حلمك ليس له تاريخ إنتهاء ، خُذ نفساً عميقاً وأعد الكرّة مرةً ومرة

الإتصال والنهايات

إعداد : شيخة المرزوقي

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

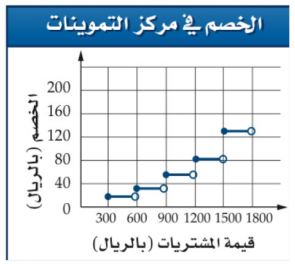
المفردات:

الدالة المتصلة	عدم الاتصال القفزي
continuous function	jump discontinuity
النهاية	عدم الاتصال القابل للإزالة
limit	removable discontinuity
الدالة غير المتصلة	عدم الاتصال غير القابل للإزالة
discontinuous function	nonremovable discontinuity
عدم الاتصال اللانهائي	سلوك طرفي التمثيل البياني
infinite discontinuity	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

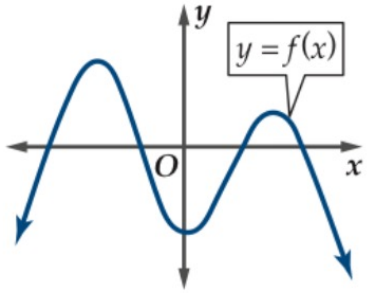
لماذا:

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.



الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

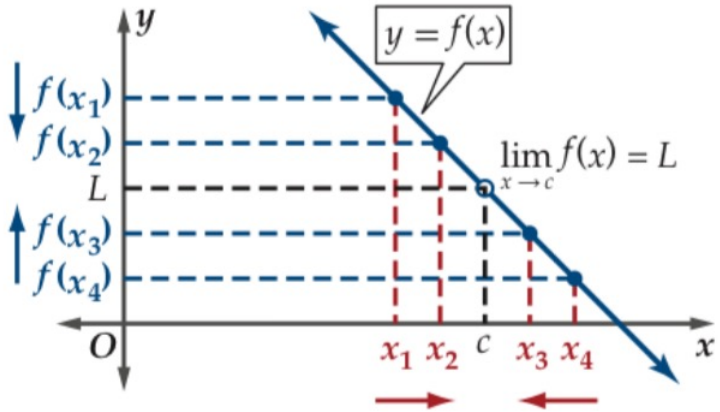
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مفهوم أساسي

النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز: نقول: إن $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.



موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

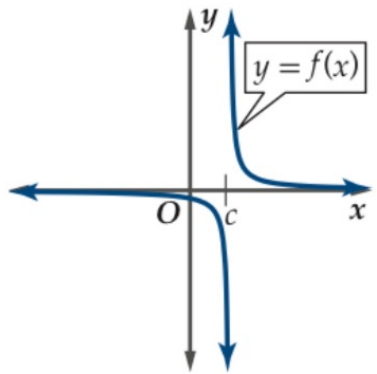
التاريخ : / / ١٤٤٣

مفهوم أساسي

أنواع عدم الاتصال

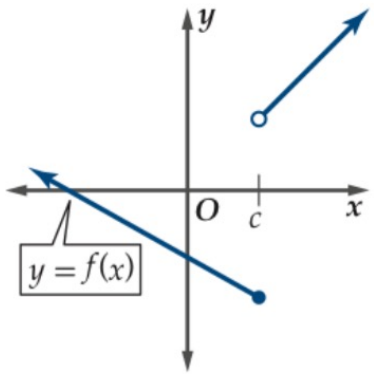
للدالة **عدم اتصال لانهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



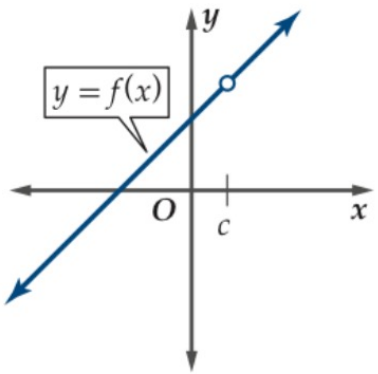
للدالة **عدم اتصال قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة **عدم اتصال قابل لإزالة** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

