تهيئة

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيَّي نقطةِ منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

1) $(1, 4), (-2, 4)$

2) $(-5, 3), (-5, 8)$

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

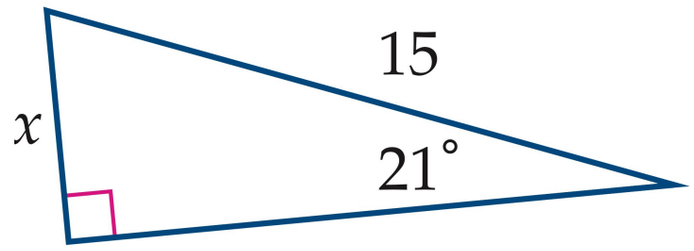
صيغة إحداثيَّي منتصف قطعة مستقيمة

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

تهيئة

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

5)

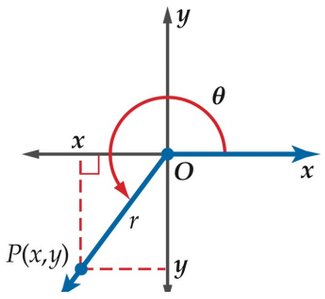


تهيئة

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ فاكتب " لا يوجد حَلّ " مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

10) $a = 10, b = 7, A = 128°$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

قانون جيوب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

مقدمة في المتجهات

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثِّلها هندسيًّا .
- أحلل المتجه إلى مركبتَيه المتعامدتين.
- أحلُّ مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:

كمية قياسية (عددية)
solar quantity
متجه
vector
الكمية المتجهة
vector quantity
قطعة مستقيمة متجهة
directed line segment
نقطة البداية
initial point
نقطة النهاية
terminal point
الوضع القياسي
standard position
اتجاه المتجه
direction
طول المتجه (المقدار)
magnitude
الاتجاه الربعي
quadrant bearing
الاتجاه الحقيقي
true bearing
المتجهات المتوازية
parallel vectors
المتجهات المتساوية
equal vectors
المتجهان المتعاكسان
opposite vectors
المحصلة
resultant
قاعدة المثلث
triangle method
قاعدة متوازي الأضلاع
parallelogram method
المتجه الصفري
zero vector
المركبات
components
المركبات المتعامدة
rectangular components

قدرات

إذا كان لخلود اختان ، الأولى أكبر منها ب ٨ سنوات والاخرى اصغر منها بسنتين ومجموع عمر اختيها هو ٥٦ سنة فكم عمر خلود

لماذا

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كلٍّ من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **المتجه** فهو كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك تُعتبر متجه والعدد المرتبط بمتجه يسمى **كميةً متجهةً**.

تحديد الكميات المتجهة

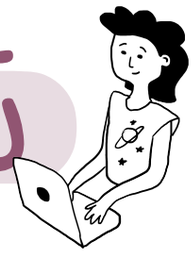
مثال

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة $15\ mi/h$ في اتجاه الجنوب الغربي.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة $75\ m/min$ جهة الغرب.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها $20\ km$.



تحقق من فهمك

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

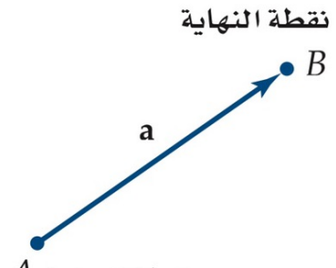
1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية °15 جهة الجنوب الشرقي.

1B) هبوط مظلِّي رأسيًّا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h .

1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm .

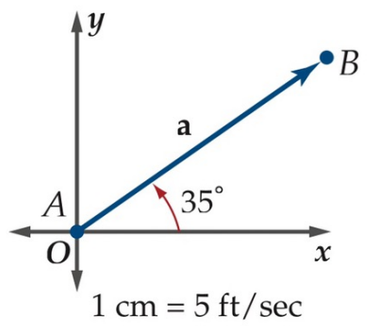
المتجهات:

يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعةٍ مستقيمةٍ لها اتجاه **(قطعة مستقيمة متجهة)**، أو سهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه. ويمثِّل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .

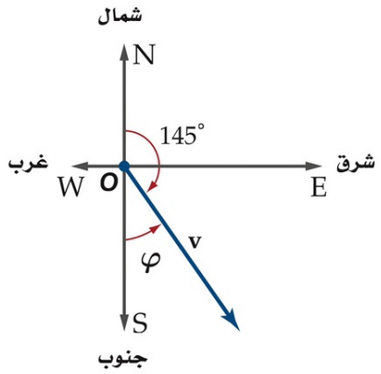


أما **طول المتجه** فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو $1\text{ cm} = 5\text{ ft/s}$، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز $|\mathbf{a}|$ ، يساوي 5×2.6 أو 13 ft/s .

يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو $35°$.

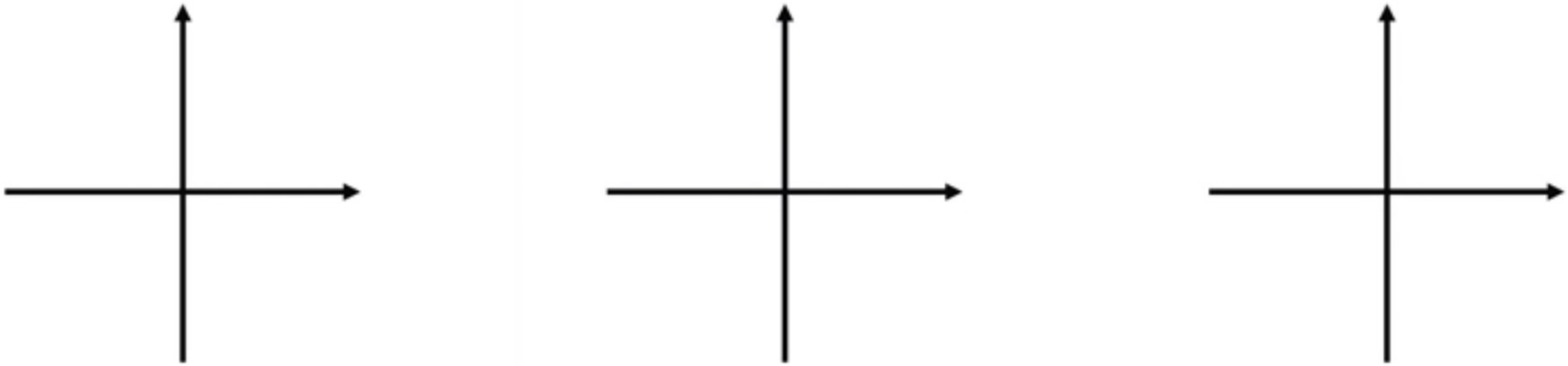


ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $35°$ جنوب شرق، وتُكتب S 35° E .



كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها $25°$ من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة $025°$.

