

وطني و تختصر المسافرة في فمي .. لأقول : "أنتَ بهذه الدنيا أنا"

إعداد : شيخة المزوقي shikhah_math

العلاقات والدوال العكسية

ثالث ثانوي _ رياضيات هـ

موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

فيما سبق:



درست إيجاد تركيب دالتين.
(الدرس 6-1)

والآن:



المفردات:



العلاقة العكسية

inverse relation

الدالة العكسية

inverse function

الدالة المتباينة

one-to-one function

- أستعمل اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كان لهذه الدالة دالة عكسية أم لا.
- أجد الدالة العكسية جبرياً وبيانياً.

لما زنا:



يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول B

السعر بالريال	25	20	15	10	5
عدد التذاكر	5	4	3	2	1

الجدول A

عدد التذاكر	5	4	3	2	1
السعر بالريال	25	20	15	10	5

موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

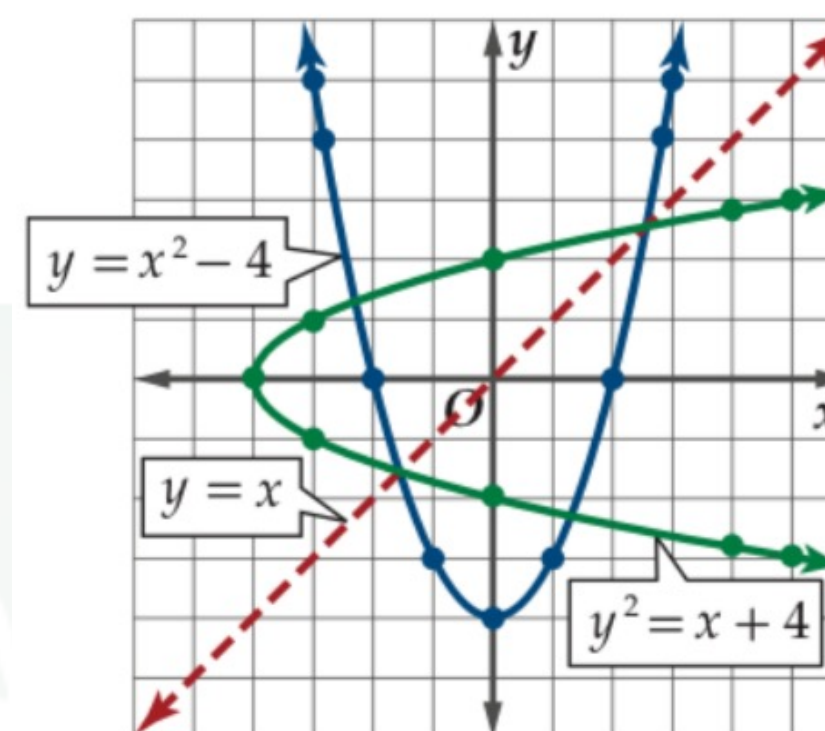


الدالة العكسية: العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن كلاً من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (a, b) ينتمي إلى إحدى العلاقتين؛ فإن الزوج المرتب (b, a) ينتمي إلى العلاقة الأخرى. وإذا مُثلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلاً

العلاقة العكسية

$$y^2 = x + 4 \text{ أو } x = y^2 - 4$$

x	y
5	-3
0	-2
-3	-1
-4	0
-3	1
0	2
5	3



العلاقة

$$y = x^2 - 4$$

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثل علاقاتها العكسية دوالاً. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثل دالة سميت **الدالة العكسية** لـ f ، ويرمز لها بالرمز f^{-1} . لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقق اختبار الخط الرأسي، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.



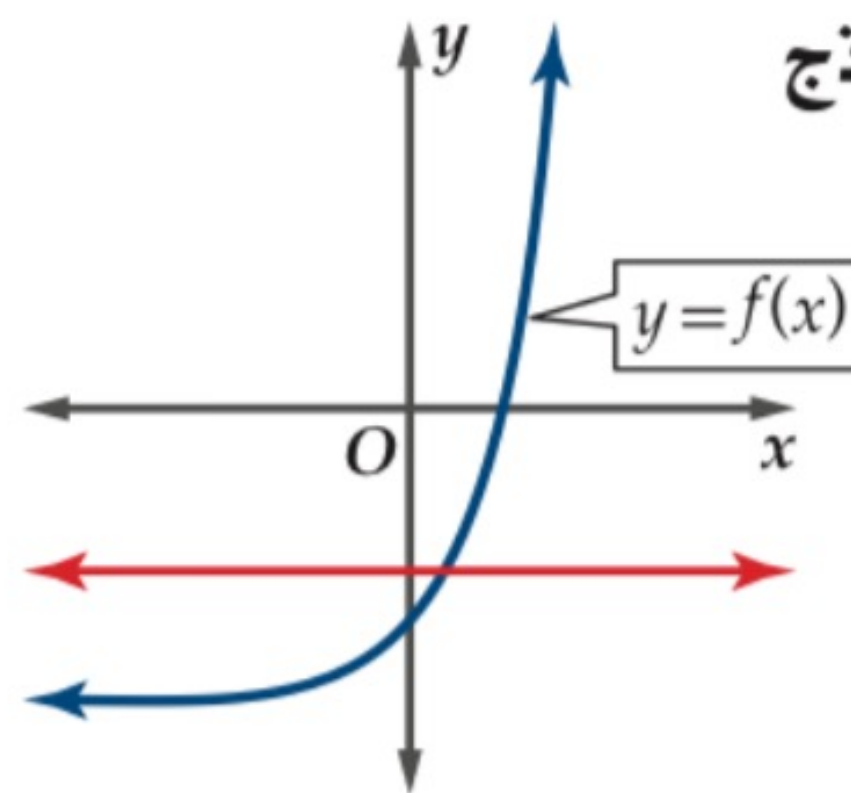
موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.



