كن ملهماً لنفسك ، عظيماً بما تسعى له ، وأبدأ يومك متفائلاً ومتطلعاً للأفضل..

صباح الإيجابية والكفاح.

المتطابقات المثلثية

ثالث ثانوي _ رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

المتطابقات المثلثية

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات:

المتطابقة
identity

المتطابقة المثلثية
trigonometric identity

المتطابقات النسبية
quotient identities

متطابقات المقلوب
resiprocal identities

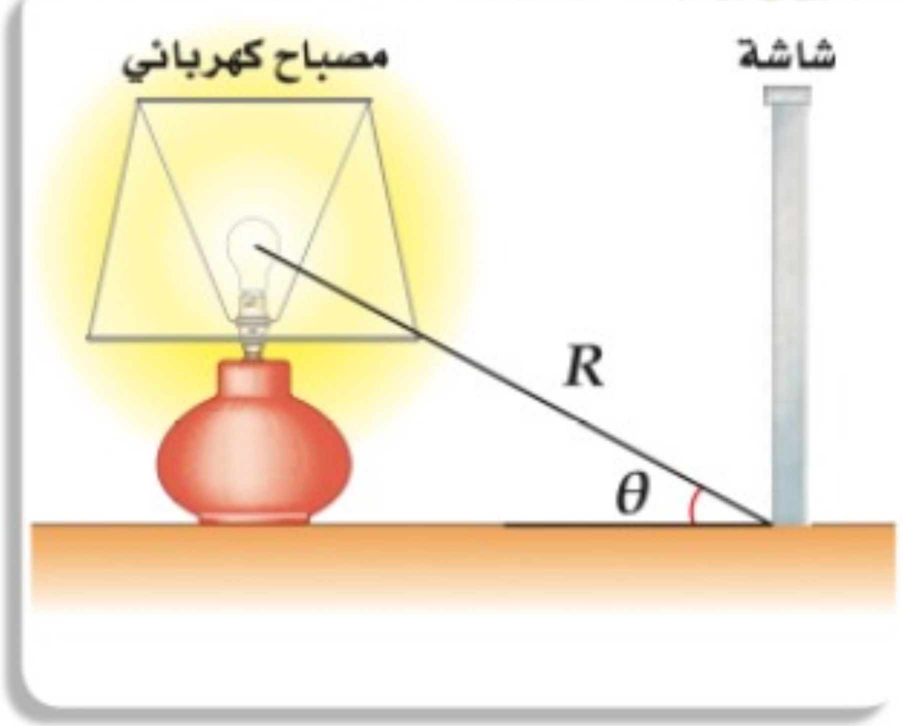
متطابقات فيثاغورس
pythagorean identities

متطابقات الزاويتين المتتامتين
cofunction identities

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية
odd-even identities

لماذا:

تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ ، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.



المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًّا يثبت خطأ المعادلة ، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

المتطابقات المثلثية

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:

$\tan \theta = \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot \theta = \dfrac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$

متطابقات المقلوب:

$\sin \theta = \dfrac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$ $\qquad$ $\csc \theta = \dfrac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$

$\cos \theta = \dfrac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$ $\qquad$ $\sec \theta = \dfrac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$

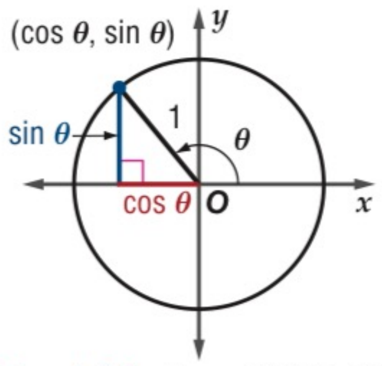
$\tan \theta = \dfrac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot \theta = \dfrac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$

متطابقات فيثاغورس:

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$



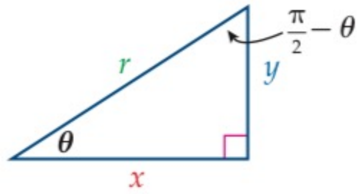
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$

$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$

$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$



$\sin \theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

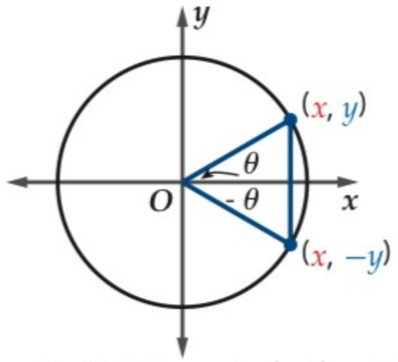
$\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$\cos(-\theta) = \cos \theta$

$\tan(-\theta) = -\tan \theta$



$\sin \theta = y$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -y$

$\cos \theta = x$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:

$\sin(90° - \theta) = \cos \theta$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ١ : استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	متطابقات فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	اطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين
$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$	عوّض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$	أوجد مربع العدد $\frac{1}{4}$
$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$	اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$	خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\sin^{-1}\frac{1}{4}$

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ استعمل الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° = 165.52°$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$

$-0.968 \approx -0.97$ ✓

b) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\csc\theta$ إذا كان $270° < \theta < 360°$; $\cot\theta = -\frac{3}{5}$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	متطابقات فيثاغورس
$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$	عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$
$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$	أوجد مربع العدد $-\frac{3}{5}$
$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$	$\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$
$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$	خذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

إرشادات للدراسة

الأرباع: يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكّر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4 .

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1 , 2	3 , 4
$\csc\theta$		
$\cos\theta$	1 , 4	2 , 3
$\sec\theta$		
$\tan\theta$	1 , 3	2 , 4
$\cot\theta$		

A all functions
S sine
T tangent
C cosine

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$.

1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$.

مثال ٢ : تبسيط العبارات المثلثية

بسّط العبارة : $\dfrac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}\,\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية

عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تُكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب $(\sin\theta)$ و/أو بدلالة جيب التمام $(\cos\theta)$.

تحقق من فهمك

2A) $\dfrac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

2B) $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

مثال ٣ من واقع الحياة : إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لـ E.

$\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$	المعادلة الأصلية
$E\sec\theta = \frac{I}{R^2}$	اضرب كلا الطرفين في E
$E\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
$E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$	اضرب كلا الطرفين في $\cos\theta$

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ ؟ فسِّر إجابتك.

$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$	المعادلة الأصلية
$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta$	اضرب كلا الطرفين في E
$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2}$	اقسم كلا الطرفين على R^2
$E = \frac{I\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2}$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$	بسِّط

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تبسَّط إلى: $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$ ، بينما المعادلة في الفرع **(a)** تكتب على الصورة: $E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$.

تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوَّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له ، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبد الله البتاني، والزرقلي ، ونصير الدين الطوسي.

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة . $\tau = F r \sin \theta$
أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **اكتب:** بيّن كيف تستعمل نظرية فيثا غورس لإثبات صحة المتطابقة: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

29) **برهان:** برهن أنّ $\tan(-a) = -\tan a$ تمثِّل متطابقة.

32) **اكتشف الخطأ:** بسِّط كل من علاء وسامي المقدار $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

علاء	سامي
$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ $=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$ $=\tan^2\theta+1$ $=\sec^2\theta$	$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ $=\frac{\sin^2\theta}{1}$ $=\sin^2\theta$

31) **تبرير:** بيِّن كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ على الصورة:
$1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$