صباح الخير ، سنكسب رهان الحياة يوماً .. ماكان جهادنا على أحلامنا عبثا..

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها. (الدرس 4–1)

والآن:

- أقومُ بتعيين الدوال الرئيسة (الأم)، وأصفها، وأمثلها بيانيًّا.
- أقومُ بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة، وأمثلها بيانيًّا.

المفردات:

الدالة الرئيسة (الأم)
parent function

الدالة الثابتة
constant function

الدالة المحايدة
identity function

الدالة التربيعية
quadratic function

الدالة التكعيبية
cubic function

دالة الجذر التربيعي
square root function

دالة المقلوب
reciprocal function

دالة القيمة المطلقة
absolute value function

الدالة الدرجية
step function

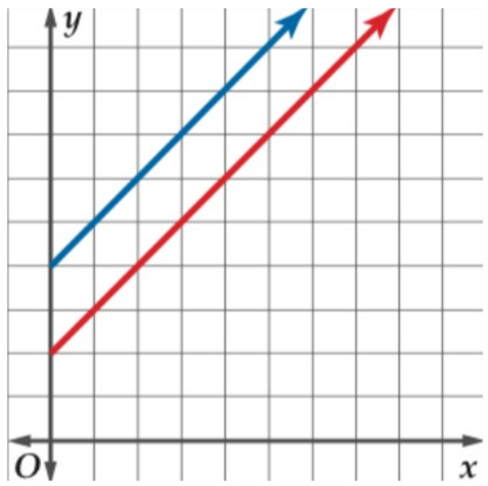
دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function

التحويل الهندسي
transformation

الإزاحة (الانسحاب)
translation

الانعكاس
reflection

التمدد
dilation



لمـــاذا:

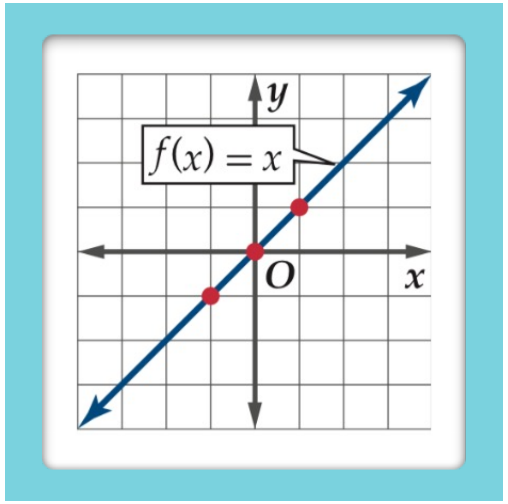
استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

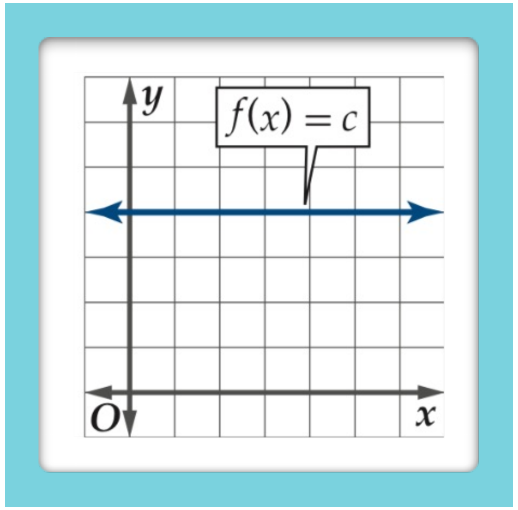
ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

مفهوم أساسي الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

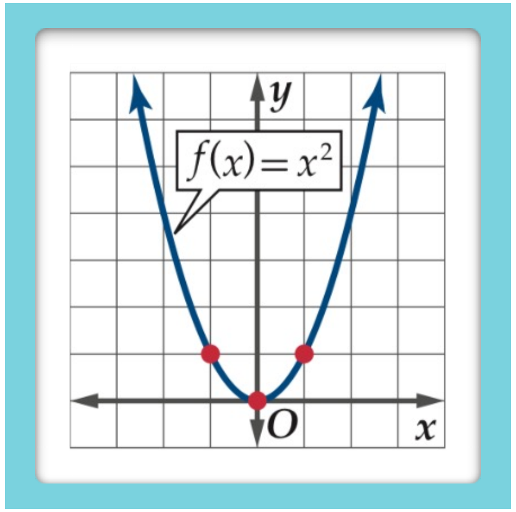
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



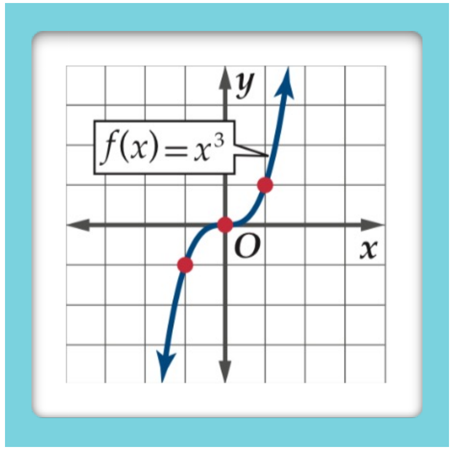
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّل بمستقيم أفقي.



يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



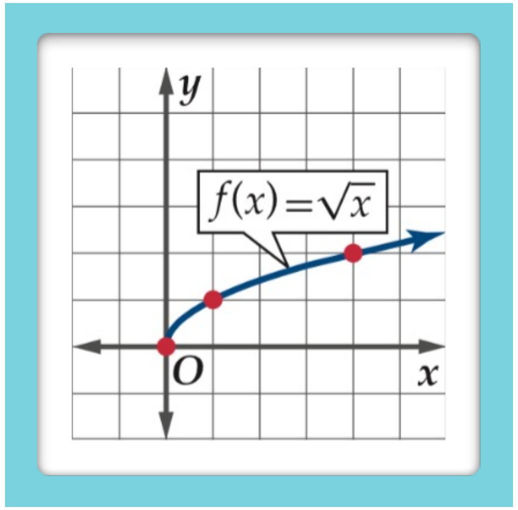
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



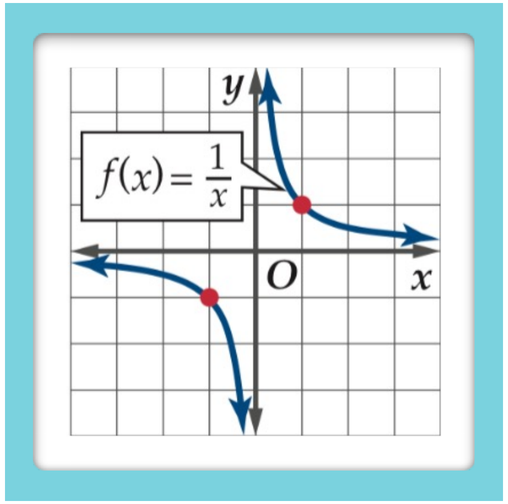
مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}\,,\ x \geq 0$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}\,,\ x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.

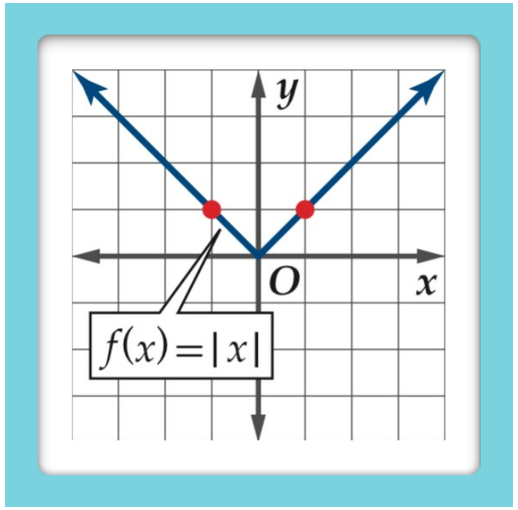


مفهوم أساسي دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

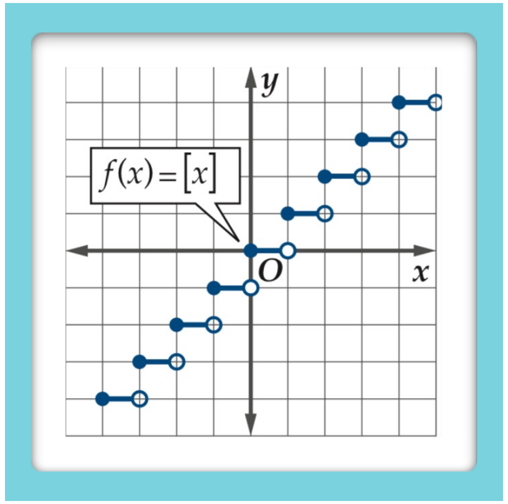
أمثلة: $|-5| = 5, |0| = 0, |4| = 4$



مفهوم أساسي دالة أكبر عدد صحيح

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [x]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

أمثلة: $[-4] = -4, [-1.5] = -2, \left[\frac{1}{3}\right] = 0$



مثال ١ : وصف خصائص الدالة الرئيسة(الأم)