اختبار الخط الأفقي

مفهوم أساسي



نموذج

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

مثال:

قراءة الرياضيات

رمز الدالة العكسية:

يجب ألا يحدث لبس بين

رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$

ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$

موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية



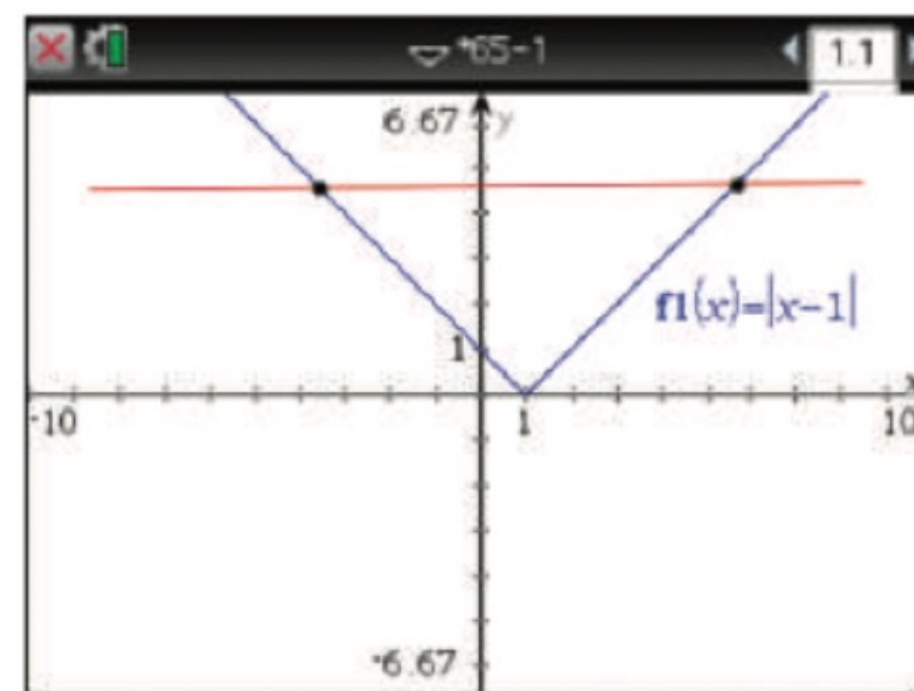
مثال 1

تطبيق اختبار الخط الأفقي

مثّل كلّاً من الدوال الآتية بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية، ثمّ طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

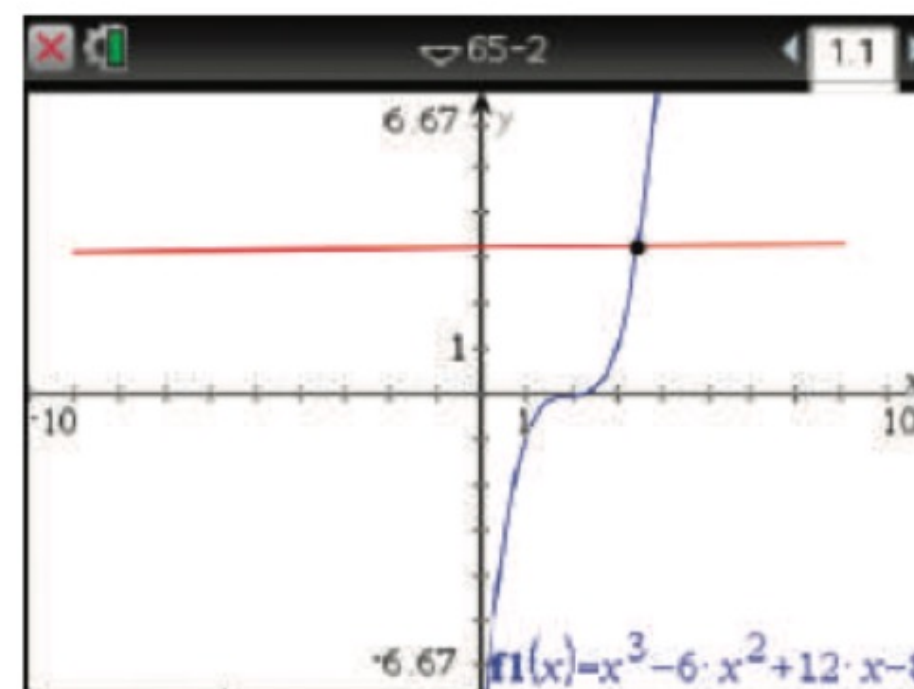
$$f(x) = |x - 1| \quad (a)$$

يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.



$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \quad (b)$$

يوضّح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة.



تنبيه!

اختبار الخط الأفقي

عند استعمال الحاسبة البيانية، اختبر بدقة المواقع التي يفشل فيها اختبار الخط الأفقي باستعمال

4: تكبير/تصغير النافذة

واختر منها

3: تكبير

أو 4: تصغير

أو اضبط الشاشة للتأكد.



إعداد : شيخة المرزوقي shikah_math



موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

تحقق من فهمك



$$f(x) = x^2 + 5x - 7 \quad (1B)$$

$$h(x) = \frac{4}{x} \quad (1A)$$

داميا في طين

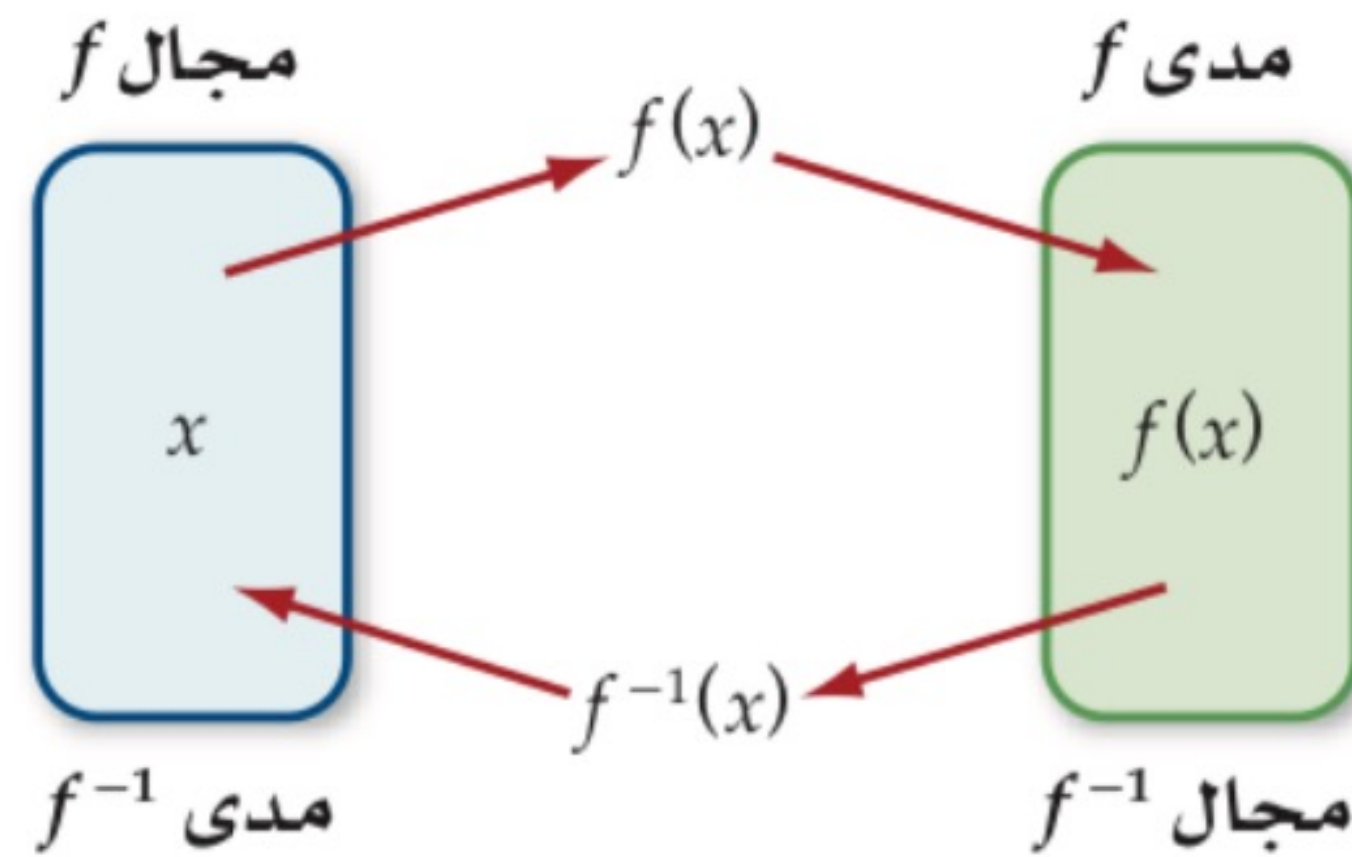
لا اله الا محمد رسول الله

موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية



إيجاد الدالة العكسية : إذا حققت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y . ولا توجد قيمة لـ y ترتبط بأكثر من قيمة لـ x .

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساوياً لمدى f^{-1} ومدى f مساوياً لمجال f^{-1} .



موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

لإيجاد الدالة العكسية جبريًا، نتبع الخطوات الآتية:



إيجاد الدالة العكسية

مفهوم أساسي

الخطوة 1: تحقق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$ ، ثم بدّل موقعي x, y .

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y ، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y .

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1} . وبين أن مجال f يساوي مدى f^{-1} ، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1} .

يظهر من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًا قد يكون دالة عكسية للدالة f ؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1} .

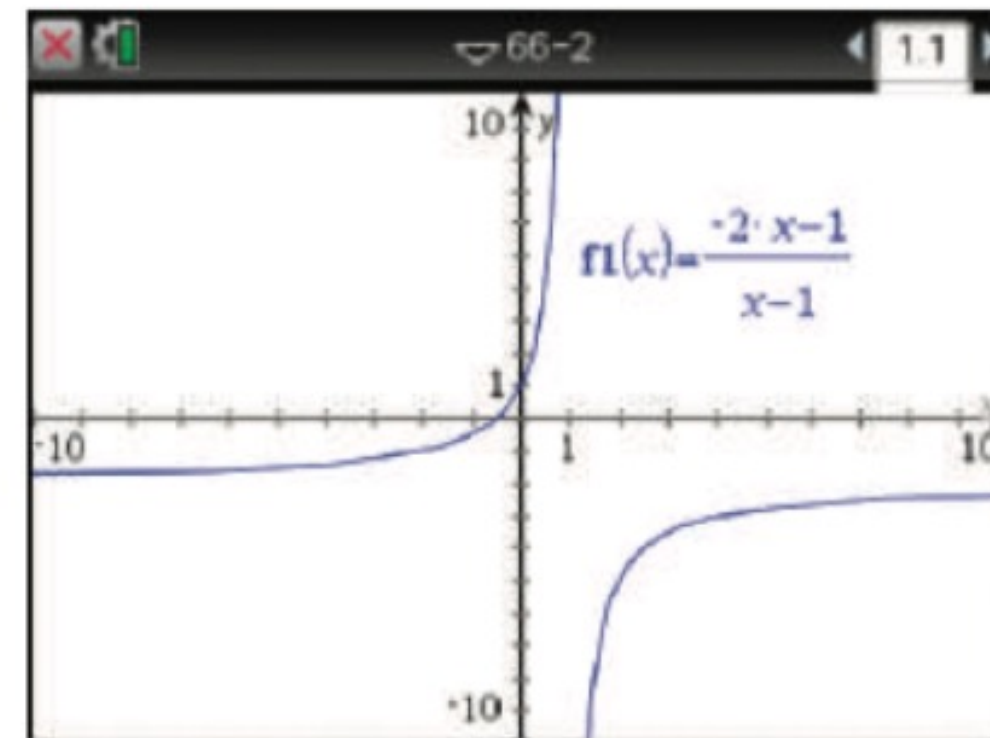
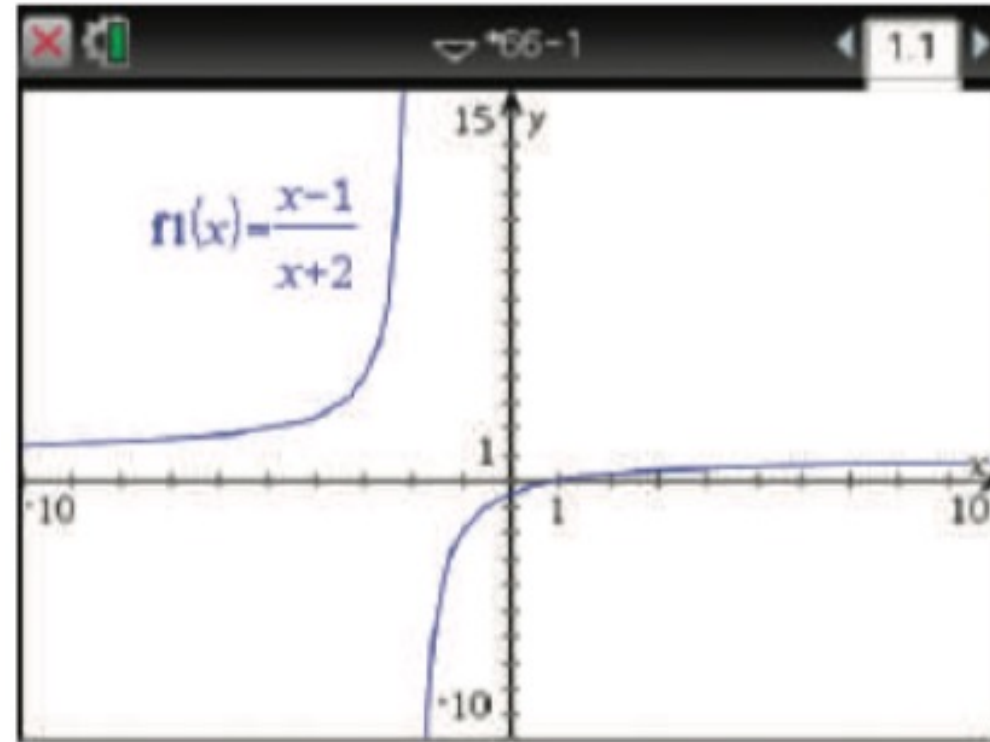


مثال 2

إيجاد الدالة العكسية جبرياً

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} \quad (a)$$

يوضح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ ، ومداهما هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
والآن أوجد f^{-1} .



الدالة الأصلية

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

عوض y بدلاً من $f(x)$

$$y = \frac{x-1}{x+2}$$

بدل بين x, y

$$x = \frac{y-1}{y+2}$$

اضرب الطرفين في $(y+2)$ ، ثم طبق خاصية التوزيع

$$xy + 2x = y - 1$$

ضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد

$$xy - y = -2x - 1$$

خاصية التوزيع

$$y(x - 1) = -2x - 1$$

حل بالنسبة لـ y

$$y = \frac{-2x - 1}{x - 1}$$

عوض $f^{-1}(x)$ بدلاً من y ، لاحظ أن $x \neq 1$

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{x - 1}$$

قراءة الرياضيات

الدوال القابلة للعكس:

يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة: دالة قابلة للعكس.



موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

تحقق من فهمك



$$f(x) = \sqrt{x^2 - 20} \quad (2C)$$

$$f(x) = \frac{x + 7}{x} \quad (2B)$$

$$f(x) = -16 + x^3 \quad (2A)$$

دائماً يا وطني

لا إله إلا الله محمد رسول الله

موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.



تركيب الدالة ودالتها العكسية

مفهوم أساسي

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} ، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

$$\bullet f[f^{-1}(x)] = x \text{ لجميع قيم } x \text{ في مجال } f^{-1}(x).$$

$$\bullet f^{-1}[f(x)] = x \text{ لجميع قيم } x \text{ في مجال } f(x).$$

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعمل هذه الحقيقة للتحقق من أن كلاً من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

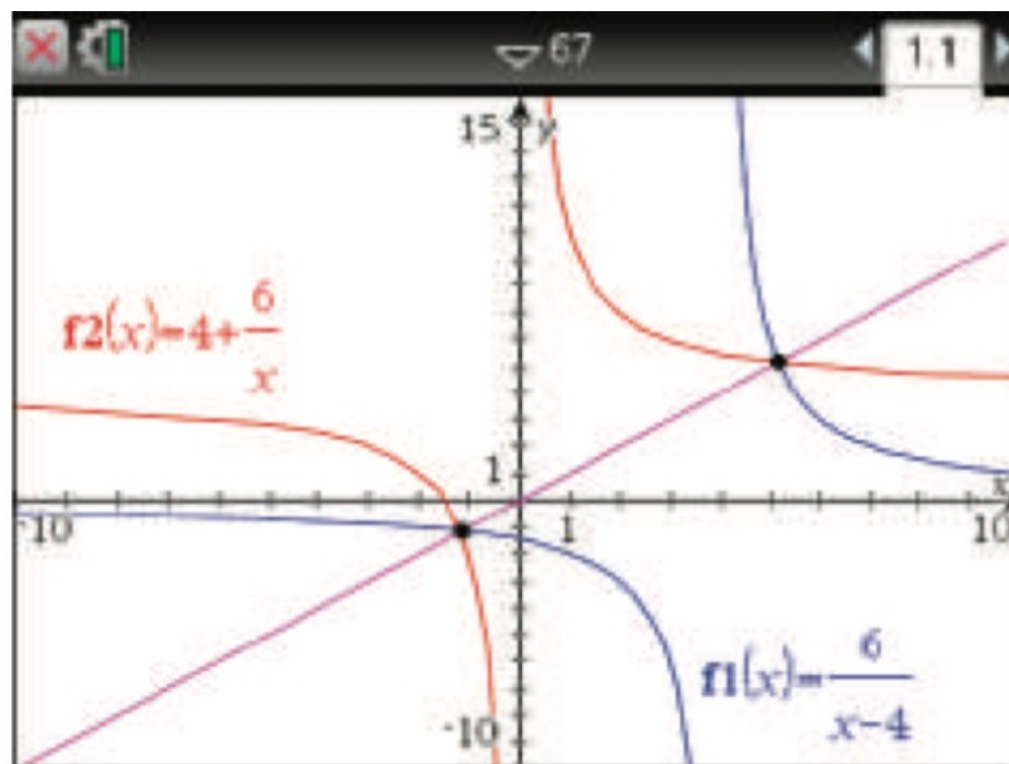


إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

مثال 3

أثبت جبريًا أن كلاً من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)] = x$ و $g[f(x)] = x$.



$$\begin{aligned}
 g[f(x)] &= g\left(\frac{6}{x-4}\right) \\
 &= \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4 \\
 &= x - 4 + 4 = x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f[g(x)] &= f\left(\frac{6}{x} + 4\right) \\
 &= \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right) - 4} \\
 &= \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x
 \end{aligned}$$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ ، فإن كلاً من الدالتين $f(x)$, $g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث تنتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك



أثبت جبريًا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

$$f(x) = x^2 + 10, x \geq 0, g(x) = \sqrt{x - 10} \quad (3B)$$

$$f(x) = 18 - 3x, g(x) = 6 - \frac{x}{3} \quad (3A)$$

بسم الله الرحمن الرحيم

موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية



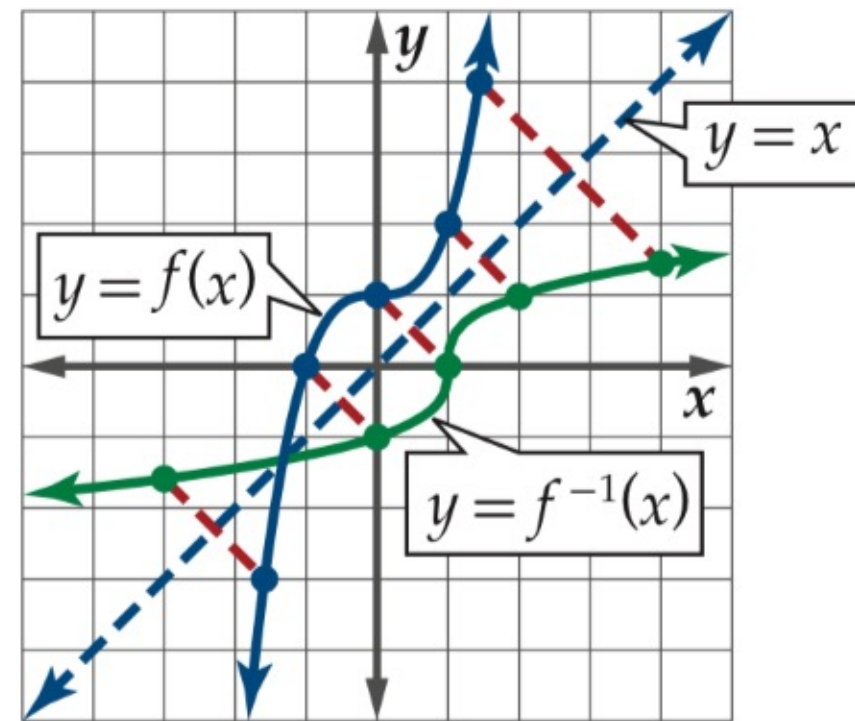
من الصعب إيجاد الدالة العكسية جبرياً لمعظم الدوال المتباينة، إلا أنه يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية بانعكاس الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$.

إيجاد الدالة العكسية بيانياً

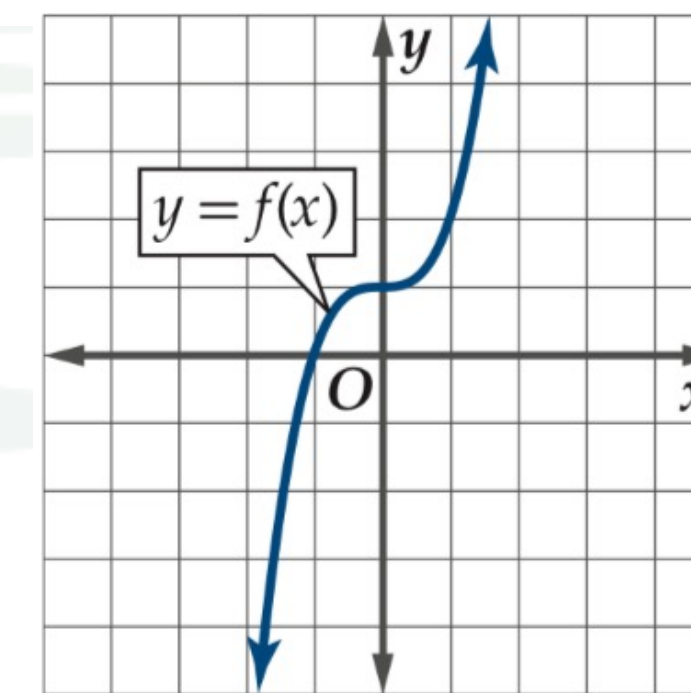
مثال 4

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثل بيانياً المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.4



الشكل 1.7.3

إرشادات للدراسة

الدالة العكسية والقيم القصوى

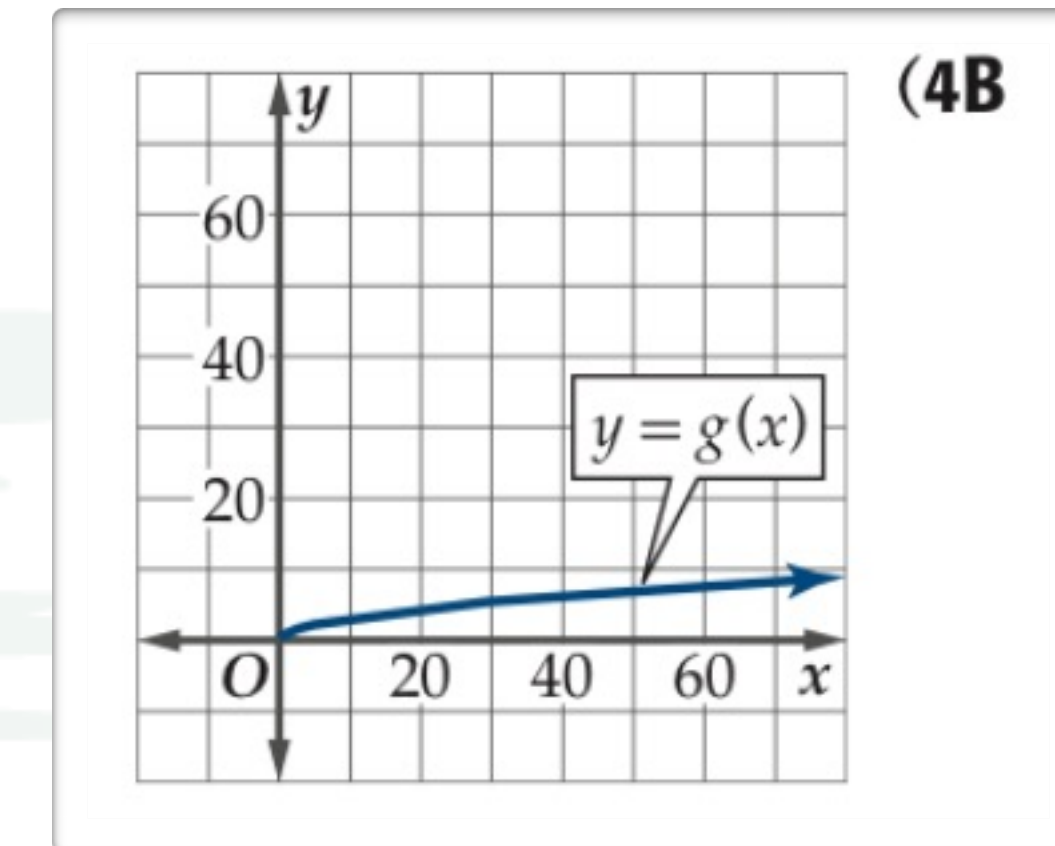
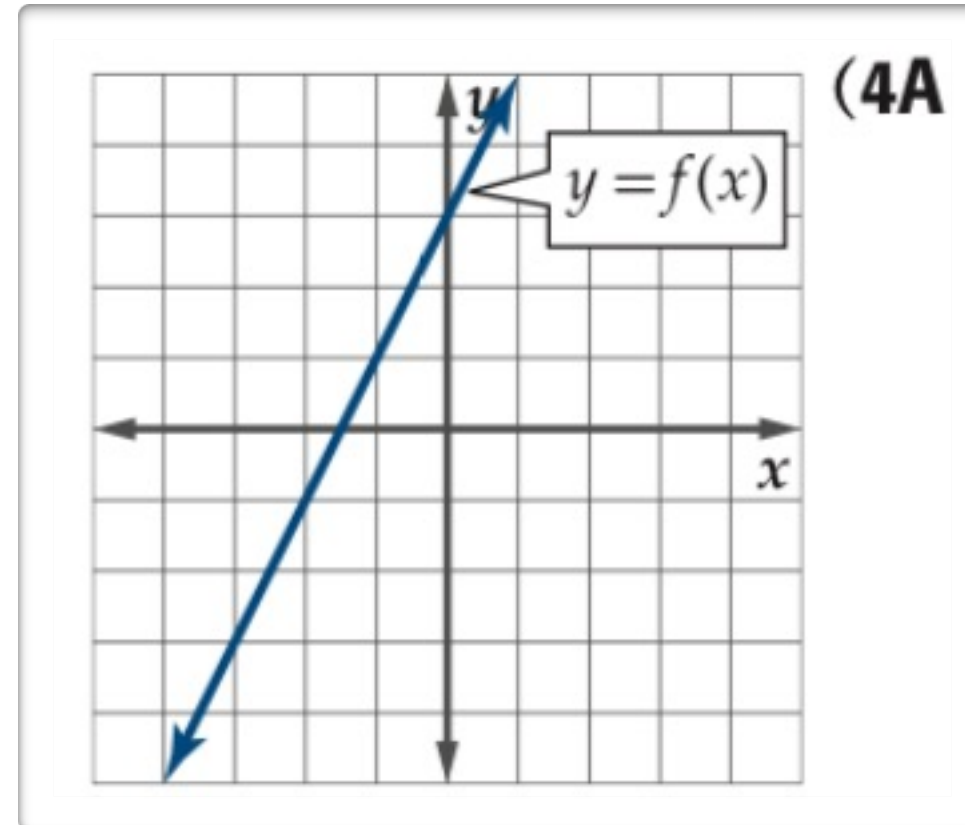
يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. فإذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل باختبار الخط الأفقي، ومن ثم لا تكون دالة متباينة.



تحقق من فهمك



استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانياً:



موضوع الدرس : الدوال والعلاقات العكسية



مثال 5 من واقع الحياة

استعمال الدالة العكسية

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالاً عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عدداً من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجراً إضافياً مقداره 24 ريالاً عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ 40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.

(a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدتها.

يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 640 + 24x - 960$
أو $f(x) = 24x - 320$.

يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن $f(x)$ دالة متباينة، وعليه تكون دالتها العكسية موجودة. أوجد $f^{-1}(x)$:

الدالة الأصلية

$$f(x) = 24x - 320$$

عوض y بدلاً من $f(x)$

$$y = 24x - 320$$

بدل بين x و y

$$x = 24y - 320$$

أضف 320 إلى الطرفين

$$x + 320 = 24y$$

حل بالنسبة إلى y

$$y = \frac{x + 320}{24}$$

عوض $f^{-1}(x)$ بدلاً من y

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 320}{24}$$

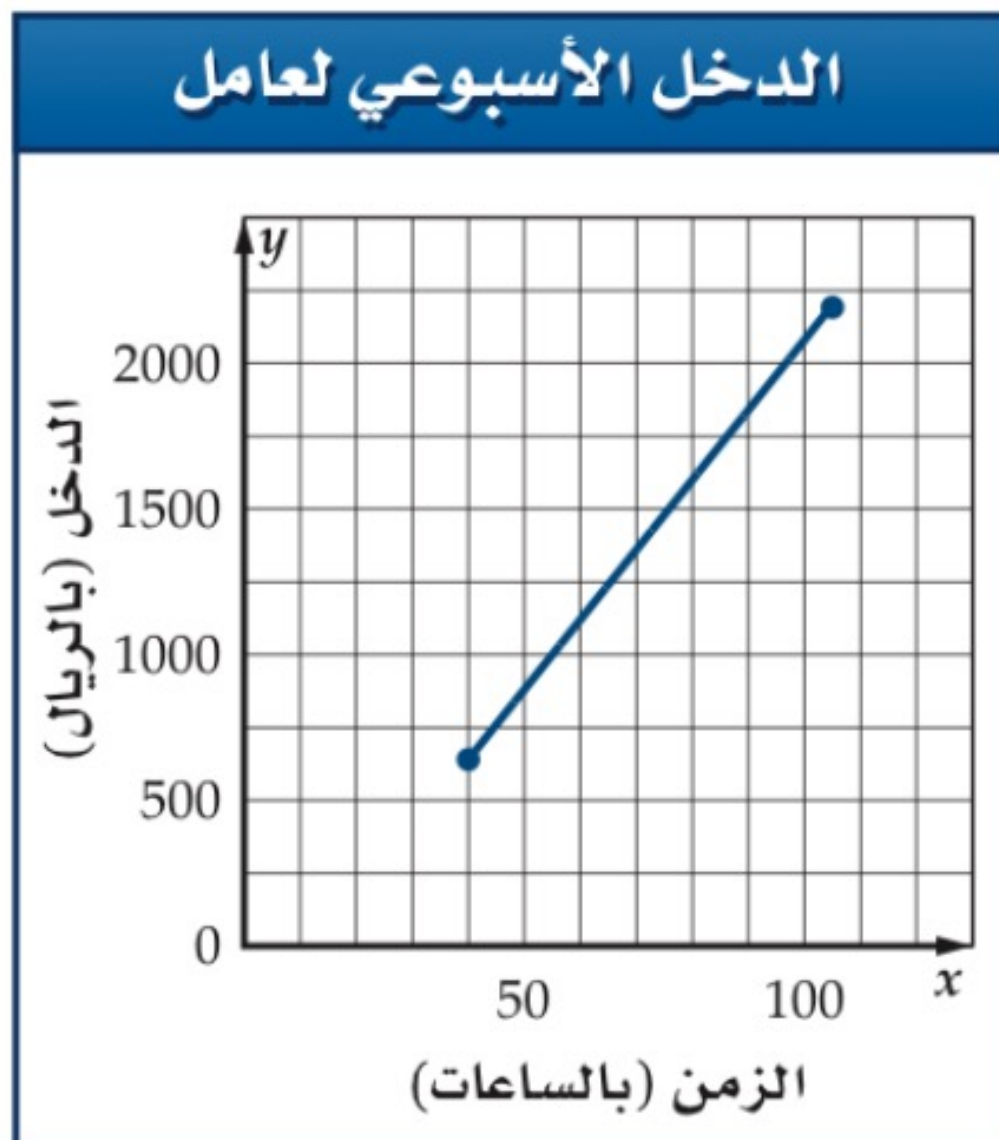
(b) ماذا تمثل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.



الربط مع الحياة

ينص نظام العمل في المملكة على أنه "لا يجوز تشغيل العامل تشغيلاً فعلياً أكثر من 8 ساعات في اليوم الواحد إذا اعتمد صاحب العمل المعيار اليومي، أو أكثر من 48 ساعة إذا اعتمد المعيار الأسبوعي".





مسائل مهارات التفكير العليا

(57) **اكتب:** وضح القيود التي يجب وضعها على مجال الدالة التربيعية ليكون لها دالة عكسية. وضح بمثال.

(56) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفراً عند 6، ولها دالة عكسية ، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1} ؟

(58) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برّر إجابتك.
"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية"

(59) **تحّد:** إذا كانت $f^{-1}(23) = 3$ ، $f(x) = x^3 - a$ ، فأوجد قيمة a .