لاتستسلم .. هناك نجاح ينتظر وصولك إليه

القطوع الناقصة والدوائر

رياضيات ٥

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق :

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًا.
(الدرس 1 – 4)

والآن :

- أُحلّل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأمثّلهما بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

المفردات :

القطع الناقص
ellipse

البؤرتان
foci

المحور الأكبر
major axis

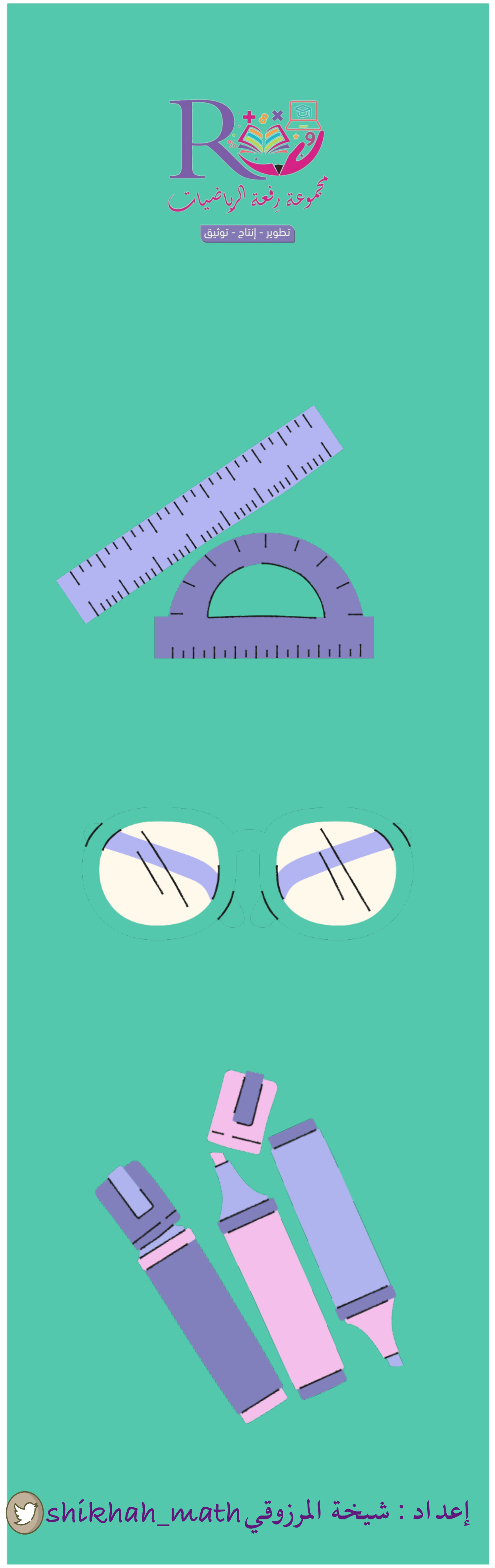
المركز
center

المحور الأصغر
minor axis

الرأسان
vertices

الرأسان المرافقان
co-vertices

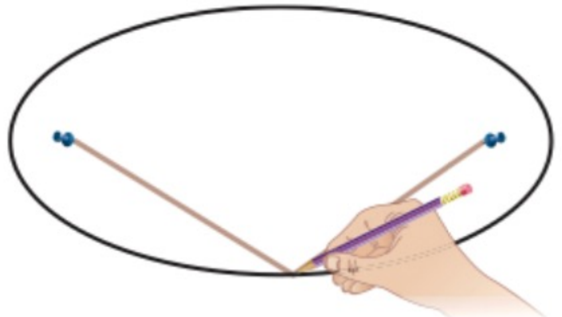
الاختلاف المركزي
eccentricity

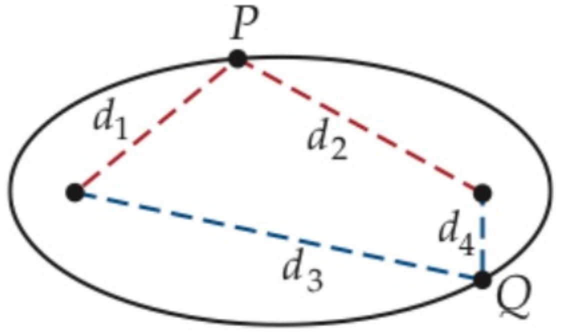


لماذا:

يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًّا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلًا إهليليجيًّا يسمى قطعًا ناقصًا.