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

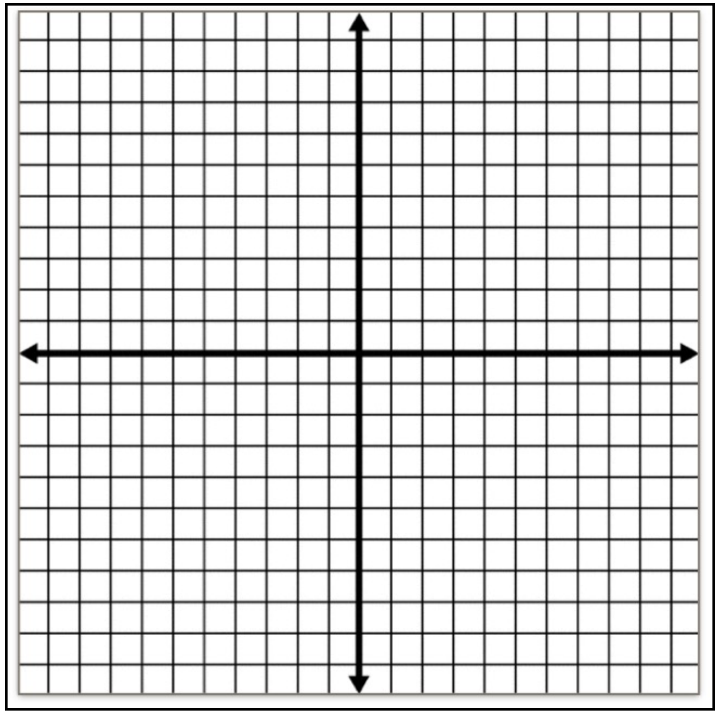
خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0, \infty)$، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ وتكون $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0, \infty)$.

تحقق من فهمك :

ارسم الدالة المعطاة وحدد المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

1) $f(x) = |x|$



الحل :

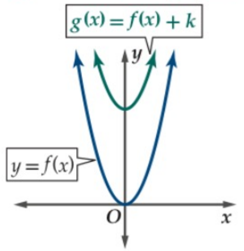
الانسحاب (الإزاحة) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

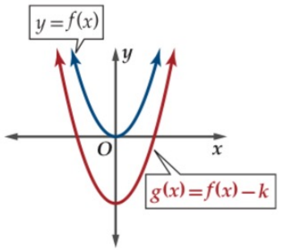
مفهوم أساسي — الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

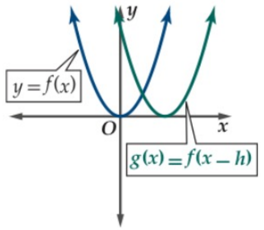


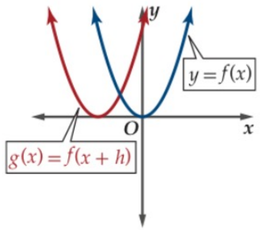


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





موضوع الدرس : الدوال الرئيسة(الأم) والتحويلات الهندسية

مثال ٢ : انسحاب منحنى الدالة

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 4$

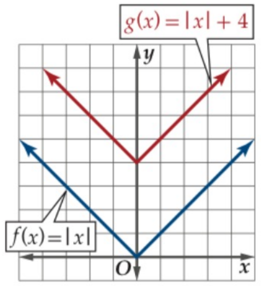
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

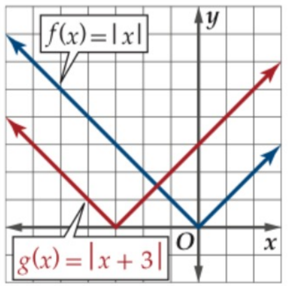
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

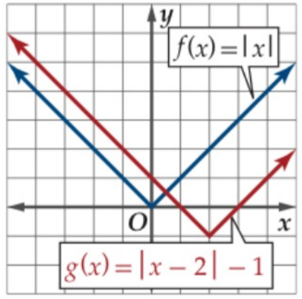
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك :

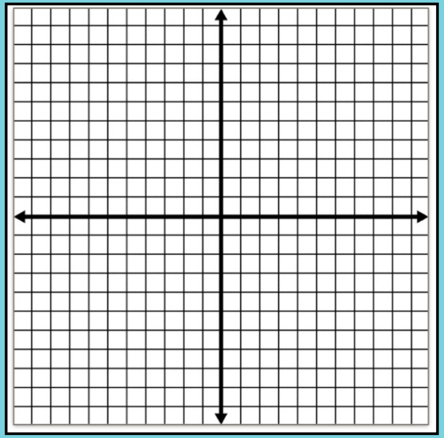
استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