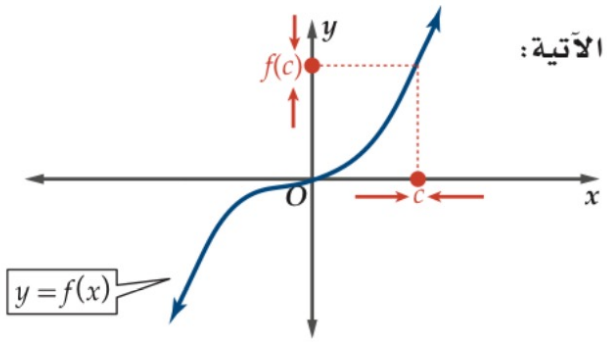
تقودنا الملاحظات السابقة إلى اختبار الاتصال الآتي:

ملخص المفهوم

اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.



إرشادات للدراسة

النهايات:

إن وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c.

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

$f(2) = 1$، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

2) هل $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

كوّن جدولًا يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

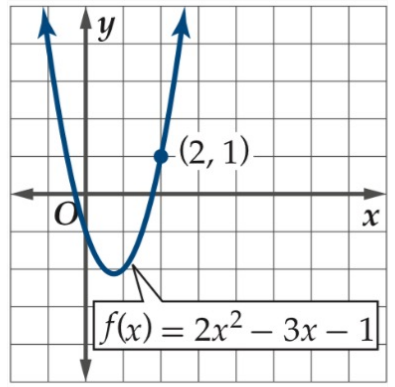
x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

3) هل $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ؟

بما أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ ، $f(2) = 1$ ، نستنتج أن $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.

الشكل 1.3.1



موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك :

(1A $f(x) = x^3$

(1B $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \quad x>-3\\ 2-x & , \quad x\le -3\end{cases}$ عند $x=-3$.

1) $f(-3)$ موجودة؛ لأن $f(-3)=5$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، في حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. و بما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 فإن للدالة $f(x)$ عدم اتصال قفزي عند $x=-3$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند $x=-3$.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

- الدالة المتصلة — continuous function
- النهاية — limit
- الدالة غير المتصلة — discontinuous function
- عدم الاتصال اللانهائي — infinite discontinuity
- عدم الاتصال القفزي — jump discontinuity
- عدم الاتصال القابل للإزالة — removable discontinuity
- عدم الاتصال غير القابل للإزالة — nonremovable discontinuity
- سلوك طرفي التمثيل البياني — end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ عند $x = -3, x = 3$.

عند $x = 3$

1) $f(3) = \frac{6}{0}$، وهي غير معرفة، أي أن $f(3)$ غير موجودة، وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = 3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار، وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة.

3) للدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهائي عند $x = 3$؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

عند $x = -3$

1) $f(-3) = \frac{0}{0}$ وهي غير معرفة، أي أن $f(-3)$ غير موجودة. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3.

x	−3.1	−3.01	−3.001	−3.0	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$	−0.164	−0.166	−0.167		−0.167	−0.167	−0.169

يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن $\lim_{x\to -3} f(x) \approx -0.167$.

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = -3$؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x\to -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = -3$. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك :

(2A $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، عند $x = 0$.

(2B $f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & , \quad x > 2 \\ 2 - x & , \quad x \leq 2 \end{cases}$ ، عند $x = 2$.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

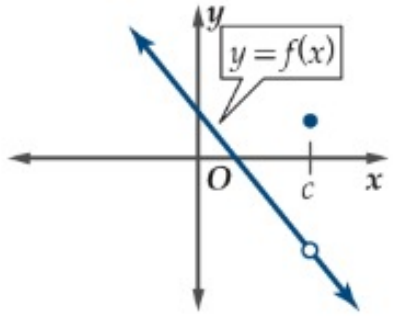
المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣



لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.

يصنّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال 3 إزالة عدم الاتصال

أعد تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$؛ لتصبح متصلة عند $x=4$.

1) $f(4)=\frac{0}{0}$، أي أن $f(4)$ غير موجودة.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 4.

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين، أي أن $\lim_{x\to4} f(x)=8$.

