مع كُل صباح يوم جديد ، تتجدد معهُ آمالنا ، تشمر الهمّةُ عن ساعدها
ونبحثُ الخُطى باتجاه تحقيقها ،
اللهم خيرك عمّم و بيُسرك تمّم ..

حل المعادلات والمتباينات الأسية

ثالث ثانوي_رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ تمثيل الدوال الأسية بيانيًا. (الدرس 1–2)

والآن:

- أحل معادلات أسية.
- أحل متباينات أسية.
- أحل مسائل تتضمن نموًا أسيًا واضمحلالًا أسيًا.

المفردات:

المعادلة الأسية
exponential equation
الربح المركب
compound interest
المتباينة الأسية
exponential inequality

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

لماذا

تتزايد اشتراكات مواقع الإنترنت بطريقة سريعة، فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كان عدد الاشتراكات في أحد المواقع يُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$، حيث x عدد السنوات منذ عام 1435 هـ، و y عدد المشتركين بالملايين.

فيمكنك استعمال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة، أو تحديد السنة التي يكون فيها عدد المشتركين عند مستوى معين.

حل المعادلات الأسية: تظهر المتغيرات في **المعادلة الأسية** في موقع الأسس.

مفهوم أساسي

خاصية المساواة للدوال الأسية

التعبير اللفظي: إذا كان $b \neq 1$, $b > 0$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. وإذا كان $x = 5$، فإن $3^x = 3^5$.

مثال ١ حل المعادلات الأسية

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	$8 = 2^3$
$2^x = 2^9$	خاصية قوة القوة
$x = 9$	خاصية المساواة للدوال الأسية

b) $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	$9 = 3^2$
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	خاصية قوة القوة
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$-2 = 2x$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$-1 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 2

تحقق من فهمك

1A) $4^{2n-1} = 64$

1B) $5^{5x} = 125^{x+2}$

مثال ٢ من واقع الحياة

كتابة دالة أسية

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

في بداية التجربة كان الزمن (x) صفر ساعة ، وعدد الخلايا (y) يساوي 7500 خلية بكتيرية، لذا عوّض هذه القيم لإيجاد المقطع y أو قيمة a .

$y = ab^x$	الدالة الأسية
$7500 = a\, b^0$	بالتعويض عن x بالعدد 0، وعن y بالعدد 7500
$7500 = a$	$b^0 = 1$

وعندما $x = 4$، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000، عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b.

$23000 = 7500 \cdot b^4$	بالتعويض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23000، وعن a بالعدد 7500
$3.067 \approx b^4$	بقسمة كلا الطرفين على 7500
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	بإيجاد الجذر الرابع للطرفين
$1.323 \approx b$	باستعمال الحاسبة

الدالة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y = 7500(1.323)^x$.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

$y = 7500(1.323)^x$	المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية
$= 7500(1.323)^{12}$	بالتعويض عن x بالعدد 12
≈ 215664	باستعمال الحاسبة

سيكون هنالك 215664 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

2) إعادة تصنيع: أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1436 هـ ، وفي عام 1440 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1436 هـ.

2A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعاد تصنيعها y بعد x سنة مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين.

2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات المُعادة التصنيع عام 1481 هـ؟

الربط مع الحياة

قبل إعادة تدوير البلاستيك يتم غسله بمادة الصودا الكاوية المضاف إليها الماء الساخن. ولا ينصح باستعمال العبوات المعاد تدويرها للمواد الغذائية.

تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن **الربح المركب**؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافًا إليه أي أرباح سابقة، وليس فقط عن رأس المال كما هو في الربح البسيط.

مفهوم أساسي

الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال ٣ الربح المركب

مال: استثمر حمد مبلغ 25000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.2%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

افهم: أوجد المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة.

خطط: بما أنه تتم إضافة الأرباح إلى رأس المال، إذن استعمل صيغة الربح المركب.

$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

حُلّ:

صيغة الربح المركب

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

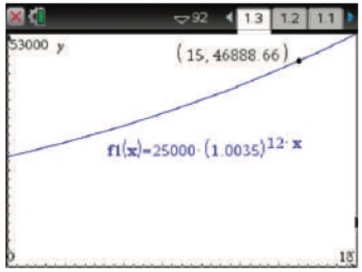
$$= 25000\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$$

باستعمال الحاسبة

$$\approx 46888.66$$

تحقق: مثّل المعادلة المناظرة بيانيًّا $f(x) = 25000(1.0035)^{12x}$، ثم أوجد قيمة y عندما $x = 15$ على الرسم بالضغط على مفتاح menu ثم اختر 8: الهندسة واختر منها 1: النقاط والمستقيمات ومنها 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على الرسم البياني لتحدد نقطة يظهر الزوج المرتب الذي يمثلها.

اضغط esc ثم حدِّد الإحداثي x للنقطة واكتب 15، سيظهر الإحداثي y المقابل 46888.66، إذن الإجابة صحيحة.



تنبيه!

نسب مئوية:
تذكر تحويل جميع النسب المئوية إلى كسور عشرية، مثل: $4.2\% = 0.042$

تنبيه!

تقريب الأعداد:
يمكنك تقريب الأعداد الظاهرة على الشاشة، بحيث تظهر على الرسم بالشكل المناسب وذلك بالضغط على مفتاح on واختيار 5 الإعدادات ثم اختيار 2: إعدادات المستند... واختيار التقريب المناسب، وستظهر الأعداد بحسب عدد المنازل المطلوبة.

تحقق من فهمك

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 12% ، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنواتٍ مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

حل المتباينات الأسية : **المتباينة الأسية** هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي — **خاصية التباين لدالة النمو**

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، وإذا كان ؛ $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

مفهوم أساسي — **خاصية التباين لدالة الاضمحلال**

التعبير اللفظي: إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، فإن $x < 5$ ، وإذا كان ؛ $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين $\geq$

مثال ٤ حل المتباينات الأسية

حُلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	$16 = 2^4 , 8 = 2^3$
$2^{8x-12} < 2^3$	خاصية قوة القوة
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين لدالة النمو
$8x < 15$	بجمع 12 للطرفين
$x < \frac{15}{8}$	بقسمة الطرفين على 8

إرشادات للدراسة

دالتا النمو والاضمحلال الأسي:

لاحظ أن خاصية التباين لدالة النمو تبين أن هذه الدالة متزايدة على مجالها، وأن خاصية التباين لدالة الاضمحلال تبين أن هذه الدالة متناقصة على مجالها.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

(4A $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

(4B $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

مسائل مهارات التفكير العليا

37) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة أسية يكون حلها $x = 2$.

38) برهان: أثبت أن $9^{4x+1} \cdot 3^{2x+2} = 81^{x+1} \cdot 27^{2x}$.

39) تبرير: حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك

$2^x > -(8^{20x})$ لجميع قيم x .