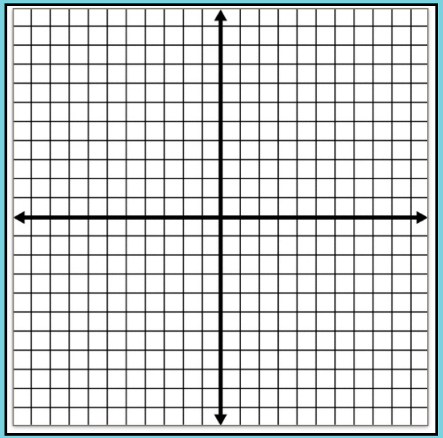
2A) $h(x) = x^3 - 5$

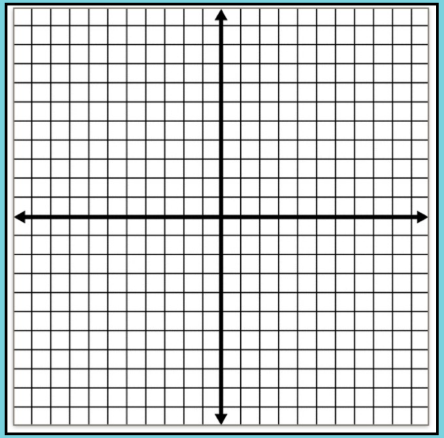
2B) $h(x) = 8 + x^3$

2C) $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

الحل :



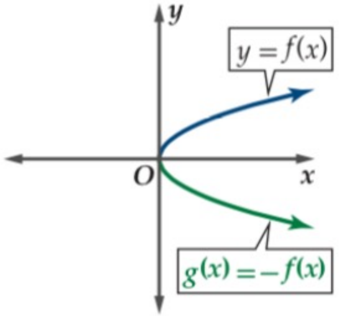




مفهوم أساسي: الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

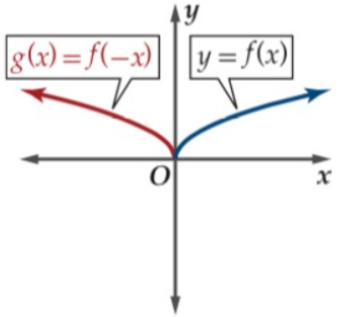
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x.

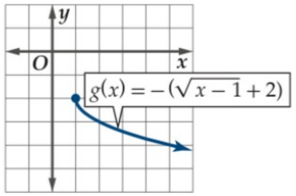


الانعكاس حول المحور y

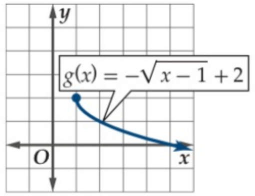
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y.



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$.

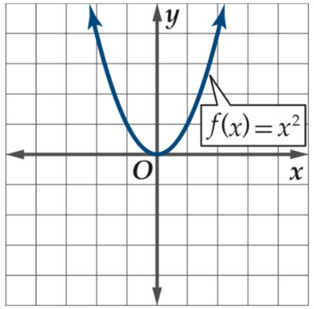


انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x.



انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

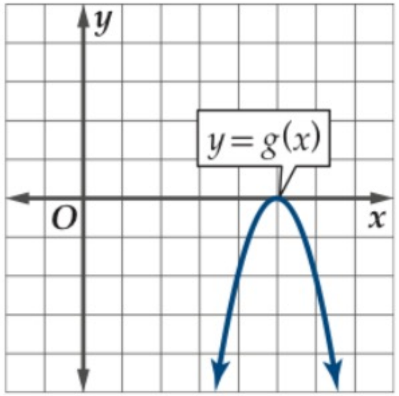
مثال ٣ : كتابة معادلات التحويل



الشكل 1.5.5

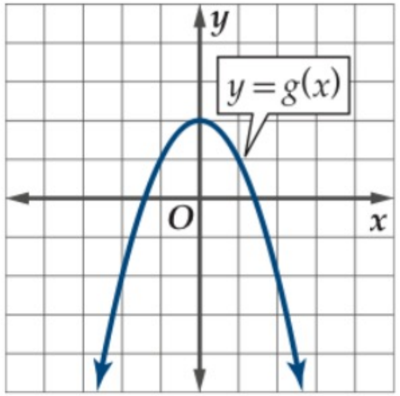
صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:

(a



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x، أي أن $g(x) = -(x-5)^2$.

