يوماً ما سأقول : (لم يكن الأمر سهلاً) ولكنني فعلتها

القطوع المكافئة

رياضيات ٥

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق:

درستُ الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أحَللُ معادلات قطوع مكافئة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتبُ معادلات قطوع مكافئة.

المفردات:

القطع المخروطي
conic section

المحل الهندسي
locus

القطع المكافئ
parabola

البؤرة
focus

الدليل
directrix

محور التماثل
axis of symmetry

الرأس
vertex

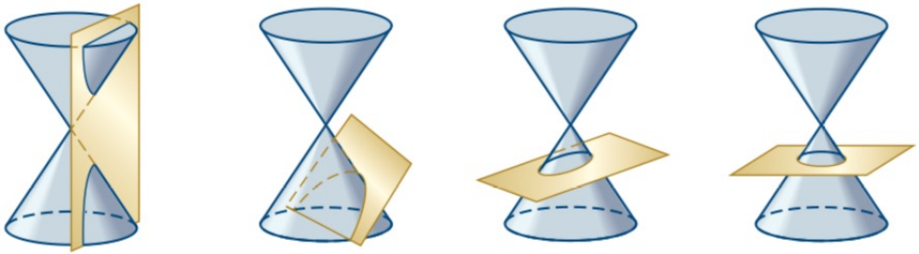
الوتر البؤري
latus rectum

لماذا:

استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.

القطوع المخروطية: **القطوع المخروطية** هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

والقطوع المخروطية الثلاثة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص (وحالة خاصة منه الدائرة) والقطع الزائد.

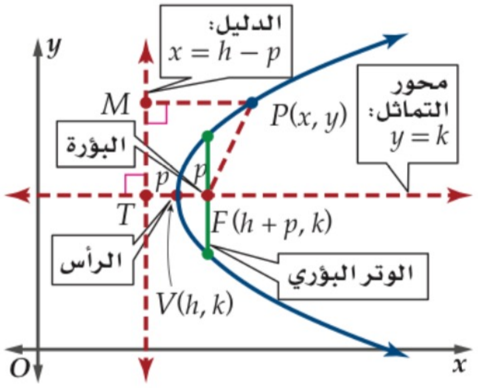


إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًّا:

المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة **(تسمى البؤرة)** مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم **(يسمّى الدليل)**.

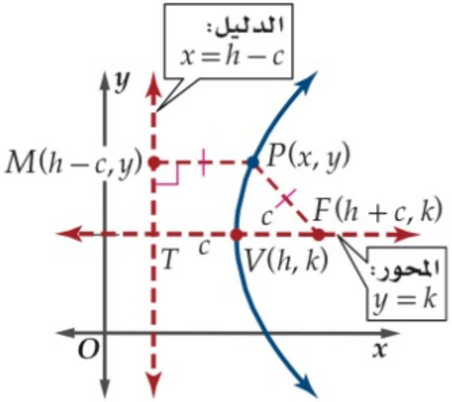


والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

درست سابقًا الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$ والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ؛ لإيجاد الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) أو رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل).

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+c, k)$، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.



نعلم من تعريف القطع المكافئ أنّ $PF = PM$. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - c, y)$ ، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

$$PF = PM$$

قانون المسافة بين نقطتين

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-y)^2}$$

ربِّع الطرفين

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2 = [x-(h-c)]^2+0^2$$

فك الأقواس

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2+(y-k)^2 = x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

فك الأقواس

$$x^2-2xh-2xc+h^2+2hc+c^2+(y-k)^2 = x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2$$

بسِّط

$$(y-k)^2 = 4xc-4hc$$

حلِّل

$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$

أي أنّ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$.

وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

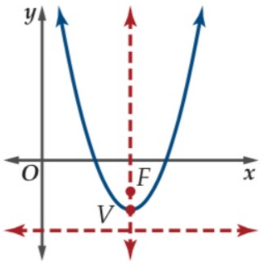
قراءة الرياضيات

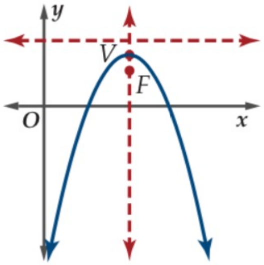
اتجاه فتحة منحنى القطع

ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًّا (إلى اليمين أو اليسار).