الوضع القياسي	الاتجاه الربعي	الاتجاه الحقيقي
$240°$	$N30W$	$060°$

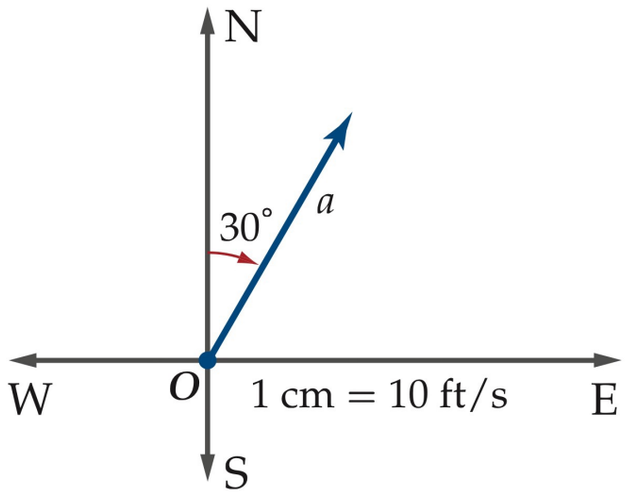


تمثيل المتجه هندسيًّا

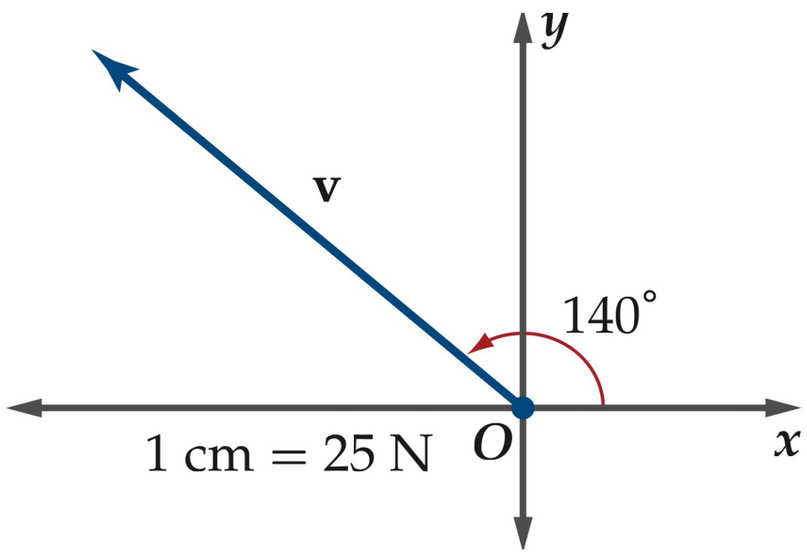
مثال

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

a) $a = 20\ ft/s^2$ باتجاه $030°$.



b) $v = 75\,N$ ، بزاوية قياسها $140°$ مع الاتجاه الأفقي.

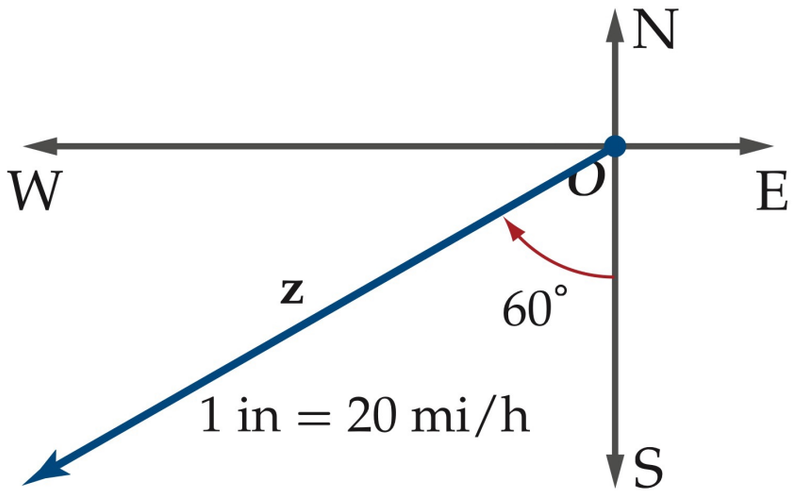


تمثيل المتجه هندسيًّا

مثال

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

c) $z = 30\ \text{mi/h}$ ، باتجاه $S\ 60°\ W$.



تحقق من فهمك

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

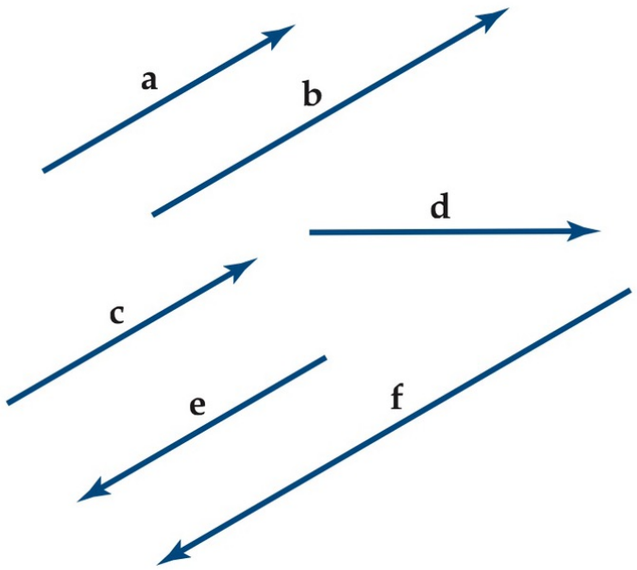
(2A $\mathbf{t} = 20\ \text{ft/s}$ ، باتجاه $065°$.