(b



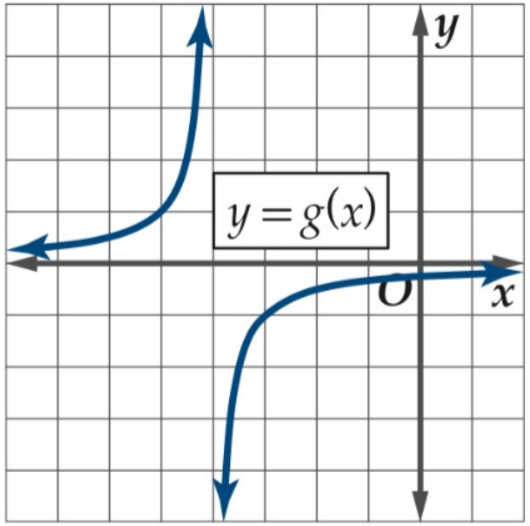
منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

الحل :

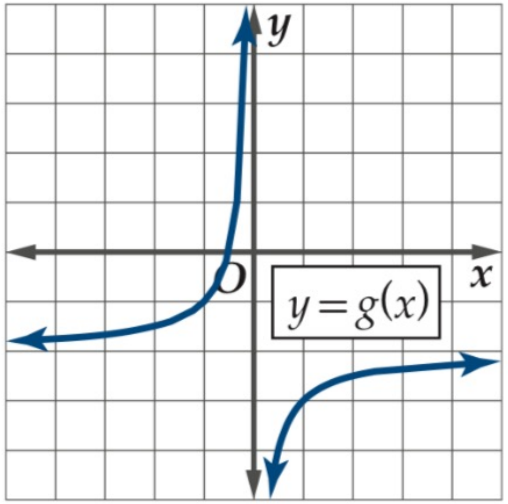
تحقق من فهمك :

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(3B



(3A



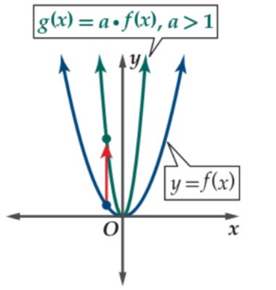
التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًّا أو أفقيًّا.

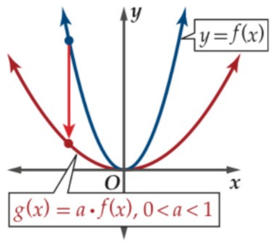
مفهوم أساسي   التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

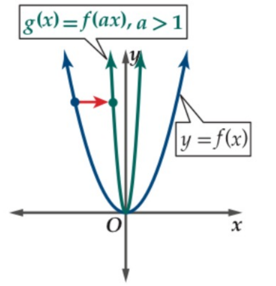


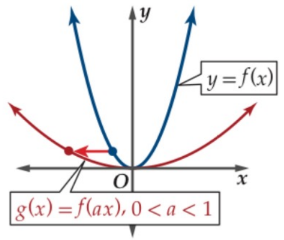


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



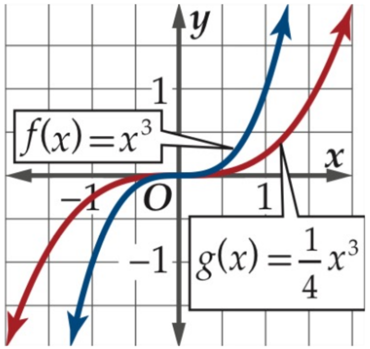


مثال ٤ : وصف التحويلات الهندسية وتحويلها

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

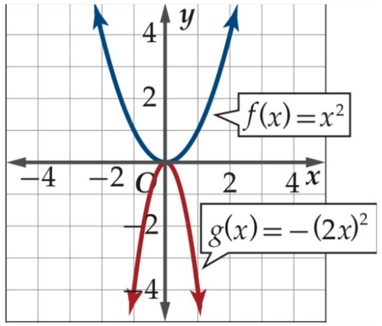
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$؛ لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ وَ $0 < \frac{1}{4} < 1$.



b) $g(x) = -(2x)^2$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضييق أفقي لمنحنى $f(x) = x^2$ أولًا؛ لأن $f(2x) = (2x)^2, f(x) = x^2$ وَ $2 > 1$، ثم انعكاس حول المحور x؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$