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x=4$؛ لأن $f(4)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x\to4} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=4$

4) بما أن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=4$، لذا أعد تعريف الدالة لتصبح

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4}, & x\neq4\\ 8, & x=4\end{cases}$$

لاحظ أن هذه الدالة أصبحت متصلة عند $x=4$؛ لأن $f(4)$ موجودة وتساوي 8

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function
النهاية
limit
الدالة غير المتصلة
discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك :

3) أعد تعريف الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x=1$.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

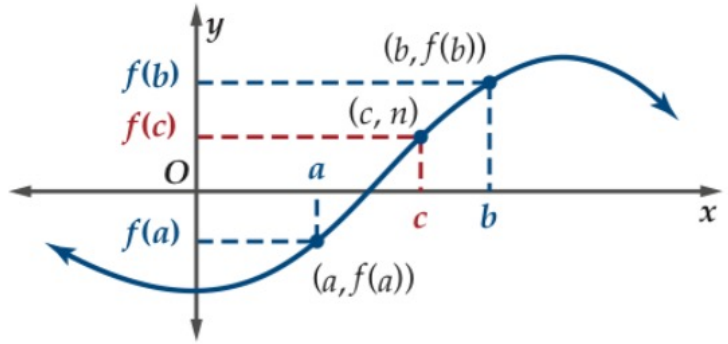
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة على فترة مغلقة، حيث تكون الدالة f متصلة على (a, b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة، وتكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاطها، وكانت متصلة من اليمين عند a ($\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$) ، ومتصلة من اليسار عند b ($\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$) . ومن الجدير بالذكر أن الدوال الكثيرة الحدود والجذرية والنسبية، تكون متصلة على مجالها دائمًا.

نـظـريـة

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a وَ b، بحيث $f(c) = n$.



نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b ، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

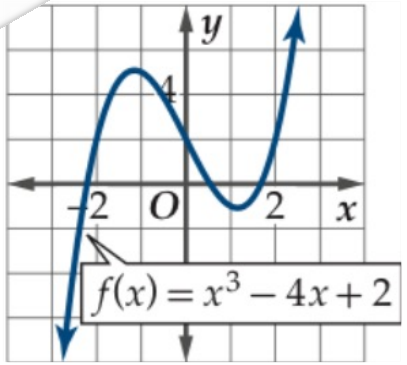
مـثال 4 تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-4, 4]$؛ لأنها كثيرة حدود، وبما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وبحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين -2 و -3 . لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على أن الأصفار الحقيقية للدالة تنحصر بين العددين -3 وَ -2 ، والعددين 0 وَ 1 والعددين 1 وَ 2. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.4 هذه النتيجة.

الشكل 1.3.4



فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function
النهاية
limit
الدالة غير المتصلة
discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك :

(4A $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

(4B $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

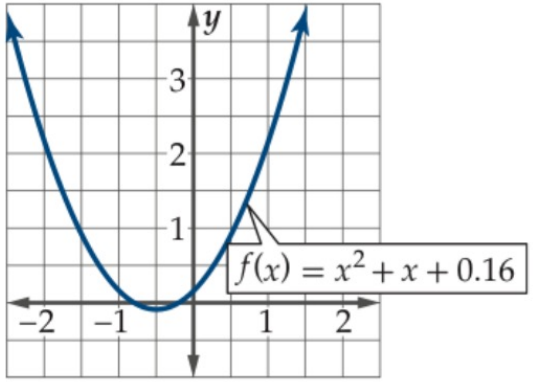
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًّا لصفر الدالة الحقيقي. أمَّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقّق من ذلك.

مثال 5 تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16



تعلم أن الدالة f متصلة على $[-3, 3]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وأن قيمها لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$ ؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0. مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من ذلك.

يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function
النهاية
limit
الدالة غير المتصلة
discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك :

(5A $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

(5B $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

إرشاد : استعمل الآلة الحاسبة البيانية (إذا لزم الأمر)

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

قراءة الرياضيات

النهايات:

تقرأ العبارة $\lim_{x\to\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

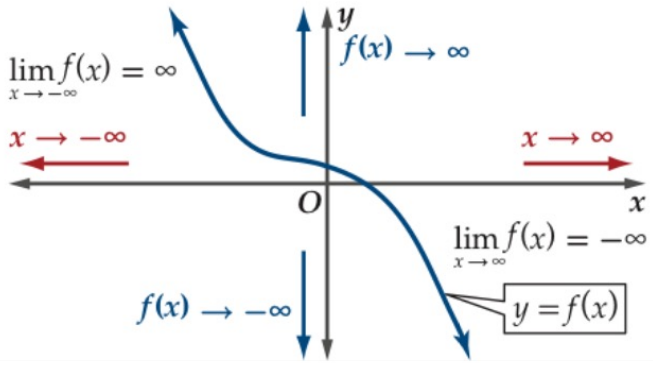
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

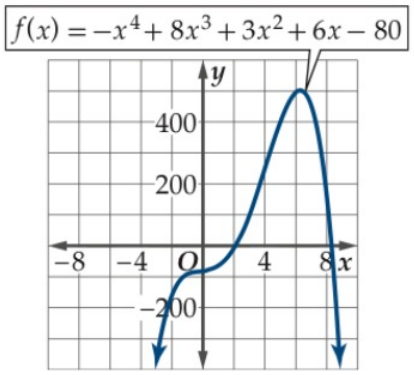
$\lim_{x\to\infty} f(x)$

أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.



مـثال 6 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، وأن $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$، أي استقصِ قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{8}$	-80	$-1 \cdot 10^{8}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وبالمثل عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

إرشادات للدراسة

في المثال 6، أوجدت قيم تقريبيّة لِـ $f(x)$ لأن ما يهمنا هو استقصاء نهاية الدالة f(x) عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، وليس حساب القيم الدقيقة لِـ $f(x)$.
وكذلك في المثال 7.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2-1)

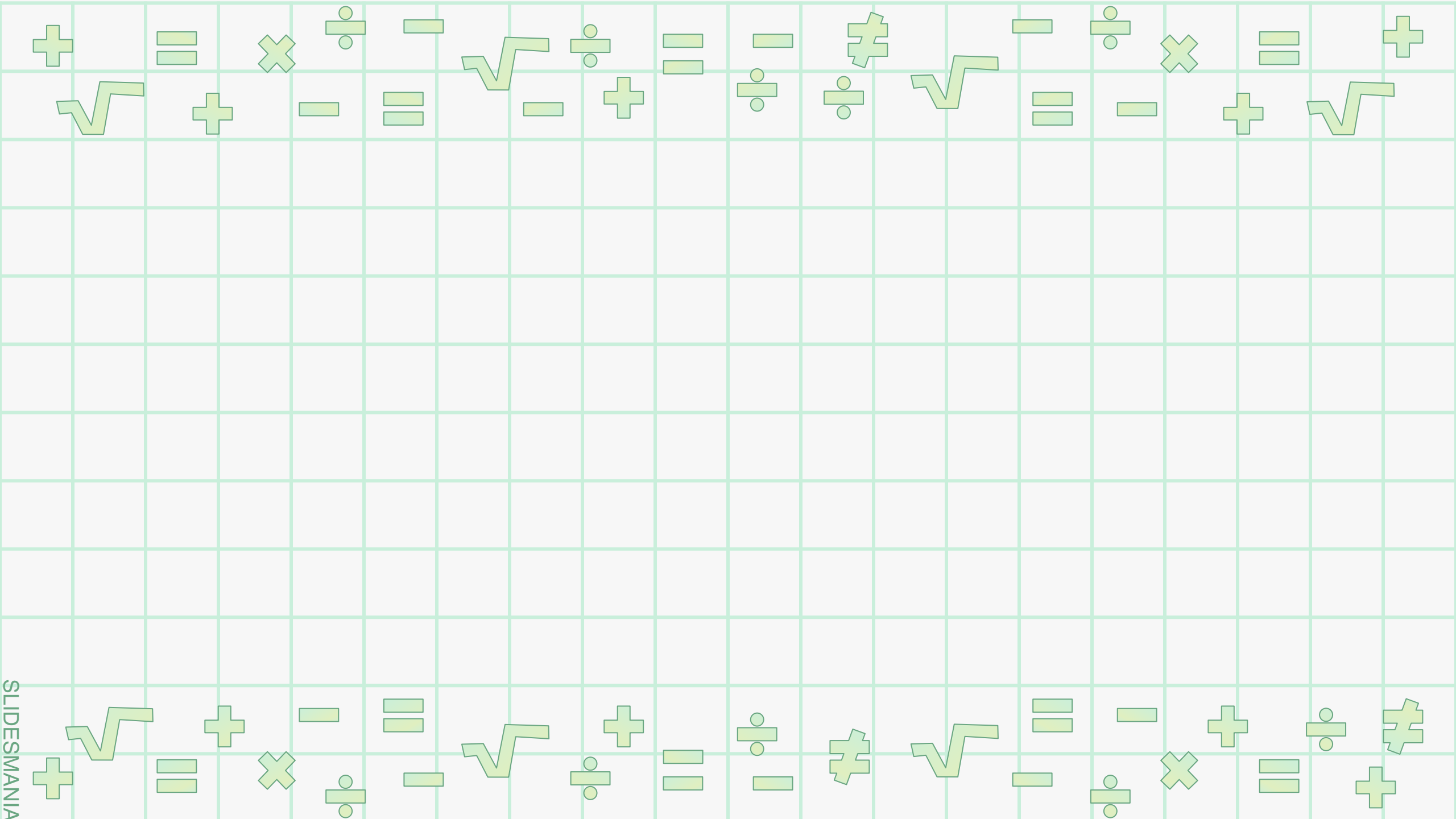
والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function
النهاية
limit
الدالة غير المتصلة
discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math