مفهوم أساسي خصائص القطع المكافئ

المعادلة في الصورة القياسية : $(x-h)^2 = 4c(y-k)$





$c > 0$ | $c < 0$

الاتجاه : المنحنى مفتوح رأسيًا

الرأس : (h, k)

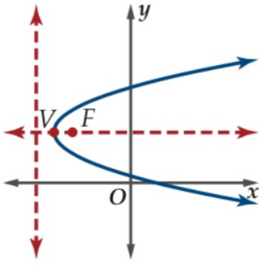
البؤرة : $(h, k+c)$

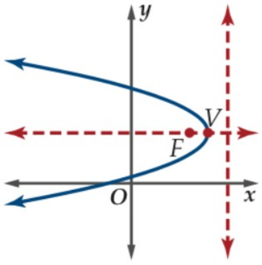
معادلة محور التماثل : $x = h$

معادلة الدليل : $y = k - c$

طول الوتر البؤري : $|4c|$

المعادلة في الصورة القياسية : $(y-k)^2 = 4c(x-h)$





$c > 0$ | $c < 0$

الاتجاه : المنحنى مفتوح أفقيًا

الرأس : (h, k)

البؤرة : $(h+c, k)$

معادلة محور التماثل : $y = k$

معادلة الدليل : $x = h - c$

طول الوتر البؤري : $|4c|$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل .

مثال ١

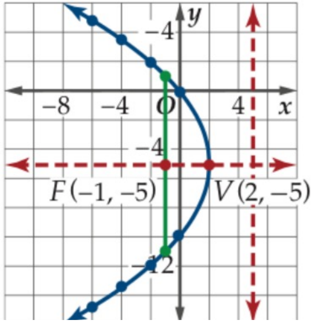
تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانياً

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y+5)^2 = -12(x-2)$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y ، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ ؛ لذا فإن $h = 2, k = -5$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس:	$(2, -5)$	(h, k)	الدليل:	$x = 5$	$x = h - c$
البؤرة:	$(-1, -5)$	$(h + c, k)$	محور التماثل:	$y = -5$	$y = k$
طول الوتر البؤري:	12	$\lvert 4c \rvert$			

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ

يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله موازٍ لأحد محوري الإحداثيات:

– مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x، وكانت $c > 0$.

– مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x، وكانت $c < 0$.

– مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y، وكانت $c > 0$.

– مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y، وكانت $c < 0$.

إرشادات للدراسة

رسم الوتر البؤري

لرسم الوتر البؤري في المثال 1، ارسم قطعة مستقيمة طولها 12 وحدة، وتمر بالبورة التي تقع في منتصفها، وتكون عمودية على محور التماثل.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

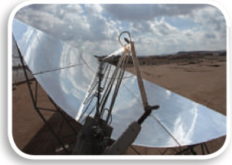
1A) $8(y+3) = (x-4)^2$

1B) $2(x+6) = (y+1)^2$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

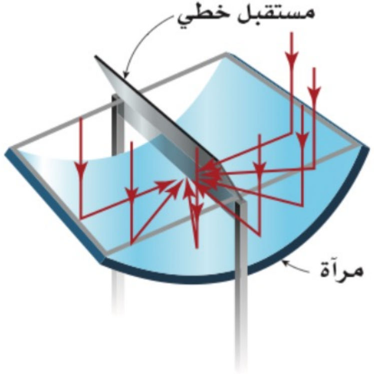
مثال من واقع الحياة

خصائص القطع المكافئ



الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.



طاقة شمسية : يتكون مجمِّع شمسي من مرآة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$ ، حيث x, y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع ، أين يقع المستقبل الخطّي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و c موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى أعلى، وتقع البؤرة عند $(h, k + c)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنّ قيمة كل من h, k صفر، وبما أن $4c = 3.04$ فإن $c = 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0 + 0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل المقطع العرضي هو $(0, 0.76)$. فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

2) فلك: عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8\ (y - 6)$، حيث $-5 \leq x \leq 5$. إذا كانت x , y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

مثال ٣

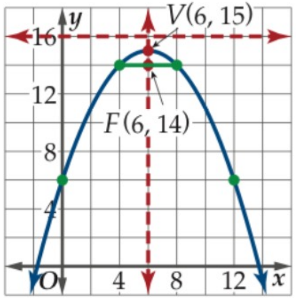
كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائص القطع المحدد، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$	المعادلة الأصلية
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$	أخرج $-\frac{1}{4}$ عاملًا مشتركًا من حدود x
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$	أكمل المربع
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$	$-\frac{1}{4}(-36) = 9$
$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$	حلّل
$-4(y - 15) = (x - 6)^2$	اطرح 15 من الطرفين، ثمَّ اضرب في العدد (-4)

وهذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x، و $c = -1$، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدّد خصائصه.