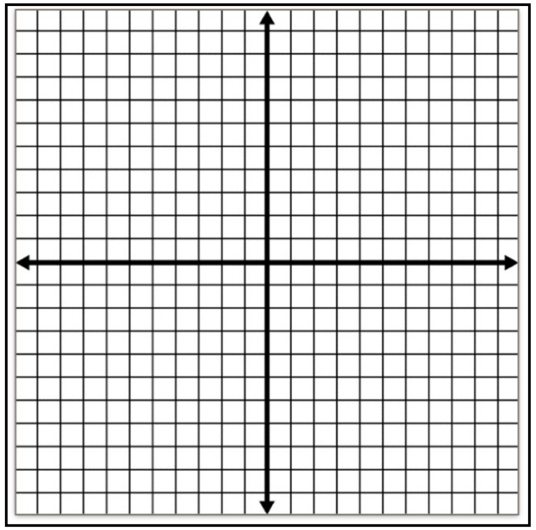


إرشادات للدراسة

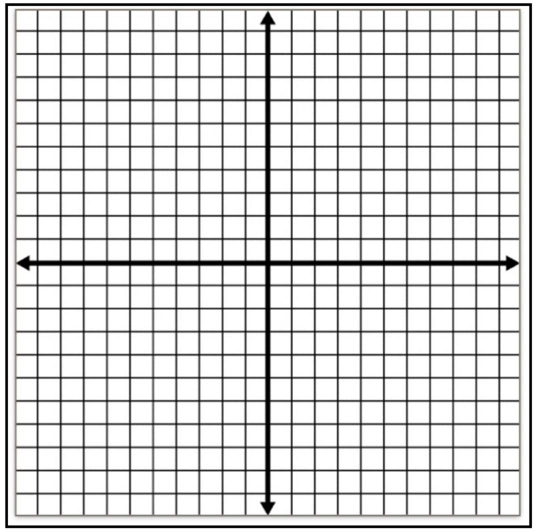
التمدد:
يظهر التمددان متشابهين أحيانًا مثل التوسع الرأسي والتضيق الأفقي؛ لذا يصعب وصف التمدد الذي طبِّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الرئيسة (الأم).

تحقق من فهمك :

4A) $g(x) = \frac{1}{2}[x]$



4B) $g(x) = \frac{5}{x} + 3$



الحل :

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٥ : تمثيل الدوال المتعددة التعريف بيانياً

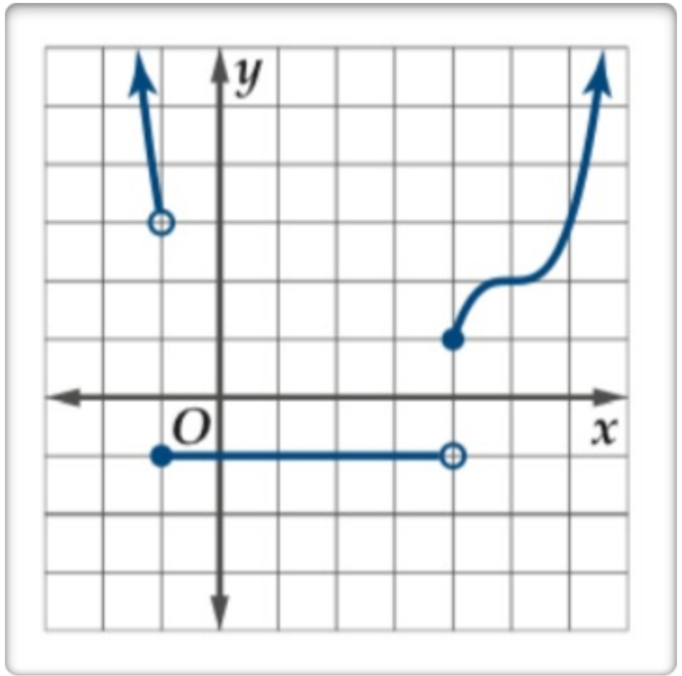
مثّل الدالة بيانيًّا: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \ x < -1 \\ -1 & , \ -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \ x \ge 4 \end{cases}$.

في الفترة $(-\infty, -1)$، أمثّل الدالة $y = 3x^2$.

في الفترة $[-1, 4)$، أمثّل الدالة الثابتة $y = -1$.

في الفترة $[4, \infty)$ أمثّل الدالة $y = (x-5)^3 + 2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1, 3)$ و $(4, -1)$ ونقطة عند كل من $(-1, -1)$ و $(4, 1)$ لأن $f(-1) = -1$ و $f(4) = 1$.



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك :

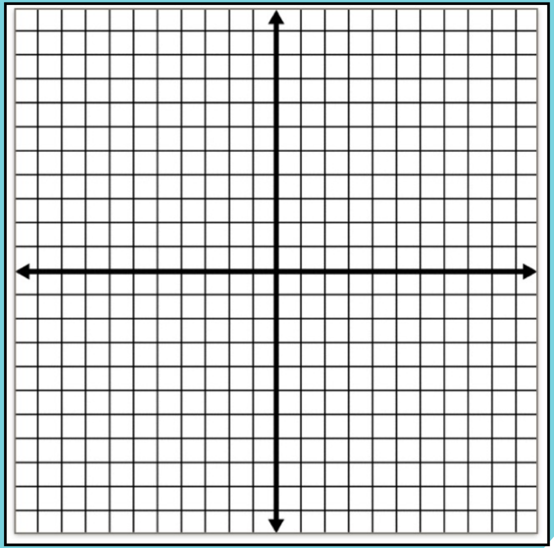
5A)

