كن ملهماً لنفسك ، عظيماً بما تسعى له ، وأبدأ يومك متفائلاً ومتطلعاً للأفضل.. صباح الإيجابية والكفاح

الفصل الأول

تحليل الدّوال

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

موضوع الدرس : الدوال

التاريخ : / / ١٤٤٣

فيما سبق:

درستُ مجموعات الاعداد ورموزها. (مهارة سابقة)

والآن:

- أصفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- أتعرف الدوال، وأحسب قيمها، وأجد مجالاتها.

المفردات

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function

الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

الدالة
function

رمز الدالة
function notation

لماذا:

تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية : تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

موضوع الدرس : الدوال

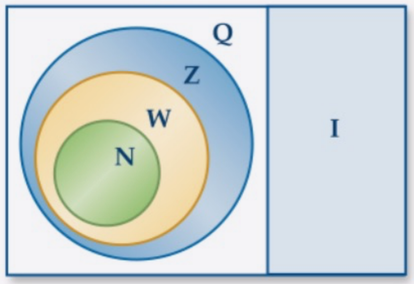
التاريخ : / / ١٤٤٣

مفهوم أساسي

الأعداد الحقيقية

الرمز	المجموعة	أمثلة
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3\ldots$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4\ldots$

الأعداد الحقيقيّة R



يمكنك وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة للمجموعة**؛ إذ تستعملُ الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز " | " حيث، والرمز " ∈ " ينتمي إلى أو عنصر في .

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

- الأعداد x حيث...
- x لها هذه الخصائص...
- x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.

مثال ١ استعمال الصفة المميزة

اكتب كلا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, \ldots\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \geq 8, x \in W\}$

وتقرأ مجموعة الأعداد x، حيث x أكبر من أو تساوي 8، وَ x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية.

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على -2 وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

موضوع الدرس : الدوال

التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك

1A) $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots.\}$

1B) $x \leq -3$

1C) $-1 \leq x \leq 5$

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان "(" أو ")" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

قراءة الرياضيات

غير محدودة :
تسمى الفترة غير محدودة إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون حدود (دون توقُّف) .

مثال ؟

استعمال رمز الفترة

اكتب كلا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-8 < x \leq 16$ $(-8, 16]$

b) $x < 11$ $(-\infty, 11)$

c) $x \leq -16$ أو $x > 5$ $(-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

إرشادات للدراسة

الرمزان ∪ ، ∩ :

يُقرأ الرمز "∪" (اتحاد)، ويعني: جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين.

يُقرأ الرمز "∩" (تقاطع)، ويعني: جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.

موضوع الدرس : الدوال

التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك

2A) $-4 \leq y < -1$

2B) $a \geq -3$

2C) $x > 9$ أو $x < -2$

تمييز الدالة : تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A (المدخلات) مع عناصر من مجموعة مثل B (المخرجات)، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها، وهناك أربع طرق لتمثيل العلاقة بين مجموعتين من الأعداد الحقيقية هي:

1) **لفظيًا :** جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى.
مثلًا: يرتبط كل عنصر من المجال بالعنصر الذي يزيد عليه قيمةً بمقدار 2 من المدى.

2) **عدديًا :** جدول من القيم أو مخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصرًا من المجال (قيمة x) بعنصر من المدى (قيمة y).
مثلًا: $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3) **بيانيًا :** تحديد نقاط في المستوى الإحداثي تمثّل الأزواج المرتبة.

4) **جبريًا :** معادلة جبرية تربط بين الإحداثيين x, y لكل زوج من الأزواج المرتبة. مثلًا: $y = x + 2$

أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

موضوع الدرس : الدوال

التاريخ : / / ١٤٤٣

مفهوم أساسي

الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

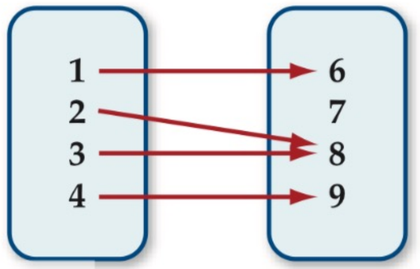
مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثَّلة في المخطط المجاور تمثِّل دالةً.

