بصبرك واجتهادك تستطيع ان تفعل المستحيل .. فقط واصل للسعي نحو الأفضل

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

ثالث ثانوي_رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

فيما سبق:

درستُ إيجاد الدالة العكسية لدالة. (الدرس 7–1)

والآن:

- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثّل دوال لوغاريتمية بيانيًّا.

المفردات:

اللوغاريتم
logarithm

الدالة اللوغاريتمية
logarithmic function

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

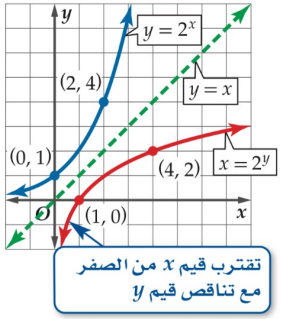
لماذا

يُرجِّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات ، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$ ، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية : يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًّا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية للدالة $y = 2^x$ هي $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن الدالة العكسية للدالة $y = b^x$ هي $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x ، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b .

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مفهوم أساسي

اللوغاريتم للأساس b

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرّف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad b^y = x$$

مثال:

$$\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$$

إرشادات للدراسة

تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة المعادلات اللوغاريتمية على الصورة الأسّية

مثال ١

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية :

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

(a $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \rightarrow 8 = 2^3$

(b $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \rightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تحقق من فهمك

(1A $\log_4 16 = 2$

(1B $\log_3 729 = 6$

مثال ٢

التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية :

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية:

(a $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \longrightarrow 8 = 2^3$

(b $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \longrightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تحقق من فهمك

(2A $4^3 = 64$

(2B $125^{\frac{1}{3}} = 5$

مثال ٣

ايجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_{16} 4$

$\log_{16} 4 = y$	بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y
$4 = 16^y$	تعريف اللوغاريتم
$4^1 = 4^{2y}$	$16 = 4^2$
$1 = 2y$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$\frac{1}{2} = y$	اقسم كلا الطرفين على 2

لذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

$\log_7 \frac{1}{49} = y$	بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y
$\frac{1}{49} = 7^y$	تعريف اللوغاريتم
$7^{-2} = 7^y$	$\frac{1}{49} = 7^{-2}$
$-2 = y$	خاصية المساواة للدوال الأسية

لذا فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

(3A $\log_3 81$

(3B $\log_{\frac{1}{2}} 256$

تحقق

من فهمك

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

مفهوم أساسي — **الخصائص الأساسية للوغاريتمات**

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري:

- تذكّر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$.
- $\log_b 0$ غير معرّف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x .

مثال ٤ استعمال الخصائص الأساسية لوغاريتمات

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

a) $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$ $\quad 5^3 = 125$

$= 3$ $\quad \log_b b^x = x$

b) $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $\quad 0.001 = 10^{-3}$

$= -3$ $\quad \log_b b^x = x$

c) $12^{\log_{12} 4.7}$

$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$ $\quad b^{\log_b x} = x$

d) $\log_{10}(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرَّف فقط عندما $x > 0$، فإن $\log_{10}(-5)$ غير معرَّف في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تحقق من فهمك

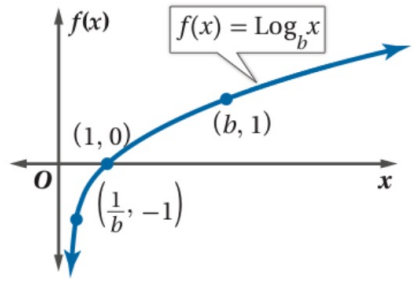
4A) $\log_9 81$

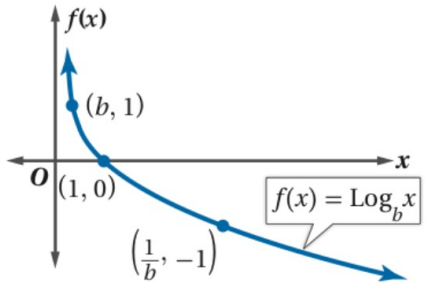
4B) $3^{\log_3 1}$

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا: تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$، حيث $b \neq 1$، وكل من العددين b , x موجبًا **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي — **الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية**

الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \log_b x,\ b > 1$	الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \log_b x,\ 0 < b < 1$
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متزايد	خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متناقص
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)	المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)	المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
خط التقارب:	المحور y	خط التقارب:	المحور y
مقطع المحور x:	1	مقطع المحور x:	1





مثال ٥ تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً

(a $f(x) = \log_5 x$

الخطوة 1: حدّد الأساس.

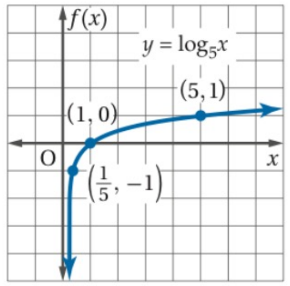
$b = 5$

الخطوة 2: حدد نقاطًا على التمثيل البياني .

بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

أي النقاط $\left(\frac{1}{5}, -1\right), (1, 0), (5, 1)$.



الخطوة 3: مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد $f(x)$ من 0 إلى ما لا نهاية.

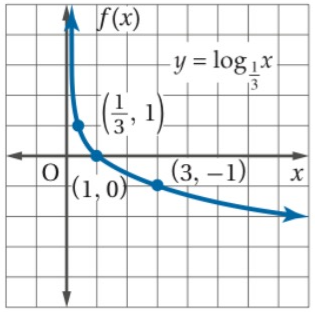
(b $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

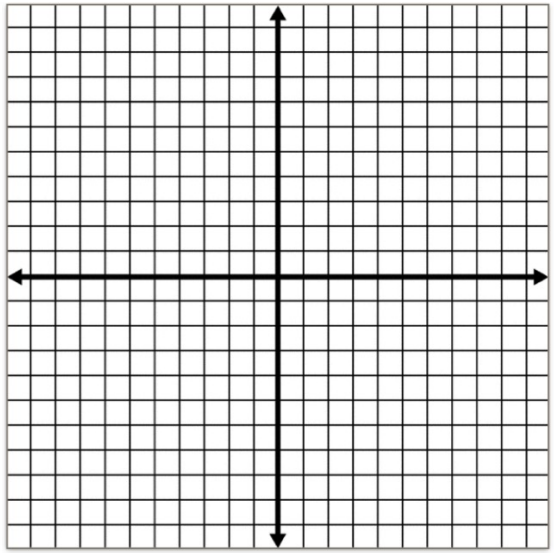
لذا استعمل النقاط $\left(\frac{1}{3}, 1\right), (1, 0), (3, -1)$.

الخطوة 3: ارسم المنحنى.

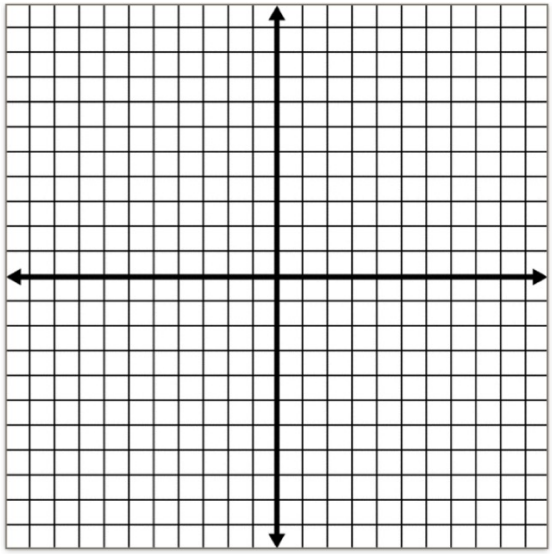


تحقق من فهمك

(5A $f(x) = \log_2 x$



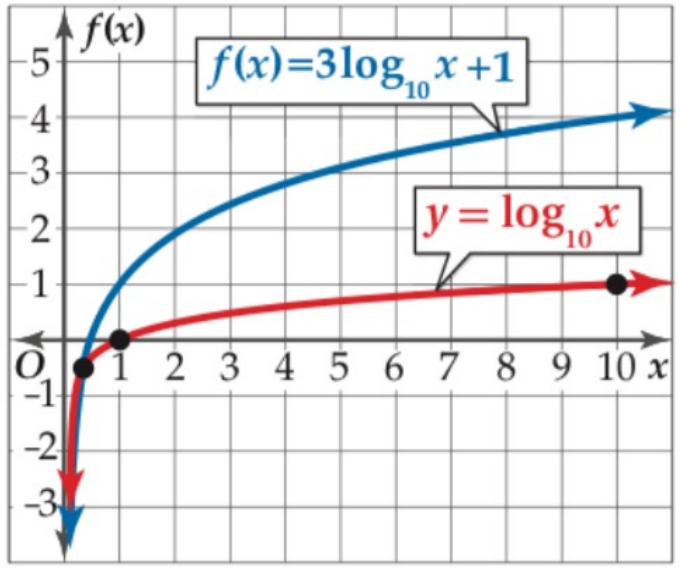
(5B $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$



مثال ٦ تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً

(a $f(x) = 3\log_{10} x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن $10>1$ فاستعمل النقاط $(b\ ,\ 1)$, $(1\ ,\ 0)$, $(\frac{1}{b}\ ,\ -1)$، أي النقاط $(10\ ,\ 1)$, $(1\ ,\ 0)$, $(\frac{1}{10}\ ,\ -1)$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