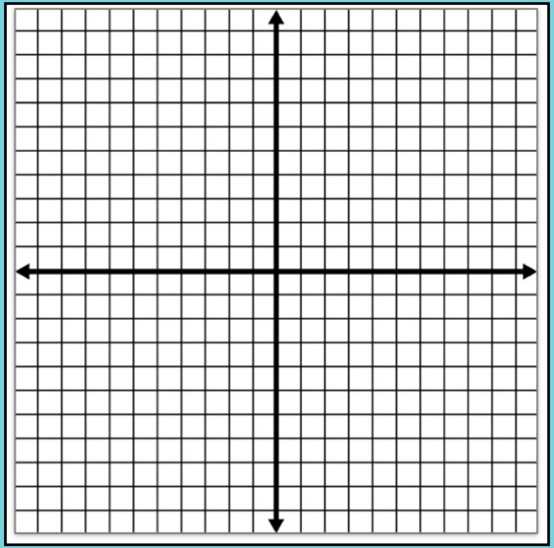
$$g(x)=\begin{cases} x-5 & , \quad x\le 0 \\ x^3 & , \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{2}{x} & , \quad x>2 \end{cases}$$

5B)

$$h(x)=\begin{cases} (x+6)^2 & , \quad x<-5 \\ 7 & , \quad -5\le x\le 2 \\ |4-x| & , \quad x>2 \end{cases}$$

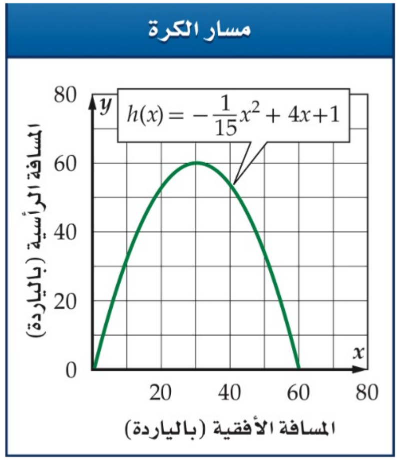
الحل :





مثال ٦ من واقع الحياة : التحويلات الهندسية على الدوال

حرة قدم: ركل لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة باليارد عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية باليارد التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.



أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x) = a(x-h)^2 + k$ باستعمال إكمال المربع.

الدالة الأصلية	$h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$
حلّل $-\frac{1}{15}x^2 + 4x$	$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x) + 1$
أكمل المربع	$= -\frac{1}{15}(x^2 - 60x + 900) + 1 + \frac{1}{15}(900)$
اكتب $x^2 - 60x + 900$ على صورة مربع كامل ثم بسّط	$= -\frac{1}{15}(x-30)^2 + 61$

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x ، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

الحل :

تحقق من فهمك :

6) **كهرباء:** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

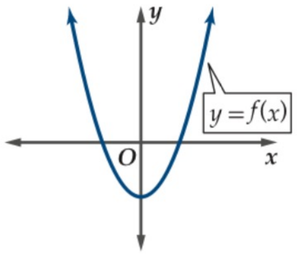
B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

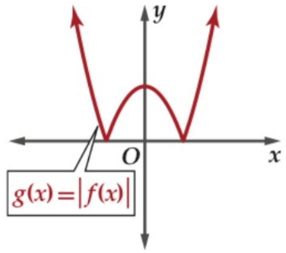
تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

مفهوم أساسي **التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة**

$g(x) = |f(x)|$

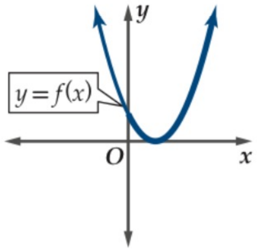
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

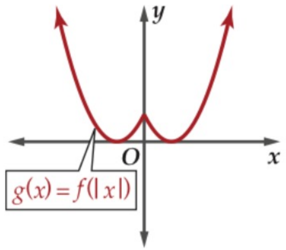




$g(x) = f(|x|)$

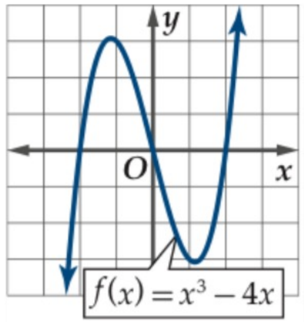
يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .





إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٧ : وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

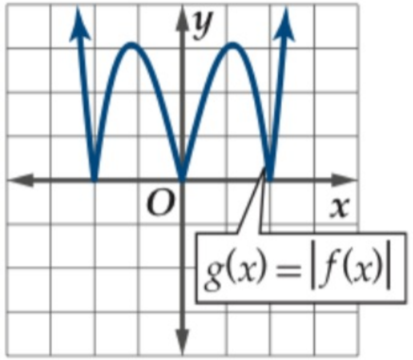


الشكل 1.5.6

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

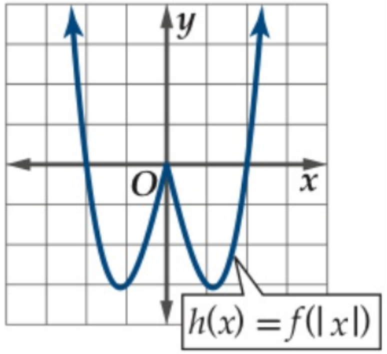
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