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلها بيانيًّا: **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**، وعمليًّا يمكنك رسم منحنى القطع الناقص بتثبيت طرفي خيط عند البورتين، ثم تحريك قلم بمحاذاة الخيط بعد شده كما في الشكل أدناه. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت .

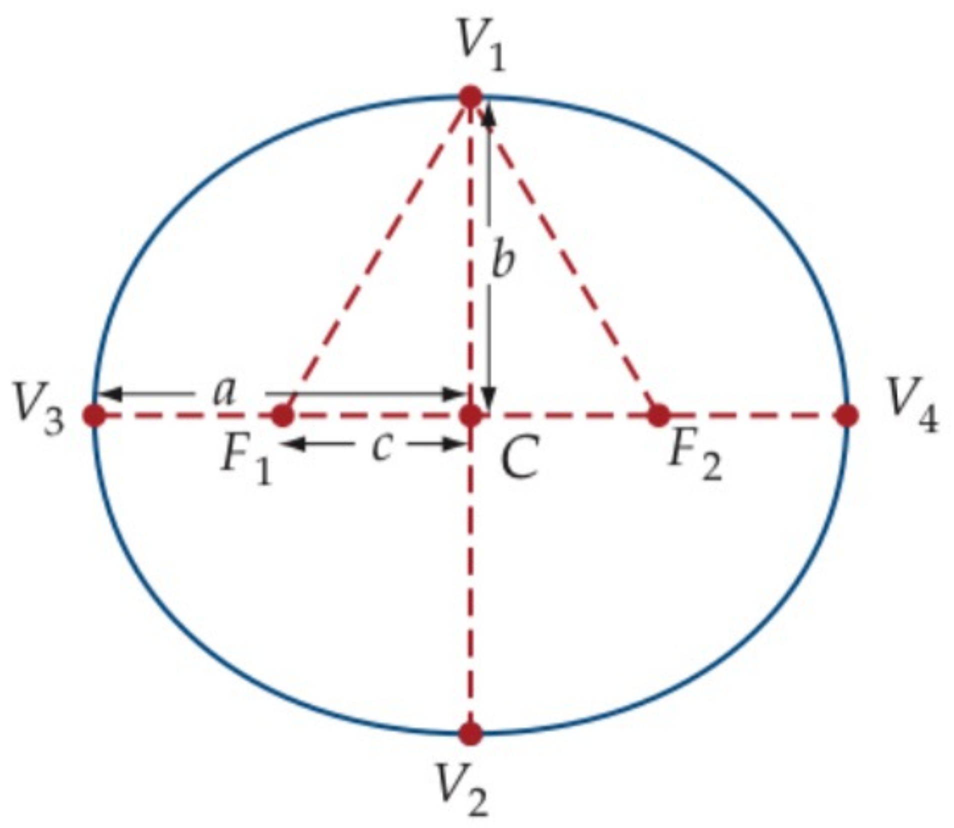




تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمىّ نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.

مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة.

وفيما يلي توضيحٌ للعلاقة بين a, b, c



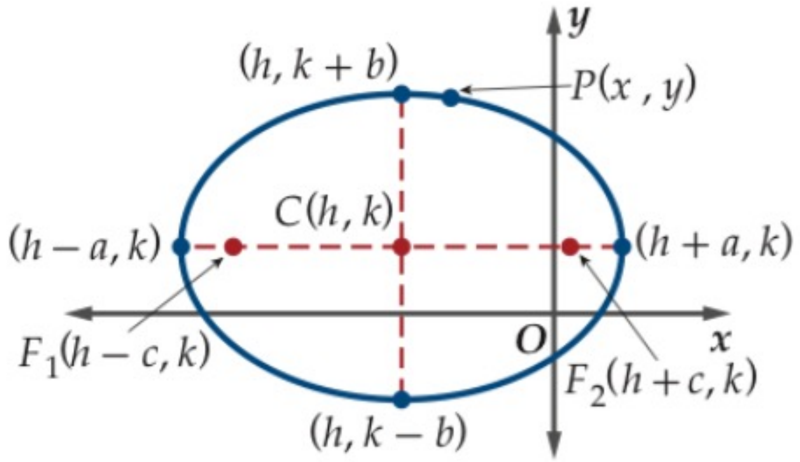
بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق SAS $(\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}, \angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2, \overline{V_1C} \cong \overline{V_2C})$ فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛ لإيجاد طولي V_1F_1 ، V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c.