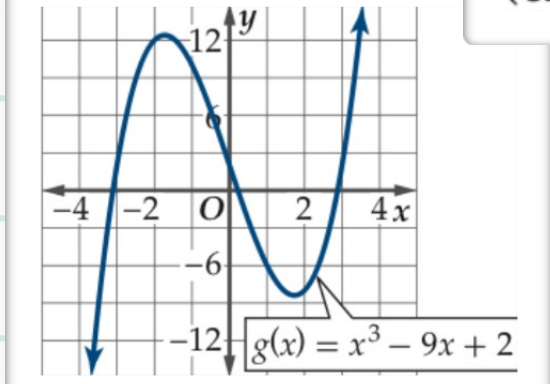
SLIDESMANIA

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

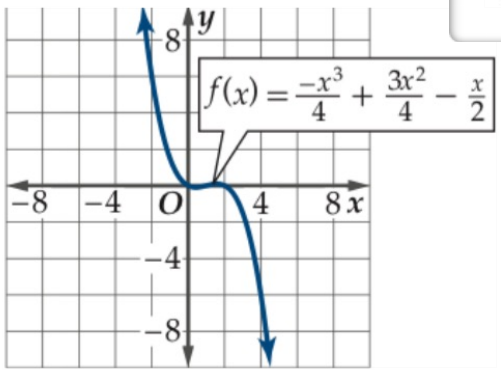
التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك :

(6A



(6B



فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

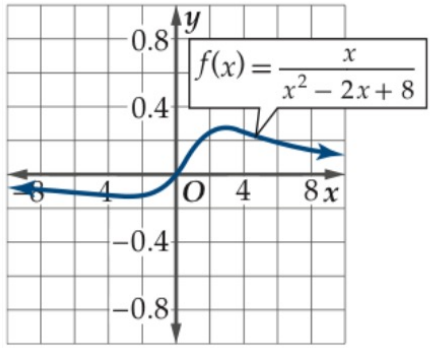
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

لاحظ أن بعض الدوال تقترب قيمها من ∞ أو −∞ عندما تزداد |x| بلا حدود، في حين تقترب قيم بعض الدوال من أعداد حقيقية دون أن تصل إليها بالضرورة.

