مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

الفصل 3

الاحتمالات
Probabilities

فيما سبق:

درست النواتج والحوادث، والتباديل والتوافيق، واحتمالات الحوادث البسيطة والمركبة في التجارب العشوائية.

والآن:

- أمثّل فضاء العيّنة.
- أستعمل التباديل والتوافيق مع الاحتمال.
- أجد الاحتمال باستعمال الطول والمساحة.
- أجد احتمالات الحوادث المركبة.

لماذا؟

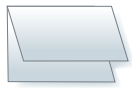
ألعاب: يمكن استعمال الاحتمال للتنبؤ بإمكانية وقوع النواتج المختلفة لبعض الألعاب التي نمارسها.

المطويات منظم أفكار

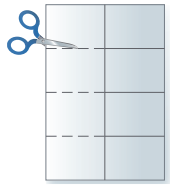
الاحتمالات: اعمل هذه المطويّة لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الاحتمالات؛ مستعملًا ورقة A3.

1. **اطوِ الورقة** طولِيًّا.

2. **اطوِ الورقة** نصفين مرتين.



3. **قصّ** كل خط طي أفقيًّا في العمود الأيسر حتى خط المنتصف.



4. **اكتب العناوين** كما في الشكل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الثالث

أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

بسّط كلًّا مما يأتي: (تستعمل مع الدرس 4-3)

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$
2) $\frac{7}{9}+\frac{2}{6}$
3) $\frac{2}{5}+\frac{7}{8}$
4) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}$
5) $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{24}$
6) $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$

7) **كرة قدم:** لدى فريق كرة قدم 54 لترًا (L) من الماء البارد في قوارير سعة كلٍّ منها 500 مللترًا (ml). كم قارورة لديهم؟

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي: (تستعمل مع الدروس 1-3 إلى 3-3)

8) أن يكون العدد الظاهر أكبر من 1.

9) أن يكون العدد الظاهر فرديًّا.

10) أن يكون العدد الظاهر أقل من 2.

11) أن يكون العدد الظاهر (1 أو 6).

12) **احتمالات:** ألقي مجسم ذو 4 وجوه متطابقة، كُتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 4. فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عددًا أوليًّا؟

يبيّن الجدول الآتي نواتج تجربة استقرار مؤشر دوار لقرص مقسم إلى قطاعات مرقمة بالأعداد 1-4. (تستعمل مع الدرس 1-3)

النتيجة	الإشارات	التكرار
1	𝍸	3
2	𝍸 ||	7
3	𝍸 |	6
4	||||	4

13) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند العدد 4؟

14) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد فردي؟

15) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد زوجي؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط المقدار: $\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}$.

مثال 2

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

مثال 3

في تجربة رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6، ظهرت النواتج المبينة في الجدول. أوجد الاحتمال التجريبي لظهور العدد 5 .

النتيجة	الإشارات	التكرار
1	||||	4
2	𝍸 ||	7
3	𝍸 |||	8
4	||||	4
5	||	2
6	𝍸	5

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

تمثيل فضاء العيِّنة
Representing Sample Spaces

فيما سبق:
درستُ حساب الاحتمال التجريبي. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل القوائم، والجداول، والرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة.
- أستعمل مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

المفردات:

فضاء العيِّنة
sample space

الرسم الشجري
tree diagram

تجربة ذات مرحلتين
two-stage experiment

تجربة متعددة المراحل
multi-stage experiment

مبدأ العد الأساسي
Fundamental Counting Principle

لماذا؟

في مباريات كرة القدم، يلقي الحكم عادة قطعة نقد مرة واحدة؛ ليحدد أيُّ الفريقين سيختار المكان في الملعب أولًا. وقد تكون النتيجة هي الشعار أو الكتابة.

تمثيل فضاء العيِّنة: لقد تعلمت ما يأتي حول التجارب والنواتج والحوادث.

التعريف	مثال
التجربة العشوائية: هي إجراء نعرف مسبقًا جميع نواتجه الممكنة.	في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.
النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.	النواتج الممكنة هي: الشعار أو الكتابة.
الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة.	إحدى حوادث هذه التجربة ظهور الكتابة.

فضاء العيِّنة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة، أو الجدول، أو **الرسم الشجري**.

مثال 1 تمثيل فضاء العيِّنة

أُلقيت قطعة نقد مرتين، مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

تحقق من فهمك

1) أُلقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

إرشادات للدراسة

المكعب المرقّم
هو مكعب تحمل أوجهه الأرقام من 1 إلى 6.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

التجربة المعروضة في المثال 1 هي مثال على **تجربة ذات مرحلتين**؛ لأنها تمَّت على مرحلتين. والتجارب التي تحتوي على أكثر من مرحلتين تسمى **تجارب متعددة المراحل**.

مثال 2 من واقع الحياة

الرسم الشجري للتجارب المتعددة المراحل

شطائر: يبيع أحد المطاعم شطائر لحم كما هو مبين في قائمة الشطائر المجاورة. مثِّل فضاء العيِّنة لأنواع الشطائر الممكنة باستعمال الرسم الشجري.

تنبيه !

اختصار مراحل

في السؤال الثالث من الصورة المرافقة للمثال 2 ، يختصر الحرفان: و/ أو مرحلتين للاختيار هما:

- مع طماطم أو بدون طماطم.
- مع مخللات أو بدون مخللات. ويقابل هذا أربعة اختيارات ممكنة هي: مع الطماطم فقط، أو مع المخللات فقط، أو مع الطماطم والمخللات أو بدون طماطم ولا مخللات.

قراءة الرياضيات

رموز الرسم الشجري

اخترْ رموزًا واضحة لا غموض فيها للنواتج في الرسم الشجري. ففي المثال 2، تدل C على اختيار الجبنة، وNC تدل على عدم اختيار الجبنة، أمّا NT وNP فتدلان أيضًا على أنها دون طماطم ودون مخلّلات بالترتيب.

تحقق من فهمك

2) هواتف: يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره بلون فضي(S) أو أسود(B) أو أحمر(R)، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC). ويمكنه أن يحصل على سماعات (H) و/ أو غطاء للجهاز(W). مثّل فضاء العيِّنة لهذا الموقف بالرسم الشجري.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

مبدأ العد الأساسي: قد لا يكون تسجيل جميع نواتج فضاء العيِّنة في التجارب ذات المرحلتين أو المتعددة المراحل عمليًّا أو ضروريًّا. لذا يمكن استعمال **مبدأ العد الأساسي** لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

مبدأ العدّ الأساسي

التعبير اللفظي: يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العيِّنة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز: في تجربة عدد مراحلها k. افرض أن:

n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى

n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى

$\vdots$

n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها k يساوي:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

إرشادات للدراسة

قاعدة الضرب

يُسمى مبدأ العدّ الأساسي أحيانًا قاعدة الضرب للعدّ.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال مبدأ العدّ الأساسي

اختيار ثوب: يريد سعد شراء ثوبٍ من بين البدائل المبينة في الجدول المجاور. فما عدد الخيارات المتاحة أمامه ليختار ثوبًا مناسبًا؟

البدائل	عدد الخيارات
القماش	5
اللون	6
الأكمام	3
القبّة	3
الفتحة الأمامية	2
الأزرار	2

الربط بالحياة

اعتاد الرجال في منطقة الخليج العربي على لبس الأثواب الواسعة ذات اللون الأبيض أو الألوان الفاتحة، وهذا يعود لاعتبارات عديدة، أهمها البعدان: المناخي والجمالي.

تحقق من فهمك

أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:

3A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور.

3B) رمي مكعب مرقّم أربع مرات.

3C) أحذية: اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات: 39 ، 40 ، 41 ، 42 ، 43 ، 44 ، 45 بلون أسود أو بني أو رمادي أو أبيض، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي، وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء.

نموذج الإجابة

1. A B C D
2. A B C D
3. A B C D
4. A B C D
5. A B C D
6. A B C D
7. T F
8. T F
9. T F
10. T F

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

تأكد

مثال 1 **للسؤالين 1 ، 2 مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة ممَّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.**

1) عندما يسدّد اللاعب ركلة الجزاء فإنه يسجل هدفًا (G) أو لا يسجل (O). افرض أن اللاعب سدّد ركلة جزاء مرتين.

2) سحب سمير بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من كيس فيه بطاقات كتب عليها: (عصير مجاني J) أو (دفتر ملحوظات مجاني N).

مثال 2

3) **ملابس:** تريد سمر حضور حفلة، وعليها أن تختار ما ترتديه في الحفلة من القائمة المجاورة. مثّل فضاء العيِّنة في هذا الموقف بالرسم الشجري.

مثال 3

4) **مطاعم:** عُرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم تتضمن الأصناف المبينة في الجدول المجاور، وكلّ صنف منها يحتوي على عدد من الأنواع. افرض أنه يتم اختيار طبق واحد من كلِّ صنف ونوع، فما عدد النواتج الممكنة؟

قائمة المأكولات	عدد البدائل
المقبلات	8
الحساء	4
السلطة	6
الطبق الرئيس	12
الحلوى	9

تدرب وحل المسائل

مثال 1 **للأسئلة 5–7 مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة ممَّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري:**

5) تنظم إحدى المدارس الثانوية زيارة إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي (C) وإلى جامعة الملك سعود (U). لطلبة الصف الأول والثاني الثانوي.

6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تدريبيٍّ لمدة شهر أو شهرين، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.

7) يتكون اختبار من نماذج مختلفة من الأسئلة، وكل نموذج يتكون من سؤالين يتعلقان بالمثلَّثات؛ أحدهما يشتمل على مثلَّث منفرج الزاوية (O) أو مثلَّث حاد الزوايا (A)، والآخر يشتمل على مثلَّث متطابق الضلعين (E) أو مثلَّث مختلف الأضلاع (N).

8) **رسم:** ينفّذ بعض الطلاب مشروعين للرسم، فيستعملون أحد نوعين مختلفين من الألوان لكل مشروع. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

ألوان مائية (A)

ألوان زيتية (O)

مثال 2 **للسؤالين 9 ، 10 مثّل فضاء العيِّنة مستعملًا الرسم الشجري في كلٍّ ممَّا يأتي:**

9) **سيارات:** يريد فيصل شراء سيارة: صغيرة (S) أو عائلية (F) أو نقل (T)، بمقاعد مغطاة بالجلد (L) أو القماش (V)، مع إضافات: شاشة ملاحة (N) و/ أو سقف متحرك (R).

10) **حقائب:** يبيع مصنع نوعين من حقائب السفر بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بنيًّا أو أزرق، وقد يكون لها مفتاح و/ أو قفل أرقام.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

مثال 3

11) نشاطات: تجري في إحدى المدارس الثانوية قرعة لاختيار مسؤولي أنشطة من الطلاب. حيث كان عدد الطلاب المرشحين للأنشطة المختلفة: 3 طلاب للنشاط الرياضي وَ 4 طلاب للنشاط العلمي وَ 5 طلاب للتوعية الإسلامية وَ طالبان للإذاعة المدرسية، على ألا يرشح الطالب نفسه لأكثر من نشاط. فما عدد النواتج الممكنة؟

12) فن: أعطى معلم طلابه خيارين لرسم شكلين رباعيين: أحدهما أطوال أضلاعه متساوية، والآخر فيه ضلعان متوازيان على الأقل. مثّل فضاء العيِّنة باستعمال الجدول والرسم الشجري.

13) إفطار: الإعلان المجاور، يوضِّح قائمة وجبة الإفطار في أحد المطاعم، حيث يقدم البيض مع الخضراوات أو اللحم أو الجبن، ويقدم معها الخبز الأبيض أو الأسمر أو خبز النخالة. ما عدد النواتج المختلفة من أطباق البيض ونوع الخبز، إذا كان يُستعمل مع البيض صنف واحد من الخضراوات؟

14) دراجات: اشترى عصام قفلًا رقميًّا لدراجته يفتح باستعمال أربعة أرقام من 0 إلى 9.

a) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل إذا سمح له بتكرار أي رقم؟

b) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل، على أن يستعمل الرقم مرة واحدة فقط؟ وضِّح إجابتك.