$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$	$V_3F_1 = V_4F_2$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$	$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_3V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بسّط
$V_1F_1 = a$	اقسم

بما أنّ $V_1F_1 = a$ ، وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.



تعريف القطع الناقص
$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

صيغة المسافة
$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

خاصية التوزيع ثم التجميع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a$$

اطرح
$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$$

ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين
$$(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$

بسّط
$$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=4a^2+4c(x-h)$$

اقسم كلا الطرفين على 4
$$a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=a^2+c(x-h)$$

ربّع الطرفين
$$a^2[(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2]=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

خاصية التوزيع
$$a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

بسّط
$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$

$a^2 - c^2 = b^2$
$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

اقسم الطرفين على a^2b^2
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

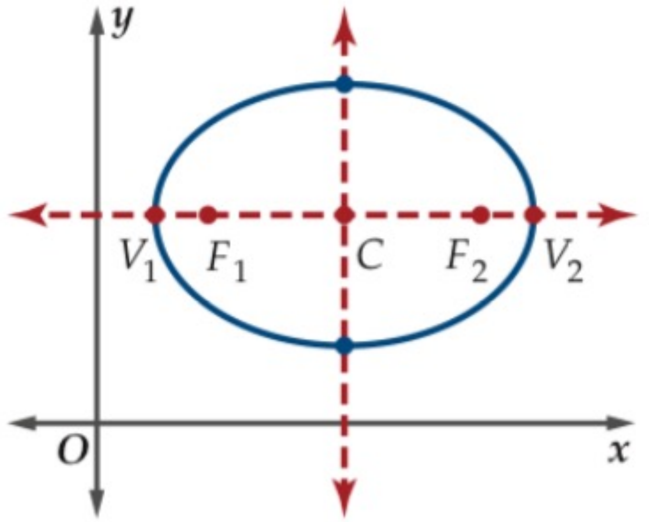
الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k)، حيث $a > b$، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًا، وفي الصورة القياسية $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ يكون المحور الأكبر رأسيًا.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

مفهوم أساسي — خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه : المحور الأكبر أفقي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h \pm c, k)$

الرأسان : $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان : $(h, k \pm b)$

المحور الأكبر : $y = k$ وطوله $2a =$

المحور الأصغر : $x = h$ وطوله $2b =$

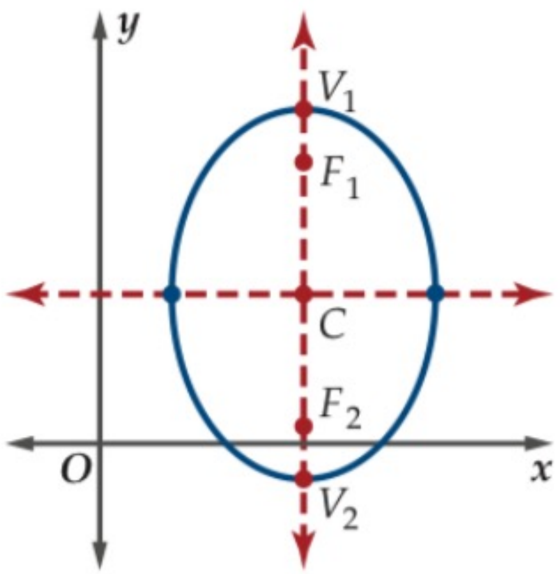
العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

طول البعد البؤري : $2C$

المعادلة في الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه : المحور الأكبر رأسي

المركز : (h, k)

البؤرتان : $(h, k \pm c)$

الرأسان : $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان : $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر : $x = h$ وطوله $2a =$

المحور الأصغر : $y = k$ وطوله $2b =$

العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 - b^2$ أو

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

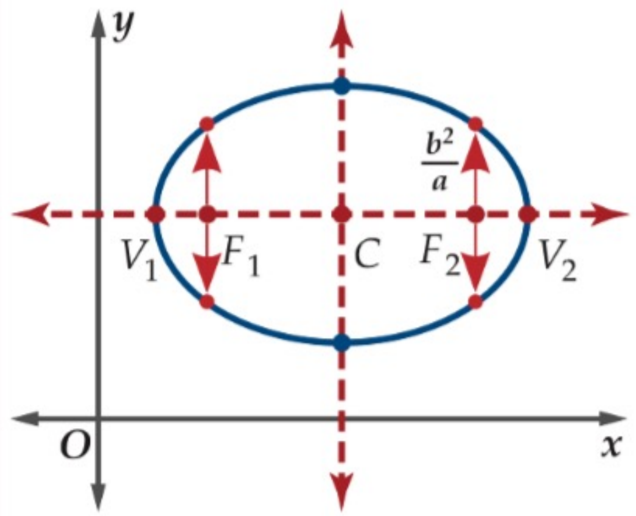
طول البعد البؤري : $2C$

إرشادات للدراسة

البعد البؤري

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري.