مثال 7 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

التعزيز عدديًّا:

x	−10000	−1000	−100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	−0.001	−0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$، فإن $f(x) \to 0$ و عندما $x \to \infty$، فإن $f(x) \to 0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة
continuous function
النهاية
limit
الدالة غير المتصلة
discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي
infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي
jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة
removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة
nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

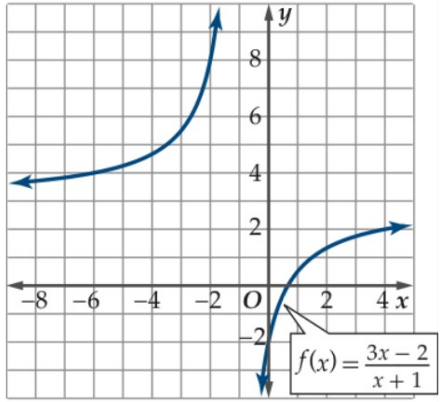
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

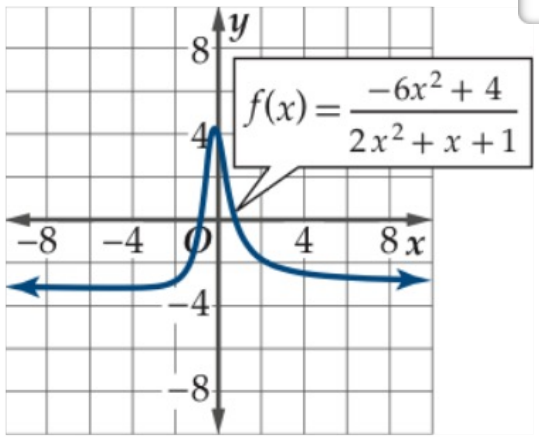
التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك :

(7A



(7B



فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إن معرفة سلوك طرفي التمثيل البياني يساعد على حل بعض المسائل الحياتية.

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

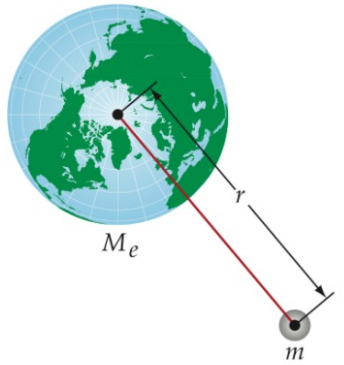
المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال 8 من واقع الحياة — تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني

فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟



المطلوب من المسألة وصف سلوك طرف التمثيل البياني لِـ $U(r)$ عندما تزداد قيم r كثيرًا، أي إيجاد $\lim_{r\to\infty} U(r)$.

وبما أن كلًّا من M_e , m , G ثوابت، فإن ناتج الضرب GmM_e عدد ثابت أيضًا. وعندما تزداد قيم r فإن قيمة الكسر $-\frac{GmM_e}{r}$ تقترب من الصفر؛ لذا فإن $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0$ ، ومن ثم إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض بصورة كبيرة، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

الربط مع الحياة

غالبًا ما تُستعمل العلاقة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ لإيجاد طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لقياس السرعة المطلوبة للتخلص من الجاذبية الأرضية وهي 25000 mi/h .

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

تحقق من فهمك :

8) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس : الإتصال والنهايات

التاريخ : / / ١٤٤٣

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: بيِّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

(39

$$f(x) = \frac{x^5 + x^6}{x^5}$$

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

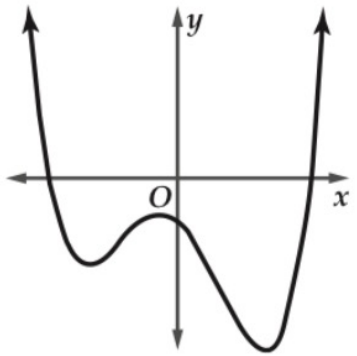
المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تدريب على اختبار

58) يبين التمثيل البياني أدناه منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$؟



1 **A**

2 **B**

3 **C**

4 **D**

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقّق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة	continuous function
النهاية	limit
الدالة غير المتصلة	discontinuous function
عدم الاتصال اللانهائي	infinite discontinuity
عدم الاتصال القفزي	jump discontinuity
عدم الاتصال القابل للإزالة	removable discontinuity
عدم الاتصال غير القابل للإزالة	nonremovable discontinuity
سلوك طرفي التمثيل البياني	end behavior

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تم بحمد الله

الواجب في منصة مدرستي

حرصك على حضور الدرس وحل الواجب دليل على تفوقك وتميزك ...

بارك الله جهودك

إعداد : شيخة المرزوقي

SLIDESMANIA