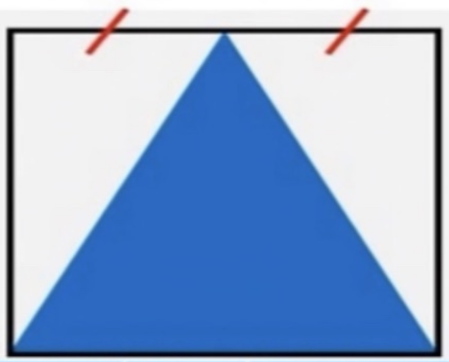
الصورة القطبية و الصورة الديكارتية للمعادلات

قدرات

إذا كانت مساحة المربع تساوي ١٦ فأوجد مساحة الجزء المظلل؟



أ	٦	ب	٨	ج	١٢	د	١٣

فيما سبق:

درستُ تمثيل النقاط وبعض المعادلات القطبية.

(الدرس 1 — 2)

والآن:

- أحوِّلُ بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
- أحوِّلُ المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.

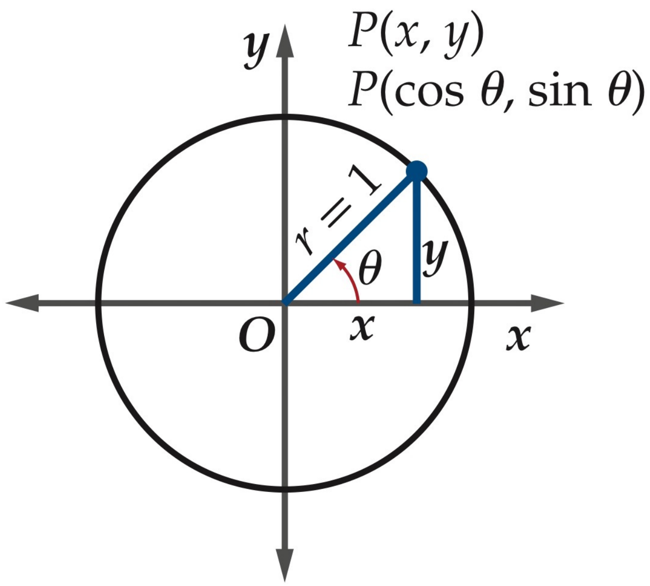
لماذا

يبعث مِجَس مُثبت إلى رجلٍ آلي أمواجًا فوق صوتية على شكل دوائر كاملة، وعندما تصطدم الأمواج بجسم، فإنّ المجس يستقبل إشارة، ويقوم بحساب بُعد الجسم عن مقدمة الرجل الآلي بدلالة المسافة المتجهة r، والزاوية المتجهة θ. ويوصل المجس هذه الإحداثيات القطبية إلى الرَّجل الآلي الّذي يحولها إلى الإحداثيات الديكارتية؛ ليتمكن من تعيينها على خريطة داخلية.

الإحداثيات القطبية والديكارتية يمكن كتابة إحداثيات النقطة $P(x, y)$ الواقعة على دائرة الوحدة، والمقابلة لزاوية θ على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ؛ لأن

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

فإذا كان طول نصف قطر دائرة عددًا حقيقيًّا r بدلًا من 1، فإنه يمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة θ , r على النحو الآتي:



$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

اضرب في r

$$r\cos\theta = x \quad , \quad r\sin\theta = y$$

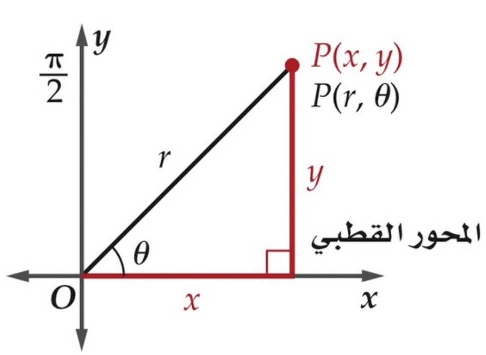
وإذا نظرنا للمستوى الديكارتي على أنه مستوى قطبي، بحيث ينطبق المحور القطبي على الجزء الموجب من المحور x، والقطب على نقطة الأصل، فإنه يصبح لدينا وسيلة لتحويل الإحداثيّات القطبية إلى الإحداثيّات الديكارتيّة.

مفهوم أساسي **تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية**

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ) ، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

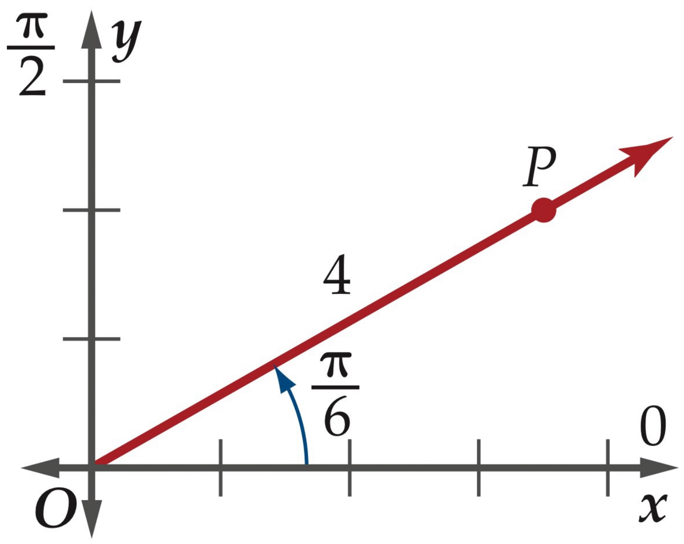
أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.



مثال

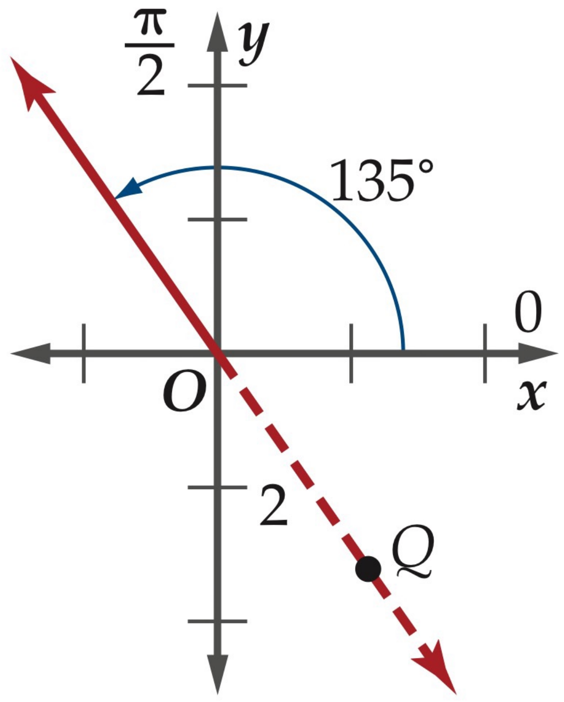
حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلِّ نقطة مما يأتي:

a) $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$



مثال

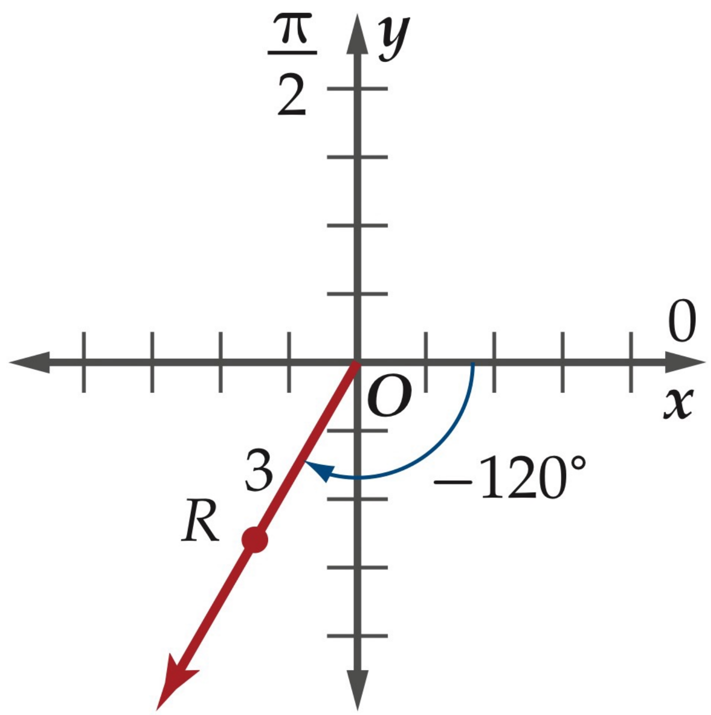
b) $Q(-2, 135°)$



تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

مثال

$V(3, -120°)$ (c



تحقق من فهمك

حوِّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

1A) $R(-6, -120^\circ)$

تحقق من فهمك

حوِّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

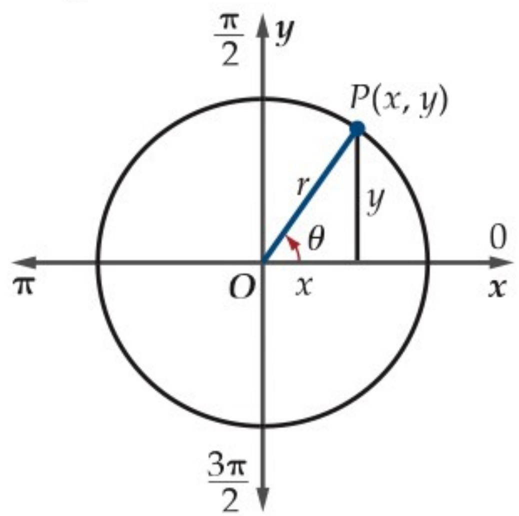
1B) $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

تحقق من فهمك

حوِّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

1C) $T(-3, 45°)$

ولكتابة زوج الإحداثيات الديكارتية بالصيغة القطبية، فإنك بحاجة إلى إيجاد المسافة المتجهة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل أو القطب، و قياس الزاوية المتجهة التي يصنعها r مع الجزء الموجب من المحور x أو المحور القطبيّ.



استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل.

$$r^2 = x^2 + y^2$$ نظرية فيثاغورس

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

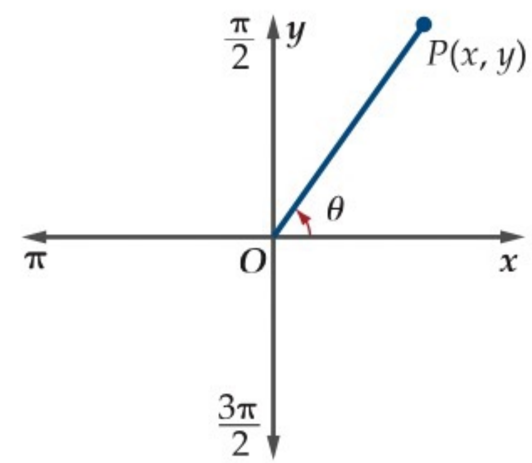
ترتبط الزاوية θ بكل من x, y من خلال دالة الظل، ولإيجاد الزاوية θ:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$ تعريف الظل

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$$ دالة معكوس الظل

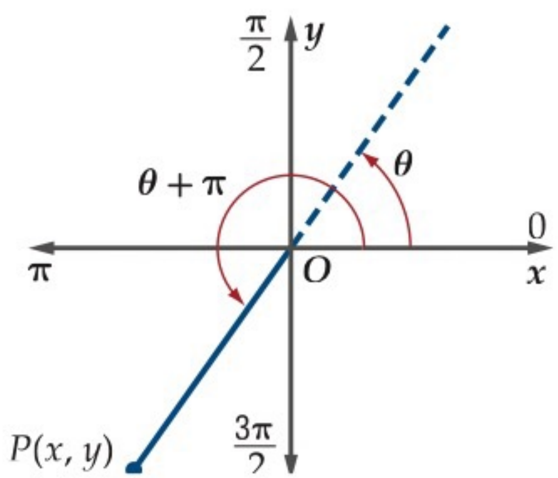
تذكّر أن الدالة العكسيّة للظل معرّفة فقط على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ أو $(-90°, 90°)$ في نظام الإحداثيات الديكارتية.

وتُعطى قيم θ الواقعة في الربع الأول أو الرابع، أي عندما تكون $x > 0$ ، كما في الشكل **6.2.1** . وإذا كانت $x < 0$ ، فإن الزاوية تقع في الربع الثاني أو الثالث، لذا عليك إضافة π أو °180 (طول الدورة للدالة $y = \tan x$) إلى قياس الزاوية المعطاة بالدالة العكسيّة للظل كما في الشكل **6.2.2** .



$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$

الشكل 6.2.1



$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ عندما $x < 0$

الشكل 6.2.2

مفهوم أساسي

تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y) ، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$

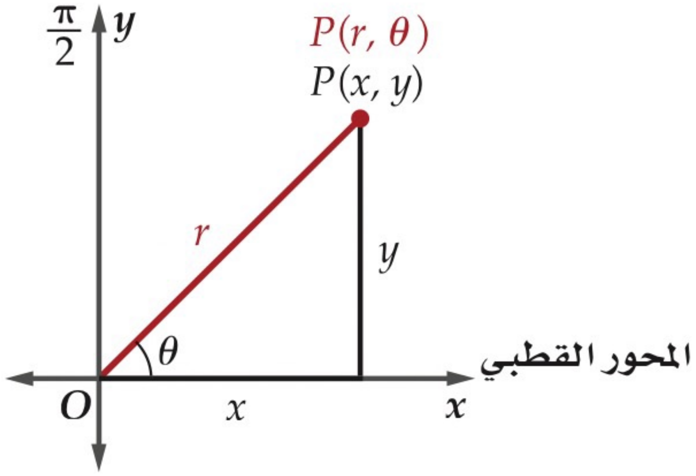
وعندما $x < 0$ فإن:

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + \pi$$

أو $\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} + 180°$.

وعندما $x = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y > 0$

أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y < 0$



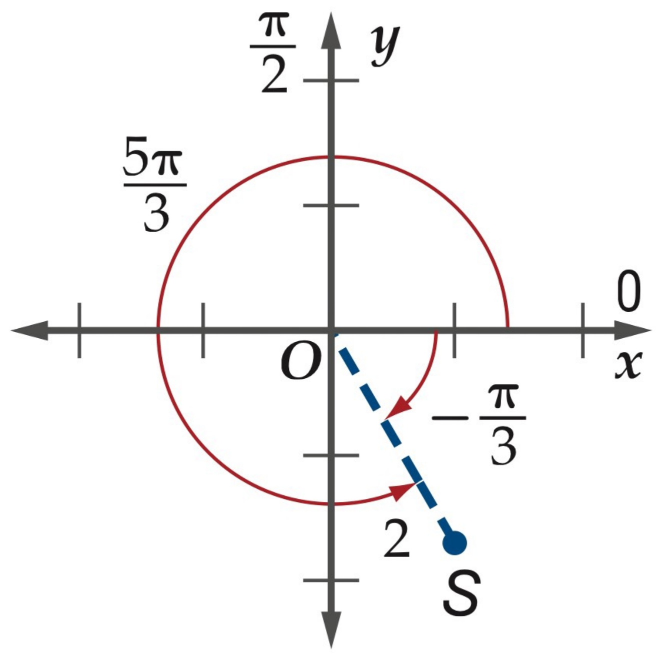
تذكَّر أن هناك عددًا لانهائيًّا من أزواج الإحداثيات القطبية للنقطة، والتحويل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية يعطي أحدها.

تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبيّة

مثال

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

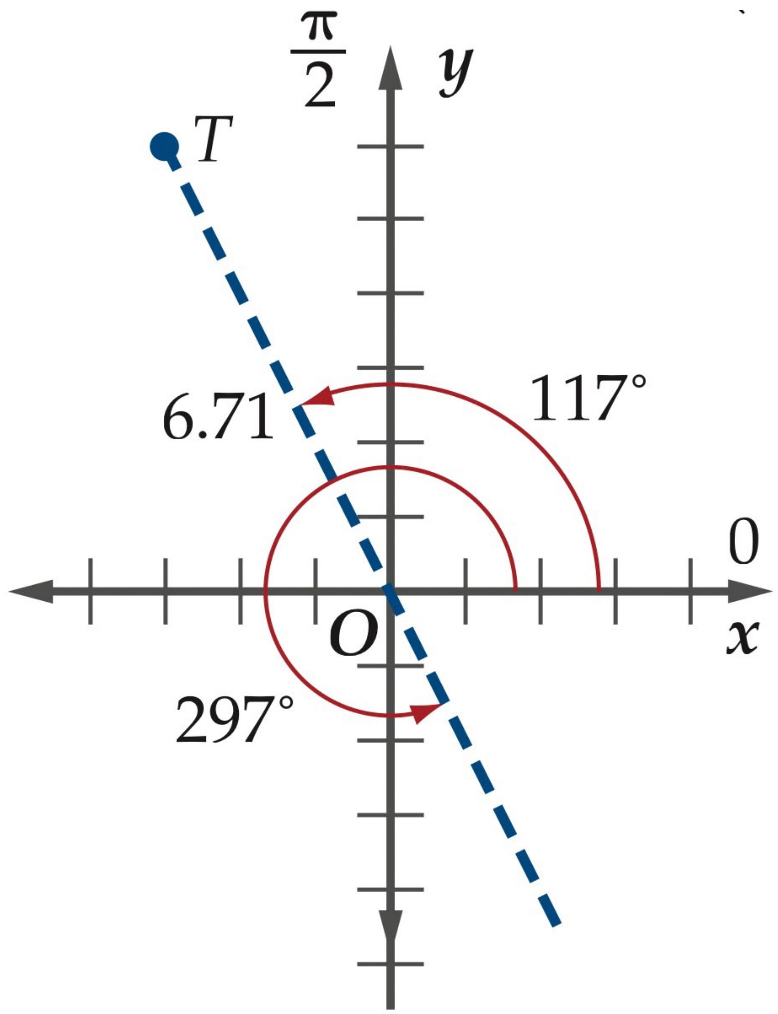
a) $S\left(1, -\sqrt{3}\right)$



تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبيّة

مثال أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

b) $T(-3, 6)$



تحقق من فهمك

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

2A) $V(8 , 10)$

تحقق من فهمك

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

2B) $W(-9\ ,\ -4)$

مثال

التحويل بين الإحداثيات

رجل آلي: بالرجوع إلى فقرة «لماذا؟» ، افترض أن الرَّجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسَّ قد رَصَدَ جسمًا عند النقطة $(5, 295°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟

b) إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها $(3, 7)$ ، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟

تحقق من فهمك

3) صيد الأسماك: يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

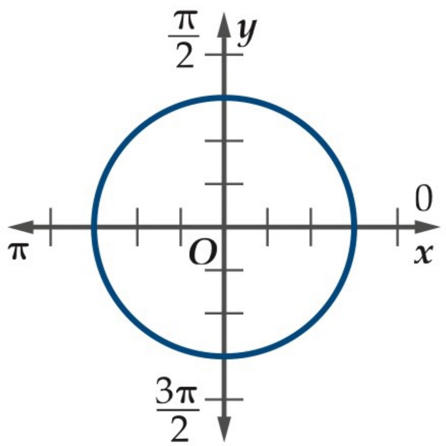
A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(6, -2)$، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟

المعادلات القطبية والديكارتية قد تحتاج في دراستك المستقبلية إلى تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس؛ وذلك لتسهيل بعض الحسابات. فبعض المعادلات الديكارتية المعقَّدة صورتها القطبية أسهل كثيرًا. لاحظ معادلة الدائرة على الصورة الديكارتية والقطبية كما في الشكل أدناه.

المعادلة على الصورة الديكارتية

$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة على الصورة القطبية

$r = 3$

وبشكلٍ مماثل فإن بعض المعادلات القطبية المعقَّدة صورتها الديكارتية أسهل كثيرًا، فالمعادلة القطبية $r = \frac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$ صورتها الديكارتية هي $2x - 3y = 6$

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة؛ إذ نعوض عن x بـ $r\cos\theta$، وعن y بـ $r\sin\theta$ ، ثم نبسِّط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.

تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

مثال اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

a) $(x-4)^2+y^2=16$

تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

مثال

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

$y = x^2$ (b

تحقق من فهمك

اكتب كلّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

4A) $x^2 + (y-3)^2 = 9$

تحقق من فهمك

اكتب كلّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

4B) $x^2 - y^2 = 1$

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$$r^2 = x^2 + y^2 \, , \tan\theta = \frac{y}{x} , x = r\cos\theta \, , y = r\sin\theta \, .$$

مثال

تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

a) $\theta = \frac{\pi}{6}$

مثال

تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

b) $r = 7$

مثال

تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

c) $r = -5 \sin \theta$

تحقق من فهمك

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

5A) $r = -3$

تحقق من فهمك

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

5B) $\theta = \frac{\pi}{3}$

تحقق من فهمك

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

5C) $r = 3\cos\theta$

تدرب

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلِّ نقطة مما يأتي:

1) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

3) $(5, 240^\circ)$

تدرب

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

11) $(7, 10)$

12) $(-13, 4)$

تدرب

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

24) $x = -2$

25) $(x+5)^2 + y^2 = 25$

تدرب اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

32) $r = 3 \sin \theta$

36) $\tan \theta = 4$

تدرب

75) أيٌّ من النقاط الآتية يعد تمثيلًا آخر للنقطة $\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي؟

A $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

B $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

C $\left(2, \frac{-11\pi}{6}\right)$

D $\left(-2, \frac{11\pi}{6}\right)$

76) إذا كان $\mathbf{m} = \langle 5, -4\rangle, \mathbf{n} = \langle -7, 3\rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل $\mathbf{k}$ ، حيث $\mathbf{k} = \mathbf{n} - 2\mathbf{m}$ ؟

A $\langle -17, 11\rangle$

B $\langle -17, -5\rangle$

C $\langle 17, -11\rangle$

D $\langle -17, 5\rangle$

77) ما الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ؟

A $r = \sin\theta$

B $r = 2\sin\theta$

C $r = 4\sin\theta$

D $r = 8\sin\theta$

78) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 6, -1, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -4, 2\rangle$ ؟

A $\langle -10, 10, 25\rangle$

B $\langle -10, -10, 25\rangle$

C $\langle -10, -10, -25\rangle$

D $\langle -10, 10, -25\rangle$

إذا كان $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ الإحداثي القطبي للنقطة P فما الإحداثي الديكارتي لها؟

Ⓐ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

Ⓑ $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Ⓒ $\left(10, \frac{10}{\sqrt{3}}\right)$

Ⓓ $\left(\frac{10}{\sqrt{3}}, 10\right)$