لرسم القطع الناقص نعين نقاطًا مساعدة وهي التي تبعد مسافة $\frac{b^2}{a}$ أعلى وأسفل كل من البؤرتين.



مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًّا

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

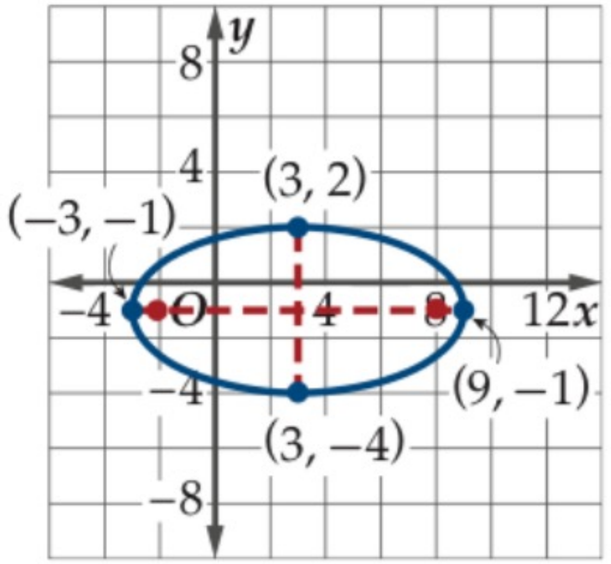
المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث

$h=3, k=-1, a=\sqrt{36}=6, b=\sqrt{9}=3, c=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	$(x-h)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$	$(h \pm c, k)$
الرأسان:	$(-3, -1)$ و $(9, -1)$	$(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان:	$(3, -4)$ و $(3, 2)$	$(h, k \pm b)$
المحور الأكبر:	$y=-1$، وطوله 12	$y=k$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$x=3$، وطوله 6	$x=h$، طول المحور الأصغر $2b$

عيِّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.



إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص

إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًّا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًّا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.

مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًا

b) $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولًا.

$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$	المعادلة الأصلية
$(4x^2 - 24x) + (y^2 + 4y) = -24$	جمِّع الحدود المتشابهة
$4(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = -24$	حلِّل
$4(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -24 + 4(9) + 4$	كمِّل المربعين
$4(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$	حلِّل وبسِّط
$\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$	اقسم الطرفين على 16

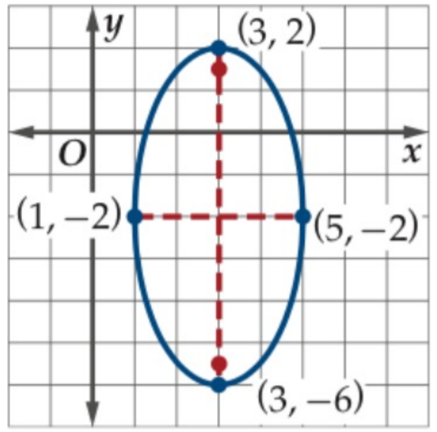
المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	$(y-k)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$	$(h, k \pm c)$
الرأسان:	$(3, -6)$ و $(3, 2)$	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(5, -2)$ و $(1, -2)$	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x = 3$، وطوله 8	$x = h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y = -2$، وطوله 4	$y = k$، طول المحور الأصغر $2b$

عيِّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

1A) $\dfrac{(x-6)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

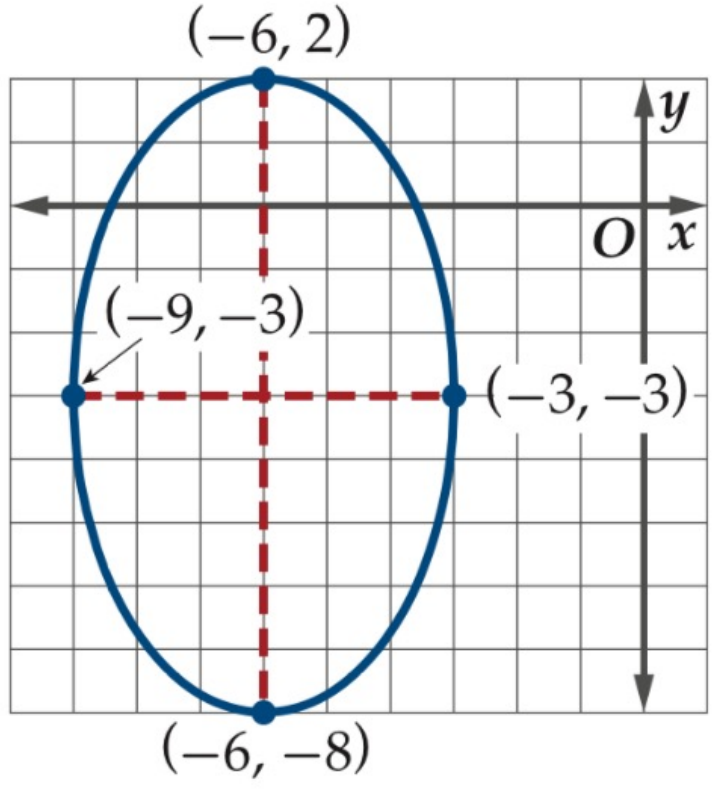
1B) $x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) الرأسان $(-6, -8)$, $(-6, 2)$ ، والرأسان المرافقان $(-3, -3)$, $(-9, -3)$.

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a , b .



الشكل 4.2.1

نصف طول المحور الأكبر

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-6+6)^2 + (2+8)^2} = 5$$

نصف طول المحور الأصغر

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-3+9)^2 + (-3+3)^2} = 3$$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر .

$$(h, k) = \left(\frac{-6 + (-6)}{2}, \frac{2 + (-8)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (-6, -3)$$ بسِّط

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1 .

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

b) الرأسان $(6, 4)$, $(-4, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$.

طول المحور الأكبر $2a$ ، وهي المسافة بين الرأسين.

$$2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2}$$ صيغة المسافة

$$a = 5$$ بسّط

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

$$2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2}$$ صيغة المسافة

$$c = 3$$ بسّط

أوجد قيمة b .

$$c^2 = a^2 - b^2$$ العلاقة بين a, b, c

$$3^2 = 5^2 - b^2$$ $a = 5, c = 3$

$$b = 4$$ بسّط

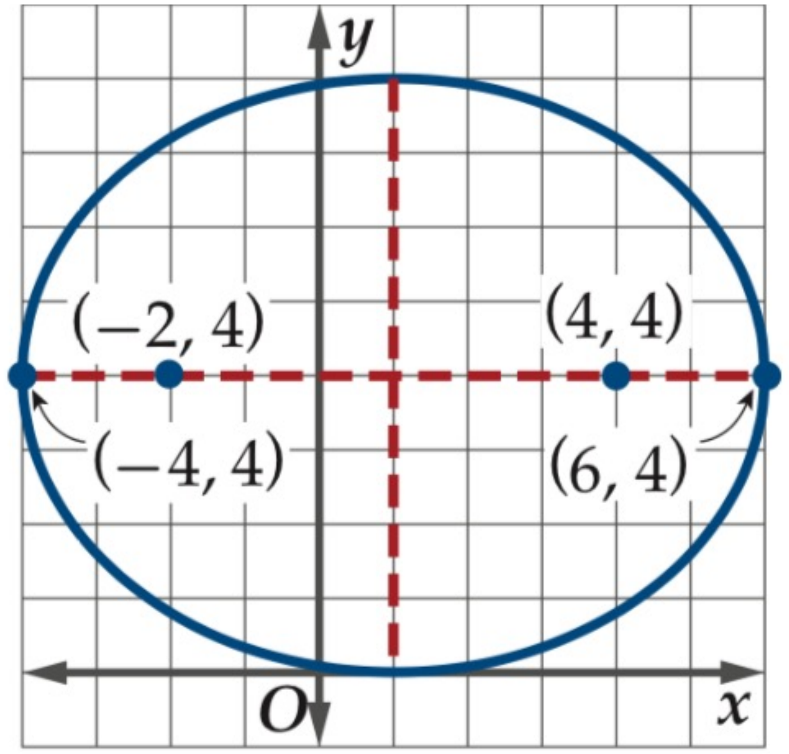
وبما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز، فإن إحداثيي المركز هما:

$$(h, k) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (1, 4)$$ بسّط

وبما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.2 .