15) تمثيلات متعددة: تتم هذه التجربة على مرحلتين متعاقبتين؛ أولًا دوّر المؤشر 1 في الشكل أدناه، فإذا أشار إلى اللون الأحمر فارم قطعة نقد، وإذا أشار إلى اللون الأصفر فارم مكعب نقاط، وإذا أشار إلى اللون الأخضر فألقِ مكعبًا مرقّما، وإذا أشار إلى اللون الأزرق فدوّر المؤشر 2.

a) هندسيًّا: استعمل الرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة للتجربة.

b) منطقيًّا: ارسم شكل ڤن لتمثيل النواتج الممكنة للتجربة.

c) تحليليًّا: ما عدد النواتج الممكنة؟

d) لفظيًّا: هل يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد هذه النواتج؟ وضِّح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

إرشادات للدراسة

عدم إرجاع العناصر

إذا اخترت عنصرًا من مجموعة عناصر دون إرجاعه إلى المجموعة، فإن عدد عناصر المجموعة يتغير وكذلك عدد النواتج الممكنة.

16) تحدٍّ: يحتوي صندوق على n من الكرات المختلفة. إذا سحبت 3 منها على التوالي دون إرجاع، فما عدد النواتج الممكنة؟ برِّر إجابتك.

17) مسألة مفتوحة: قد لا يكون الرسم الشجري للتجربة متماثلًا. صِفْ تجربة ذات مرحلتين تمثل ذلك، ثم ارسم الرسم الشجري لهذه التجربة، وبرِّر إجابتك.

18) تبرير: تجربة متعددة المراحل، عدد مراحلها k وعدد النواتج الممكنة لكل مرحلة n . اكتب صيغة تستطيع من خلالها إيجاد العدد الكلي للنواتج الممكنة p، ووضِّح إجابتك.

19) اكتب: وضِّح متى يكون استعمال الرسم الشجري ضروريًّا لعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة ما، ومتى يكفي استعمال مبدأ العدّ الأساسي.

20) اكتب: وضِّح لماذا لا يمكن استعمال الجدول لتمثيل فضاء العينة لتجربة متعددة المراحل.

تدريب على اختبار

21) يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء. إذا كان لديه أربعة أصدقاء، فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم؟

A 4 **C** 8

B 6 **D** 9

22) تحتوي قائمة الطعام في أحد المطاعم على 5 أنواع للطبق الرئيس، و 4 أنواع من الحساء، و 3 أنواع من الحلوى. كم طلبًا مختلفًا يمكن تقديمه إذا اختار الشخص طبقًا رئيسًا واحدًا، ونوعًا من الحساء، وآخر من الحلوى؟

A 12 **C** 60

B 35 **D** عدد لانهائي

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحد التالي في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

23) 3 , 12 , 48 , 192 , ... (الدرس 2-3)

24) -10 , -6 , -2 , 2 , ... (الدرس 2-2)

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين (الدرس 1-6)

25) $1+\frac{3}{x-1}=\frac{10}{7}$

26) $1-\frac{3}{2x-1}=\frac{4}{3}$

أوجد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

27) $\frac{3^3}{3\cdot 2}$

28) $\frac{2^4\cdot 6}{8}$

29) $\frac{4^4\cdot 3}{2\cdot 4}$

وزارة التعليم Ministry of Education 2020 - 1442

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست استعمال مبدأ العد الأساسي. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل التباديل في حساب الاحتمال.
- أستعمل التوافيق في حساب الاحتمال .

المفردات:
المضروب
factorial
التباديل
permutations
التباديل الدائرية
circular permutation
التوافيق
combinations

لماذا؟

وقف يوسف وعليٌّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليمين ، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

الاحتمال باستعمال التباديل التبديل تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهمًّا. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد، يوسف. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي يوجد $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ترتيبًا ممكنًا لهؤلاء الأصدقاء.

يمكن كتابة العبارة $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4 .

مفهوم أساسي — المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$،

مثال 1 — الاحتمال وتباديل n من العناصر

رياضة : نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. إذا كان عدد أعضاء الفريق 20، ويرتدي كلٌّ منهم قميصًا مرقّما من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

إرشادات للدراسة

العشوائية
عندما يتم اختيار النواتج عشوائيًّا تتساوى فرص وقوعها، ويمكن حساب احتمالاتها باستعمال التباديل والتوافيق.

تحقق من فهمك

1) تصوير: ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة، وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

ارجع إلى فقرة " لماذا؟"، وافترض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يتم اختيار 4 أشخاص فقط عشوائيًّا ليظهروا في الصورة. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي فإن عدد تباديل مجموعة من 6 أصدقاء مأخوذة 4 في كل مرة هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360 .

وهناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء، إذا اختير 4 منهم في كل مرّة ويرمز إليها بالرمز ${}_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروب.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التباديل

بالرموز: يرمز إلى عدد **تباديل** n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nP_r$ حيث

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

مثال 2

الاحتمال والتباديل

مجلس الإدارة: يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، فما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسًا، ونائبًا للرئيس، وأمينًا للسر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيًّا؟

إرشادات للدراسة

الاحتمال والتباديل:
يمكنك حل المثال 2 بالطريقة نفسها التي استعملت في المثال 1

تحقق من فهمك

2) بطاقات جامعية: تستعمل الأرقام 9–1 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟

B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976, 67953124؟

وزارة التعليم Ministry of Education 2020 - 1442

تتكرر في بعض الأحيان بعض العناصر، ولإيجاد عدد التباديل المختلفة في هذه الحالة نستعمل الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي

التباديل مع التكرار

أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا ...، فإنه يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

الربط بالحياة

أطول كلمة وردت في القرآن الكريم دون تكرار للحروف هي كلمة ﴿فَأَسْقَيْنَٰكُمُوهُ﴾ من الآية 22 من سورة الحجر.

مثال 3

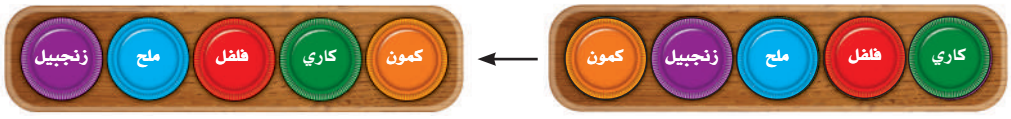
الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفًا مبعثرة، ويطلب إليه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوِّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلًا لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟

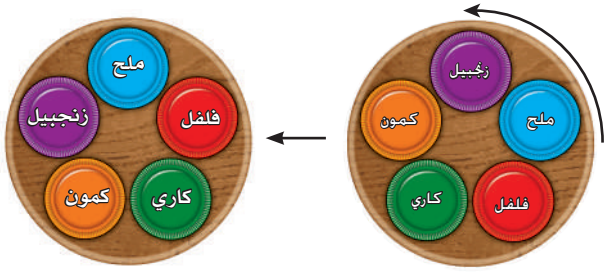
تحقق من فهمك

3) أعداد: تم تكوين عدد مكون من 6 أرقام عشوائيًّا باستعمال الأرقام 3, 5, 1, 2, 5, 1، ما احتمال أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا؟

ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليسار (مثلًا)، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الكمون أولًا من اليمين بدلًا من الكاري؛ لذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي 5! .



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى التراتيب الممكنة **تباديل دائرية** ، فإذا وضعتْ عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة عكس اتجاه عقارب الساعة (مثلًا) موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.



لذا فإن؛ تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي عندما تكون العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5-1)!$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

مفهوم أساسي

التباديل الدائرية

أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا رُتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة (وهي نقطة أو موقع يحدَّد مسبقًا في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى أن الترتيبات ستُعامل خطيًّا وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

إرشادات للدراسة

التباديل الدائرية

عدد التباديل الدائرية لـ n من العناصر يساوي عدد التباديل الخطية لها مقسومًا على عددها.

مثال 4

الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.

a) **زينة:** إذا رتُّبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

b) **طعام:** جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضّدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟

إرشادات للدراسة

النقطة المرجعية

قبل بدء إيجاد الاحتمال المطلوب، حدِّد إذا كان ترتيب العناصر يتم وفق نقطة مرجعية ثابتة أم لا.

تحقق من فهمك

4A) **بطاقات:** إذا رتبت 5 بطاقات مُسجل عليها الأسماء: (حسن، محمد، أحمد، سالم، سعود) على منضدة دائرية عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

4B) **كرة قدم:** تجمَّع فريق كرة قدم مكوَّن من 11 لاعبًا على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة، إذا وقف حكم المباراة تمامًا خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضِّح تبريرك.

الاحتمال باستعمال التوافيق **التوافيق**: هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم. افترض أنك تحتاج إلى اختيار موظَّفَيْنِ من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظَّفَيْنِ غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الموظَّفَيْنِ.

مفهوم أساسي

التوافيق

أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nC_r$، حيث $${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

وزارة التعليم Ministry of Education 2020 - 1442

مثال 5 الاحتمال والتوافيق

كرة طائرة: يريد مدرِّب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟

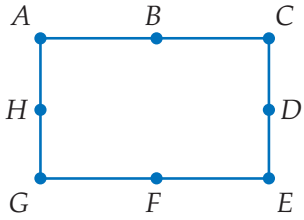
إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق

استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًّا، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.

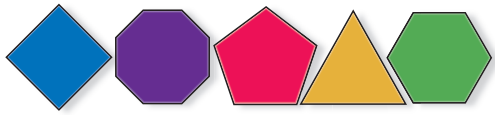
تحقق من فهمك

5) هندسة: إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًّا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور ، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟



تأكـد

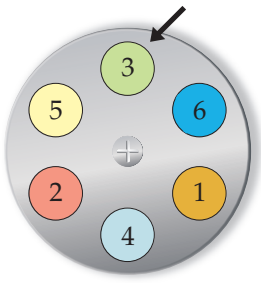
مثال 1 **1) هندسة:** إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلَّث هو الأول والمربع هو الثاني؟



مثال 2 **2) معرض علمي:** تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 40 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًّا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟

مثال 3 **3) أعداد:** يتكون عدد من الأرقام 5,6,6,3,3,3,1 . ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133 ؟

مثال 4 **4) كيمياء:** في معمل الكيمياء طُلب إليك اختبار ست عينات رُتِّبت عشوائيًّا على منضدة دائرية.



a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟

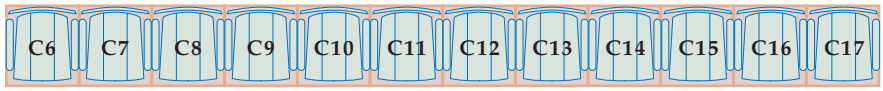
b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟

مثال 5 **5) مسابقات:** اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبدالعزيز وخالد وفوزي؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

مثال 1

6) **محاضرات:** ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كلٌّ منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟



7) **حفلات:** وَزِّعت بطاقات مرقّمة من 1 إلى 50 على 50 شخصًا في حفلة، وكان حسين وزياد من بين الحاضرين. ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 وزياد البطاقة رقم 23 ؟

مثال 2

8) **مجموعات:** تمّ اختيار شخصين عشوائيًّا من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أولًا ثم سليم ثانيًا؟

مثال 3

9) **أحرف ممغنطة:** اشترى عدنان أحرفًا ممغنطةً يمكن ترتيبها على باب ثلاجته، بحيث تشكل كلمات معينة. إذا اختار تبديلًا من الأحرف المبينة في الشكل المجاور عشوائيًّا، فما احتمال أن تشكّل هذه الأحرف كلمة "مكالمات"؟