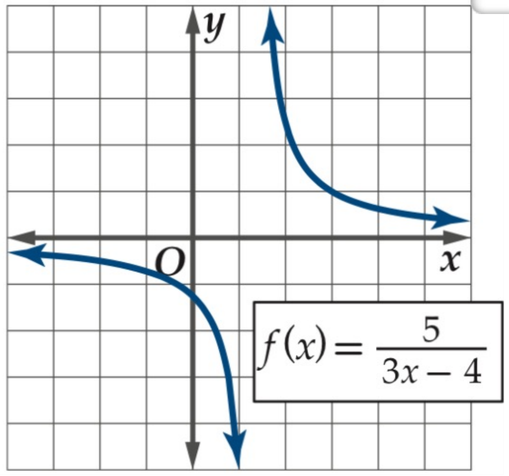
ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.



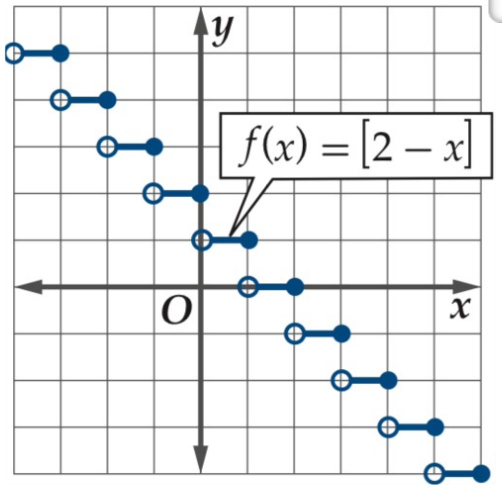
تحقق من فهمك :

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

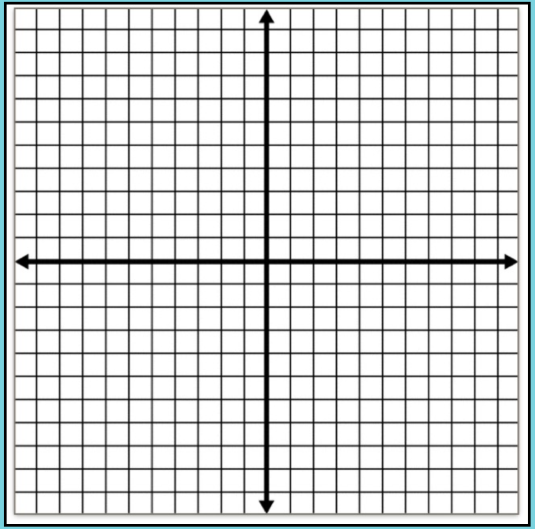
(7A

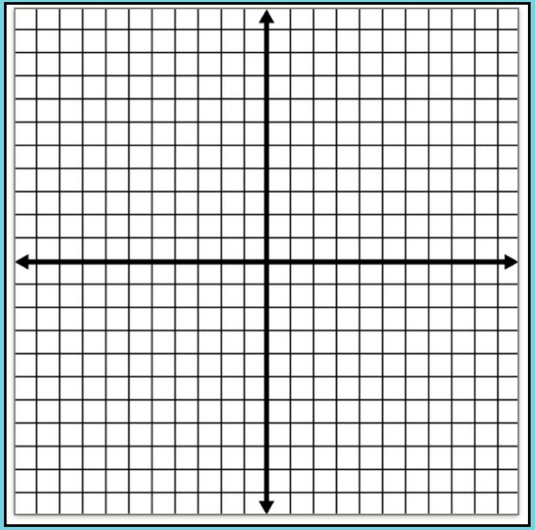


(7B



الحل :





مسائل مهارات التفكير العليا

51) **تبرير:** إذا كانت $f(x)$ دالة فردية وكانت $g(x)$ انعكاسًا للدالة $f(x)$ حول المحور x و $h(x)$ انعكاسًا للدالة $g(x)$ حول المحور y ، فما العلاقة بين $h(x)$, $f(x)$؟ برِّر إجابتك.

55) **تبرير:** وضِّح الفرق بين التوسع الرأسي بمعامل مقداره 4 ، والتوسع الأفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$. ما النتيجة النهائية بعد إجراء كلٍّ من التحويلين الهندسيين على الدالة نفسها؟

تم بحمد الله

الواجب في منصة مدرستي

حرصك على حضور الدرس وحل الواجب دليل

على تفوقك وتميزك ...

بارك الله جهودك 🌹

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math