(2B $\mathbf{u} = 15\ \text{mi/h}$ ، باتجاه $S\ 25°\ E$.

(2C $\mathbf{m} = 60\,\text{N}$ ، بزاوية قياسها $80°$ مع الاتجاه الأفقي.

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:

- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ ، $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه $\mathbf{a}$ على الصورة $-\mathbf{a}$ ، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.



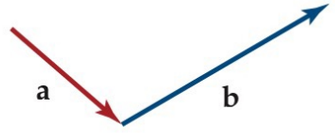
عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا،و يسمى **المحصّلة**. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

مفهوم أساسي — إيجاد المحصلة

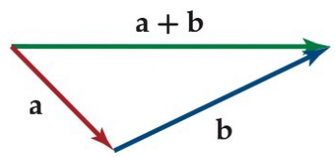
قاعدة المثلث

لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b** ، اتّبع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a** .



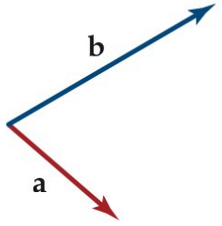
الخطوة 2 محصلة المتجهين **a , b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b** .



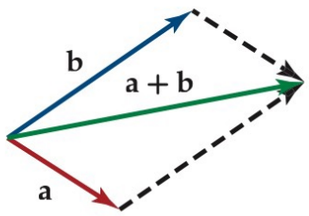
قاعدة متوازي الأضلاع

لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b** ، اتّبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a** .



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a , b** .

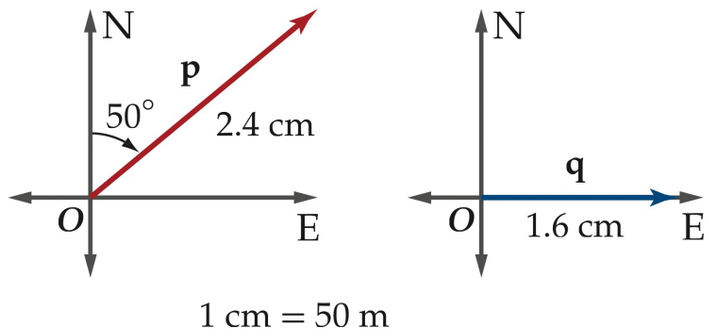


الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّله قطر متوازي الأضلاع .

إيجاد محصلة متجهين

مثال

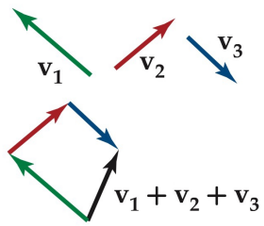
رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E ، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

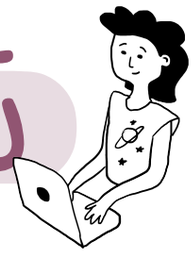


إرشادات للدراسة

المحصلة

لإيجاد محصلة أكثر من متجهين باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، يلزم إعادة الرسم أكثر من مرة؛ لذا من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة مشابهة لقاعدة المثلث، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.

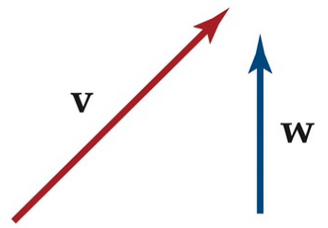




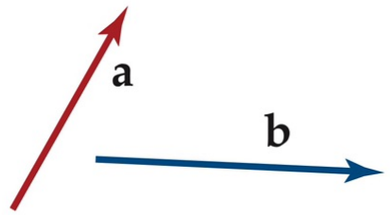
تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

(3A



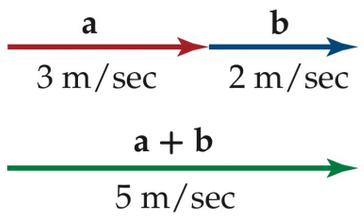
(3B

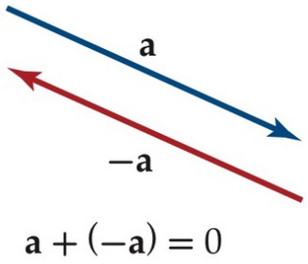


إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه

محصِّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.