الرأس:	$(6, 15)$	(h, k)	الدليل:	$y = 16$	$y = k - c$
البؤرة:	$(6, 14)$	$(h, k + c)$	محور التماثل:	$x = 6$	$x = h$
طول الوتر البؤري:	4	$\lvert 4c \rvert$			

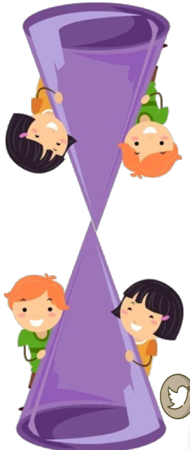


عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B) $3y^2 + 6y + 15 = 12x$



مثال ٤

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

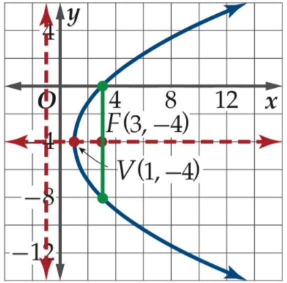
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y ، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$ ، وتكون قيمة c هي $3 - 1 = 2$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$	$c = 2, h = 1, k = -4$
$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$	بسِّط



أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

مثِّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x ، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٤

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

بما أن الدليل مستقيم أفقيًّا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًّا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

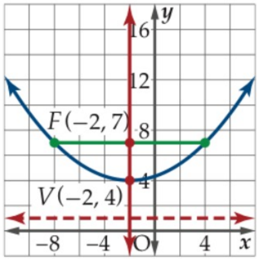
استعمل معادلة الدليل لتجد c .

$y = k - c$	معادلة الدليل
$1 = 4 - c$	$y = 1, k = 4$
$-3 = -c$	اطرح 4 من الطرفين.
$3 = c$	اقسم كلا الطرفين على -1 .

عوّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	الصورة القياسية
$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$	$h = -2, k = 4, c = 3$
$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$	بسّط

طول الوتر البؤري يساوي $12 = |4 \times 3| = |4c|$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.



إرشادات للدراسة

الدليل

يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

مثال ٤

c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.

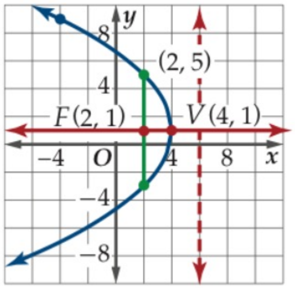
بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h + c, k) = (2, 1)$ ، والرأس (h, k) هو $(2 - c, 1)$؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد c.

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$(5 - 1)^2 = 4c[2 - (2 - c)]$	$h = 2 - c, k = 1, x = 2, y = 5$
$16 = 4c(c)$	بسّط
$4 = c^2$	بسّط
$\pm 2 = c$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $c = -2$ ، والرأس هو $(4, 1)$.

$$(y - 1)^2 = -8(x - 4)$$

طول الوتر البؤري يساوي $8 = |4 \times (-2)| = |4c|$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

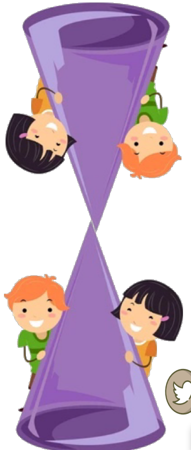
تحقق من فهمك

4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

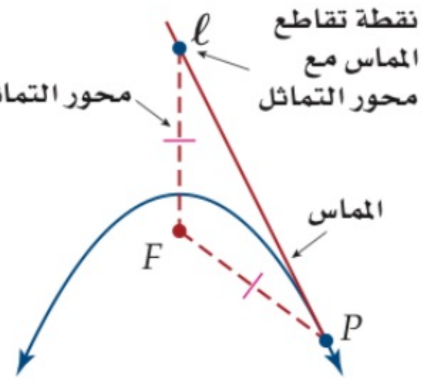


مفهوم أساسي

مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



إرشادات للدراسة

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

– إذا كان المنحنى مفتوحًا أفقيًّا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي:
$x = h$

– إذا كان المنحنى مفتوحًا رأسيًّا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٥

كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.

