



اليوم الوطني
السعودي ٩١



موضوع الدرس : الدوال الأسية

اليوم : الأحد

التاريخ : ١٤٤٣/٢/١٩

الحصة : الثانية

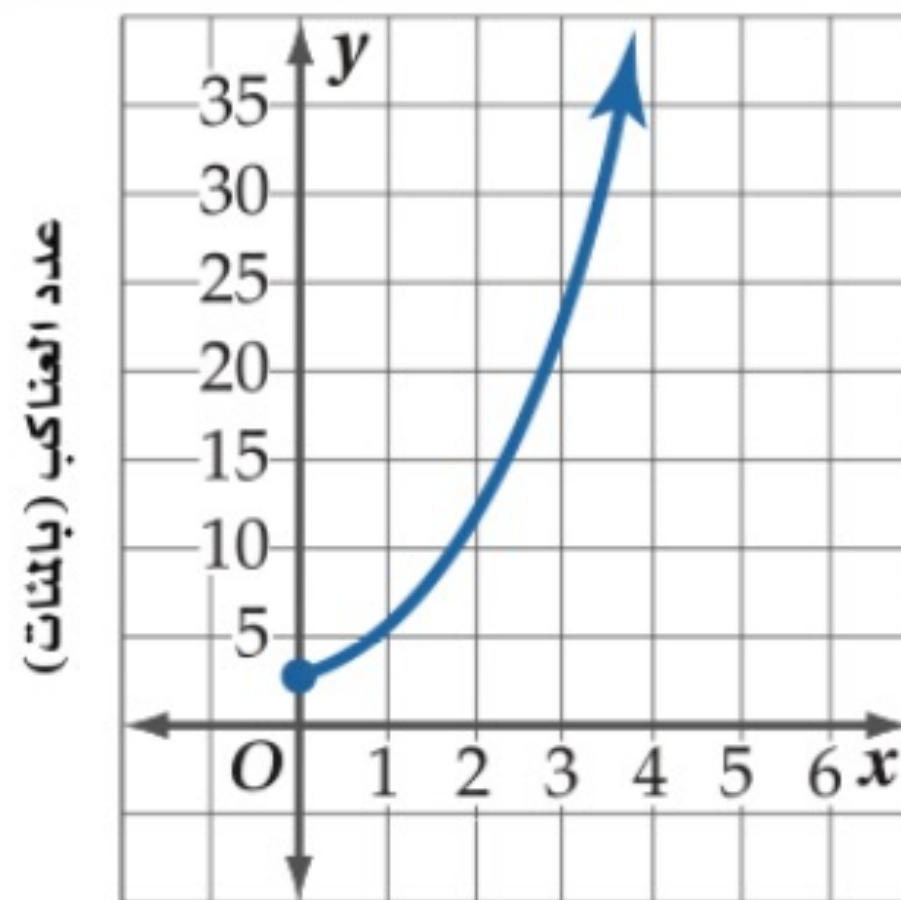
الاستراتيجيات : المناقشة والحوار / العصف الذهني

فيما سبق : درستُ الدوال كثيرات الحدود وتمثيلها بيانياً

فكرة الدرس :
١/ أتعرف الدالة الأسية . ٢/ أمثل الدالة الأسية
٣/ أمثل دوال النمو الأسية بيانياً . ٤/ أمثل دوال الاضمحلال الأسية بيانياً

المفردات : الدالة الأسية / النمو الأسية / عامل النمو / الاضمحلال الأسية / عامل الاضمحلال .

لماذا



السنوات منذ 2010

قد تبدو عناكب الرتيلاء (*Tarantulas*) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبيّن التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.

لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطيًا، وليس تربيعيًا أيضًا، وإنما يمثل الدالة $y = 3(2)^x$ ، والتي هي مثال على الدالة الأسية.



اليوم الوطني
السعودي ٩١

تمثيل الدوال الأسية: الدالة الأسية هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$. لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

الدالة الأسية

مفهوم أساسي

الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة

$$y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$$

التعبير اللفظي:

$$y = 2(3)^x$$

$$y = 4^x$$

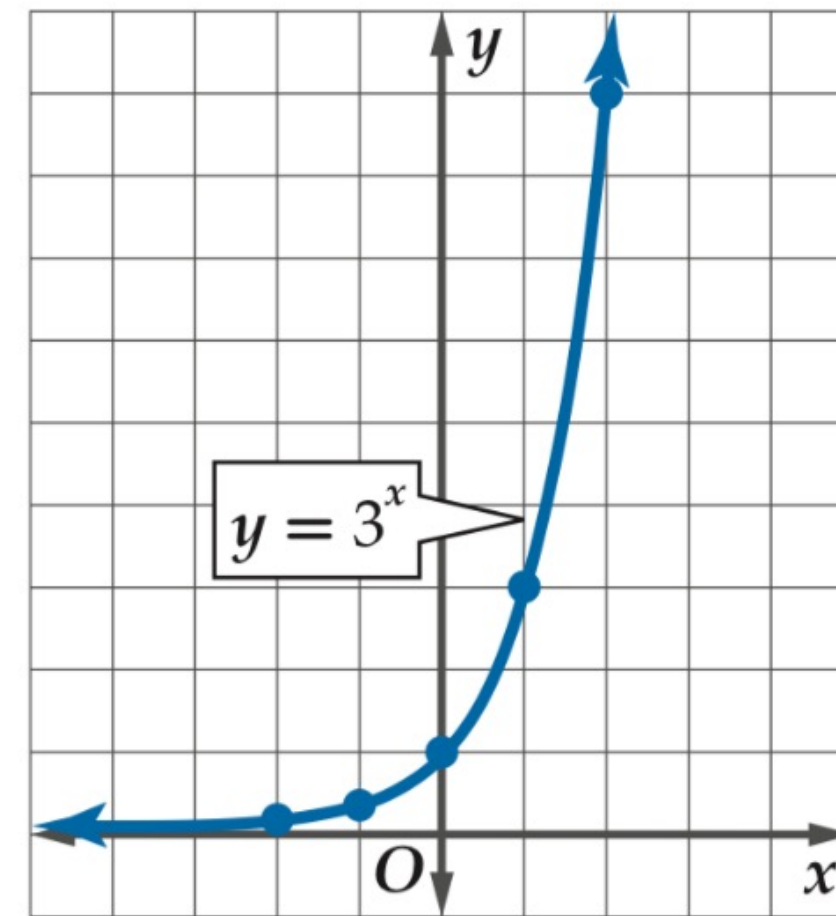
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

أمثلة:

تمثيل الدالة الأسية عندما $b > 1, a > 0$

مثال ١

(a) مثل الدالة $y = 3^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداهما.



x	3^x	y
-2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
-1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
1	3^1	3
2	3^2	9



عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0, 1)$ ، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداهما جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

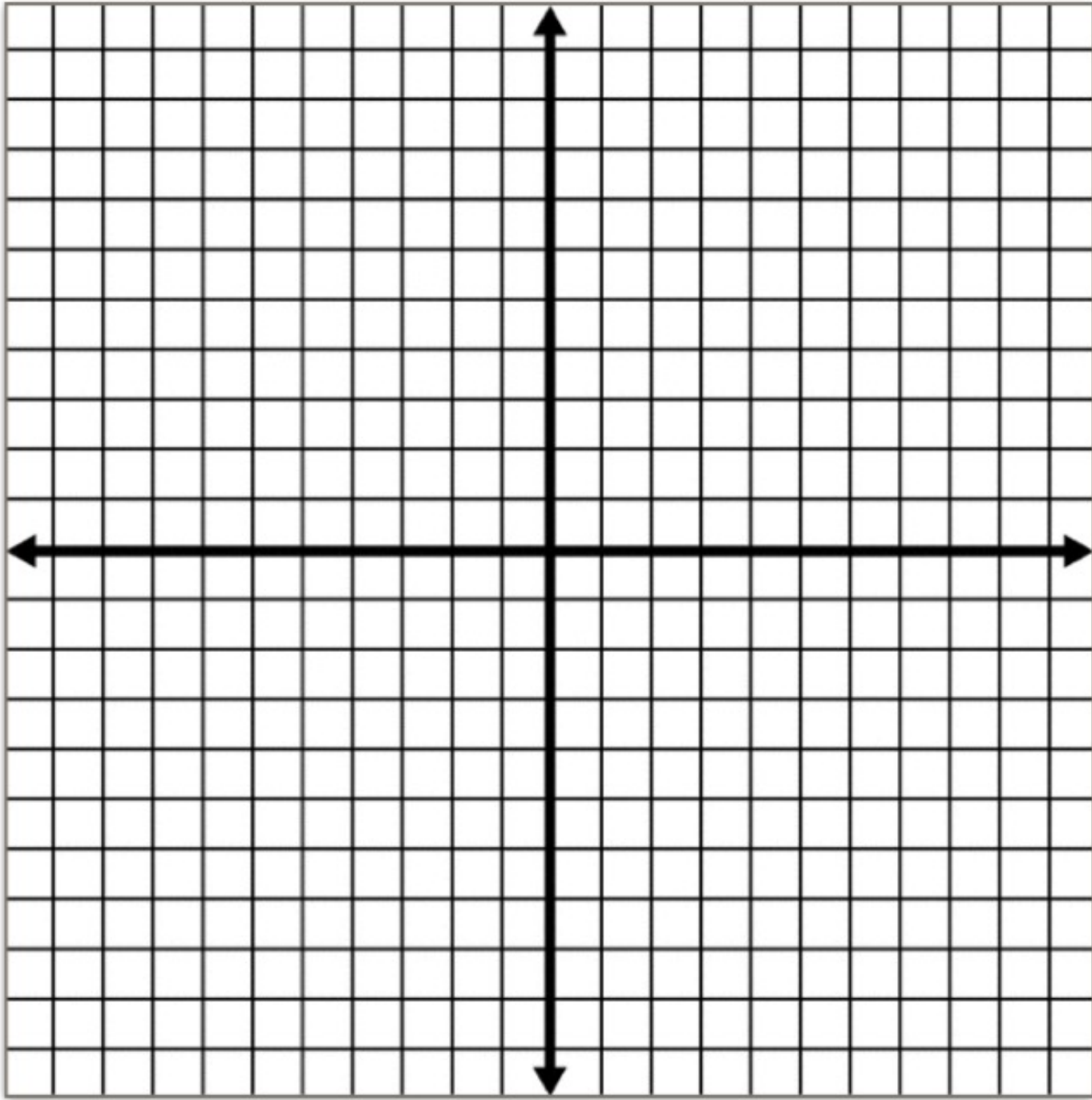
يظهر التمثيل البياني جميع القيم الحقيقية للمتغير x والقيم المرتبطة بها للمتغير y ، حيث $y = 3^x$ ، لذا فإذا كانت $x = 0.7$ فإن $y \approx 2.2$ ، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $3^{0.7} \approx 2.157669$).

إرشادات للدراسة

- الدالة $y = ab^x$:
- تكون الدالة الأسية $y = ab^x$ معرفة لجميع قيم x التي تحقق الشرط:
- $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$ وذلك لأنه:
- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^2$ تكون غير معرفة عند بعض القيم، فمثلاً تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
 - إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة.

تحقق من فهمك

- 1A** مثل الدالة $y = 7^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداهما.
- 1B** استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.

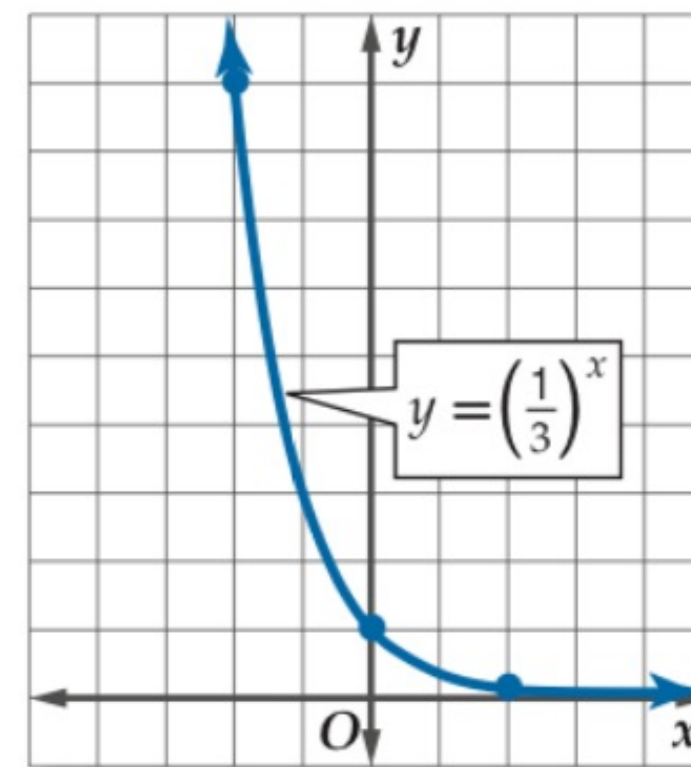


يتضح من المثال (1) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمه 1)، فإن قيم y تزداد أيضًا بنسبة ثابتة، فكل قيمة y تمثل 3 أمثال القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متزايدة، كما أن المحور x هو خط تقارب أفقي لها.

مثال ٢

تمثيل الدالة الأسية عندما $0 < b < 1$ ، $a > 0$

(a) مثل الدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداها.



x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{9}$



إرشادات للدراسة

$$a < 0$$

إذا كانت قيمة a سالبة، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x .

عين الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$ ، أي أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0, 1)$ ، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

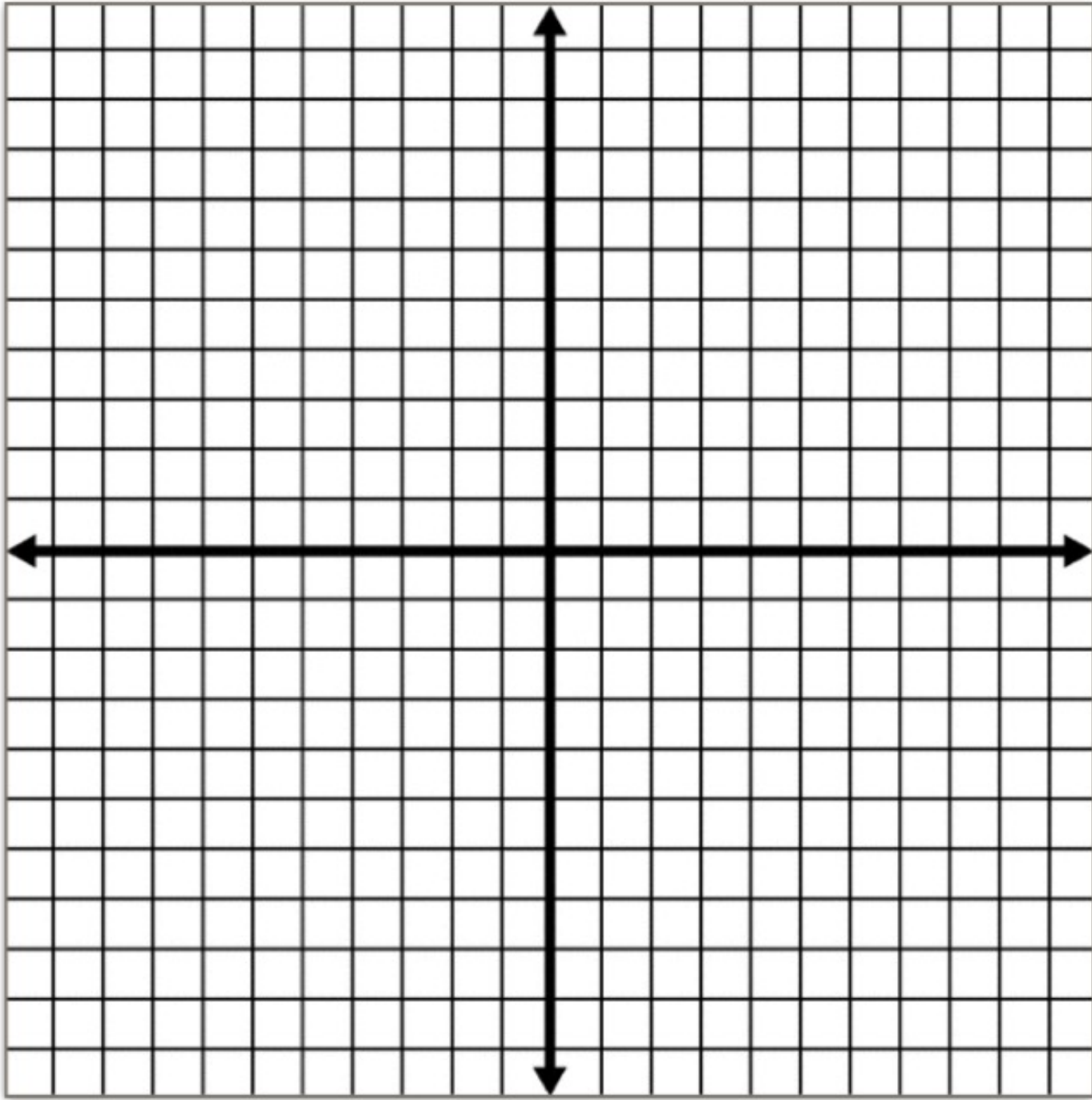
(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

عندما $x = -1.5$ ، فإن قيمة $y \approx 5.2$ ، (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5} \approx 5.19615$).

تحقق من فهمك

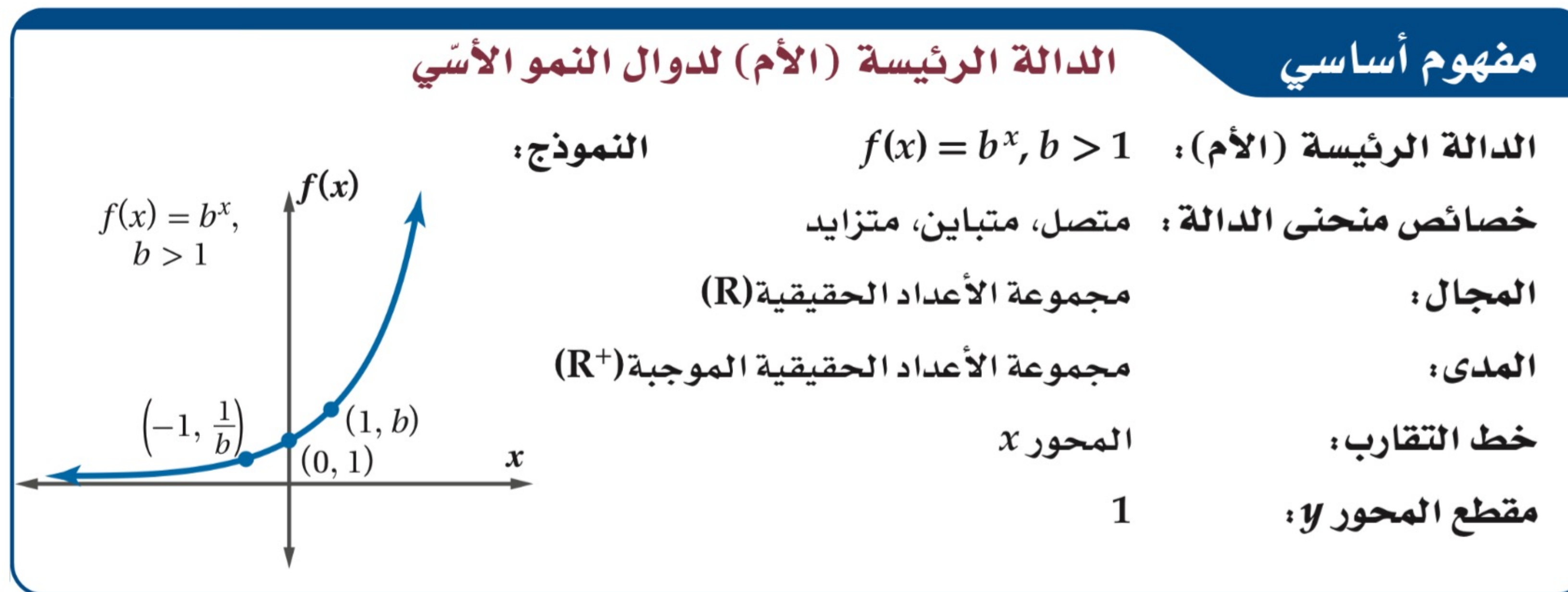
2A مَثِّل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y ، وحدد مجال الدالة ومداها.

2B استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك.



يتضح من المثال (2) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمه 2)، فإن قيم y تتناقص بنسبة ثابتة، فكل قيمة y تمثل $\frac{1}{9}$ القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متناقصة، كما أن المحور x هو خط تقارب أفقي لها.

النمو الأسّي: تسمى الدالة الأسية $f(x) = b^x$ ، حيث $b > 1$ دالة **النمو الأسّي**، فالدالة $y = 3^x$ الواردة في المثال 1 هي دالة نمو أسّي.



اليوم الوطني
السعودي ٩١

يمكنك تمثيل دوال النمو الأسّي بيانياً بنفس طريقة تمثيل الدوال الأسية، كما يمكنك الاستفادة من النقاط: $(-1, \frac{1}{b})$, $(0, 1)$, $(1, b)$



لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x . ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسّي $A(t) = a(1+r)^t$ ، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(r+1)$ ويُسمى **عامل النمو**.

وتستعمل دوال النمو الأسّي عادةً لتمثيل النمو السكاني.

اليوم الوطني
السعودي ٩١

تمثيل دوال النمو الأسي بيانياً

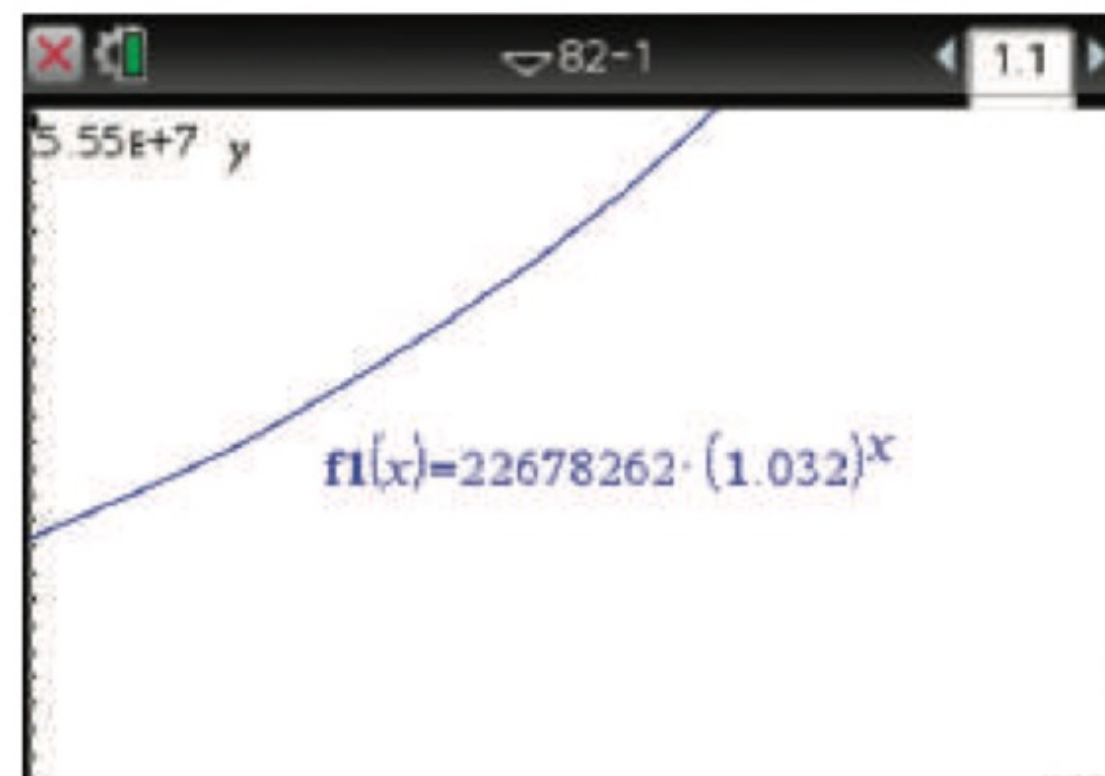
مثال ٣ من واقع الحياة :

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1431-1425 3.2% تقريباً. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425 هـ ، فأوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية.

(a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملاً $a = 22678262, r = 0.032$

$$y = 22678262 (1.032)^t$$

(b) مثل الدالة بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتحصل على الشكل المجاور.



الربط مع الحياة

تُعد الإحصاءات السكانية أحد أهم مصادر البيانات التي تتطلبها التخطيط التنموي في المجالات الاقتصادية والاجتماعية. وقد أُجري أول تعداد سكاني في المملكة عام 1394 هـ، وكان عدد سكان المملكة حينئذ 7 ملايين نسمة تقريباً.

تنبيه!

النسبة المئوية
تذكر أن جميع أشكال النسب المئوية تتحول إلى كسور عشرية. فمثلاً،
 $12.5\% = 0.125$

اليوم الوطني
السعودي ٩١

تحقق من فهمك

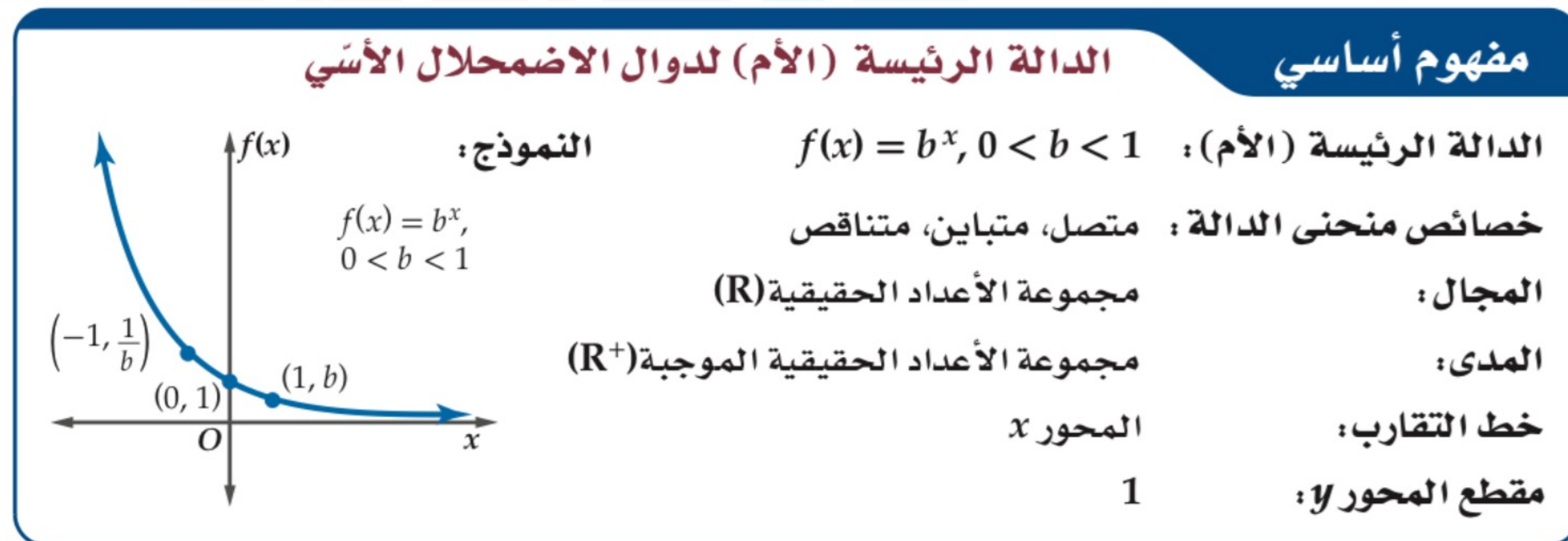
(3) **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 8.5% سنوياً، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430 هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثل إنفاق العائلة منذ عام 1430 هـ، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية.



اليوم الوطني
السعودي ٩١

اليوم الوطني
السعودي ٩١

الاضمحلال الأسّي: تُسمى الدالة الأسّيّة $f(x) = b^x$ ، حيث $0 < b < 1$ دالة الاضمحلال الأسّي، فالدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ الواردة في المثال 2 هي دالة اضمحلال أسّي.



يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانياً بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسّي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x ، ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

وكما في النمو الأسّي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسّي $A(t) = a(1 - r)^t$ ، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$ ، ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

وتستعمل دوال الاضمحلال الأسّي عادة في التطبيقات المالية.

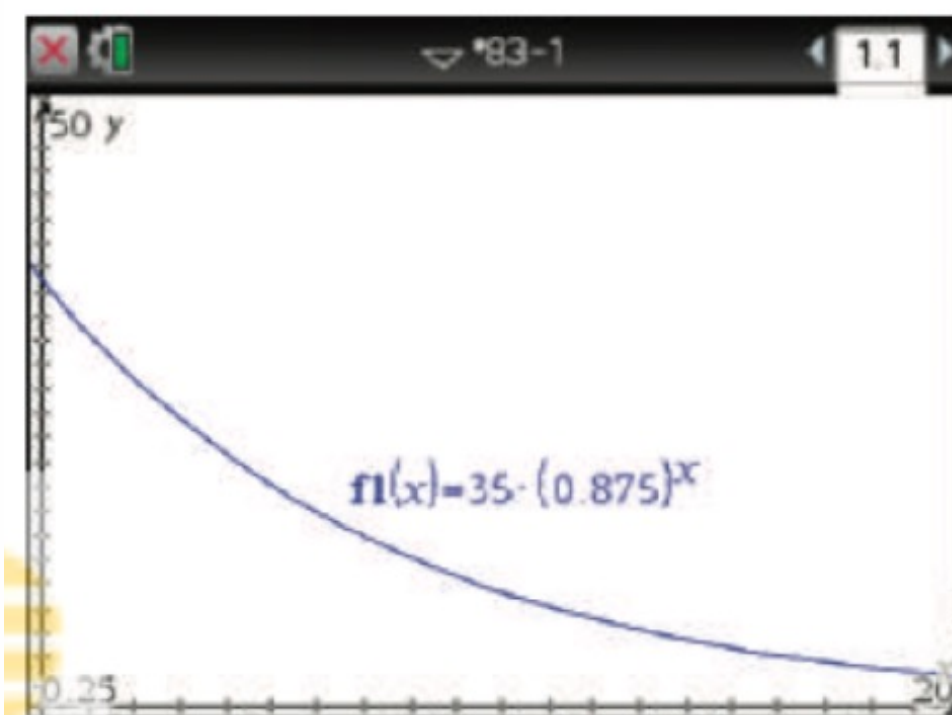
تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانياً

مثال ٤ من واقع الحياة :



الربط مع الحياة

الشاي الأخضر قليل الأكسدة بخلاف الشاي الأسود، وقد أثبتت بعض الدراسات العلمية والطبية أن الذين يشربون الشاي الأخضر أقل عُرضةً للإصابة بأمراض القلب وأنواع معينة من السرطان.



شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافيين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% تقريباً من كمية الكافيين من أجسامهم في الساعة.

(a) أوجد دالة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثلها بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية.

$$\begin{aligned} y &= a(1 - r)^t \\ &= 35(1 - 0.125)^t \\ &= 35(0.875)^t \end{aligned}$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الحاسبة البيانية.

(b) قدر كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوباً من الشاي الأخضر.

$$\begin{aligned} y &= 35(0.875)^t && \text{المعادلة من الفرع a} \\ &= 35(0.875)^3 && \text{عوض 3 بدلاً من الزمن t} \\ &\approx 23.45 && \text{استعمل الحاسبة} \end{aligned}$$

سيبقى في جسم هذا الشخص 23.45mg من الكافيين تقريباً بعد 3 ساعات.



اليوم الوطني
السعودي ٩٥

تحقق من فهمك

(4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على $68mg$ من الكافيين. أوجد معادلة أسية تمثل كمية الكافيين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوباً من الشاي الأسود، ومثلها بيانياً مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.



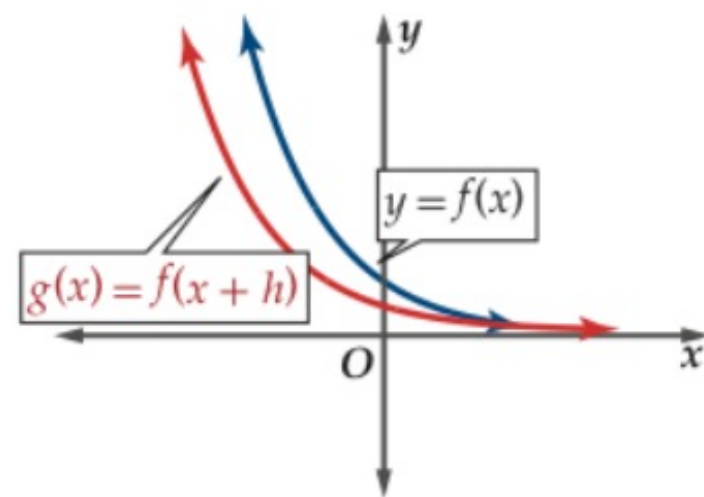
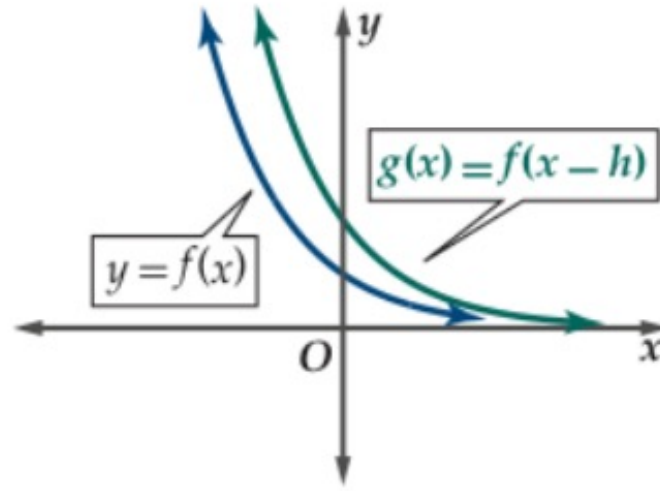
اليوم الوطني
السعودي ٩١

مفهوم أساسي

الانسحاب الرأسى والانسحاب الأفقى

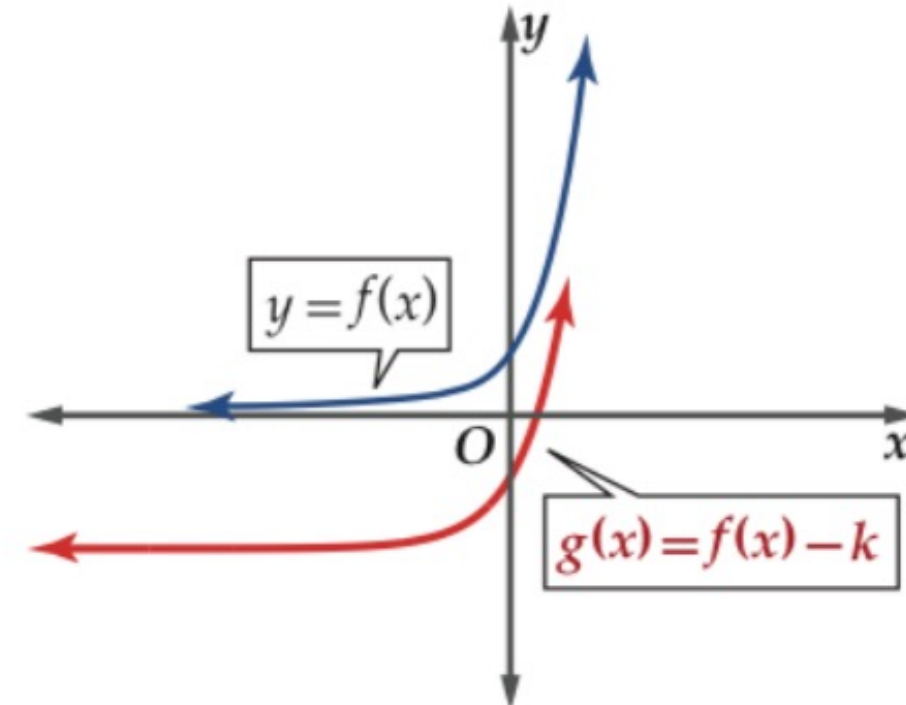
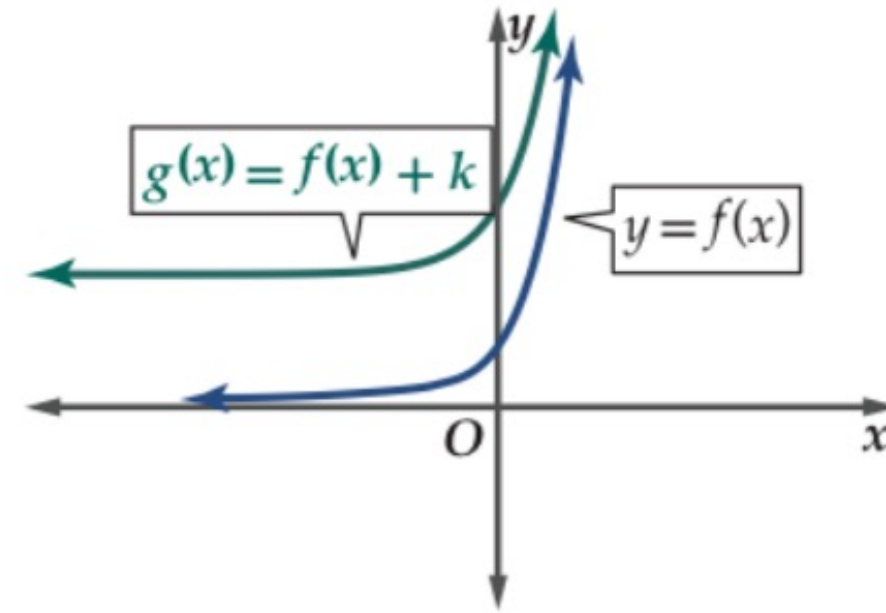
الانسحاب الأفقى

- منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:
- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
 - $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.



الانسحاب الرأسى

- منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:
- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
 - $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.



التحويلات
الهندسية

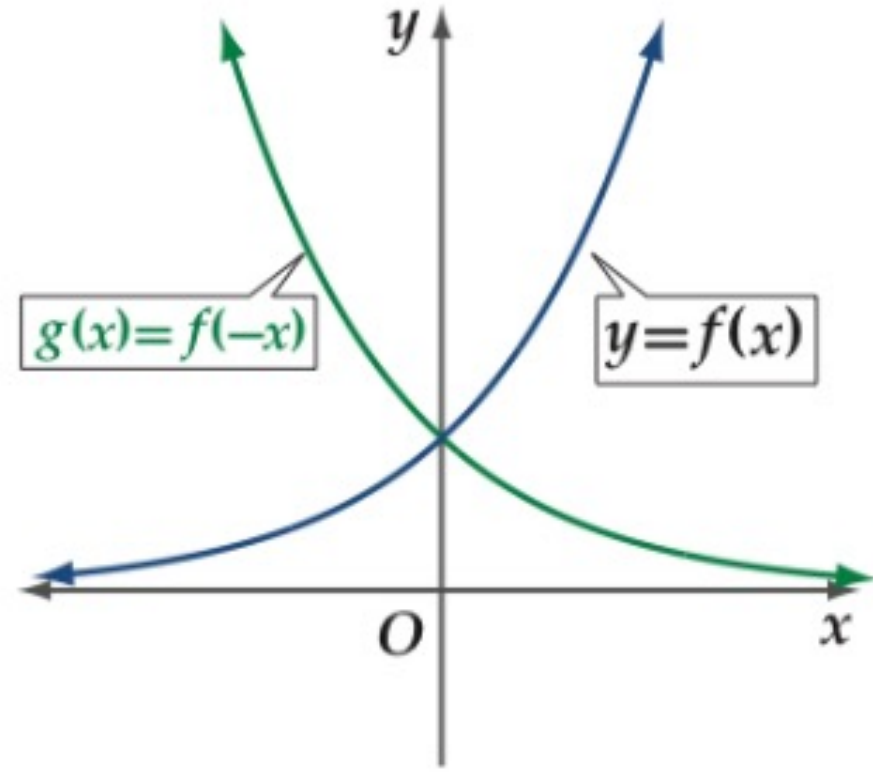


اليوم الوطني
السعودي ٩١

مفهوم أساسي

الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



التحويلات الهندسية

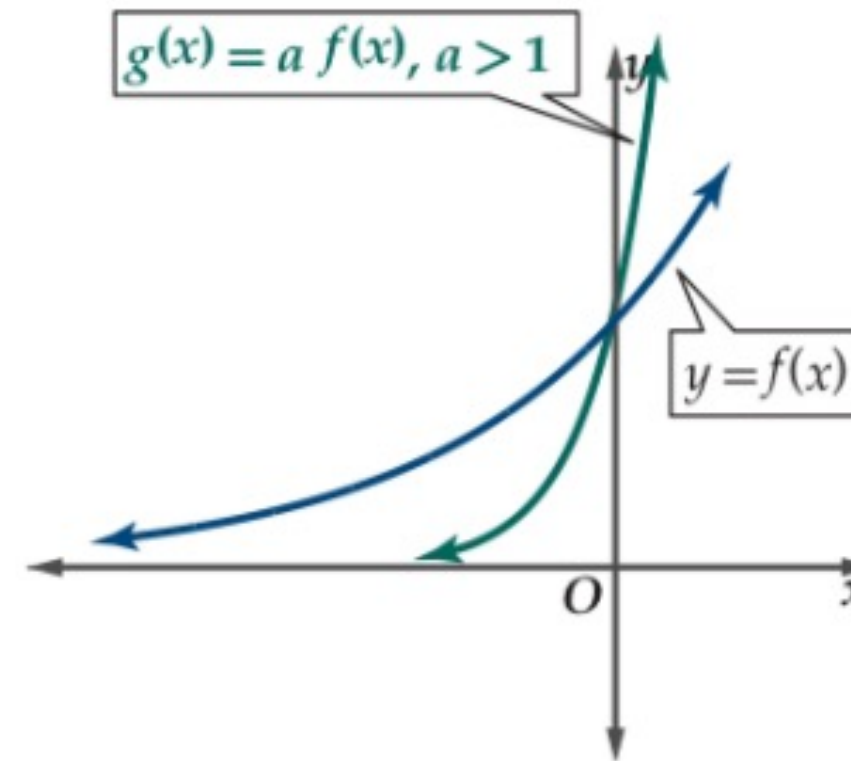
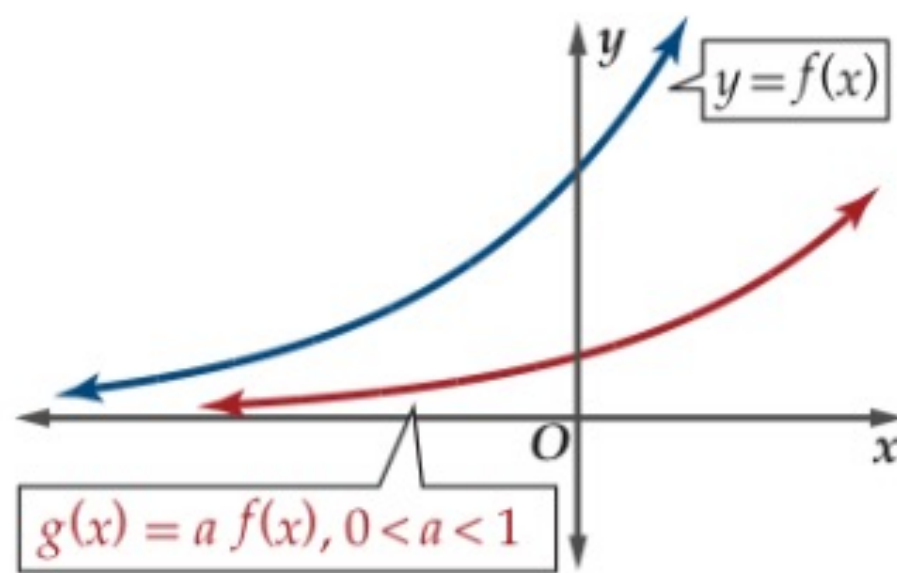
مفهوم أساسي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a f(x)$ هو:

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$.

تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$.



إرشادات للدراسة

الاضمحلال الأسّي:

تأكد من عدم الخلط بين تضييق التمثيلات البيانية، حيث $|a| < 1$ والاضمحلال الأسّي، حيث $0 < b < 1$.



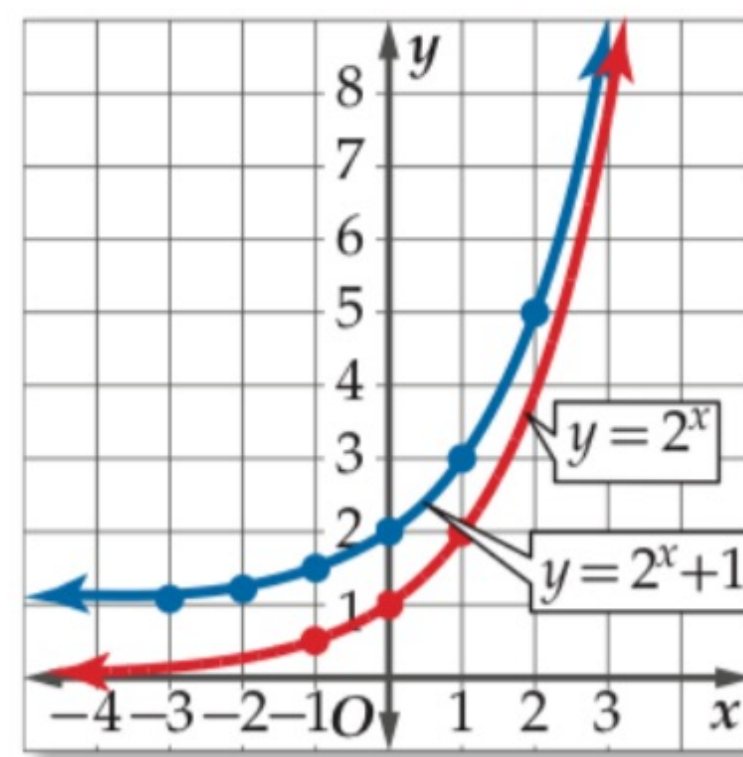
اليوم الوطني
السعودي ٩١

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسّي

مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدّد مجالها، ومداهما:

$$y = 2^x + 1 \quad (a)$$

حدّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 2^x$. بما أن $2 > 1$ فالدالة دالة نمو أسّي، لذا استعمل النقاط $(-1, \frac{1}{2})$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 2)$ أي النقاط $(-1, \frac{1}{b})$ ، $(0, 1)$ ، $(1, b)$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$ ، بما أن $k = 1$ فإن المعادلة $y = 2^x + 1$ تمثّل انسحابًا لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم) $y = 2^x$ وحدة واحدة إلى أعلى. وبلاستعانة بالأزواج المرتبة الواردة في الجدول أيضًا، فإن التمثيل البياني للدالة $y = 2^x + 1$ يكون كما هو موضح أدناه.



x	$2^x + 1$	y
-3	$2^{-3} + 1$	$1\frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} + 1$	$1\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} + 1$	$1\frac{1}{2}$
0	$2^0 + 1$	2
1	$2^1 + 1$	3
2	$2^2 + 1$	5

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ، والمدى هو $\{y \mid y > 1\}$



اليوم الوطني
السعودي ٩١

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

مجال الدالتين في المثال 5

هو مجموعة الأعداد

الحقيقية (R) . تذكر أن

سلوك طرفي التمثيل البياني

هو سلوك التمثيل البياني

مع اقتراب x من مالا نهاية أو

سالب مالا نهاية. نلاحظ في

المثال (5a) أنه مع اقتراب x

من مالا نهاية، تقترب y من

مالا نهاية أيضًا، وأما عندما

تقترب x من سالب مالا نهاية،

فإن y تقترب من 1. وفي

المثال (5b) عندما تقترب x

من مالا نهاية فإن y تقترب

من سالب مالا نهاية، وأما

عندما تقترب x من سالب

مالا نهاية، فإن y تقترب من

الصفر.

تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسّي

إرشادات للدراسة

تمثيل تحويلات الدالة

الأسية بيانياً:

يمكن استعمال إحدى

الطريقتين الآتيتين؛ لتمثيل

تحويلات دوال النمو الأسّي

والاضحلال الأسّي بيانياً:

– استعمال التحويلات

الهندسية للدالة الأم،

وتعزيز ذلك بجدول لقيم

الدالة عندما لا تكون

التحويلات الهندسية

كافية وواضحة؛ لمزيد

من الدقة، كما في المثال

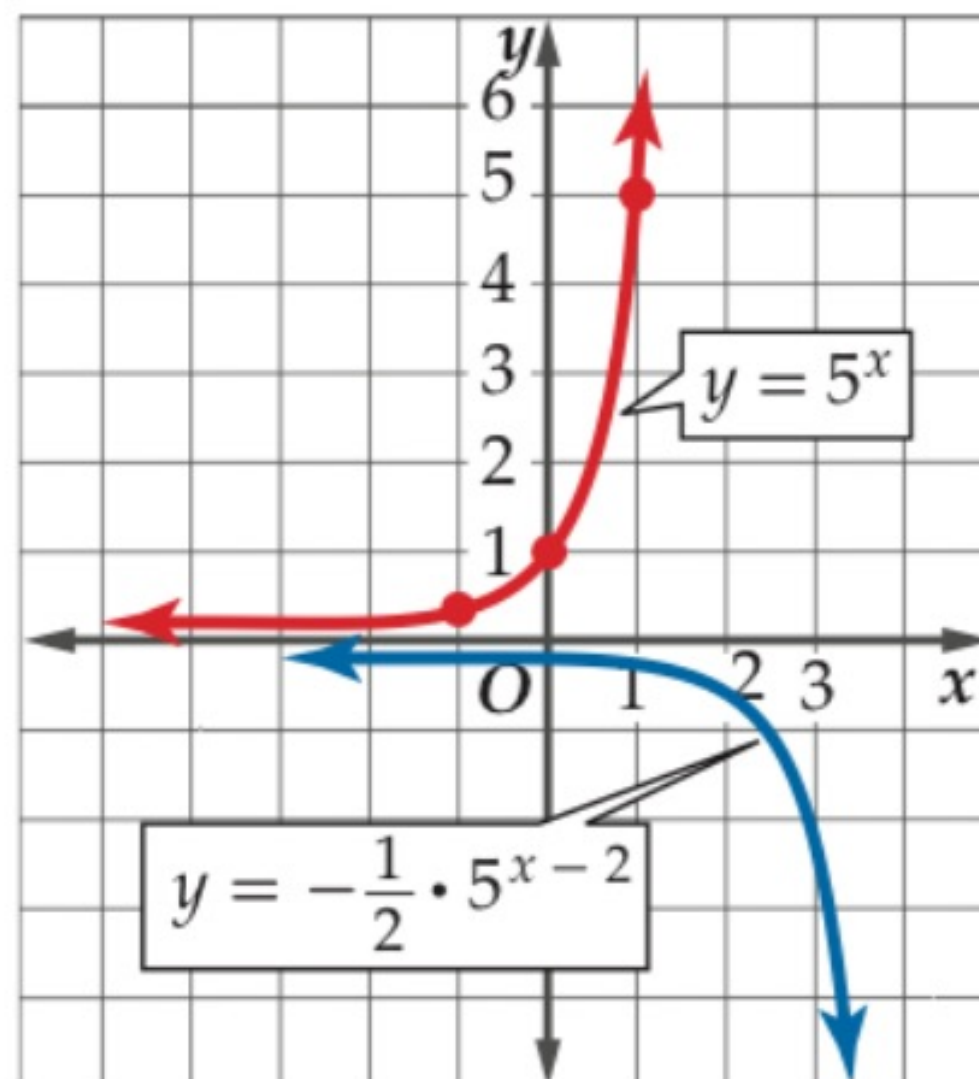
5A

– استعمال التحويلات

الهندسية للدالة الأم

فقط، كما في المثالين

5B, 6



$$(b) \quad y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$$

حدّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 5^x$. بما أن $5 > 1$ فالدالة دالة نمو أسّي، لذا استعمل النقاط $(-1, \frac{1}{5})$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 5)$ وأي النقاط البياني للدالة $y = 5^x$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسياً.
- $h = 2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسّي للتمثيل البياني.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ، والمدى هو $\{y \mid y < 0\}$



اليوم الوطني
السعودي ٩١

تحقق من فهمك

$$y = 0.1(6)^x - 3 \quad \textbf{(5B)}$$

$$y = 2^x + 3 - 5 \quad \textbf{(5A)}$$



اليوم الوطني
السعودي ٩١

اليوم الوطني
السعودي ٩١

تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًا

مثّل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانيًا، وحدّد مجالها ومداها.

حدّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$ ؛ فالدالة دالة اضمحلال أسّي، لذا

استعمل النقاط $(-1, 4)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, \frac{1}{4})$

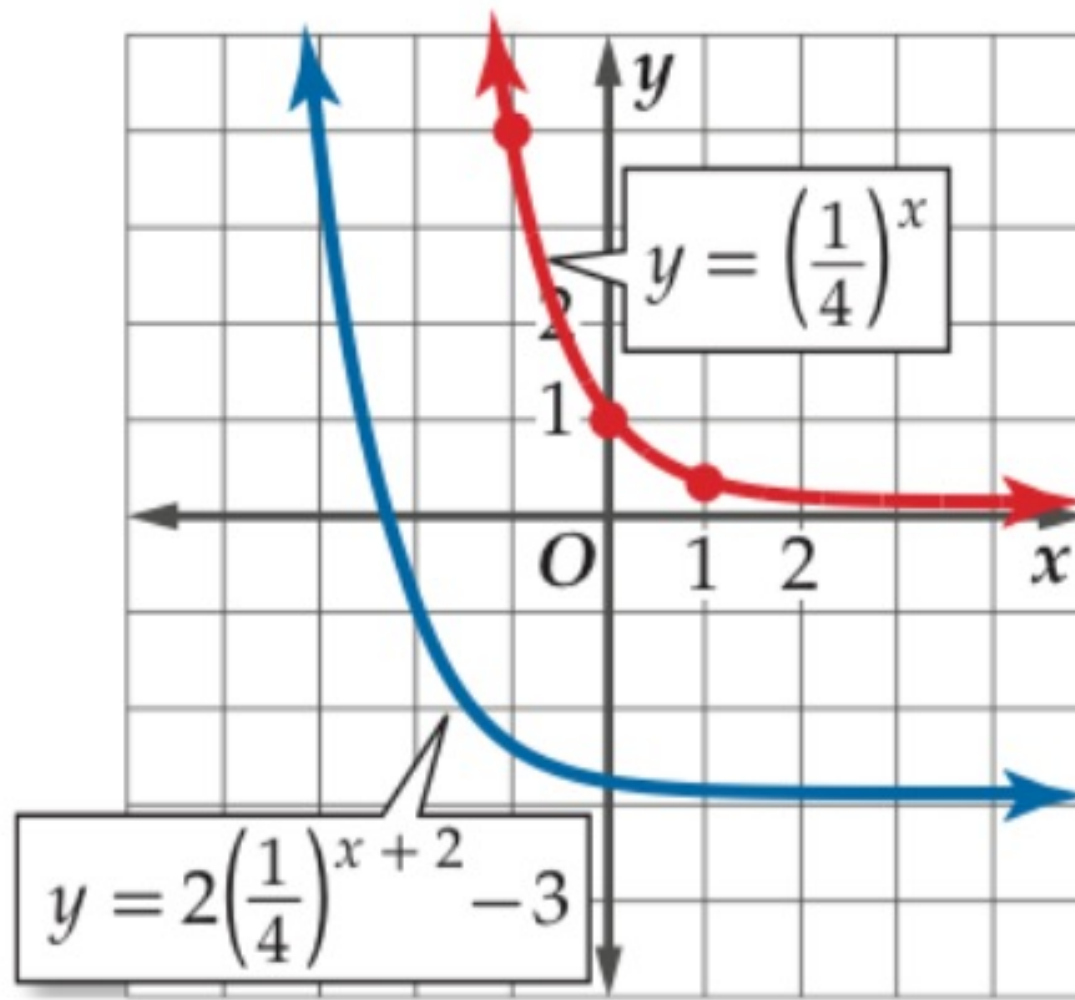
والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

• $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسياً.

• $h = -2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.

• $k = -3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى أسفل.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من -3 .



اليوم الوطني
السعودي ٩١

تحقق من فهمك

$$y = \frac{3}{8} \left(\frac{5}{6} \right)^{x-1} + 1 \quad (6)$$



اليوم الوطني
السعودي ٩١

اليوم الوطني
السعودي ٩١

مسائل مهارات التفكير العليا



اليوم الوطني
السعودي ٩١

(29) تبرير: حدد ما إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. وضح إجابتك.

(a) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور y .

(b) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور x .

(c) إذا كان b عدداً صحيحاً، فإن الدالة $f(x) = |b|^x$ هي دالة نمو أسي.

(32) مسألة مفتوحة: أعط قيمة للثابت b تجعل الدالة $f(x) = \left(\frac{8}{b}\right)^x$ دالة اضمحلال أسي.

(33) اكتب: صف التحويل الذي ينقل الدالة $g(x) = b^x$ إلى الدالة $f(x) = ab^{x-h} + k$.