حيث تمثّل المجموعة A مجال الدالة.

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.

وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.

المدى $= \{6, 8, 9\}$.



إرشادات للدراسة

المجال والمدى:

في هذا المفهوم الأساسي، يمكن أن يستعمل الرمز D للتعبير عن المجال، والرمز R للتعبير عن المدى، أي أن:

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{6, 8, 9\}$

موضوع الدرس : الدوال

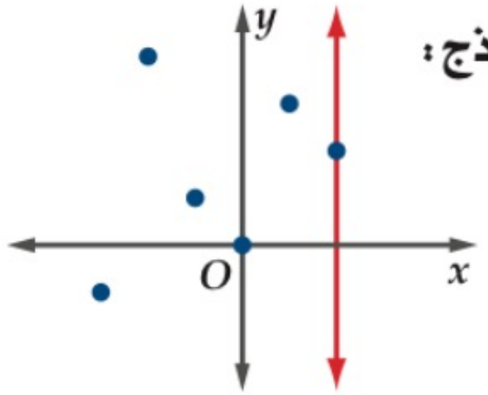
التاريخ : / / ١٤٤٣

مفهوم أساسي

اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمَثِّلُ مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

النموذج:



مثال ٣

تحديد العلاقات التي تمثّل دوال

في كل مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x أم لا:

a) تمثّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

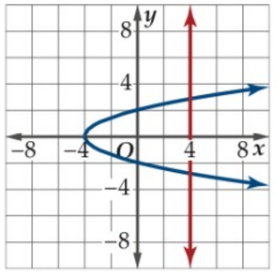
ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y؛ إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد؛ لذا فإن y تمثل دالةً في x .

b)

x	y
-8	-5
-5	-4
0	-3
3	-2
6	-3

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ، وعليه فإن y تمثل دالةً في x .

c)



بما أنه يوجد خط رأسي مثل: $x = 4$ يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة ، فإنّ y لا تمثّل دالةً في x .

d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت y تمثّل دالةً في x ، حلّ المعادلة بالنسبة لِـ y.

$y^2 - 2x = 5$	المعادلة الأصلية
$y^2 = 5 + 2x$	أضف $2x$ لكلا الطرفين
$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$	خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

y لا تمثّل دالةً في x؛ لأن كل قيمة من قيم x الأكبر من $2.5-$ ترتبط بقيمتين لِـ y، إحداها موجبة ، والأخرى سالبة.

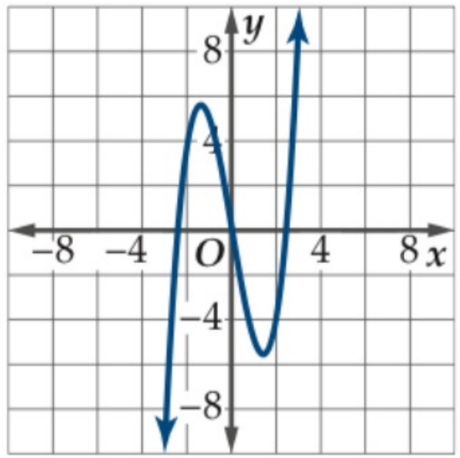
تحقق من فهمك

3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك.

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

3C)



3D) $3y + 6x = 18$

مفهوم

يُستعملُ $f(x)$ **رمزًا للدالة** ، ويُقرأ (f الـ x) ويعني قيمة الدالة f عند x . وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x ، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

المعادلة	الدالة المرتبطة بالمعادلة
$y = -6x$	$f(x) = -6x$

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى **متغيّرًا مستقلًا**. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى **متغيّرًا تابعًا**.

مثال ٤ إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

a $f(6)$

لإيجاد $f(6)$، عوّض 6 مكان x في الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$.

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$	عوّض 6 مكان x
$= 36 + 48 - 24$	بسّط
$= 60$	بسّط

b $f(-4x)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$	عوّض $-4x$ مكان x
$= 16x^2 - 32x - 24$	بسّط

c $f(5c + 4)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$	الدالة الأصلية
$f(5c + 4) = (5c + 4)^2 + 8(5c + 4) - 24$	عوّض $(5c + 4)$ مكان x
$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$	فك الأقواس $(5c + 4)^2$ و $8(5c + 4)$
$= 25c^2 + 80c + 24$	بسّط

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-2x+1}$، فأوجد قيمة الدالة في كلٍّ مما يأتي:

(4A $f(12)$

(4B $f(6x)$

(4C $f(-3a+8)$

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًّا.

مثال ٥ تحديد مجال الدالة جبريًا

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

(a $f(x) = \dfrac{2+x}{x^2-7x}$

تكون العبارة $\dfrac{2+x}{x^2-7x}$ غير معرّفة إذا كان المقام صفرًا، وبحل المعادلة $x^2-7x=0$ ، فإن القيم المستثناة من المجال هي $x=0$ و $x=7$، وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $x=0$ و $x=7$ ، أي $D=\{x \mid x\neq 0, x\neq 7, x\in R\}$ أو $D=(-\infty,0)\cup(0,7)\cup(7,\infty)$.

(b $g(t)=\sqrt{t-5}$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف، فيجب أن تكون $t-5\geq 0$ ؛ أي أن مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 أي أن $D=\{x \mid x\geq 5, x\in R\}$ أو $D=[5,\infty)$.

إرشادات للدراسة

مجال الدالة :

يمكنك كتابة مجال الدالة في المثال 5a بالطريقة المختصرة بالشكل:

$D=R-\{0,7\}$

إرشادات للدراسة

تسمية الدوال:

يمكنك التعبير عن الدالة ومتغيرها المستقل برموز أخرى فمثلًا،

$f(x)=\sqrt{x-5}$

و $g(t)=\sqrt{t-5}$

يعبران عن الدالة نفسها.

موضوع الدرس : الدوال

التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك

(5A $f(x) = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$

(5B $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$

(5C $g(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

موضوع الدرس : الدوال

التاريخ : / / ١٤٤٣

مثال من واقع الحياة

إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

ن طول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 & , \quad 63 < x < 66 \\ 3x - 132 & , \quad 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 & , \quad x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$ تعريف الدالة في الفترة $66 \le x \le 68$

$h(67) = 3(67) - 132$ عوّض 67 مكان x

$= 201 - 132 = 69$ بسّط

بناءً على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$ لايجاد $h(72)$.

$h(x) = 2x - 66$ تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$h(72) = 2(72) - 66$ عوّض 72 مكان x

$= 144 - 66 = 78$ بسّط

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.

تحقق من فهمك

6) سرعة : إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t & , \quad 0 \le t \le 15 \\ 60 & , \quad 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 & , \quad 240 \le t \le 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A) $v(5)$ **6B)** $v(15)$ **6C)** $v(245)$

إرشادات للدراسة

سرعة السيارة :
تقاس سرعة السيارة عادة بالميل أو بالكيلومتر لكل ساعة، ويمكن أن تتغير كل ثانية ما لم يستعمل مثبت السرعة.

مسائل مهارات التفكير العليا

53) اكتشف الخطأ: أراد كلّ من عبد الله وسلمان تحديد مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. فقال عبد الله: إن المجال هو $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. في حين قال سلمان: أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in R\}$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

54) اكتب مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{(x + 3)(x + 1)(x - 5)}$ باستعمال كل من رمز الفترة والصفة المميزة للمجموعة. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟

موضوع الدرس : الدوال

التاريخ : / / ١٤٤٣

تدريب على الإختبار

73) أي العبارات الآتية صحيحة دائمًا:

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

74) أيٌّ مما يأتي يمثل مجال الدالة:

$$h(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$$

A $x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

D $x \neq \frac{3}{2}$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تم بحمد الله

الواجب في منصة مدرستي

حرصك على حضور الدرس وحل الواجب دليل على تفوقك

وتميزك ...

بارك الله جهودك 🌹