المتسلسلات الهندسية اللانهائية

فيما سبق:

درست إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية. (الدرس 3-2)

والآن:

- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية (لانهائية).
- أكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي.

المفردات:

المتسلسلة الهندسية اللانهائية
infinite geometric series

المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية
partial sum

المتسلسلة المتقاربة
convergent series

المتسلسلة المتباعدة
divergent series

مالانهاية
infinity

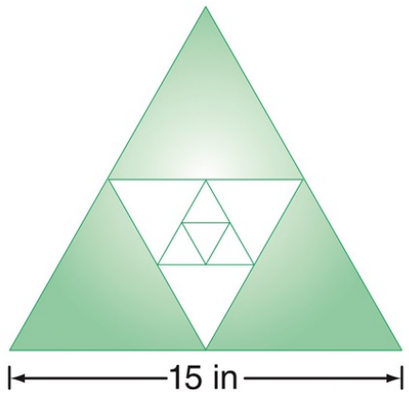
قدرات

اذا كان وزن ٤برتقال يساوي ٣تفاح احمر او ٢تفاح اخضر
فكم وزن البرتقال اذا كان عدد التفاح الأحمر ٤٨ و الأخضر ٣٦ ؟

٣٠	أ	ب	٢٠
١٩	جـ	د	١٣٦

لماذا

أنشأ رسامٌ لوحةً فنيةً هندسيةً مستعملًا المثلَّثات المتطابقة الأضلاع فقط كما في الشكل المجاور، إذا كان طول ضلع المثلَّث الخارجي 15 in ، والمثلَّث الذي يليه من الداخل ينتج عن توصيل منتصفات أضلاع المثلَّث الخارجي، إذا استمر في عملية رسم المثلَّثات الداخلية بهذا النمط، فكم سيكون مجموع محيطات كلِّ المثلَّثات المكوّنة للشكل؟ يمكن الإجابة عن مثل هذه الأسئلة، بدراسة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).



المتسلسلة الهندسية اللانهائية: المتسلسلة الهندسية التي لها عدد لا نهائي من الحدود تُسمى **المتسلسلة الهندسية اللانهائية**، و**المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية** (S_n) هو مجموع عدد محدد (n) من حدودها، وليس مجموع كل حدودها، والمتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متقاربة** عندما تقترب مجاميعها الجزئية (S_n) من عدد ثابت كلما زادت قيمة n، وعندما لا تقترب هذه المجاميع من عدد ثابت مع زيادة قيمة n، فإن المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متباعدة**.

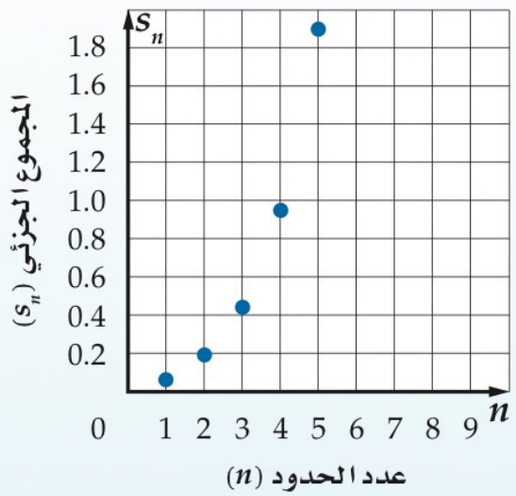
أوجدت في الدرس السابق مجموع أول n حدًّا من متسلسلة هندسية لا نهائية، ويمكنك أيضًا إيجاد مجموع كل حدودها. ففي فقرة "لماذا؟" أعلاه تجد أن مجموع محيطات المثلَّثات المكوّنة للشكل تُعطَى بالمتسلسلة اللانهائية $90\text{in} + 45 + 22.5 + 11.25 + \ldots$ ، وكلما زاد عدد حدودها، فإن مجموعها يقترب من 90in (وهو المجموع الفعلي لها عندما يزداد عدد حدودها إلى **مالا نهاية**). والشكل أدناه يظهر التمثيل البياني للمجموع S_n ، حيث $1 \le n \le 10$