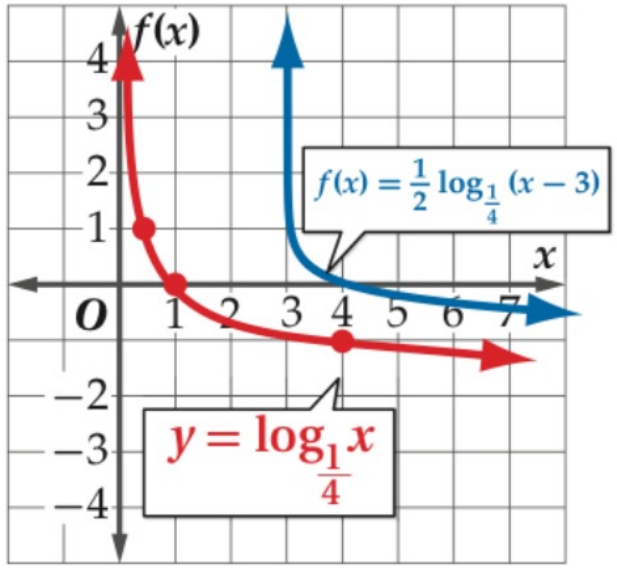


- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.

مثال ٦ تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً

b) $f(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

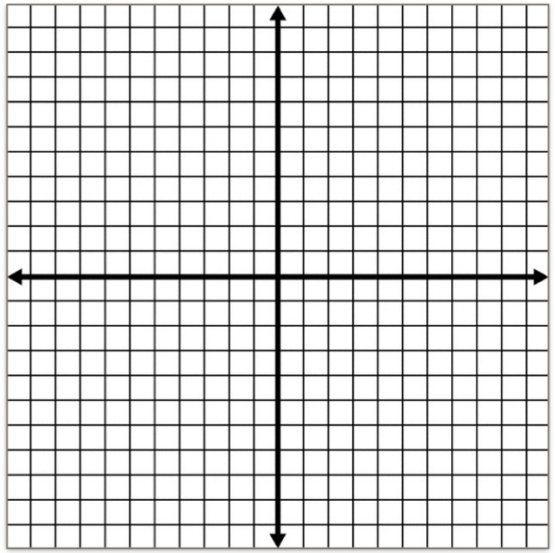
التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.



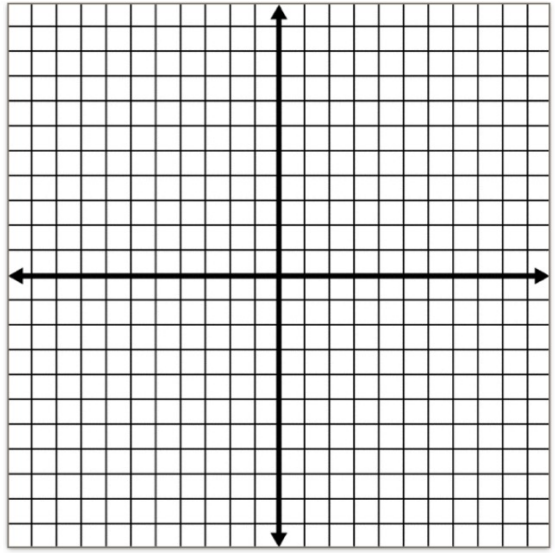
- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = 3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي.

تحقق من فهمك

(6A $f(x) = 2\log_3(x-2)$



(6B $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$



مثال ٧

من واقع الحياة

إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

هزات أرضية: يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

الربط مع الحياة

أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت شيلي عام 1960م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، ودمرت قرى كاملة، وقتلت آلاف السكان.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$	الدالة الأصلية
$= 10^{9.2-1}$	عوّض 9.2 بدلاً من x
$= 10^{8.2}$	بسّط
$= 158489319.2$	استعمل الحاسبة

b) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 10^{x-1}$، واكتبها على الصورة: $y = \log_{10} x + c$.

بما أن الدالة $y = 10^{x-1}$ متباينة، فإن لها دالة عكسية.

$y = 10^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$x = 10^{y-1}$	بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y
$y - 1 = \log_{10} x$	تعريف اللوغاريتمات
$y = \log_{10} x + 1$	أضف العدد 1 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(49) اكتشف المختلف: حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى؟ فسر إجابتك.

$\log_3 9$	$\log_2 4$	$\log_2 16$	$\log_4 16$

(52) اكتشف الخطأ: أوجدت كل من مها ومريم قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$، أيٌّ منهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك.

مها

$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$

$49^y = \frac{1}{7}$

$(7^2)^y = (7)^{-1}$

$7^{2y} = (7)^{-1}$

$2y = -1$

$y = -\frac{1}{2}$

مريم

$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$

$(\frac{1}{7})^y = 49$

$(7^{-1})^y = 7^2$

$(7)^{-y} = 7^2$

$y = -2$