مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

يوم جديد وصباحٌ جميل
وعزم يتجدد نحو تحقيق الطموحات والنجاحات بإذن الله

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

رياضيات ٥

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية. (الدرس 4–2)

والآن:

- أحل معادلات لوغاريتمية.
- أحل متباينات لوغاريتمية.

المفردات:

المعادلة اللوغاريتمية

logarithmic equation

المتباينة اللوغاريتمية

logarithmic inequality

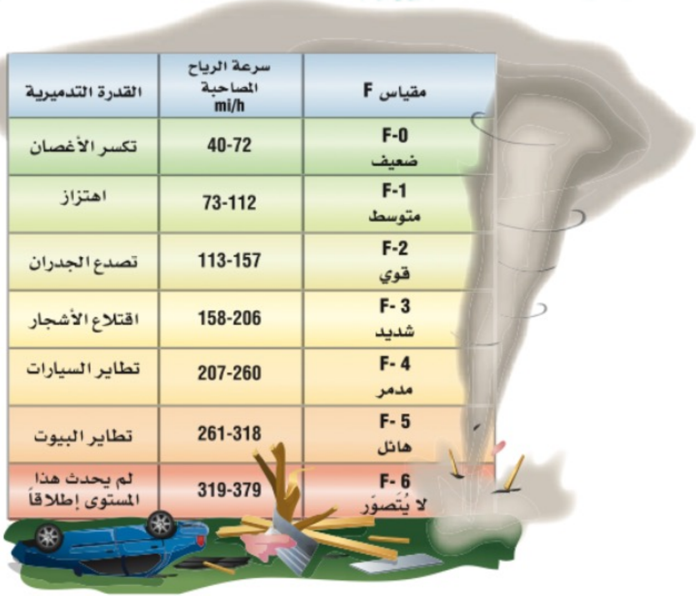
shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

لماذا

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F، ويصنِّف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من $F-0$ إلى $F-6$ بحسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (w) والتي تعطى بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ حيث تمثل d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل، وبحسب طول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة $F-6$ هي فئة أشد الأعاصير تدميرًا.

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك من إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة.

مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F-3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F-4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F-5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F-6 لا يُتصوَّر	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقاً



حل المعادلات اللوغاريتمية: تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

مثال ١ حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم .

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$ ، ثم تحقق من صحة حلّك.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$x = 36^{\frac{3}{2}}$	تعريف اللوغاريتم
$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$	$36 = 6^2$
$x = 6^3 = 216$	خاصية قوة القوة

التحقق: عوّض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية .

$\log_{36} x \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	المعادلة الأصلية
$\log_{36} 216 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	عوّض 216 بدلًا من x
$\log_{36} (36)(6) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	حلّل
$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	خاصيتا ضرب اللوغاريتميات ولوغاريتم القوة
$1 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$	بسّط
$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ✓	الحل صحيح

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

تحقق من فهمك

1A) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B) $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

يمكن استعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

مثال على اختبار 5

حُلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 B -1 C 2 D 4

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار:

$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 4 = 3x$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x^2 - 3x - 4 = 0$	اطرح $3x$ من كلا الطرفين
$(x - 4)(x + 1) = 0$	حلّل إلى العوامل
$x + 1 = 0$ أو $x - 4 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -1$ أو $x = 4$	حُل كل معادلة

التحقق: عوِّض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x = -1$	$x = 4$
$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$	$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$
$\log_2 (-3) = \log_2 (-3)$ ✗	$\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

بما أن $\log_2 (-3)$ غير معرف، فالإجابة -1 مرفوضة، والإجابة الصحيحة هي D

إرشادات للدراسة

التعويض
اختصارًا للوقت، يمكنك تعويض كل متغير بقيمته في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