مفهوم أساسي

المتسلسلات الهندسية المتقاربة والمتباعدة

أضف إلى مطويتك

المتسلسلات الهندسية المتقاربة	المتسلسلات الهندسية المتباعدة
التعبير اللفظي: إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\|r\| < 1$ ؛ فإن المجموع الجزئي يقترب من عدد ثابت.	**التعبير اللفظي:** إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\|r\| \geq 1$ ؛ فإن المجموع الجزئي لا يقترب من عدد ثابت.
مثال: $45 + 22.5 + 11.25 + \ldots$	**مثال:** $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots$



المتسلسلات الهندسية اللانهائية

تقاربية

اذا كان الاساس

$|r| < 1$

ومجموعها

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

تباعدية

اذا كان الاساس

$|r| > 1$

و ليس لها مجموع

المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة

مثال

حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

a) $54 + 36 + 24 + \ldots$

b) $8 + 12 + 18 + \ldots$

تحقق من فهمك

(1A $2 + 3 + 4.5 + \ldots$

(1B $100 + 50 + 25 + \ldots$

إذا كانت $|r| < 1$ ، فإن قيمة r^n تقترب من الصفر كلما زادت قيمة n ، ولذلك فإن المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية اللانهائية تقترب من: $\frac{a_1(1-0)}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$

مفهوم أساسي

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة

أضف إلى مطويتك

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة يُرمز له بالرمز S حيث $|r| < 1$

ويُعطى بالصيغة $S = \frac{a_1}{1-r}$

ستشتق صحة هذه الصيغة في السؤال (36)

وعندما تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية متباعدة، ($|r| \geq 1$)، فإنه لا يوجد مجموع لحدود المتسلسلة؛ لأن قيمة r^n تزداد بلا حدود مع زيادة n .

والجدول المجاور يوضّح المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية المتباعدة $4 + 16 + 64 + \ldots$ ، حيث إنه كلما زادت قيمة n، فإن S_n تزداد بسرعة كبيرة جدًّا.

n	S_n
5	1364
10	1398100
15	1431655764

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

تذكّر أن $|r| < 1$ تعني أن $-1 < r < 1$

أما $|r| \geq 1$ فتعني أن $r \geq 1$ أو $r \leq -1$

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

مثال أوجد مجموع حدود كلّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

a) $\frac{2}{3}+\frac{6}{15}+\frac{18}{75}+\dots$

إرشادات للدراسة

التقارب والتباعد

تتقارب المتسلسلة الهندسية اللانهائية عندما تكون القيمة المطلقة لأيِّ حدٍّ فيها أقلّ من القيمة المطلقة للحدّ السابق له. وتكون المتسلسلة الحسابية اللانهائية متباعدة دائمًا.

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

مثال

أوجد مجموع حدود كلّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

b) $6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \ldots$

تحقق من فهمك

(2A $4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots$

تحقق من فهمك

(2B $16 + 20 + 25 + \ldots$

يمكنك استعمال رمز المجموع لكتابة المتسلسلات الهندسية اللانهائية، وهي التي تستمر حدودها إلى ما لانهاية؛ أي أنها تستمر دون توقف، ويُستعمل الرمز ∞ فوق رمز المجموع للدلالة على ذلك.

إرشادات للدراسة

رمز المجموع للمتسلسلة الهندسية اللانهائية

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$$

مثال

أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

تحقق من فهمك

3) أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

الكسور الدورية : الكسر العشري الدوري هو مجموع متسلسلة هندسية لانهائية. فعلى سبيل المثال $0.\overline{45} = 0.454545\ldots = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$. ويمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل هذا الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي

مثال

اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{63}$ فى صورة كسر اعتيادي.

تحقق من فهمك

4) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{21}$ في صورة كسر اعتيادي.