الشكل 4.2.2

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

2A) البؤرتان $(3, -7)$, $(3, 19)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

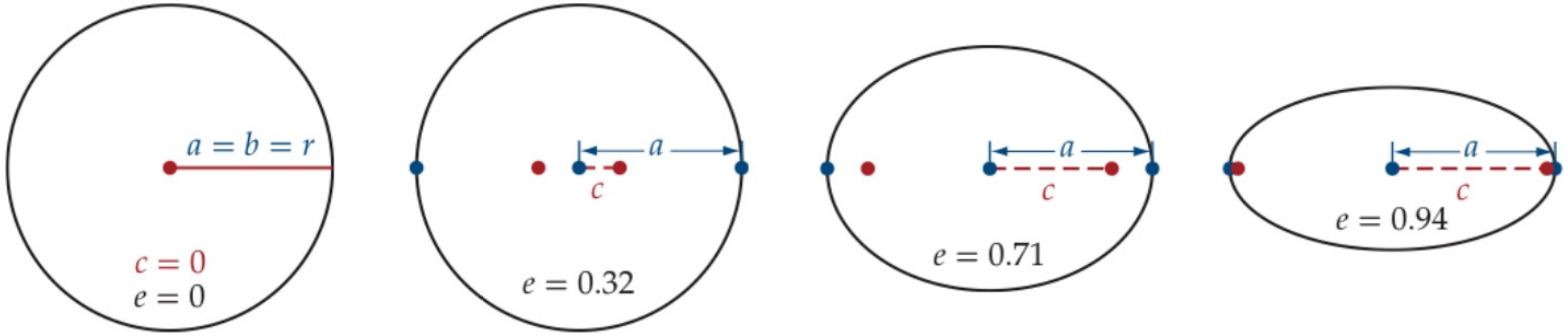
2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a. و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي — الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ ، حيث $c^2=a^2-b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e=\frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي e , c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a , b مساوية لطول نصف قطر الدائرة.



مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

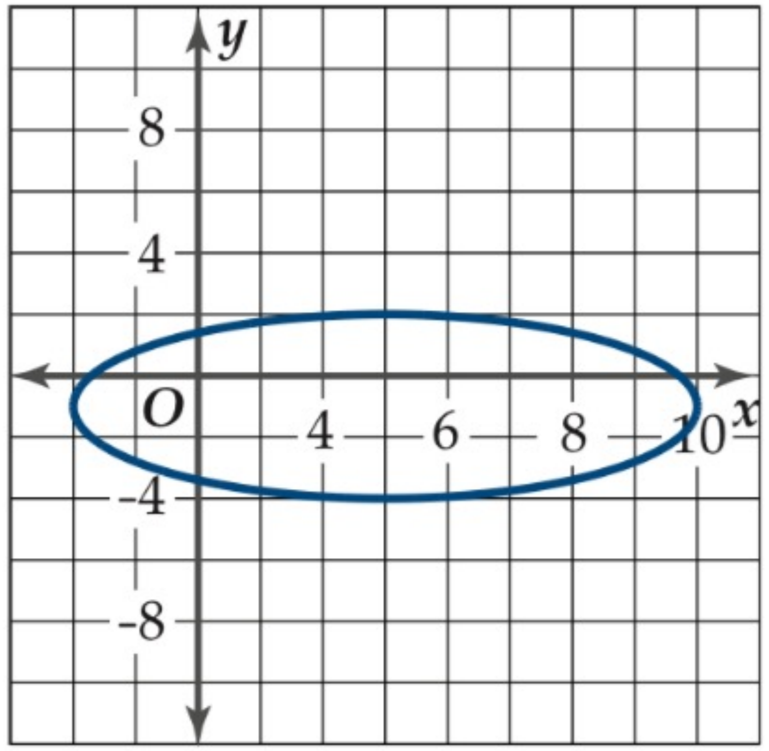
أولًا: نحدد قيمة c .

$c^2 = a^2 - b^2$	العلاقة بين a, b, c
$c^2 = 100 - 9$	$a^2 = 100, b^2 = 9$
$c = \sqrt{91}$	بسّط

نستعمل قيمتي a, c لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$	صيغة الاختلاف المركزي
$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$	$a = 10, c = \sqrt{91}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 4.2.3.



الشكل 4.2.3

تحقق من فهمك

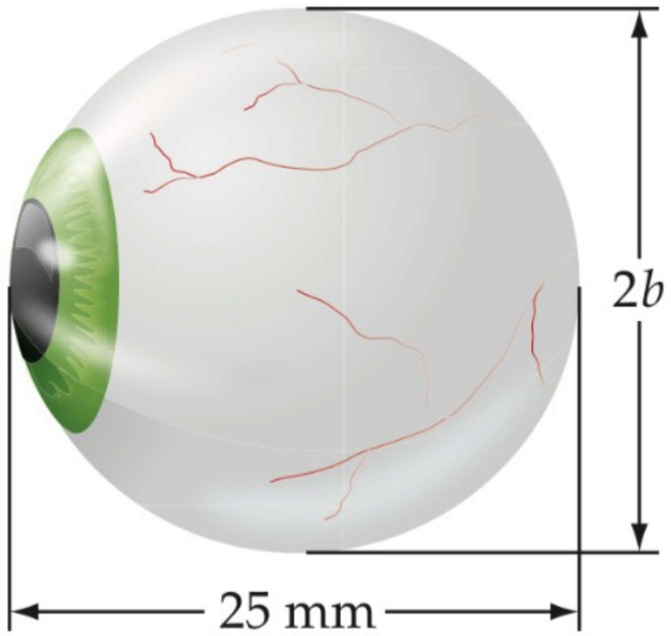
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي **25 mm** تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

$e = \frac{c}{a}$	تعريف الاختلاف المركزي
$0.28 = \frac{c}{12.5}$	$e = 0.28, a = 12.5$
$c = 3.5$	اضرب

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$	العلاقة بين a, b, c
$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$	$c = 3.5, a = 12.5$
$b = 12$	بسِّط

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$ ، ويساوي 24 mm تقريبًا .

مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

معادلة القطع الناقص $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$a = b$ عندما $e = 0$ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

اضرب كلا الطرفين في a^2. $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

a نصف قطر الدائرة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

مفهوم أساسي — الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	الصورة القياسية لمعادلة الدائرة
$(x-(-1))^2+(y-2)^2=4^2$	$(h, k)=(-1, 2),\ r=\frac{8}{2}=4$
$(x+1)^2+(y-2)^2=16$	بسِّط

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$، والقطر 10

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$, $(7, 6)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$$(h, k) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= \left(\frac{7 + (-1)}{2}, \frac{6 + (-8)}{2}\right)$$ $(x_1, y_1) = (7, 6), (x_2, y_2) = (-1, -8)$

$$= \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right)$$ اجمع

$$= (3, -1)$$ بسِّط

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ صيغة المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{(3 - 7)^2 + (-1 - 6)^2}$$ $(x_1, y_1) = (7, 6), (x_2, y_2) = (3, -1)$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2}$$ اطرح

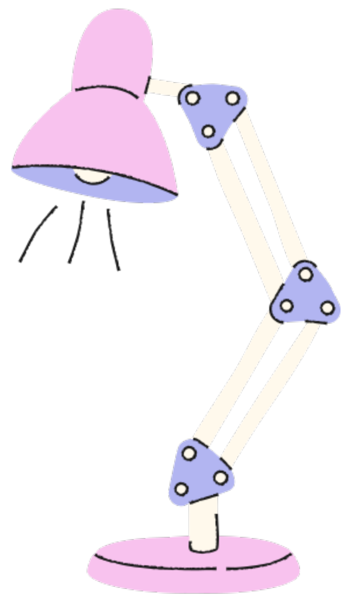
$$= \sqrt{65}$$ بسِّط

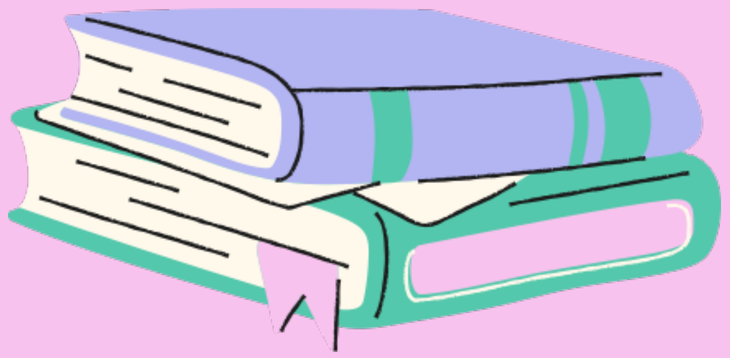
إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2 = 65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 65$.

إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$.

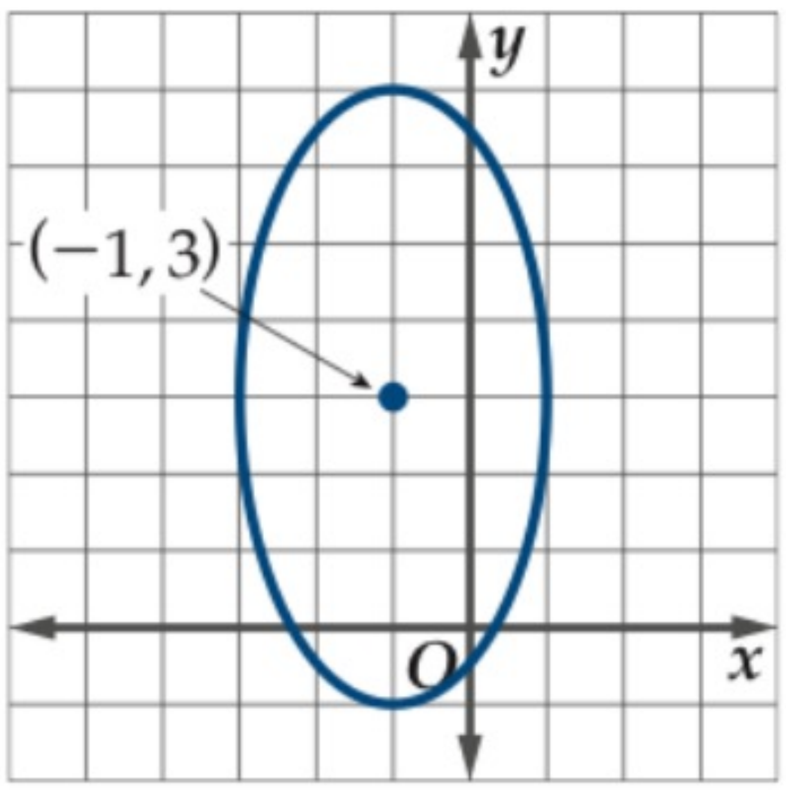




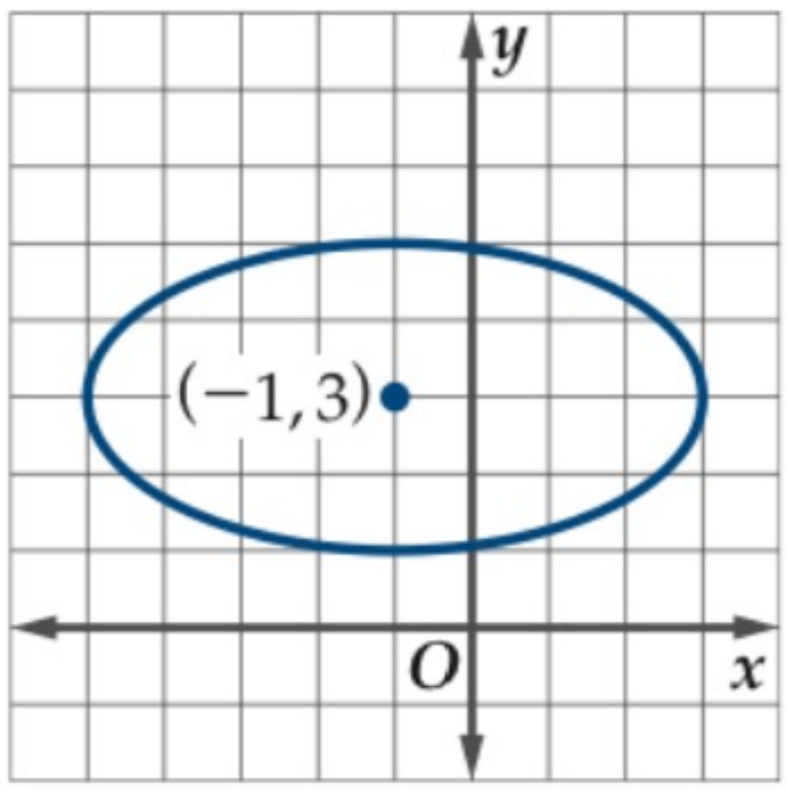
مسائل مهارات التفكير العليا

37) اكتشف الخطأ: مثَّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟

خالد



ياسر



إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math