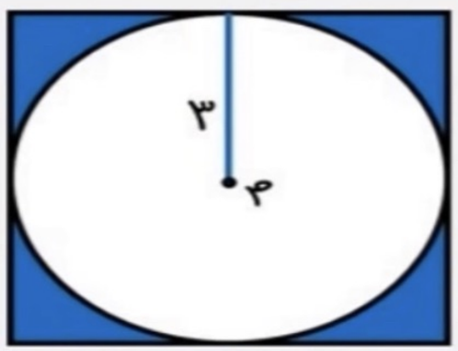
الأعداد المركبة و نظرية ديموافر

قدرات

أوجد طول ضلع المربع



أ	٣	ب	٦	ج	٦√٢	د	٣√٢

فيما سبق:

درست إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحوّلُ الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
- أَجدُ حاصلَ ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وأجدُ جذورها وقواها في الصورة القطبية.

المفردات:

المستوى المركب
complex plane

المحور الحقيقي
real axis

المحور التخيلي
imaginary axis

القيمة المطلقة لعدد مركب
absolute value of a complex number

الصورة القطبية
polar form

الصورة المثلثية
trigonometric form

المقياس
modulus

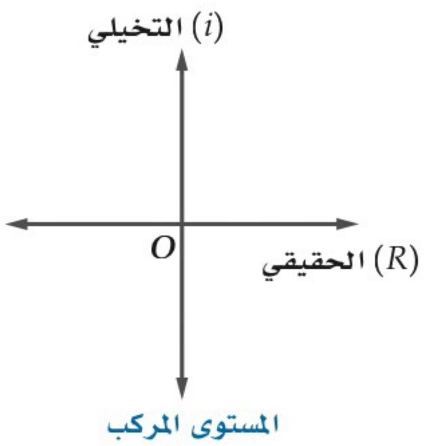
السعة
argument

الجذور النونية للعدد واحد
nth roots of unity

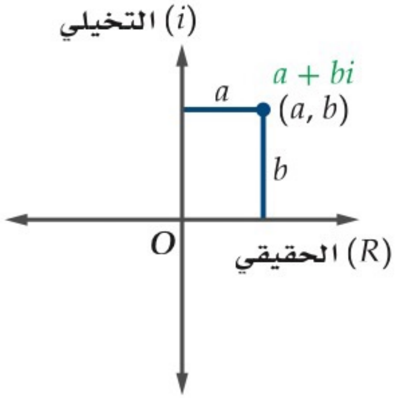
لماذا

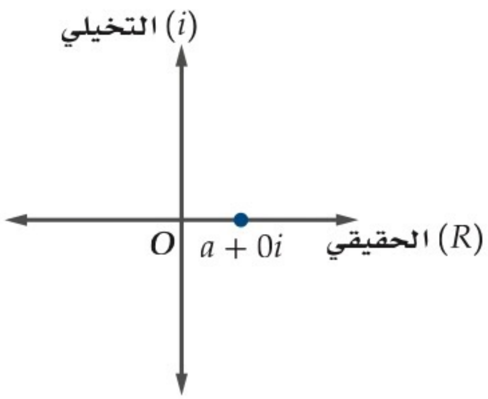
يستعمل مهندسو الكهرباء الأعداد المركبة لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. فالكميات: فرق الجهد V، والمعاوقة Z، وشدة التيار I ترتبط بالعلاقة $V = I \cdot Z$ ، التي تستعمل لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$، حيث j العدد التخيلي (ويستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز شدة التيار I).

الصورة القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$ ، هو a والجزء التخيلي bi . ويمكنك تمثيل العدد المركب على **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال في المستوى الإحداثي، فإننا نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب، ويُعيَّنُ الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمَّى **المحور الحقيقي** ويرمز له بالرمز R ، في حين يُعيَّنُ الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمَّى **المحور التخيلي** ويرمز له بالرمز i .



في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًّا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$ ، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.



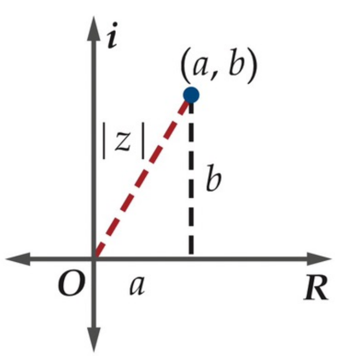


تذكَّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد ، وبالمثل ، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب . وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب. فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.

مفهوم أساسي **القيمة المطلقة لعدد مركب**

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

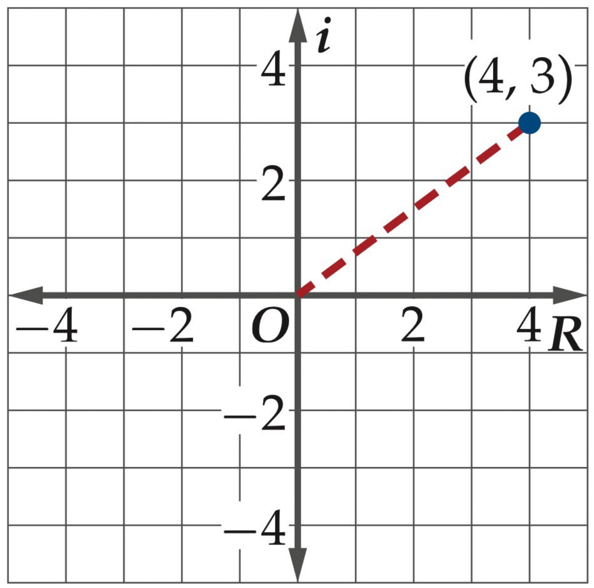
$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



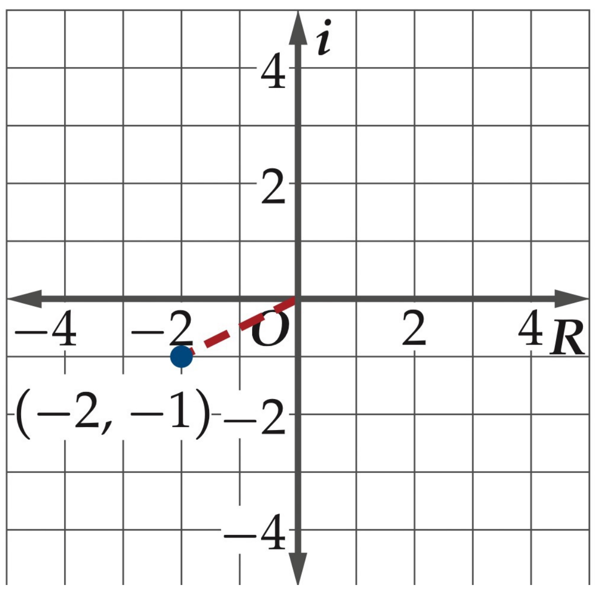
تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

مثال مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركَّب، وأوجد قيمته المطلقة:

a) $z = 4 + 3i$



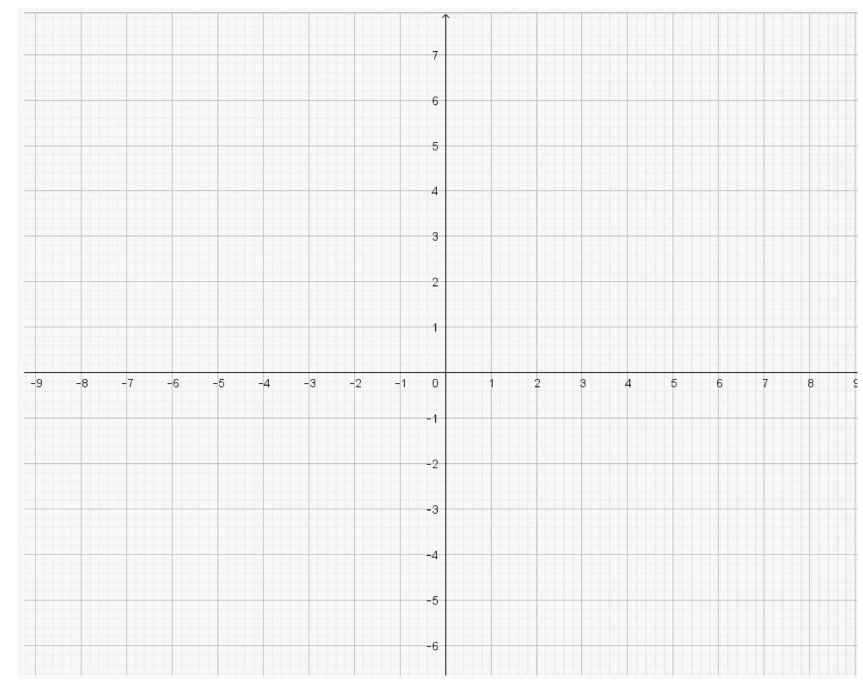
b) $z = -2 - i$



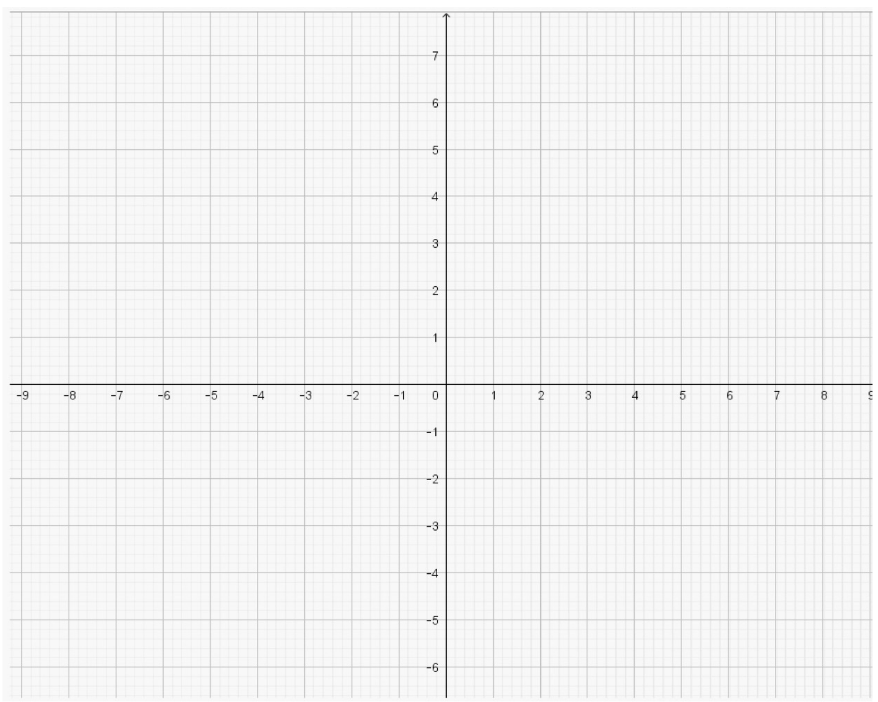
تحقق من فهمك

مَثّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

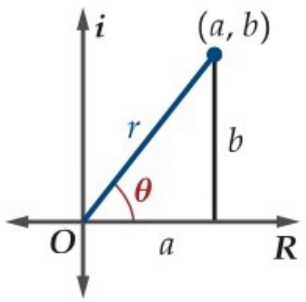
(1A $5 + 2i$



(1B $-3 + 4i$



كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (a, b) التي تمثِّل عددًا مركبًا في المستوى المركب على الصورة القطبية. وتُطبق الدوال المثلثية نفسها التي استُعملت في إيجاد قيم x , y لإيجاد قيم a , b.



$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

$$r\cos\theta = a \qquad r\sin\theta = b \qquad \text{اضرب كل طرف في } r$$

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a، b، يمكننا إيجاد **الصورة القطبية** أو **الصورة المثلثية** لعدد مركب.

$z = a + bi$ العدد المركب الأصلي

$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$ $\quad b = r\sin\theta$، $a = r\cos\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ خُذ العامل المشترك

في حالة العدد المركب ، فإن r تمثِّل القيمة المطلقة أو **المقياس** للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمَّى الزاوية θ **سعة** العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y)، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

مفهوم أساسي: الصورة القطبية لعدد مركب

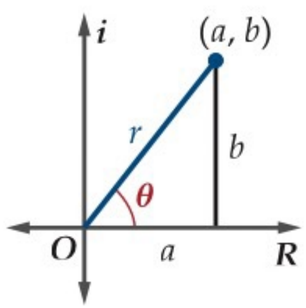
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$، $a = r\cos\theta$، $b = r\sin\theta$،

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



الأعداد المركبة بالصورة القطبية

مثال عبّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

a) $-6 + 8i$

b) $4 + \sqrt{3}i$

تحقق من فهمك

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

2A) $9 + 7i$

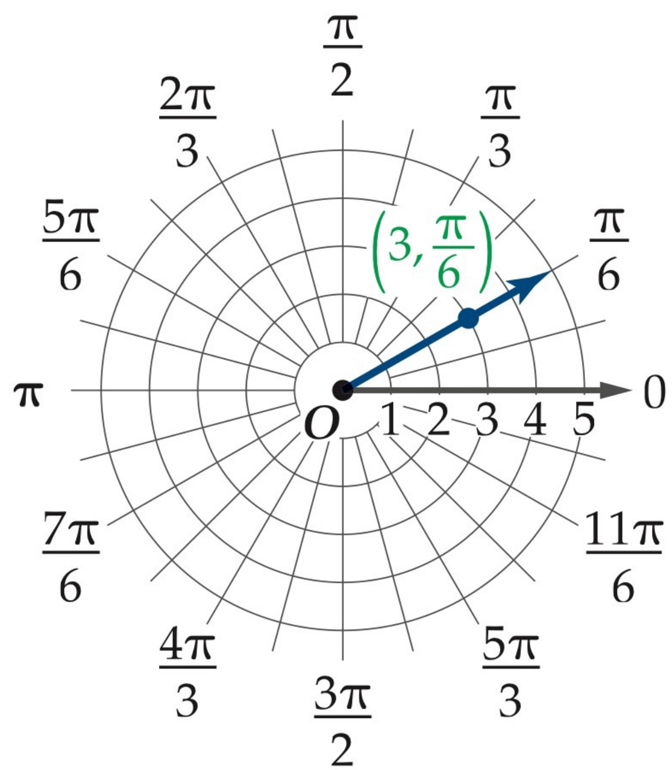
2B) $-2 - 2i$

ويمكنك استعمال الصورة القطبية لعدد مركب؛ لتمثيله في المستوى القطبي باستعمال (r, θ) كإحداثيات قطبية للعدد المركب. كما يمكنك تحويل عدد مركب مكتوب على الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية، وذلك باستعمال قيم r ، وقيم النسب المثلثية للزاوية θ المعطاة.

تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثال

مثِّل العدد $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية.



تحقق من فهمك

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

3A) $5\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

تحقق من فهمك

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

(3B $4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدةً للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اشتقاق صيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية على النحو الآتي:

$$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$ الصورة القطبيّة للعددين المركبين z_1 ، z_2

$$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$ فك الأقواس

$$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$$ جمّع الحدود التخيلية والحقيقية، واستبدل i^2 بـ -1

$$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$ أخرج i عاملًا مشتركًا

$$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$ متطابقتا جيب المجموع ، وجيب تمام المجموع

مفهوم أساسي **ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها**

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة القسمة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

سوف تبرهن صيغة القسمة في التمرين 51

لاحظ أنه عند ضرب عددين مركبين، فإنك تضرب المقياسين وتجمع السعتين، وعند القسمة فإنك تقسم المقياسين وتطرح السعتين.

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

مثال أوجد ناتج $2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

(4A $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

4B) $6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

مثال

كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي $150\,\mathrm{V}$، وكانت معاوقتها Z تساوي Ω ($3\sqrt{5}\,[\cos(-0.46) + j\sin(-0.46)]$)، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

تحقق من فهمك

5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية 120 V ، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير ، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية.

يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر، وقبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النمط الذي اكتشفه ديموافر.

أولًا: أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.

$$z \cdot z = r(\cos \theta + \boldsymbol{i} \sin \theta) \cdot r(\cos \theta + \boldsymbol{i} \sin \theta) \quad \text{اضرب}$$

$$z^2 = r^2[\cos (\theta + \theta) + \boldsymbol{i} \sin (\theta + \theta)] \quad \text{صيغة الضرب}$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + \boldsymbol{i} \sin 2\theta) \quad \text{بسّط}$$

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

$$z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + \boldsymbol{i} \sin 2\theta) \cdot r(\cos \theta + \boldsymbol{i} \sin \theta) \quad \text{اضرب}$$

$$z^3 = r^3[\cos (2\theta + \theta) + \boldsymbol{i} \sin (2\theta + \theta)] \quad \text{صيغة الضرب}$$

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + \boldsymbol{i} \sin 3\theta) \quad \text{بسّط}$$

لاحظ أنه عند حساب القوة النونية للعدد المركب، فإنك تجد القوّة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n .

ويمكن تلخيص ذلك على النحو الآتي:

نظرية

نظرية ديموافر

إذا كان $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:
$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$.

نظرية ديموافر

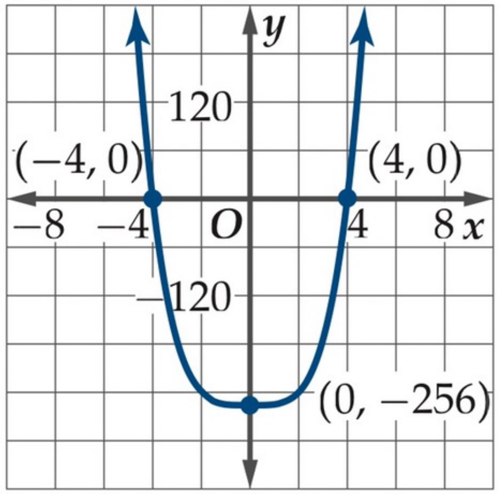
مثال أوجد $\left(4 + 4\sqrt{3}i\right)^6$ بالصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

تحقق من فهمك

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية :

6A) $(1+\sqrt{3}i)^4$

6B) $(2\sqrt{3}-2i)^8$



يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية هما $4 , -4$. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4 , -4$، بينما في مجموعة الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.

درست سابقًا نتيجة النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة؛ لذا يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب على الصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4, -4, 4\boldsymbol{i}, -4\boldsymbol{i}$.

وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلفٌ لأي عدد مركب لا يساوي الصفر حيث $n \geq 2$ ، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور رباعية...، وهكذا.

ولإيجاد جميع جذور عدد مركب يمكن أن تستعمل نظرية ديموافر للوصول إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي **الجذور المختلفة**

لأي عدد صحيح $n \geq 2$ ، فإن للعدد المركب $r\,(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k = n - 1$ ، وعندما يساوي k العدد n، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالتكرار، كما يظهر في المعادلة:

$$\frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi \qquad \text{وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما } k = 0$$

جذور العدد المركب

مثال

أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4-4i$.

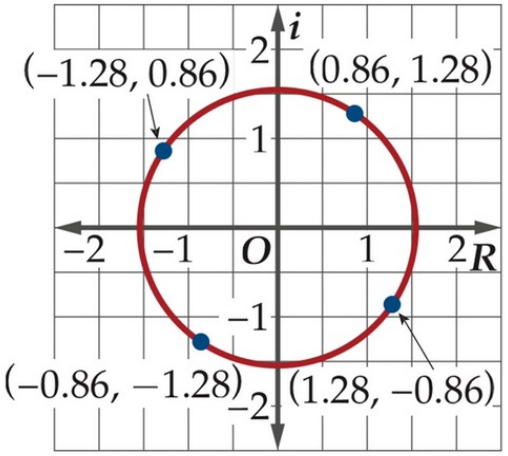
تحقق من فهمك

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2\boldsymbol{i}$

تحقق من فهمك

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8

لاحظ أن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال **7** تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته ($\sqrt[3]{32} \approx 1.54$)، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.



تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة عن تمثيل الجذور في المستوى المركب؛ لذا فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.

الجذور النونية للعدد واحد

مثال أوجد الجذور الثَّمانيَّة للعدد واحد.

تحقق من فهمك

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

تحقق من فهمك

8B) أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

تدرب عبِّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

8) $4 + 4i$

تدرب

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 3)

14) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

تدرب

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (المثالان 5 , 4)

18) $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

تدرب أوجد الناتج لكل مما يأتي بالصورة القطبية، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية: (مثال 6)

29) $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$

قيمة المقدار $[2(\cos 22.5° + i \sin 22.5°)]^4$ تساوي ..

Ⓐ -16

Ⓑ $-16i$

Ⓒ 16

Ⓓ $16i$