$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0$

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**.ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$ ، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ ، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$ ؛ أي أن: $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.

و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.

مفهوم أساسي

ضرب المتجه في عدد حقيقي

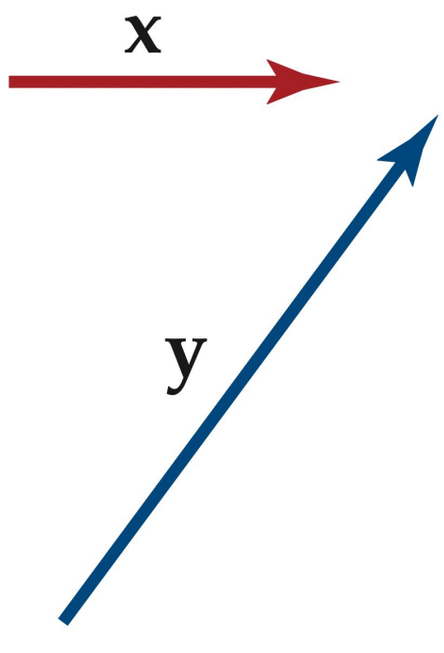
إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

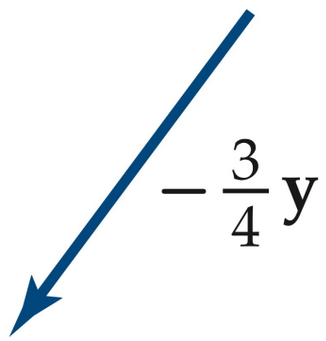
- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

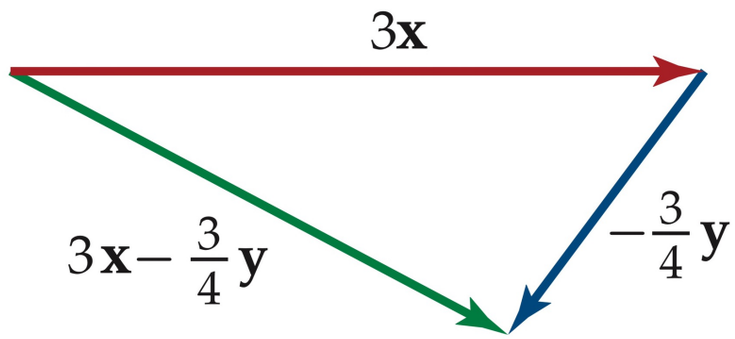
العمليات على المتجهات

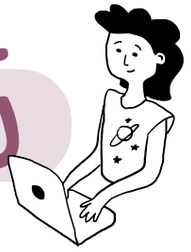
مثال

ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.