الخطوة الأولى: أوجد إحداثيات الرأس ثم البؤرة.

المنحنى مفتوح أفقيًّا.

$x = y^2 + 3$ المعادلة الأصلية

$1(x - 3) = (y - 0)^2$ الصورة القياسية

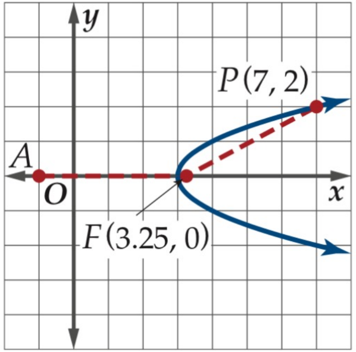
بما أن $4c = 1$ فإن $c = 0.25$. ويكون الرأس $(3, 0)$، والبؤرة $(3.25, 0)$.

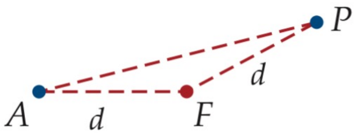
إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٥

كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

الخطوة الثانية : أوجد d (وهي المسافة بين البؤرة F، ونقطة التماس P)
كما يظهر في الشكلين الآتيين .





حيث d تمثل طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ صيغة المسافة

$$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2}$$ $(x_2, y_2) = (7, 2)$ و $(x_1, y_1) = (3.25, 0)$

$$= 4.25$$ بسّط

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٥

كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافيء

الخطوة الثالثة : أوجد A (وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل) بما أن $d = 4.25$ ، وإحداثيات البؤرة هي $(3.25, 0)$ ، والنقطة A تقع على محور التماثل، فإن الإحداثي x لها يقل عن الإحداثي x للبؤرة بمقدار 4.25؛ والإحداثي y لها هو نفس الإحداثي y للبؤرة، لذا $A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

الخطوة الرابعة : أوجد معادلة المماس.

تقع النقطتان A, P على مماس منحنى القطع المكافئ.

$m = \frac{2-0}{7-(-1)} = \frac{1}{4}$	صيغة الميل
$y - y_1 = m(x - x_1)$	معادلة مستقيم بمعلومية الميل ونقطة
$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$	$m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$
$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$	خاصية التوزيع
$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$	اجمع 2 إلى الطرفين

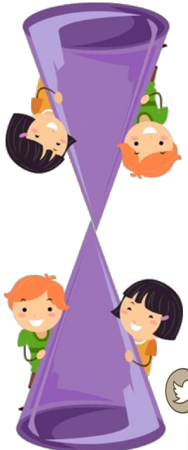
إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. انظر الشكل 4.1.1

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

5A) $y = 4x^2 + 4;\ (-1, 8)$

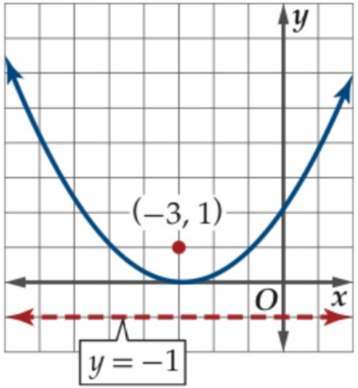
5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4};\ (1, -4)$



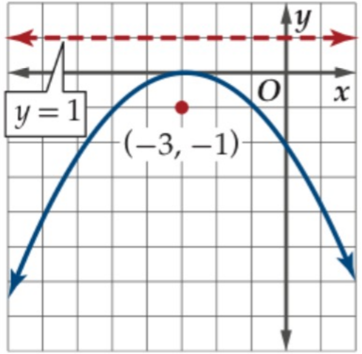
مسائل مهارات التفكير العليا

36) اكتشف الخطأ: مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانيًّا كما هو موضح أدناه. فأي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.

ميمونة



صفية



مسائل
مهارات التفكير العليا

37) **تبرير:** أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تم بحمد الله

شكراً لكم

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق