقام) (مع إشارتهم)

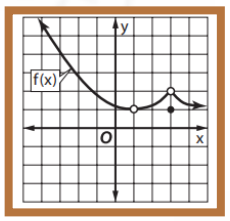
إذا كانت درجة البسط تساوي من درجة المقام

النهاية تساوي (معامل أكبر حد للبسط) / (معامل أكبر حد للمقام)

إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام

النهاية تساوي صفر

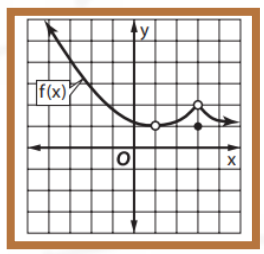
قيم نفسك



أوجد $\lim_{x\to 1} f(x)$ من خلال الرسمة ادناه.

3

1



أوجد $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ من الرسم ادناه .

2

3

احسب $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

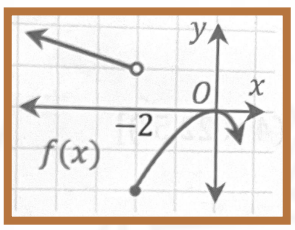
$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

اذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{3+|x|} = 2$ فان قيمة A هي ...

6

2



نقدر $\lim_{x\to -2} f(x)$ من الشكل ادناه .

غير موجودة

-2

المشتقات

مشتقة

ميل مماس المنحنى عند أي نقطة على الدالة

السرعة اللحظية

ملاحظة

المشتقات

اذا طلب في السؤال إيجاد ميل المماس لمنحنى أو إيجاد السرعة اللحظية فانه في هذه اللحظة نستخدم الاشتقاق افضل من القوانين .

رموز الاشتقاق للدالة $y = f(x)$

y'

$\frac{dy}{dx}$

$\frac{d}{dx}$ وغيرها

قواعد أساسية للاشتقاق

مشتقة الدالة الثابتة

f(x) = c ◄ $f'(x)$ = 0

مشتقة الدالة الخطية

f(x) = a x + c ◄ $f'(x)$ = a

مشتقة القوى

$f(x) = x^n$ ◄ $f'(x) = n\, x^{n-1}$

مشتقة المجموع والفرق

اذا كانت لدينا الدالتين $q(x)$ ± g(x) = f(x) فإن

$$f'(x) = g'(x) \pm q'(x)$$

مشتقة ضرب دالتين

اذا كانت لدينا الدالتين $f(x) = g(x) \cdot q(x)$ فإن :

$$f'(x) = g'(x) \cdot q(x) + q'(x) \cdot g(x)$$

مشتقة دالتين = مشتقة الأولى في الثانية + مشتقة الثانية في الأولى .

مشتقة قسمة دالتين

اذا كانت لدينا الدالتين q(x) ، g(x) فان : $f(x) = \frac{g(x)}{q(x)}$

$$f'(x) = \frac{g'(x)\, q(x) - g(x)\, q'(x)}{(q(x))^2}$$

(مشتقة القسمة = (مشتقة البسط) في المقام - (مشتقة المقام) في البسط) / (المقام)^2

تعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة

خطوات إيجاد للقيم القصوى للدالة $f(x)$ على فترة مغلقة

1 نوجد النقاط الحرجة وذلك بجعل $f'(x) = 0$

2 لابد من التأكد ان النقطة الحرجة من ضمن الفترة المعطاة .

3 نعوض بالنقطة الحرجة واطراف الفترة المعطاة في الدالة .

4 اكبر قيمة نحصل عليها تسمى قيمة عظمى واصغر قيمة نحصل عليها تسمى قيمة صغرى .

قيم نفسك

أوجد مشتقة الدالة $g(x) = \frac{x^2 + 4}{3 - x^2}$

$g(\grave{x}) = \frac{14x}{(3 - x^2)}$

$g(\grave{x}) = \frac{14x}{(3 - x^2)^2}$

اوجد المشتقة $f(x) = 3x^2 + x$

$x^3 + \frac{x^2}{2}$

6x + 1

اوجد السرعة المتجهة اللحظية لجسم أعطي ارتفاعه بالمعادلة $h(t) = t^2 + \sqrt{t}$ **عند أي لحظة** t .

$\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} + 2t$

$\frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}} + 2t$

اوجد معادلة ميل منحنى الدالة $y = (x + 3)^2$ **عند أي نقطة عليه.**

$m = 2(x - 3)$

m = 2x +6

ما المشتقة السادسة للدالة التالية $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 12$

3

0

المساحة تحت المنحنى و التكامل

المساحة تحت المنحنى

- يمكن حساب المساحة تحت المنحنى وذلك بتقريب مساحة الشكل الغير منتظم من خلال استعمال مساحة شكل هندسي معلوم المساحة كالمستطيل .
- ويمكن أيضا تقريب المساحة المحصورة بين أي منحنى والمحور x باستخدام مجموعة من المستطيلات المتساوية العرض .

للمعلومية : مساحة المستطيل = الطول × العرض

خطوات إيجاد المساحة تحت المنحنى باستعمال المستطيلات

نقوم بتمثيل الدالة والمستطيلات ونتبع الخطوات الاتية :

نوجد طول الفترة عن طريق طرح بدايتها من نهايتها .

نوجد عرض كل مستطيل بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات .

نقسم الفترة على حسب عدد المستطيلات وعرض كل مستطيل

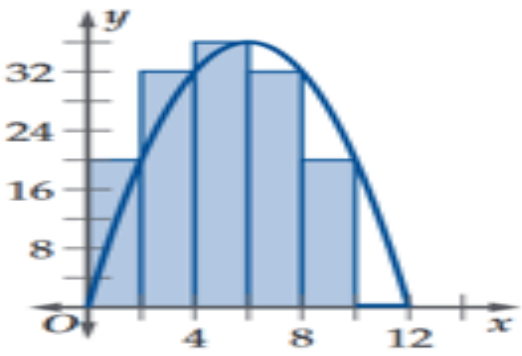
نرسم على كل فترة جزئية مستطيلا أحد بعديه يساوي طول الفترة ، والبعد الاخر يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة .

نحسب مساحة كل مستطيل ونجمع الناتج لإيجاد المساحة التقريبية .

المساحة تحت المنحنى و التكامل

مثال

قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[\ 0\ ,\ 12\ ]$ باستعمال 6 مستطيلات . واستعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.



❖ نوجد طول الفترة $12 - 0 = 12$

❖ نوجد عرض المستطيل $12 \div 6 = 2$

❖ نقسم الفترة لست مستطيلات عرض كل منها يساوي 2

المساحة باستعمال 6 مستطيلات

$$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$$

$$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$$

$$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$$

$$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$$

$$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$$

$$2 \cdot F(12) = 0 = R_6$$

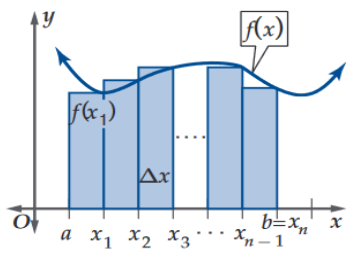
المساحة الكلية 280 وحدة مربعة .

معلومة

نلاحظ ان المستطيلات الأقل عرضا تمثل المساحة المطلوبة بصورة أفضل ، وتعطي تقريبا أدق للمساحة الكلية .

كلما استعملنا الأطراف اليسرى لتحديد ارتفاعات المستطيل ولكن قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة . وأن استخدام الأطراف اليمنى واليسرى ينتج عنه إضافة أجزاء قد لا تقع بين المنحنى والمحور x أو حذف أجزاء تقع بين المنحنى والمحور x .

للحصول على تقريب افصل للمساحة نستخدم الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات ثم نأخذ الوسط للقيمتين .



التجزئ المنتظم

هو تقسيم الفترة من a إلى b الى n من الفترات الجزئية المتساوية بالطول ، وطول كل فترة جزئية هي $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$

المساحة تحت المنحنى و التكامل

التكامل المحدد (مجموع ر يمان)

التكامل المحدد يعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a\ ,\ b]$ بالصيغة :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad , \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta \quad , \quad x_i = a + i\,\Delta x$$

وتحل المسائل باستخدام قواعد التكامل اسهل من (مجموع ريمان)

المساحة تحت المنحنى تحل بالتكامل

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة f(x) والمحور x في الفترة المغلقة $[a\ ,\ b]$ تعطى بالتكامل . ..

= مساحة المنحنى $\int_a^b f(x)dx$

الدوال الأصلية و التكامل غير المحدد

يُعطي التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

حيث F(x) دالة اصلية لـ f(x) ، C ثابت التكامل .

اوجد الدالة الاصلية للدالة التالية $f(x) = 4x^7$

الدالة المعطاة $f(x) = 4\,x^7$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت ، $F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$

$= \frac{x^8}{2} + C$

المساحة تحت المنحنى و التكامل

تكامل دالة القوة

اذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، فان تكاملها يساوي

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

تكامل ضرب دالة القوة بعدد ثابت

اذا كان $f(x) = kx^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، k عدد ثابت ، فان تكاملها يساوي

$$\int k\, x^n dx = \frac{k\, x^{n+1}}{n+1} + C$$

قاعدة المجموع والفرق وتكاملهم

اذا كان لـ $g(x)$ ، $f(x)$ دالتان أصليتان هما $G(x)$ ، $F(x)$ على الترتيب ، فان $F(x) \pm G(x)$ دالة اصلية لـ $f(x) \pm g(x)$ فإن تكاملهم هو

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = F(x) \pm G(x) + C$$

النظرية الأساسية في التكامل والتفاضل

اذا كانت $F(x)$ دالة اصلية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فان

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$

خصائص التكامل المحدد

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

قيم نفسك

قيمة $\int (x^3 - 4x)\ dx$

$\frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$

$x^4 - 4x^2 + C$

اوجد $\int_0^3 0.8\, x^3\, dx$

21.6

16.2

أوجد $\int_1^3 (4x^3 - 3x)\ dx$

68

95

ما الدالة الاصلية للدالة $f(x) = 8x^3 - 3x^2$

$8x^4 - 3x^3 + C$

$2x^4 - x^3 + C$

اذا كان $\int_{-1}^{2} (-x^2 + a)dx = 27$ فأوجد قيمة a ...

10

11

قيم نفسك

اذا كان $\int_{0}^{4}(x+k)dx = 20$ فما قيمة k ؟

3

-3

اذا كان $\int_{1}^{n}4x^3dx = 15$ فما قيمة n ؟

2

4

ما مساحة المنطقة المحصورة بين $y = -x^2 - 3x + 6$ والمحور x ، في الفترة $[2, 6]$

93.33 وحدة مربعة تقريبا

86.67 وحدة مربعة تقريبا

المراجع

- ماجروهيل رياضيات ثاني ثانوي (رياضيات 6) الفصل الدراسي الأول ، وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار .

- الرياضيات للصف الثالث الثانوي - دليل التقويم - الفصل الدراسي الثاني .

- من أسئلة التحصيلي .

الخاتمة

نسأل الله قبول هذا العمل ،
و أن يكون هذا الإنجاز قد نال شيئًا من إعجابكم .

تم بحمد الله وتوفيقه