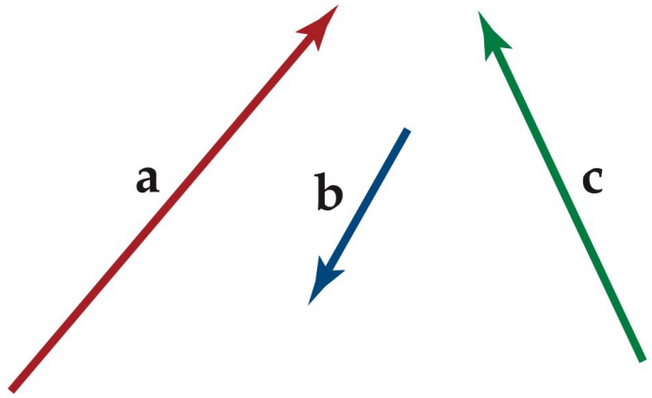




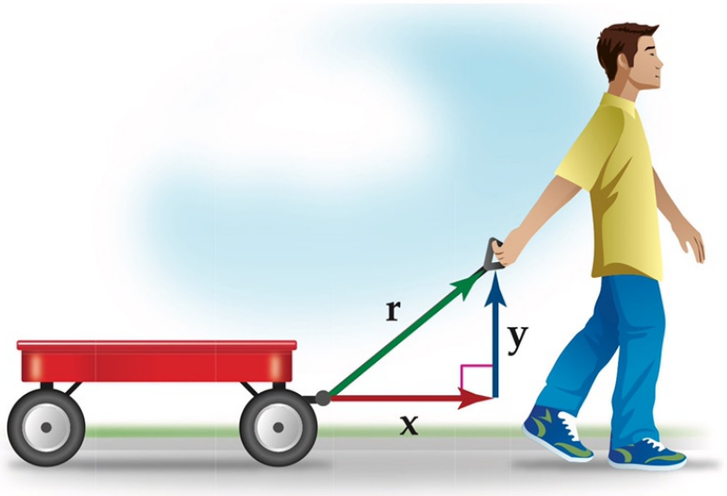
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلّا مما يأتي :

(4A $\mathbf{a - c + 2b}$

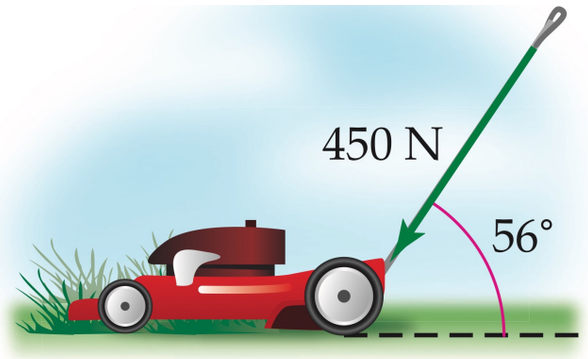


تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه **r** ، **مركبتي r** . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين،** واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة **r** المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية **x** تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية **y** تسحب العربة إلى أعلى.



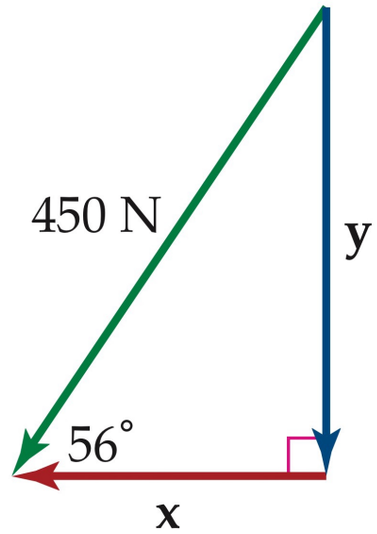
مثال

تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

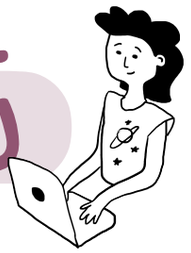


قص العشب: يدفع علي عربة قصِّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاويةٍ قياسها 56° مع سطح الأرض.

a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

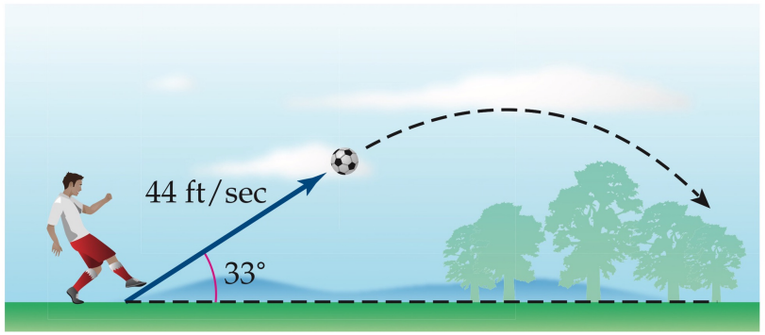


b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.