تأكد

حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

1) $16 - 8 + 4 - \ldots$

2) $1 + 1 + 1 + \ldots$

تأكد

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

3) $440 + 220 + 110 + \ldots$

4) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \ldots$

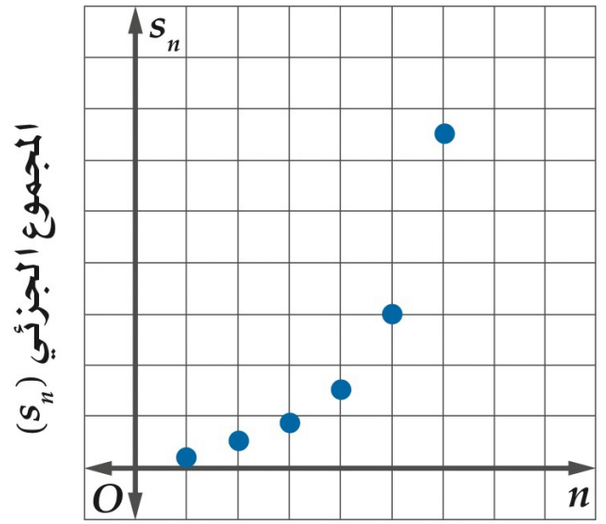
تأكد

(5 $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$

تدرب

اربط بين كلِّ شكل والوصف المناسب له:

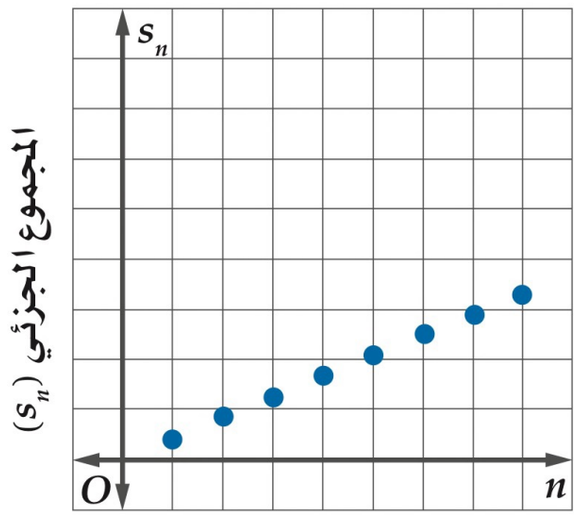
33)



a) متسلسلة هندسية متقاربة.

c) متسلسلة حسابية متقاربة.

34)



b) متسلسلة هندسية متباعدة.

d) متسلسلة حسابية متباعدة.

تدرب

35) اكتشف الخطأ: طُلِب إلى كلٍّ من عليٍّ وأحمد أن يجد مجموع المتسلسلة $\ldots - 1 + 1 - 1$ فكانت إجابتاهما كما يأتي. فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك.

علي

المجموع صفر؛ لأن مجموع كلّ زوج من الحدود في المتسلسلة هو الصفر.

أحمد

لا يمكن إيجاد المجموع؛ لأن $|r| \geq 1$، والمتسلسلة متباعدة.

تدرب

تدريب على اختبار

41) مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدُّها الأول 27 ، وأساسها $\frac{2}{3}$ هو :

A 81

B 65

C 34

D 18

42) هندسة : ضُرب نصف قطر كرة كبيرة في العدد $\frac{1}{3}$ للحصول على كرة أصغر. ما حجم الكرة الصغيرة بالمقارنة مع حجم الكرة الكبيرة؟

A $\frac{1}{9}$ حجم الكبيرة

B $\frac{1}{\pi^3}$ حجم الكبيرة

C $\frac{1}{27}$ حجم الكبيرة

D $\frac{1}{3}$ حجم الكبيرة

تحصيلي

الأساس r في المتسلسلة الهندسية المتقاربة ..

Ⓐ $|r| < 1$

Ⓑ $|r| > 1$

Ⓒ $|r| = 1$

Ⓓ $r = 0$

تحصيلي

أي المتسلسلات التالية مجموعها يساوي واحداً؟

Ⓐ $\sum_{k=1}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

Ⓑ $\sum_{k=1}^{\infty} 1$

Ⓒ $\sum_{k=1}^{\infty} (2)^{-k}$

Ⓓ $\sum_{k=1}^{\infty} (3k - 2)$