10) **رموز بريدية:** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 97275 إذا تم تكوينه عشوائيًّا من الأرقام 7,9,5,7,2؟

مثال 4

11) **مجموعات:** يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي هو الأقرب إلى الباب؟

12) **مدينة ألعاب:** ذهب خليل وأصدقاؤه إلى مدينة ألعاب وقد اختاروا لعبة ذات مقاعد مرتبة في دائرة. إذا كان عدد المقاعد 8، فما احتمال أن يجلس خليل في المقعد الأبعد عن مدخل اللعبة؟

13) **ألعاب:** رُتبت 8 كرات مرقّمة بالأرقام 2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 عشوائيًّا في صف:

a) ما احتمال أن تكون الكرة 2 والكرة 11 هما الأولى والثانية من اليسار على الترتيب؟

b) إذا خلطت الكرات الثماني عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون الترتيب كما هو مبيّن في الشكل أدناه؟

c) إذا أُعيد ترتيب الكرات عشوائيًّا بحيث شكلت دائرة. فما احتمال أن تكون الكرة 6 إلى جانب الكرة 7؟

14) **كرات:** إذا وضعت 7 كرات في صف؛ ثلاث منها أرقامها 8 ، وثلاث أرقامها 9، وكرة واحدة رقمها 6. فما احتمال أن تكون الكرات ذات الرقم 8 عن يسار الكرة 6 ، والكرات ذات الرقم 9 عن يمينها؟

مثال 5

15) **مستقيمات:** ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط ولا تقع أيٌّ ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضِّح إجابتك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

مسائل مهارات التفكير العليا

16) تبرير: هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم أنها غير صحيحة أبدًا ؟ برّر إجابتك.

$${}_nP_r = {}_nC_r$$

17) تحدٍّ: يدّعي طالب أن العلاقة بين التباديل والتوافيق هي: ${}_nC_r = {}_nP_r \cdot r!$.
بيّن صحّة هذه العلاقة جبريًّا، ثم وضِّح لماذا يختلف ${}_nC_r$ و ${}_nP_r$ بعاملٍ مقداره $r!$.

18) مسألة مفتوحة: صف وضعًا يكون فيه الاحتمال يساوي $\frac{1}{{}_7C_3}$.

19) برهان: برهن أن ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.

20) اكتب: بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التباديل والتوافيق .

تدريب على اختبار

21) احتمال: يقف رجلان وولدان في صفٍّ واحدٍ. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفَي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي؟

A $\frac{1}{24}$ **C** $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{1}{2}$

22) إجابة قصيرة: إذا اخترت تبديلًا للأحرف المبينة أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تتكون كلمة "فسيفساء"؟

ف	ء	س	ف	ي	س	ا	

23) احتمال: ألقي مكعب مرقّم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي 9 مرات. إذا ألقي المكعب نفسه للمرة العاشرة، فما الاحتمال النظري لظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟

A 1

B $\frac{9}{10}$

C $\frac{1}{6}$

D $\frac{1}{10}$

مراجعة تراكمية

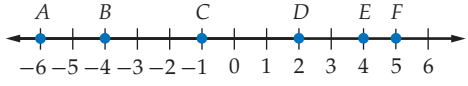
24) تسوّق: لدى محل تجاري أنواع من المعاطف النسائية بالمقاسات 4 أو 6 أو 8 أو 10 وذات ألوان متعددة منها الأسود، الأخضر، الأزرق، الأحمر. كم معطفًا مختلفًا يمكن اختياره؟ (الدرس 3-1)

مثّل فضاء العيِّنة في كلِّ تجربةٍ ممّا يأتي بالرسم الشجري :

25) إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة الواحدة تلو الأخرى. (الدرس 3-1)

26) سحب كرتين معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء، و4 كرات بيضاء، و 3 كرات سوداء. (الدرس 3-1)

أوجد قياس كلِّ مما يأتي مستعملًا خط الأعداد: (مهارة سابقة)



27) DF

28) AE

29) EF

30) BD

31) AC

32) CF

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-3

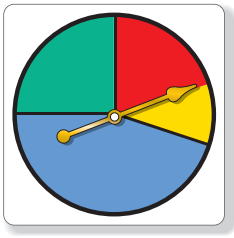
الاحتمال الهندسي
Geometric Probability

فيما سبق:
درست إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد الاحتمالات باستعمال الأطوال.
- أجد الاحتمالات باستعمال المساحات.

المفردات:
الاحتمال الهندسي
geometric probability

لماذا؟



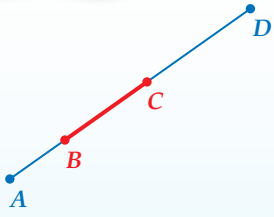
في القرص ذي المؤشر الدَّوار المبين في الشكل، إذا تم تدوير المؤشر فإنه يستقر على أحد الألوان (الأزرق، الأحمر، الأخضر، الأصفر)، ويعاد تدوير المؤشر إن استقر على الخط الفاصل بين لونين.

الاحتمال الهندسي: احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الألوان يعتمد على مساحة ذلك اللون. ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة **احتمالًا هندسيًّا**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الاحتمال والأطوال



التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًّا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$

مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًّا على $\overline{AD}$، فإن:

$$P(E \in \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

إرشادات للدراسة

الاحتمال والأطوال
$P(E \in \overline{BC})$ تعني احتمال أن تقع النقطة E على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$.

مثال 1 استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{JM}$ كما في الشكل أدناه، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.

تحقق من فهمك

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{JM}$ في الشكل السابق، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

1A $P(X \in \overline{LM})$

1B $P(X \in \overline{KM})$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

يمكنك استعمال الاحتمال الهندسي في مواقف كثيرة من واقع الحياة تتضمن عددًا غير منتهٍ من النواتج.

الربط بالحياة

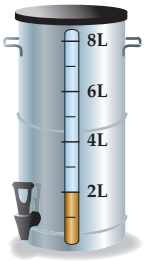
الحافلة وسيلة نقل للركاب، تُصَمَّم بأحجام مختلفة. وتسير معظم الحافلات بالديزل أو البنزين، ومنها ما يسير بالكهرباء، وبعضها ذات مفاصل مترابطة؛ أي لها قسمان متصلان بغطاء مرن. وتسعى شركات الحافلات إلى تخفيض أجرتها؛ ليصبح النقل العام أكثر شعبية لدى المسافرين.

مثال 2 من واقع الحياة

نمذجة احتمالات من واقع الحياة

مواصلات: تصل حافلة ركاب إلى الموقف أو تغادره كل 30 دقيقة. إذا وصل راكب إلى المحطة، فما احتمال أن ينتظر 10 دقائق أو أكثر لركوب إحدى الحافلات؟

تحقق من فهمك



2) شاي: يحضِّر مطعم الشاي في وعاء سعته 8L ، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2L، يصبح تركيز الشاي كبيرًا ويختلف طعمه.

A) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2L ؟

B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أيِّ وقت بين 2L و 3L؟

الاحتمال والمساحة: تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضًا. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

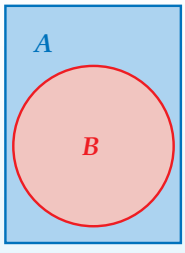
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الاحتمال والمساحة

التعبير اللفظي: إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B ، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيًا، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$



مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا في المستطيل A ، فإن:

$$P(B \text{ في الدائرة } E \text{ وقوع النقطة}) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$

وعند تحديد الاحتمال الهندسي لهدفٍ ما نفترض الآتي:

- وقوع الهدف ضمن منطقة محددة .
- أن احتمال وقوع الهدف في أيِّ مكانٍ من المنطقة متساوٍ .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

مثال 3 من واقع الحياة
استعمال المساحة لإيجاد الاحتمال الهندسي

الهبوط بالمظلات: يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية 2 m ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 m، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟

الربط بالحياة

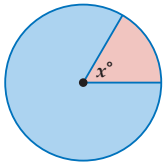
الهبوط بالمظلات يتطلب جرأة لممارسته؛ حيث يقفز المظلي من ارتفاع 10.000 متر فأكثر. وينقسم إلى: القفز بالمظلة وهو آمن وسهل؛ لأنه تلقائي ولا يستلزم تحكم القافز. والقفز الحرّ وهو للمحترفين، حيث يتحكم القافز بالمظلة في موضع هبوطه.

تحقق من فهمك

3) الهبوط بالمظلات: أوجد كلًّا مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.

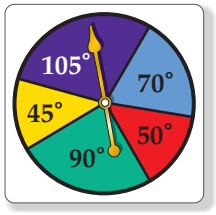
A) (أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء) P

B) (أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء) P



يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي.
إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية ($x°$) إلى 360°. **(ستبرهن هذا في السؤال 21)** ، وعليه فإنه إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا داخل الدائرة فإن احتمال وقوعها داخل القطاع يساوي $\frac{x}{360}$

مثال 4
استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي



استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي:
(علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)

a) (استقرار المؤشر على اللون الأصفر) P

b) (استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) P

c) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق) P

إرشادات للدراسة

استعمال التقدير

في المثال 4b، مساحة القطاع البنفسجي أقل قليلًا من $\frac{1}{3}$، أو 33% من القرص؛ لذا فالجواب 29% يكون معقولًا.

تحقق من فهمك

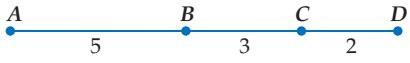
4A) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر) P

4B) (استقرار المؤشر على اللون الأزرق) P

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

تأكد

مثال 1 إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AD}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:



1) (أن تقع X على $\overline{BD}$) P

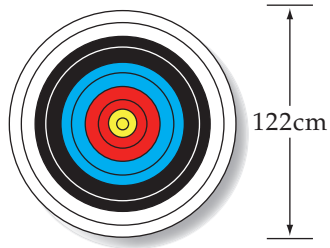
2) (أن تقع X على $\overline{BC}$) P

مثال 2

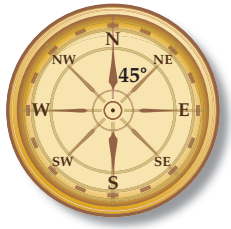
3) مواصلات: ينقل أحد فنادق مكة المكرمة المعتمرين من الفندق إلى الحرم، حيث تصل حافلة ركاب إلى الفندق أو تغادره كل 20 دقيقة. إذا وصل شخص إلى موقف الحافلات في الفندق، فما احتمال أن ينتظر 5 دقائق أو أقل لركوب إحدى الحافلات؟

المثالان 3, 4

4) لعبة السهام: يُسدد هدّاف سهمه نحو قرص قطره 122 cm يحتوي على 10 دوائر متحدة المركز تتناقص أقطارها بمقدار 12.2 cm كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الهدّاف نقطة داخل الدائرة الصغرى.



5) ملاحة: ضَلّ أحد طلبة الكشافة طريقه في غابة، فوجّه بوصلته عشوائيًّا كما في الشكل أدناه. أوجد احتمال أن يوجه البوصلة باتجاه المنطقة المحصورة بين الشمال (N) والشمال الشرقي (NE).



تدرب وحل المسائل

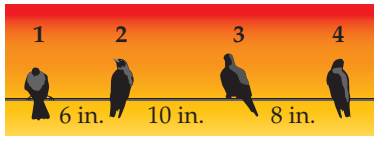
مثال 1 إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{FK}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:

6) $P(X \in \overline{FH})$

7) $P(X \in \overline{GJ})$

8) $P(X \in \overline{HK})$

9) طيور: تقف أربعة طيور عند نقاطٍ على سلكٍ كما في الشكل المجاور. فإذا هبط طائر خامس عشوائيًّا على نقطة من نقاط السلك فما احتمال أن يقف بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟

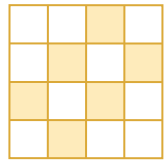


مثال 2

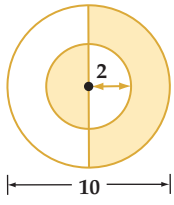
10) تلفاز: يُتابع عمّار برنامجًا تلفزيونيًّا مدته 30 دقيقة. إذا كان يُبث إعلان في التلفاز في وقت عشوائي مرّة كل فترة 3 ساعات. فما احتمال أن يشاهد عمّار الإعلان ثانية خلال متابعته برنامجه المفضّل الذي مدته 30 دقيقة في اليوم التالي؟

مثال 3 اختيرت نقطة عشوائيًّا في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة.

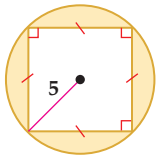
11)



12)



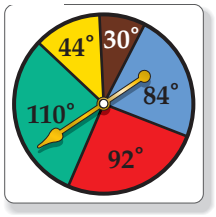
13)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

مثال 4

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار لإيجاد كلٍّ مما يأتي
(إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره):



14) (استقرار المؤشر على اللون الأصفر)P

15) (استقرار المؤشر على اللون الأزرق)P

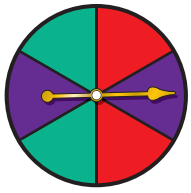
16) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)P

17) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر ولا على اللون الأصفر)P

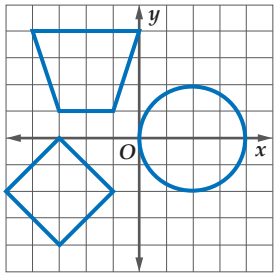
صِفْ حادثة يكون احتمالها $\frac{1}{3}$ لكلٍّ من النماذج الآتية:

18)

19)



20) **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا على الشبكة المجاورة، فأوجد كلًّا مما يأتي:



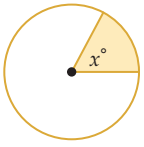
a) (النقطة داخل الدائرة)P

b) (النقطة داخل شبه المنحرف)P

c) (النقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة)P

الربط بالحياة

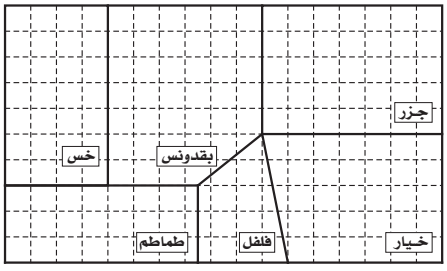
تشجّع المملكة العربية السعودية الزراعة وتوليها اهتمامًا ودعمًا، حيث تتركز الزراعة على الاكتفاء الذاتي، وتصدير القمح والتمور ومنتجات الألبان والبيض والفواكه والخضراوات والزهور إلى الأسواق في جميع أنحاء العالم.



21) **جبر:** اختيرت نقطة عشوائيًّا في الدائرة المجاورة. أثبت أن احتمال وقوعها في المنطقة المظللة يساوي $\frac{x}{360}$. (إرشاد: مساحة القطاع الدائري = مساحة الدائرة × $\frac{x}{360}$)

22) **هندسة إحداثية:** إذا اختيرت نقطة (x, y) عشوائيًّا في منطقة حل نظام المتباينات $1 \le x \le 6, y \le x, y \ge 1$، فما احتمال أن يكون $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$؟

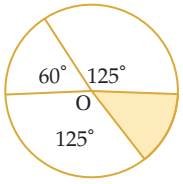
23) **زراعة:** مزرعة مقسمة إلى حقول كما في الشكل المجاور،



a) ما المساحة الإجمالية لحقول الخيار والجزر؟

b) إذا وقف مزارع في مكان من المزرعة عشوائيًّا لجني المحصول، فما احتمال أن يكون قد وقف في حقل من حقول البقدونس.

مسائل مهارات التفكير العليا



24) **اكتشف الخطأ:** حسب كلٌّ من عمر وسالم احتمال وقوع النقطة التي يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الدائرة O في المنطقة المظلّلة، أيُّهما حلُّه صحيح؟ وضِّح تبريرك.

عمر

$$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$$

$$= \frac{50}{360}$$

$$\approx 13.9\%$$

سالم

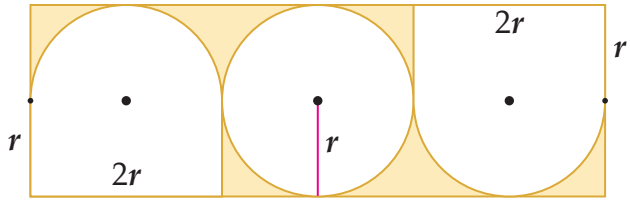
$$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$$

$$= \frac{60}{360}$$

$$\approx 16.7\%$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

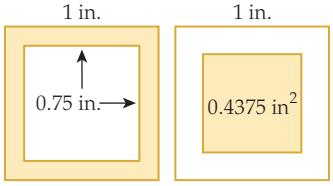
25) تحدٍّ: أوجد احتمال أن تقع نقطة يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الشكل المجاور في المنطقة المظللة مقربًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.



26) تبرير: محيط مثلّث متطابق الضلعين يساوي 32 cm. إذا كانت أطوال أضلاع المثلّث أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحته $48\ cm^2$ بالضبط؟ وضِّح تبريرك.

27) مسألة مفتوحة: مثّل حادثة احتمالها 20% باستعمال ثلاثة أشكال هندسية مختلفة.

28) اكتب: إذا اخترت نقطة عشوائيًّا في كلٍّ من المربعين الآتيين، فوضِّح لماذا يتساوى احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة في أيٍّ منهما.



تدريب على اختبار

29) احتمال: رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات، واخترت نقطة عشوائيًّا داخل المربع. ما احتمال أن تقع أيضًا داخل الدائرة؟

A $\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{3}$

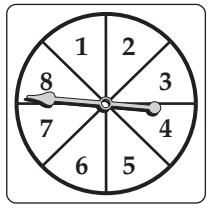
B $\frac{\pi}{9}$ D $\frac{9}{\pi}$

30) احتمال: يحتوي صندوق على 7 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، وكرتين بيضاوين و 3 كرات سوداء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائيًّا. فما احتمال أن تكون حمراء؟

A $\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{6}$ D $\frac{7}{18}$

31) إجابة قصيرة: قُسّم القرص الآتي إلى 8 قطاعات متساوية. وقد أدير المؤشر:



a) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد 3؟

b) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد فرديًّا؟

مراجعة تراكمية

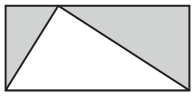
32) حفلة: يجلس خمسة أصدقاء حول منضدة دائرية الشكل في حجرة فيها نافذة واحدة، ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى النافذة؟ (الدرس 2-3)

مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري: (الدرس 1-3)

33) في كلٍّ من السنتين القادمتين يمكن لأحمد الاشتراك في النشاط الثقافي (C) أو النشاط العلمي (S).

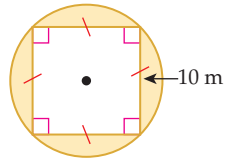
34) يمكن أن تشتري أمينة زوج أحذية له كعب مرتفع (H) أو كعب منخفض (L)، وبلون أسود (K) أو بني (B).

35) هندسة: في الشكل المجاور، ما نسبة المساحة المظللة إلى مساحة المستطيل؟ (مهارة سابقة)

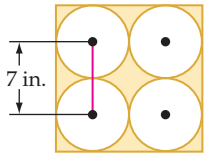


أوجد مساحة المنطقة المظلّلة في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

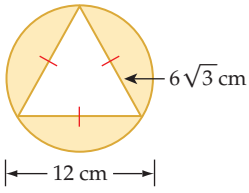
36)



37)



38)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

1) طعام: يتكون غداء صالح من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب حسب الجدول الآتي:

شطائر	حساء	الحلوى	مشروبات
دجاج	دجاج	كعك	شاي
لحم	خضراوات	كنافة	قهوة
لبنة	عدس		عصير برتقال
جبنة			عصير تفاح
			حليب

a) ما عدد الوجبات المختلفة التي يمكن لصالح أن يتناولها إذا اختار صنفًا من كل عمود؟

b) إذا أضيف نوع واحد من الحساء ونوعان من الحلوى، فكم يصبح عدد الوجبات المختلفة؟

2) أعداد: كم عددًا مختلفًا مكونًا من (5) أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 9 ,..., 4, 3, 2 ، دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

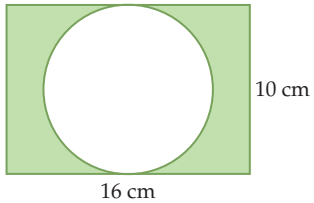
3) ملابس: في محل تجاري قمصان ألوانها: أحمر (R)، أزرق (B)، أصفر (Y)، أخضر (G)، زهري (P)، برتقالي (O)، وكل منها بنوعي أكمام: طويل (L) وقصير (S). مثّل فضاء العيِّنة لخيارات القمصان لدى مريم، إذا أرادت شراء قميص من المحل باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

4) كتابة: يحتوي كيس على بطاقات كُتب على كل واحدة منها حرف واحد من الحروف: ر ، ف ، س ، ة ، و ، ي. إذا اختير تبديل واحد من هذهِ الحروف عشوائيًّا لتكوين كلمة، فما احتمال أن تكون الكلمة "فروسية"؟

5) نقود: لدى محمود 3 جيوب و 4 قطع نقدية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع القطع جميعها في جيوبه؟

6) نقود: إذا ألقيتْ قطعة نقد عشر مرات متتالية، فما عدد النواتج التي تظهر فيها الصورة في الرمية الثالثة؟

7) هندسة: إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المستطيل في الشكل أدناه، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟



8) سيرك: مُدَّ حبل طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرص قَطْعِ الحبل عند أيِّ نقطة من نقاطه متساوية.

a) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل في أول 50 m منه.

b) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل من نقطة تقع ضمن مسافة 20 m من أيٍّ من العمودين.

اختيرت نقطة A عشوائيًّا على $\overline{BE}$ في الشكل أدناه. أوجد كلًّا ممّا يأتي:

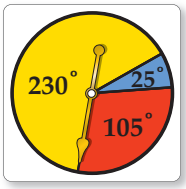
9) (أن تقع A على $\overline{CD}$) P

10) (أن تقع A على $\overline{BD}$) P

11) (أن تقع A على $\overline{CE}$) P

12) (أن تقع A على $\overline{DE}$) P

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة، فإنه يُعاد تدويره مرة أخرى):

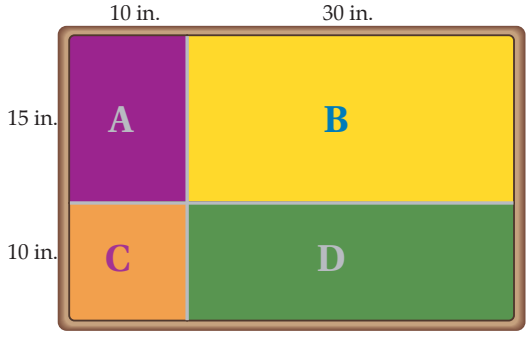


13) (استقرار المؤشر في المنطقة الصفراء) P

14) (استقرار المؤشر في المنطقة الزرقاء) P

15) (استقرار المؤشر في المنطقة الحمراء) P

16) لعبة السهام: الهدف من لعبة رمي السهام أن يصيب السهم المنطقة المربعة الشكل C في اللوحة المستطيلة الشكل المبينة أدناه، إذا سدد لاعب سهمًا ووقع في نقطة ما على اللوحة، فما احتمال أن يكون قد وقع في:



a) المنطقة A؟

b) المنطقة B؟

c) المنطقة C؟

d) المنطقة D؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-4

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة
Probabilities of Independent and Dependent Events

فيما سبق:

درست حساب الاحتمالات البسيطة. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.
- أجد احتمال حادثة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.