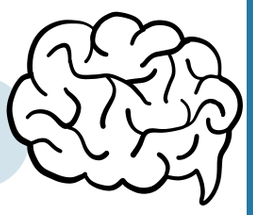
تحقق من فهمك

5) كرة قدم: يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .



تدرب

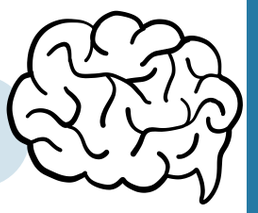
حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلِّ مما يأتي:

1) طول محمد 125 cm .

3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب.

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة. **(مثال 2)**

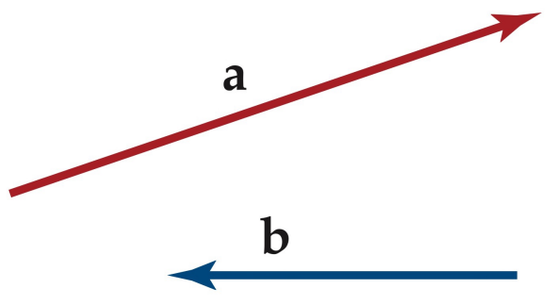
7) $\mathbf{h} = 13$ in/s ، باتجاه 205°



تدرب

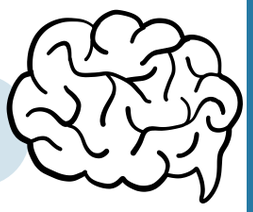
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة: **(مثال 3)**

13)



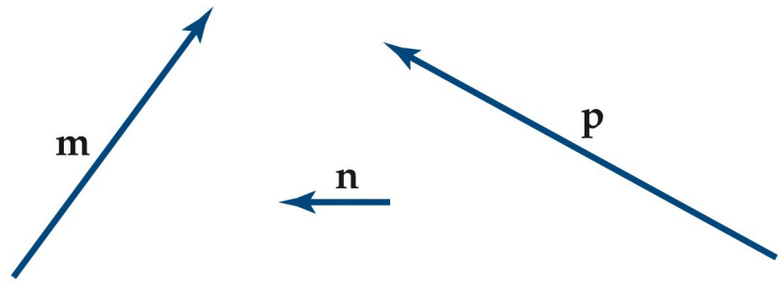
حدّد مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين، واتجاهها في كلٍّ مما يأتي: **(مثال 3)**

18) 18 N للأمام، ثم 20 N للخلف.



تدرب

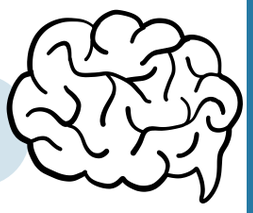
استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثِّل كل عبارة مما يأتي: **(مثال 4)**



22) $m - 2n$

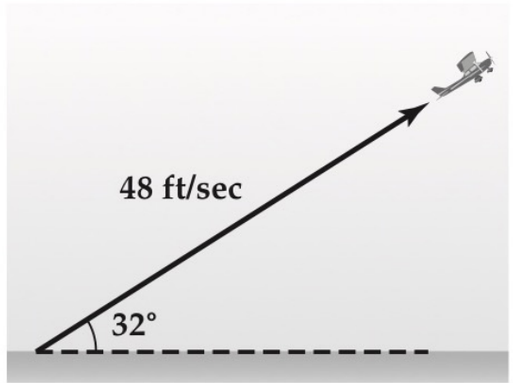
ارسم شكلًا يوضِّح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتَيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما. **(مثال 5)**

26) $2\frac{1}{8}$ in/s ، باتجاه $310°$ مع الأفقي.



تدرب

52) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها 32° مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/s كما في الشكل أدناه. أيٌّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟



25.4 ft/s , 40.7 ft/s **A**

40.7 ft/s , 25.4 ft/s **B**

56.6 ft/s , 90.6 ft/s **C**

90.6 ft/s , 56.6 ft/s **D**

تحصيلي

إذا كان اتجاه متجه $120°$ فإن اتجاهه الربعي ..

A N 30° W

B N 30° E

C N 60° W

D N 60° E