تحقق من فهمك

2) حُلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

A -3 **B** -1 **C** 5 **D** 15

يمكن استعمال خصائص اللوغاريتمات لحل المعادلات اللوغاريتمية

shikhah_math إعداد : شيخة المرزوقي

مثال ٣ حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x-9) = 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$x(x-9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	بسّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين
$(x-12)(x+3) = 0$	حلّل
$x + 3 = 0$ أو $x - 12 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -3$ ، $x = 12$	حُل كل معادلة

التحقق:

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3-9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12-9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

$2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$ (3A

$\log_6 x + \log_6 (x+5) = 2$ (3B

إرشادات للدراسة

تحديد الحلول الدخيلة

يمكن تحديد الحلول الدخيلة من خلال إيجاد مجال المعادلة، ففي مثال3 مجال $\log_6 x$ هو $x>0$، بينما مجال $\log_6(x-9)$ هو $x>9$، لذا يكون مجال المعادلة هو $x>9$ ، وبما أن $-3 \not> 9$ فإن $x=-3$ ليس حلًا للمعادلة.

حل المتباينات اللوغاريتمية: **المتباينة اللوغاريتمية** هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي **خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية**

إذا كان $b > 1$, $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

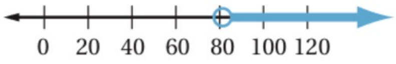
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٤ حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

أوجد مجموعة حلّ المتباينة $\log_3 x > 4$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 x > 4$	المتباينة الأساسية
$x > 3^4$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x > 81$	بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 81 , x \in R\}$



التحقق: عوّض بعدد أقل من 81، وعدد أكبر من 81 في المتباينة الأصلية.

$$x = 9 \qquad\qquad x = 243$$

$$\log_3 9 \overset{?}{>} 4 \qquad\qquad \log_3 243 \overset{?}{>} 4$$

$$2 > 4 \ ✗ \qquad\qquad 5 > 4 \ ✓$$

إذن الحل صحيح.

إرشادات للدراسة

حل المعادلة اللوغاريتمية :
عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرّفًا.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك.

4A) $\log_4 x \geq 3$

4B) $\log_2 x < 4$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.

استثن من حلِّك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي — خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
$x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

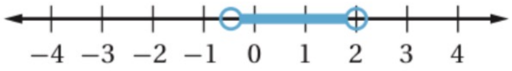
مثال ٥ حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 (x+3) > \log_4 (2x+1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_4 (x+3) > \log_4 (2x+1)$	المتباينة الأساسية
$x + 3 > 2x + 1$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$2 > x$	اطرح $x+1$ من كلا الطرفين

ثم استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \le 0$ أو $2x + 1 \le 0$ $\left(x \le -3 \text{ أو } x \le -\frac{1}{2}\right)$

إذن مجموعة الحل هي $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2 , x \in R\right\}$.



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٥ حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

التحقق: عوّض بعدد يقع في الفترة $(-\frac{1}{2}, 2)$، وآخر يقع خارج الفترة $(-\frac{1}{2} ، 2)$.

$x = 1$

$\log_4 (1+3) \overset{?}{>} \log_4 (2+1)$

$\log_4 4 \overset{?}{>} \log_4 3$

$\log_4 4 > \log_4 3$ ✓

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

$x = 3$

$\log_4 (3+3) \overset{?}{>} \log_4 (2\times3+1)$

$\log_4 6 \overset{?}{>} \log_4 7$

$\log_4 6 > \log_4 7$ ✗

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

إذن الحل صحيح.

تحقق من فهمك

5) أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \le \log_5 (x + 4)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

مسائل
مهارات التفكير العليا

32) **اكتشف الخطأ:** تقوم لينا وريم بحل المتباينة $\log_2 x \geq -2$. أي منهما حلها صحيح؟

لينا	ريم
$\log_2 x \geq -2$	$\log_2 x \geq -2$
$x \leq 2^{-2}$	$x \geq 2^{-2}$
$0 < x \leq \frac{1}{4}$	$x \geq \frac{1}{4}$

انتهى الدرس

شاكرة لكم تفاعلكم وجميل مشاركاتكم ..

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math