المفردات:

الحادثة المركبة
compound event

الحوادث المستقلة
independent events

الحوادث غير المستقلة
dependent events

الاحتمال المشروط
conditional probability

شجرة الاحتمال
probability tree

الحادثة المشروطة
conditional event

لماذا؟

يسحب معلم الكيمياء عشوائيًّا بطاقات من صندوق فيه أسماء طلاب صفِّه البالغ عددهم 18 طالبًا، ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة: تتكون **الحادثة المركبة** من حادثتين بسيطتين أو أكثر. وفي فقرة "لماذا؟" أعلاه، نجد أن اختيار سعود وفيصل لتقديم عرضيهما أولًا يُمثل حادثة مركبة؛ لأنها تتكون من حادثة اختيار سعود وحادثة اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الحوادث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.
- تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقةٍ ما احتمال حدوث B.

افترض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث غير مستقلة.

مثال 1 تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.

b) في فقرة "لماذا ؟" أعلاه، اختير اسم أحد الطلبة عشوائيًّا دون إرجاع، ثم اختير اسم طالب آخر.

c) سحب كرة واحدة عشوائيًّا من كلٍّ من صندوقين مختلفين.

تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سحبت بطاقة ثانية.

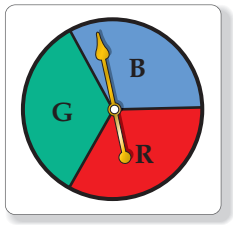
1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا.

إرشادات للدراسة

الحادثة البسيطة

هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما. فمثلًا عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، فإنّ الحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلًا هي حادثة بسيطة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442



إذا أُلقيت قطعة نقد وأُدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العيِّنة لهذه التجربة هو: {(L, B), (L, R), (L, G), (T, B), (T, R), (T, G)}.

باستعمال فضاء العيِّنة، فإن احتمال الحادثة المركبة؛ ظهور الشعار على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي: $P(L \cap G) = \frac{1}{6}$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحادثتين البسيطتين كما يأتي:

$$P(\mathbf{L}) = \frac{1}{2} \qquad P(\mathbf{G}) = \frac{1}{3} \qquad P(\mathbf{L} \cap \mathbf{G}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

وهذا المثال يوضِّح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

قراءة الرياضيات

(∩) يدل هذا الرمز على تقاطع الحادثتين (وقوع الحادثتين معًا)، ويشير إلى ضرب الاحتمالات. وتقرأ العبارة $P(A \cap B)$: احتمال وقوع A ووقوع B معًا.

مفهوم أساسي

احتمال حادثتين مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالَي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A وB مستقلتين فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

يمكن تعميم هذا القانون على أيِّ عدد من الحوادث المستقلة

مثال 2 من واقع الحياة

احتمالات الحوادث المستقلة

وسائل النقل: يرغب خالد وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في سيارة تركي، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في سيارة سعود.

افترض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة ، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

تحقق من فهمك

2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقّم مرة واحدة. فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6 ؟

2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال حادثتين غير مستقلتين

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولًا، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**، ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات. وتُسمى **شجرة الاحتمال**.

تنبيه

إشارة الاحتمال المشروط

يجب ألّا يفسر الرمز "|" في $P(B|A)$ على أنه رمز القسمة.

إرشادات للدراسة

قيم الاحتمال

- لأيّ حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1

مثال 3

احتمالات الحوادث غير المستقلّة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قصاصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قصاصة، فما احتمال أن يسحب كلٌّ من الصديقين قصاصة صفراء؟

تحقق من فهمك

3) بطاقات: يحتوي صندوق على 24 بطاقة، منها 6 بطاقات زرقاء مرقّمة من 1 إلى 6 وبالمثل 6 بطاقات حمراء و 6 صفراء و6 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

الاحتمال المشروط: علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين، يمكنك إيجاد احتمال وقوع **حادثة مشروطة**، وذلك بإعطاء معلومات إضافية عن وقوع حادثة أخرى، وذلك باختزال فضاء العينة، فمثلًا إذا رُمي مكعب مرقّم مرة واحدة وعُلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5؟

هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه المكعب؛ لذا سوف يختزل فضاء العيِّنة من {1, 2, 3, 4, 5, 6} إلى {1, 3, 5}، وعليه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي:

$P(5 \mid \text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$.

مثال 4 على اختبار

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 8 عشوائيًّا حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.
- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.

إذا كانت ليلى من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{1}{2}$

قراءة الرياضيات

الاحتمال المشروط

$P(5 \mid A)$ تقرأ احتمال أن يكون العدد الناتج 5 إذا وقعت الحادثة A.

إرشادات للاختبار

أشكال ڤن

استعمل أشكال ڤن لتساعدك على تصور العلاقة بين نواتج حادثتين غير مستقلتين.

تحقق من فهمك

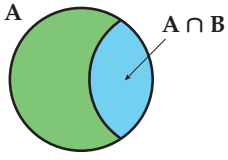
4) عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{2}$

إرشادات للدراسة

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة كل العناصر المشتركة التي تنتمي إلى المجموعة الأولى وإلى المجموعة الثانية في الوقت نفسه ويرمز لها بالرمز $\cap$.



بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العيِّنة، فإنه يمكن تبسيط شكل ڤن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين النواتج المشتركة في A و B وهذا يعني أن $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لِـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

حيث: $P(A) \neq 0$.

سيبرهن هذا القانون في السؤال 16

وزارة التعليم Ministry of Education 2020 - 1442

تأكد

مثال 1 **حدّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1, 2) مستقلتين أم غير مستقلتين، ووضِّح إجابتك:**

1) وصل فريق كرة القدم في مدرسة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في المباراة النهائية للبطولة.

2) نجاح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد ، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس.

مثال 2

3) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 20 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية لكلٍّ منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق. سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من الصندوق، ثم أُعِيدت إليه، وبعد ذلك سُحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقة حمراء في المرتين؟

مثال 3

4) **أوراق نقدية:** في جيب عبد السلام 3 أوراق نقدية من فئة 5 ريالات، و7 أوراق من فئة 10 ريالات، ما احتمال أن يسحب عبد السلام عشوائيًّا ورقتين على التوالي من فئة 5 ريالات على فرض أن فرص حصول الحوادث متساوية.

مثال 4

5) **أصدقاء:** يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 10 عشوائيًّا، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال أن يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 **حدّد إذا كانت الحادثتان في الأسئلة (6–9) مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال:**

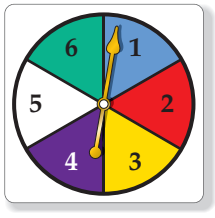
6) رمي مكعب مرقّم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسَّم إلى قطاعات متطابقة، ومرقّم من 1 إلى 5؛ للحصول على عدد فردي.

7) اختيار طالبين حصلا على الدرجة الكاملة في اختبار للرياضيات. واحدًا تلو الآخر من صفٍّ فيه 25 طالبًا، 5 منهم حصلوا على الدرجة الكاملة.

8) تكرار سحب كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائيًّا دون إرجاع ، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و 4 كرات زرقاء.

9) ظهور العدد 5 على الوجهين العُلويين لمكعبين مرقّمين متمايزين أُلقِيا مرة واحدة.

10) **ألعاب:** إذا أُدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وأُلقيت قطعة نقد مرة واحدة. فما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟



11) **شعارات:** معتمدًا على الجدول المجاور، إذا اختير شعاران عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون كلا الشعارين الأول والثاني أحمر؟

لون الشعار	العدد
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

مثال 4

12) سُحبت كرة حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على كرتين زرقاوين و 9 كرات حمراء دون إرجاع. ما احتمال سحب كرة حمراء ثانية؟

13) مستطيل محيطه 12 وحدة، إذا كانت أطوال أضلاعه أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن يكون الشكل مربَّعًا؟

14) رُقمت قطاعات متطابقة في قرص من 1 إلى 12، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 11 إذا عُلم أنه استقر عند عدد فردي؟

15) **تقنيات:** يمتلك 43% من طلاب مدرسة جهازًا نقالًا، و 28% يمتلكون جهازًا نقالًا وجهاز حاسوب. فما احتمال أن يمتلك طالب منهم جهاز حاسوب إذا كان يمتلك جهازًا نقالًا؟

16) **برهان:** استعمل قانون احتمال حادثتين غير مستقلتين $P(A \cap B)$ لاشتقاق قانون الاحتمال المشروط $P(B|A)$

17) **تنس أرضي:** إذا كانت نسبة أداء الضربة الأولى دون أخطاء للاعب التنس 40% ، على حين كانت نسبة الضربة الثانية 70%، فأجب عما يأتي:

a) ارسم شجرة الاحتمال التي تبيّن احتمالات النواتج.

b) ما احتمال أن يرتكب اللاعب خطأً مزدوجًا؟

الربط بالحياة

تُعد ضربة البداية في التنس الأرضي خطأ مزدوجًا على اللاعب إذا لم ينجح في إيصال الكرة إلى منطقة الاستقبال المقابلة دون أن يطأ خط الرمي أو يتجاوزه في محاولتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **اكتشف الخطأ:** أراد كلٌّ من مهند وجابر إيجاد احتمال A شرط وقوع B، حيث $P(A) = 0.3, P(B) = 0.3$، والحادثتان A و B مستقلتان. أيُّهما إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

مهند

بما أن A و B حادثتان مستقلتان،
فإن: $P(A|B) = P(A)$

جابر

بما أننا لا نعرف $P(A \cap B)$،
فإننا لا نستطيع إيجاد $P(A|B)$

19) **تحدٍّ:** يحتوي كيس على n من العناصر المختلفة، فإذا كان احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون إرجاع يساوي 5%. فما قيمة n؟ وضِّح إجابتك.

20) **تبرير:** إذا كان A و B حادثتين مستقلتين، فهل العبارة $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ برّر إجابتك.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين مستقلتين وحادثتين غير مستقلتين، وبرّر إجابتك.

22) **اكتب:** وضِّح لماذا يجب أن يكون مجموع احتمالات النواتج في شجرة الاحتمال يساوي 1.

تدريب على اختبار

23) احتمال: يمكن أن يلعب بلال عشوائيًّا في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟

A $\frac{1}{18}$ C $\frac{1}{9}$

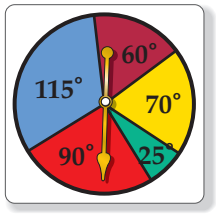
B $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{2}$

24) احتمال: يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ عمّار حبتَي حلوى من الكيس دون أن ينظر إليهما. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشرٍ.

مراجعة تراكمية

25) ما احتمال ظهور العدد 2 على الوجه العلوي لمكعب مرقّم أُلقي مرتين؟ (الدرس 4-3)

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي (يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على أي خطٍّ بين لونين): (الدرس 3-3)



26) (استقرار المؤشر عند اللون الأحمر)P

27) (استقرار المؤشر عند اللون الأزرق)P

28) (استقرار المؤشر عند اللون الأخضر)P

29) (استقرار المؤشر عند اللون الأصفر)P

أوجد عدد النواتج الممكنة لكل موقف فيما يأتي: (الدرس 3-1)

30) تختار فاطمة واحدًا من بين 5 مذاقات مختلفة من الآيس كريم و3 أنواع مختلفة من الحلوى.

31) يختار بدر واحدًا من الألوان الستة لدراجته الجديدة، وأحد تصميمين لمقاعدها.

32) رمي ثلاثة مكعبات مرقّمة في آنٍ واحد.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-5

احتمالات الحوادث المتنافية
Probabilities of Mutually Exclusive Events

فيما سبق:
درست إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة. الدرس (3-4)

والآن:
- أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.
- أجد احتمال متممة حادثة.

المفردات:
الحادثتان المتنافيتان
mutually exclusive events
الحادثة المتممة
complement event

لماذا؟

يمكن لأيٍّ طالب في الصفوف (الأول والثاني والثالث الثانوي) الترشُّح ليكون مسؤول أنشطة. ويرغب صالح في أن يكون المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي، في حين يرغب سلمان في أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي، أو طالبًا يبدأ اسمه بحرف م.

الحوادث المتنافية: لقد اختبرت في الدرس 3-4 احتمالات تتضمن تقاطع حادثتين أو أكثر في وقت واحد، وستختبر في هذا الدرس احتمالات تتضمن اتحاد حادثتين أو أكثر.

$P(A \cup B)$ ← يدل على اتحاد مجموعتين

$P(A \cap B)$ ← يدل على تقاطع مجموعتين

عند إيجاد احتمال وقوع حادثة أو وقوع حادثة أخرى، يجب أن تعرف العلاقة بين الحادثتين. فإذا لم يكن وقوع الحادثتين ممكنًا في الوقت نفسه يُقال إنهما **متنافيتان**؛ أيْ أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما.

إرشادات للدراسة

الاتحاد
اتحاد مجموعتين هو مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى أو إلى المجموعة الثانية ويرمز لها بالرمز ∪.

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد الحوادث المتنافية

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

انتخابات: ارجع إلى المعلومات الواردة في فقرة "لماذا؟".

a) المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو من الصف الثالث الثانوي.

b) المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م.

تحقق من فهمك

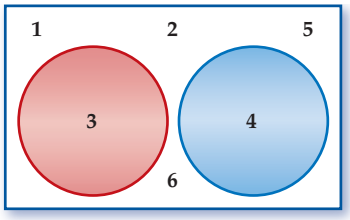
حدِّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

1A) اختيار عدد من الأعداد من 1 إلى 100 عشوائيًّا، والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10.

1B) الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.

وزارة التعليم Ministry of Education 2020 - 1442

إحدى طرق إيجاد احتمال وقوع حادثتين متنافيتين هو اختبار فضاء العيِّنة لهما.



فمثلًا لإيجاد احتمال ظهور 3 أو 4 عند رمي مكعب مرقّم، سترى من أشكال فن أنه يوجد ناتجان يحققان هذا الشرط 3 أو 4، لذا فإن:

$$P(3 \cup 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بإضافة احتمالَي الحادثتين البسيطتين.

$$P(3 \cup 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(4) = \frac{1}{6} \text{ و } P(3) = \frac{1}{6}$$

يوضِّح هذا المثال القانون الأول من قانونيَ الجمع في الاحتمالات.

قراءة الرياضيات

$(\cup)$

يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل، ويشير إلى جمع الاحتمالات. $P(A \cup B)$ يقرأ احتمال وقوع A أو وقوع B.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال الحادثتين المتنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين، فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كلٍّ منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين، فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على أيِّ عدد من الحوادث المتنافية.

مثال 2 من واقع الحياة

الحوادث المتنافية

كتب: اختار موسى كتابًا من الكتب الموجودة في مكتبته المبينة في الجدول المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب دينيًّا أو فيزيائيًّا؟

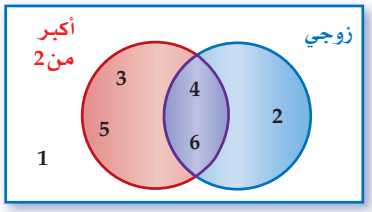
مكتبة موسى	
أنواع الكتب	العدد
دينية	10
فيزيائية	12
كيميائية	13

تحقق من فهمك

2A) إذا رُمي مكعبان مرقّمان متمايزان مرة واحدة. فما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كلٍّ من وجهَي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟

2B) ألعاب: إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائيًّا من بين 15 محفظة و16 ساعة و14 نظارة و 25 قلمًا و10 كرات، فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442



عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، ما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ يمكنك أن تلاحظ من أشكال ڤن وجود 5 أعداد أكبر من 2 أو زوجية وهي 2, 3, 4, 5,6 . لذا فإن:

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من 2}) = \frac{5}{6}$$

وبما أنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه، فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين، وإذا أخذنا احتمال كل حادثة على حدة فإن:

$$P(\text{زوجي}) = \frac{3}{6} \qquad P(\text{أكبر من 2}) = \frac{4}{6}$$

وإذا جمعنا هذين الاحتمالين فإن احتمالي الناتجين 6 ، 4 يحسبان مرتين؛ مرة لكونهما عددين أكبر من 2، ومرّة أخرى لكونهما عددين زوجيين؛ لذا يجب عليك أن تطرح احتمال الناتجين المشتركين.

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من 2}) = P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{عدد أكبر من 2}) - P(\text{عدد زوجي وأكبر من 2})$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

يؤدي هذا المثال إلى قانون الجمع الثاني في الاحتمال.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال حادثتين غير متنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحًا منه احتمال وقوع B و A معًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الربط بالحياة

المعارض الفنية

للمعارض الفنية دور في تقدم الفرد في المجتمع، بما تضمه من أفكار إبداعية، وطرق تعبير، تهذّب الأخلاق، وتسمو بالذوق والقيم الإنسانية.

مثال 3 من واقع الحياة

الأحداث غير المتنافية

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائيًّا للمشاركة في معرض للوحات الفنيّة، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظرًا طبيعيًّا؟

لوحات إبراهيم			
الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

تحقق من فهمك

3) فن: في المثال أعلاه، ما احتمال أن تكون اللوحة التي اختارها إبراهيم مائية أو شكلًا هندسيًّا؟

وزارة التعليم Ministry of Education 2020 - 1442

احتمال الحادثة المتممة: عناصر **الحادثة المتممة** A تتكون من جميع نواتج فضاء العيّنة غير الموجودة في الحادثة A. فمثلًا تعلم أن احتمال الحصول على العدد 4 عند رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة يساوي $\frac{1}{6}$، وبالتالي فإن احتمال عدم الحصول على العدد 4 هو $\frac{5}{6}$؛ وذلك لأنه توجد 5 نواتج ممكنة لهذه الحادثة هي: 1, 2, 3, 5, 6. لذا فإن $\frac{5}{6}$ = (عدم الحصول على العدد 4) P.

لاحظ أن هذا الاحتمال يساوي $1 - \frac{1}{6}$ أو $1 - P(4)$.

قراءة الرياضيات

الحادثة المتممة

يرمز إلى الحادثة المتممة للحادثة A بالرمز $(\grave{A})$.

مفهوم أساسي — **احتمال الحادثة المتممة**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة.

بالرموز: لأيّ حادثة A، $P(\grave{A}) = 1 - P(A)$

مثال 4 — **الحادثة المتممة**

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطُلب إليها سحب بطاقة عشوائيًّا من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة؟

تحقق من فهمك

4) أمطار: إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟

ملخص المفاهيم — **قوانين الاحتمال**

أضف إلى مطويتك

نوع الحوادث	الوصف	القانون
الحادثتان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A , B حادثتين مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
الحادثتان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A , B حادثتين غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما .	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B : $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بشرط $P(B) \neq 0$
الحادثتان المتنافيتان	حادثتان لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A , B حادثتين متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحادثتان غير المتنافيتين	حادثتان توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحادثة المتممة	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العيّنة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأيّ حادثة A: $P(A`) = 1 - P(A)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

مثال 5 من واقع الحياة

تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها

حزام الأمان: افرض أن 81 % من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقَيْن واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ

الشهر	عدد حالات الوفاة
المحرم	26
صفر	18
ربيع الأول	16
ربيع الآخر	26
جمادى الأولى	22
جمادى الآخرة	23
رجب	21
شعبان	15
رمضان	26
شوال	25
ذو القعدة	23
ذو الحجة	25
المجموع	266

الربط بالحياة

يؤدي عدم الالتزام بقواعد وأخلاقيات قيادة السيارات إلى وقوع حوادث مرورية مؤسفة، والجدول أعلاه يبين حالات الوفاة بسبب الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ وفق إحصائيات الإدارة العامة للمرور.

إرشادات للدراسة

تقاطع الحوادث واتحادها

من المثال 5 لاحظ أن

$P(A' \cup B') = P[(A \cap B)']$

وبالمثل

$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$

تحقق من فهمك

5) هواتف نقالة: أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقّال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير سائقان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة 100 سائق، فما احتمال أن يستعمل أحدهما على الأقل هاتفه النقّال أثناء القيادة؟

تأكد

مثال 1 حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كلٍّ ممَّا يأتي، وبرّر إجابتك:

1) ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة.

2) اختيار سيارة أو حصان.

مثال 2

3) **الموظف المثالي:** حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي شركة، وكانت جائزته أن يختار عشوائيًّا واحدة من بين 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب ، و 7 نظارات. ما احتمال أن يربح بطاقة سفر، أو كتابًا، أو ساعة؟

مثال 3

4) **نشاطات مدرسية:** بناءً على الجدول المجاور، اختير طالب في المدرسة. ما احتمال أن يكون الطالب من الصف الثاني الثانوي أو في نادي العلوم؟

النادي	الصف الأول الثانوي	الصف الثاني الثانوي	الصف الثالث الثانوي
الرياضي	12	14	8
العلوم	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
اللغة الإنجليزية	11	15	13

مثال 4

5) **لعبة السهام:** إذا كان احتمال إصابتك الهدف عند رمي السهم تساوي $\frac{2}{10}$، فما احتمال أن تخطئ إصابة الهدف؟

مثال 5

6) **تخرج:** عدد طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة 100 طالب. حضر حفل التخرج النهائي 91% منهم. إذا اختير طالبان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من طلاب الصف جميعهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر الحفل؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 3–1 حدّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين (في كلٍّ من الأسئلة 9-7)، ثم أوجد الاحتمال، وقرّب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًّا:

7) رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين.

8) اختيار عدد عشوائيًّا من 1 إلى 20، للحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3 .

9) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة للحصول على شعار أو كتابة.

10) **رياضة:** يبين الجدول المجاور أنواع الرياضات التي يقدمها نادٍ رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 16–14. ما احتمال أن يمارس مشارك السباحة أو أن يكون عمره 14؟

النادي الرياضي			
العمر	كرة القدم	الكرة الطائرة	السباحة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

11) **هدايا:** أراد بعض الطلاب تقديم هدية لزميلهم لحصوله على لقب الطالب المثالي، فوجد معلم الصف أن 10 منهم اختاروا ساعة، و 12 اختاروا قميصًا، و 6 اختاروا هاتفًا نقالًا، و4 اختاروا ميدالية. إذا اختار المعلم الهدية عشوائيًّا فما احتمال أن تكون هدية الطالب المثالي ساعة أو ميدالية؟

مثال 4 أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:

12) عدم ظهور العدد 3 على أيٍّ من الوجهين الظاهرين، عند إلقاء مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.

13) عدم ظهور الكتابة على الوجه الظاهر عند إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.

14) سحب خليل عشوائيًّا كرة من كيس فيه 25 كرة متماثلة، إحداها فقط حمراء. ما احتمال ألَّا يسحب الكرة الحمراء؟

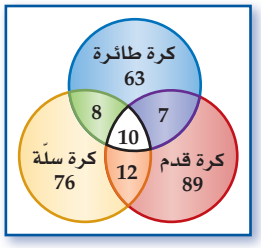
مثال 5

15) **أجور:** من بين فئة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و25 سنة، وجد أن نسبة الذين يقبضون أجورهم أسبوعيًّا تساوي 71%. فإذا اختير اثنان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 عامل منهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل يقبض أجرته أسبوعيًّا؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

16) **تدوير:** إذا كانت نسبة الذين يساهمون في إعادة التصنيع في إحدى الدول 31%، واختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة عددها 100 شخص , فما احتمال أن يساهم أحدهما على الأكثر في إعادة التصنيع؟

17) **مسح:** أجرت مدرسة مسحًا على طلابها البالغ عددهم 265 طالباً لمعرفة أيِّ الأنشطة الرياضية يرغبون المشاركة فيها، ومُثّلت النتائج بأشكال ڤن كما في الشكل المجاور . إذا اختير طالب عشوائيًّا من هذه المدرسة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي:



a) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم أو كرة الطائرة.

b) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم ولايرغبون المشاركة في كرة السلة.

c) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في الألعاب الثلاث.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **تحدّ:** إذا رميت ثلاثة مكعبات مرقّمة متمايزة مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر على مكعبين منها على الأقل عدد أقل من أو يساوي 4؟

تبرير: **حدد إذا كانت الحادثتان في كلٍّ مما يأتي متنافيتين أو غير متنافيتين:**

19) اختيار مثلّث متطابق الأضلاع ومثلّث متطابق الزاويا.

20) اختيار عدد مركب واختيار عدد حقيقي.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين متنافيتين وحادثتين غير متنافيتين.

22) **اكتب:** وضِّح لماذا لا يساوي مجموع احتمالي حادثتين متنافيتين 1 دائمًا.

تدريب على اختبار

23) **احتمال:** يقدم محل تجاري لزبائنه في يوم الافتتاح الهدايا المبينة في الجدول الآتي. ما احتمال أن يربح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو إحدى الساعات؟

الهدية	العدد
أدوات مطبخ	10
أدوات كهربائية	6
ساعات	3
هواتف نقالة	1

A 0.075 B 0.35 C 0.5 D 0.65

24) **احتمال:** رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر؟

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{5}{6}$ D 1

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ثمّ أوجد الاحتمال: (الدرس 4 -3)

25) ظهور العدد 2 في الرمية الأولى لمكعبٍ مرقّمٍ، ثم ظهور العدد 3 عند رمي المكعب للمرة الثانية.

26) سحب مصباحين تالفين واحدًا تلو الآخر من صندوق فيه 12 مصباحًا، 3 منها تالفة.

27) أوجد عدد النواتج الممكنة عند رمي مكعب مرقّم وثلاث قطع نقد. (الدرس 1 -3)

وزارة التعليم Ministry of Education 2020 - 1442

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل فضاء العيّنة (الدرس 3-1)

- فضاء العيّنة لتجربة هو مجموعة كل النواتج الممكنة.
- يمكن تحديد فضاء العيّنة باستعمال القائمة المنظمة أو الجدول أو الرسم الشجري.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق (الدرس 3-2)

- الترتيب مهم في التباديل.

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- الترتيب غير مهم في التوافيق.

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-3)

- إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واخترت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي: $\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$
- إذا احتوت المنطقة A المنطقة B واخترت نقطة E عشوائيًا من المنطقة A فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$.

احتمالات الحوادث المركبة (الدرسان 3-4 و 3-5)

- إذا كانت الحادثة A' متممة للحادثة A فإن: $P(A') = 1 - P(A)$
- إذا كانت الحادثة A لا تؤثر في احتمال وقوع الحادثة B، فإن: الحادثتين مستقلتان ويكون $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- إذا لم يكن وقوع الحادثتين A و B ممكنًا في الوقت نفسه فإنهما متنافيتان ويكون $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا لم تكن A و B متنافيتين، فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية قد دوّنت في مطويتك.

المفردات

فضاء العيّنة ص 114
الرسم الشجري ص 114
تجربة ذات مرحلتين ص 115
تجربة متعددة المراحل ص 115
مبدأ العد الأساسي ص 116
المضروب ص 120
التباديل ص 121
التباديل الدائرية ص 122
التوافيق ص 123
الاحتمال الهندسي ص 127
الحادثة المركبة ص 134
الحوادث المستقلة ص 134
الحوادث غير المستقلة ص 134
الاحتمال المشروط ص 136
شجرة الاحتمال ص 136
الحادثة المشروطة ص 137
الحوادث المتنافية ص 141
الحادثة المتممة ص 144

اختبر مفرداتك

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل المصطلح الذي تحته خط حتى تصبح صحيحة:

1) تُستعمل في الرسم الشجري قطع مستقيمة لعرض النواتج الممكنة.

2) التباديل هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

3) تحديد تراتيب جلوس مجموعة من الأشخاص حول منضدة دائرية يتطلب التباديل الدائرية.

4) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا مثال على الحوادث غير المستقلة.

5) يتضمن الاحتمال الهندسي قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة.

6) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$، مثال على المضروب.

7) تُسمى مجموعة كل النواتج الممكنة فضاء العيّنة.

8) الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو: $P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

9) أخذ قميصين الواحد تلو الآخر من خزانة ملابس دون إرجاع مثال على الحوادث المتنافية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

مراجعة الدروس

3-1 تمثيل فضاء العيّنة ص 119–114

10) فشار: يبيع محل تجاري أكياس فشار ذات حجم صغير (S) أوحجم وسط (M) أوحجم كبير (L)، ودون زبدة (NB) أو مع زبدة (B) أو مع زبدة إضافية (EB). مثّل فضاء العيِّنة لأنواع الفشار باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

11) أحذية: يبيع محل تجاري أحذية من بين المقاسات: 36، 37، 38، 39، 40، 41، 42، 43، 44، وبلونين: بني أو أسود. فكم زوجًا مختلفًا يمكن اختياره؟

مثال 1

أُلقيت ثلاث قطع نقد متمايزة مرة واحدة. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة.

أقرن كل ناتج ممكن من القطعة الأولى بالنواتج من القطعتين الثانية والثالثة.

LLL, LLT, LTL, LTT, TLL, TLT, TTL, TTT

3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق ص 126–120

12) مطعم: ذهب ثلاثة طلاب من الصف الأول الثانوي وثلاثة طلاب من الصف الثالث المتوسط إلى مطعم وجلسوا حول منضدة مستديرة. فإذا اشترط حسين من الصف الأول الثانوي ألا يجلس بجانب أيّ طالب من الصف الثالث المتوسط، واشترط إبراهيم من الصف الثالث المتوسط ألا يجلس بجانب أي طالب من الأول الثانوي. فما عدد التراتيب الممكنة؟

13) ترغب مجموعة من 10 طالبات في تشكيل لجنة من 3 منهن، بحيث يتم اختيارهن عشوائيًّا من المجموعة. فما احتمال اختيار نوال ودانة وفاطمة لهذه اللجنة؟

14) مسابقات: بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من 32 طالبًا لتشكيل فريق لمسابقة أكاديمية؟

مثال 2

بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

$(n-1)!$ قانون التباديل الدائرية

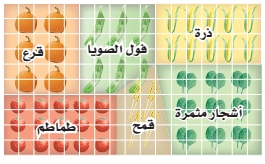
$n = 4$ $(4-1)!$

بسّط $= 3! = 6$

لذا فهناك 6 طرائق لجلوس أربعة أشخاص حول منضدة مستديرة.

3-3 الاحتمال الهندسي ص 132–127

15) زراعة: الشكل المجاور يمثل مخططًا لمزرعة. إذا كان كل مربع صغير يمثل وحدة مساحة مربعة واحدة، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:



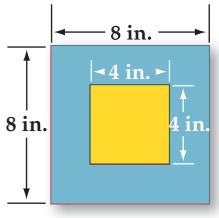
a) ما المساحة التقريبية لحقلَي فول الصويا والذرة معًا؟

b) إذا اختير أحد المربعات عشوائيًّا، فأوجد احتمال أنه يُستعمل لزراعة الذرة.

16) يجلس الطلاب هاني وعمر وراشد وعبد الكريم (على الترتيب) على حافة بركة، بحيث يجلس هاني على بُعد 2ft من عمر، ويجلس عمر على بُعد 4ft من راشد، ويجلس راشد على بعد 3ft من عبد الكريم. إذا وقعت ريشة طائر بينهم، فأوجد احتمال أن تكون قد وقعت بين هاني وعمر.

مثال 3

لعبة رمي الكرة:



a) إذا ألقى حاتم كرة على المنطقة المبينة في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الصفراء $4 \cdot 4 = 16$

P(أن تقع الكرة في المنطقة الصفراء) $= \frac{16}{64} = 25\%$

b) ما احتمال ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء؟

مساحة المنطقة الزرقاء $(8 \cdot 8) - 16 = 64 - 16 = 48$

P(ألا تقع الكرة في المنطقة الصفراء) $= \frac{48}{64} = 75\%$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

3-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة ص 134–140

17) يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. إذا سحبت كرتان على التوالي دون ارجاع، فما احتمال أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء؟

18) **مسح:** أظهرت نتائج دراسة مسحية أن 72% من الناس يحبون المطالعة، فإذا اختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 شخص، فما احتمال أن يكون الشخصان من الذين يحبون المطالعة؟

مثال 4

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء وكرتين بيضاوين و 6 كرات زرقاء. فإذا سحبت كرتان على التوالي ودون إرجاع، فما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

بما أن الكرة المسحوبة لا تُعاد إلى الكيس، فإن الحادثتين غير مستقلتين، ويتم حساب الاحتمال على النحو الآتي:

$$P(\text{حمراء وزرقاء}) = P(\text{حمراء}) \cdot P(\text{زرقاء} \mid \text{حمراء})$$

$$= \frac{3}{11} \cdot \frac{6}{10}$$

$$= \frac{9}{55} \approx 16.36\%$$

3-5 احتمالات الحوادث المتنافية ص 141–147

19) رُمي مكعبان مرقّمان متمايزان مرة واحدة. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين عليهما 7 أو 11؟

20) يحتوي صندوق على 40 بطاقة مرقّمة من 1 إلى 40، سُحبت منه بطاقة واحدة عشوائيًّا.

a) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا زوجيًّا أو أقل من 5؟

b) ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟

مثال 5

عند إلقاء مكعبين مرقَّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 5، أو أن يكون العددان على الوجهين الظاهرين متساويين؟

هذان الحدثان متنافيان؛ لأن مجموع عددين متساويين لا يمكن أن يكون 5 .

$$P(\text{المجموع 5 أو متساويان}) = P(\text{المجموع 5}) + P(\text{متساويان})$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{6}{36}$$

$$= \frac{5}{18} \approx 27.8\%$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AE}$ في الشكل أدناه. فأوجد كلًّا مما يأتي:

1) (أن تقع X على $\overline{AC}$) P

2) (أن تقع X على $\overline{CD}$) P

3) سباحة: يتكون فريق سباحة من 9 طلاب. ما عدد الطرائق الممكنة لترتيبهم في 9 مسارات متجاورة في بركة السباحة؟

4) سفر: يحتاج مندوب مبيعات إلى زيارة أربع مدن. ما عدد خطط الرحلات المختلفة التي يمكن أن يعدّها لزيارة كل مدينة مرة واحدة؟

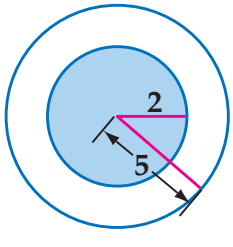
مثّل فضاء العيّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري:

5) يحتوي صندوق على كرة واحدة من كل لون من الألوان الآتية: الأحمر (R)، والأخضر (G)، والأزرق (B). سُحبت منه كرتان واحدة تلو الأخرى دون إرجاع.

6) مطعم: أراد خليفة أن يأكل شطيرة، وعندما ذهب إلى المطعم وجد عنده نوعين من الشطائر هما: بالجبن (C)، وباللحم (M)، فقرر شراء شطيرتين.

7) كتابة: بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب أحرف الكلمة "متململ"؟

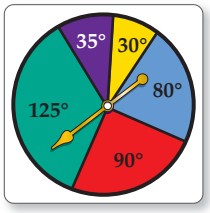
8) تصويب: يسدد صياد بندقيته نحو الهدف كما في الشكل المجاور. ما احتمال أن يصيب المنطقة المظللة؟



9) أعداد: ما احتمال أن يكون عدد مكون من الأرقام السبعة الآتية 7, 7, 7, 2, 2, 2, 6 هو 6222777؟

10) مسابقات: اشتركت خمس عشرة طالبة في مسابقة ذات ثلاث جوائز. ما احتمال أن تربح المتسابقات جنان وسارة وكوثر الجوائز الثلاث؟

11) حدد إذا كانت الحادثتان الآتيتان مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال: سحب بطاقتين حمراوين الواحدة تلو الأخرى من صندوق يحوي 5 بطاقات صفراء و5 حمراء و 5 برتقالية مع الإرجاع.



استعمل تجربة القرص ذي المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ من الاحتمالات الآتية، (إذا استقر المؤشر على خطٍّ تُعاد التجربة).

12) (استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) P

13) (استقرار المؤشر على اللون الأحمر) P

14) (استقرار المؤشر على لون غير الأصفر) P

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك :

15) يمتلك رجل سيارة وشاحنة.

16) رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين مجموعهما 7، وظهور العدد 6 على أحد وجهي المكعبين.

17) سحب بطاقة حمراء وزرقاء من مجموعة بطاقات مكونة من 13 بطاقة حمراء، و 13 زرقاء، و 13 صفراء، و 13 خضراء.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

تنظيم البيانات

تُعطى في بعض الأحيان مجموعة بيانات لتحليلها؛ لكي تحل فقرات أسئلة في اختبار. استعمل هذا القسم للتدرب على تنظيم البيانات وحل المسائل.

استراتيجيات تنظيم البيانات

الخطوة 1

إذا أعطيت مسألة تحتوي على بيانات، فاعتمد واحدة ممَّا يأتي:

- عمل قائمة بالبيانات.
- استعمال جدول لتنظيم البيانات.
- عرض البيانات مثل: التمثيل بالأعمدة، أشكال فن، القطاعات الدائرية، التمثيل بالخطوط أو الصندوق وطرفيه لتنظيمها.

الخطوة 2

نظِّم البيانات.

- كوّن جدولًا، أو قائمة، أو تمثيلًا بيانيًّا، أو أشكال فن.
- اكتب القيم المجهولة التي يمكن إيجادها بحسابات بسيطة إذا كان ذلك ممكنًا.

الخطوة 3

حلّل البيانات لتتمكن من حل المسألة.

- أعد قراءة نص المسألة لتحدد المطلوب.
- استعمل الخصائص الهندسية والجبرية الضرورية للتعامل مع البيانات المنظمة، وحُلّ المسألة.
- إذا كان الزمن كافيًا فراجع الحل وتحقق من إجابتك.

مثال

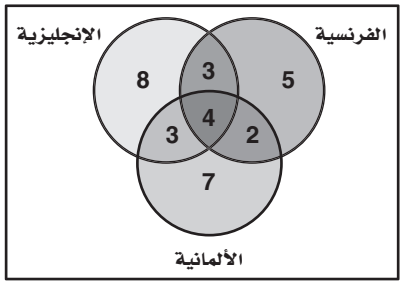
اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

يوجد في مركز للغات 18 طالبًا يتعلمون اللغة الإنجليزية، و14 يتعلمون اللغة الفرنسية، و16 يتعلمون اللغة الألمانية، ويوجد 8 طلاب يتعلمون الإنجليزية فقط، و7 يتعلمون الألمانية فقط، و3 يتعلمون الإنجليزية والفرنسية فقط، وطالبان يتعلمان الفرنسية والألمانية فقط، و4 طلاب يتعلمون اللغات الثلاث معًا. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أنه يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلم الفرنسية؟

A $\frac{9}{16}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{5}{18}$ D $\frac{7}{12}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

اقرأ المسألة بتمعُّن تجد أنه من الصعب تحليلها من خلال النص، ولكن عند استعمالك أشكال ڤن تستطيع تنظيم البيانات، وعندئذٍ تتمكن من حلّها.



الخطوة 1: ارسم ثلاث دوائر تمثل كلٌّ منها لغة.

الخطوة 2: ضع معطيات المسألة على الشكل.

الخطوة 3: املأ القيم المفقودة في بعض الأمكنة. فمثلًا تعلم أن 18 طالبًا يتعلمون الإنجليزية، و14 طالبًا يتعلمون الفرنسية.
$14 - 3 - 4 - 2 = 5$ (يتعلمون الفرنسية فقط).
$18 - 8 - 3 - 4 = 3$ (يتعلمون الإنجليزية والألمانية فقط).

الخطوة 4: حل المسألة، المطلوب إيجاد احتمال اختيار طالب عشوائيًّا يتعلم الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلّم الفرنسية. يمكنك بحسب أشكال ڤن ملاحظة أن مجموع الطلاب يساوي 32 طالبًا، منهم:
$8 + 3 + 7 = 18$ يتعلمون الإنجليزية أو الألمانية ولا يتعلمون الفرنسية. الاحتمال يساوي $\frac{18}{32}$ أو $\frac{9}{16}$ ؛ لذا فإن الإجابة الصحيحة هي A.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة وحدّد المطلوب، ثم نظِّم البيانات لحل المسألة.

1) لدى رباب أربعة أحرف بلاستيكية: ا، ف، ح، ت. إذا اختارت تبديلًا عشوائيًّا لهذه الأحرف، فما احتمال أن تكون الكلمة هي كلمة "فاتح"؟

A $\frac{3}{50}$ C $\frac{1}{12}$

B $\frac{1}{24}$ D $\frac{1}{4}$

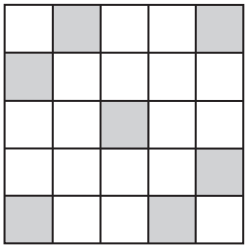
2) يبيّن الجدول الآتي عدد الطلاب في الصفوف الثلاثة في مدرسة ثانوية ، وهم يلعبون كرة السلة وكرة القدم وكرة الطائرة. إذا اختير أحد الطلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من الصف الثاني الثانوي أو يلعب كرة الطائرة؟

الرياضة	الأول الثانوي	الثاني الثانوي	الثالث الثانوي
كرة السلة	6	5	6
كرة القدم	5	8	7
كرة الطائرة	3	4	6

A $\frac{4}{21}$ C $\frac{5}{17}$

B $\frac{2}{25}$ D $\frac{13}{25}$

3) اختيرت نقطة واحدة عشوائيًّا في الشكل المجاور. أوجد احتمال أن تقع هذه النقطة في المنطقة المظلّلة.



A 0.22 C 0.28

B 0.25 D 0.32

4) تضم جماعات الأنشطة في إحدى المدارس الثانوية 10 طلاب من الصف الأول الثانوي، و8 طلاب من الصف الثاني الثانوي، و9 من الصف الثالث الثانوي، حيث يمارس كل طالب فيها نشاطًا معينًا في أثناء العام الدراسي على النحو الآتي:

يمارس 4 طلاب من الأول الثانوي النشاط العلمي، و6 النشاط الثقافي، ويمارس طالبان من الصف الثاني الثانوي النشاط العلمي و5 النشاط الرياضي. ويمارس طالبان من الصف الثالث الثانوي النشاط الثقافي، علمًا بأن كل نشاط يضم 9 طلاب. إذا اختير طالب واحد عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من طلاب الصف الثاني الثانوي أو يمارس النشاط العلمي؟

A $\frac{1}{5}$ C $\frac{5}{9}$

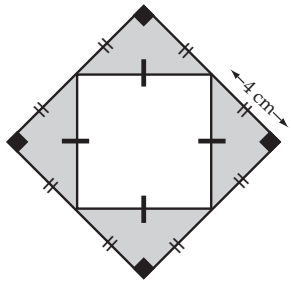
B $\frac{4}{18}$ D $\frac{2}{3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

اختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) اختيرت نقطة عشوائيًّا في الشكل المجاور، فما احتمال وقوعها في المنطقة المظللة ؟



A 0.0625

B 0.125

C 0.25

D 0.5

2) كم عددًا مكونًا من 3 أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 2,6,1 دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

A 3

B 6

C 12

D 27

3) إذا كانت A , B حادثتين متنافيتين في فضاء العيّنة لتجربة عشوائية ما ، وكان $P(\mathrm{A})=\frac{1}{3}$ ، $P(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$، فما قيمة $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$؟

A 0

B $\frac{2}{5}$

C $\frac{5}{6}$

D $\frac{1}{6}$

4) قيمة محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ يساوي:

A -11

B 11

C -1

D 1

5) يكتب المقدار: $\frac{x-1}{4x^2-14x+6}-\frac{5}{6x-18}$ في أبسط صورة على النحو:

A $\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$

B $\frac{2-7x}{6(x-3)(2x-1)}$

C $\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

D $-\frac{7x+8}{6(x-3)(2x+1)}$

6) إذا كانت A حادثة في فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان $P(\mathrm{A}) = 0.8$ ، فما احتمال عدم وقوع الحادثة A؟

A 0.8

B 0.2

C 0.16

D -0.2

7) سحبت عينتان عشوائيًّا واحدة تلو الأخرى دون إرجاع من صندوق يحتوي على عينات من فصائل دم مختلفة، فإذا كان في الصندوق 4 عينات من فصيلة الدم A ، و3 عينات من فصيلة الدم B ، و6 عينات من فصيلة الدم AB ، و5 عينات من فصيلة الدم O ، فما احتمال أن تكون العينتان المسحوبتان من فصيلة الدم AB؟

A $\frac{1}{51}$

B $\frac{1}{9}$

C $\frac{5}{51}$

D $\frac{1}{3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442

إجابة قصيرة

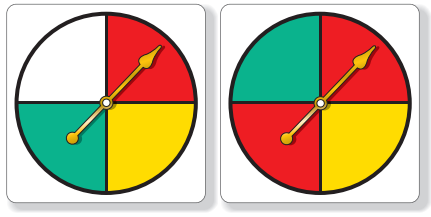
أجب عن كلٍّ ممَّا يأتي:

8) التقت الصديقتان هدى ودلال بعد عدة سنوات من تخرجهما في الجامعة ودار بينهما الحوار الآتي:

هدى: مرحبًا يا دلال، بلغني أنك تزوجت، فهل رزقك الله أطفالًا؟
دلال: نعم، رزقني الله طفلين.
هدى: وهل رزقك الله بناتٍ؟
دلال: نعم.
اعتمادًا على هذا الحوار، ما احتمال أن يكون لدلال بنتان؟

9) إذا كانت $d(x) = x^3 + x + 2$ ، فما قيمة $d(4a^2)$ ؟

10) إذا دار المؤشران في الشكل أدناه، فما احتمال أن يتوقف كلاهما على اللون الأحمر؟ علمًا بأن القرصين مقسمان إلى أقسام متساوية، وإذا توقف أيٌّ من المؤشرين على الخط الفاصل بين الأقسام فإنه يعاد تدويرهما.



11) حدِّد كلًّا من مجال الدالّة $f(x) = [x] - 5$ ومداها.

إجابة طويلة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحا خطوات الحل:

12) تحتوي حقيبة على 3 بطاقات حمراء و 5 بطاقات خضراء وبطاقتين صفراوين و 4 بطاقات بنّية و 6 بطاقات بنفسجية. سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا وسُجِّلَ اللون، ثم أُعيدت إلى الحقيبة وسحبت بطاقة أخرى.

a) هل الحادثتان مستقلتان أم غير مستقلتين؟ وضّح إجابتك.

b) ما احتمال أن تكون البطاقتان بنفسجيتين؟

c) ما احتمال أن تكون البطاقة الأولى خضراء والثانية بنيّة؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟												
إذا لم تستطع الإجابة عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
فعد إلى الدرس ...	3-3	3-1	3-5	2-2	1-2	3-5	3-4	3-4	مهارة سابقة	3-4	مهارة سابقة	3-4

وزارة التعليم
Ministry of Education
2020 - 1442