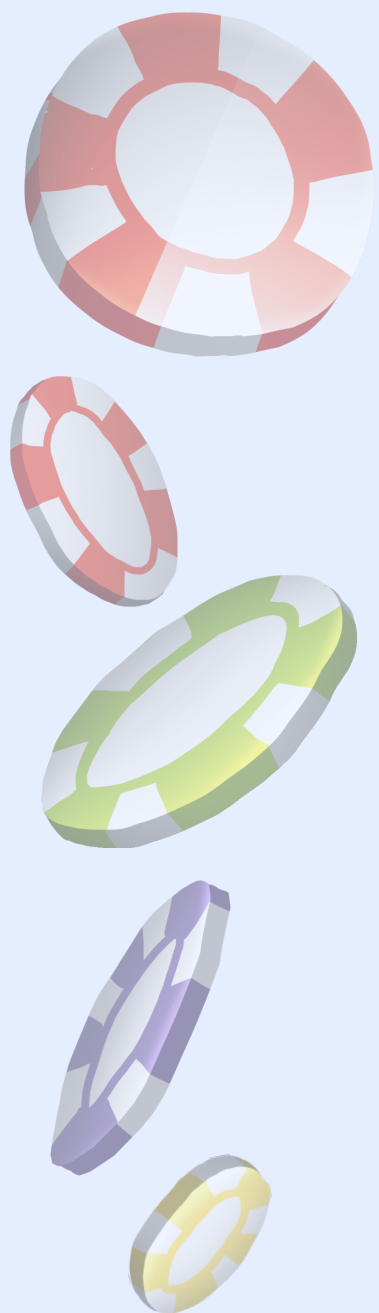


الاحتمال باستعمال التبديل و التوافق



المضردات :

المضروب

factorial

التباديل

permutations

التباديل الدائرية

circular permutation

التوافيق

combinations

فيما سبق :

درست استعمال مبدأ العد
الأساسي. (مهارة سابقة)

والآن :

- أستعمل التباديل في
حساب الاحتمال.
- أستعمل التوافيق في
حساب الاحتمال .



قدرات

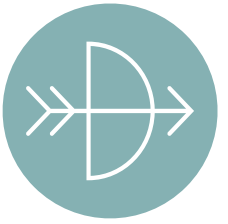
ثلاثة أخوة يحفرون حفرة، فإذا حضر الأول
النصف والثاني الربع والثالث ١١م، فكم مترا
يبلغ عمق الحفرة ؟

أ / ٤٠ ب / ٤٤ ج / ٤٥ د / ٥٥



وقف يوسف وعليّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم.
وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليمين ، و 3 خيارات لمن
يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد
للمكان الأخير.





الاحتمال باستعمال التباديل التبديل تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهمًا. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد، يوسف. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي يوجد $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ترتيبًا ممكنًا لهؤلاء الأصدقاء. يمكن كتابة العبارة $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4.

**مفهوم أساسي**

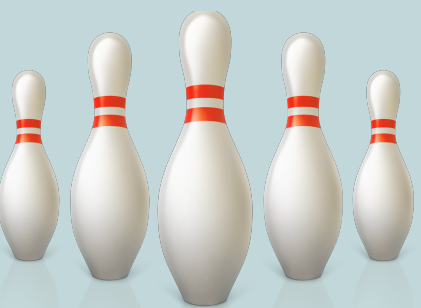
المضروب

أضف إلى مطوبتك

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز:
$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$.



قانون التوافيق

بدون تكرار

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مع التكرار

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

قانون التباديل

بدون تكرار

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

مع التكرار

$$n^r$$

@ahmadalenezi

$$c_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{1}{r!} \left(\frac{n!}{(n-r)!} \right) = \frac{p_r^n}{r!}$$

مسفر المقري

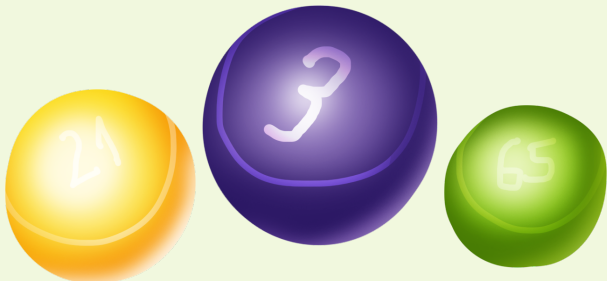




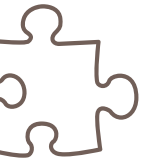
العشوائية

عندما يتم اختيار
النواتج عشوائياً
تتساوى فرص
وقوعها، ويمكن حساب
احتمالاتها باستعمال
التباديل والتوافيق.

رياضة: نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. إذا كان عدد أعضاء الفريق 20، ويرتدي كلٌّ منهم قميصاً مرقماً من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

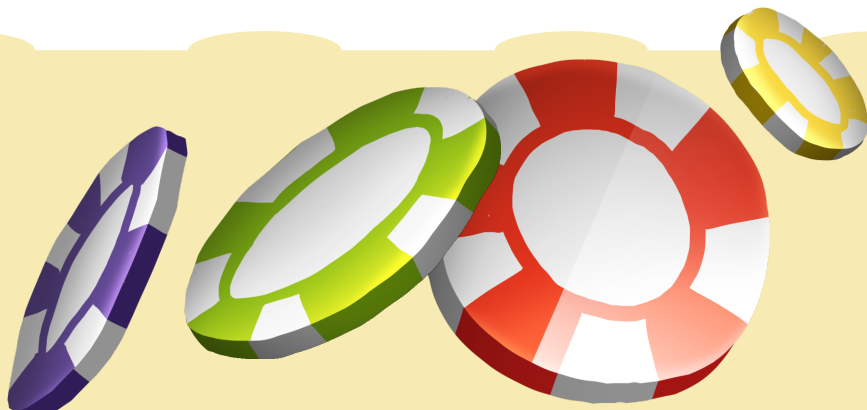


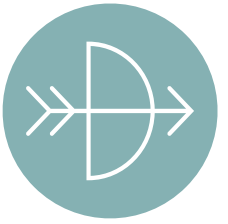
تحقق من فهمك



1 تصوير: ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة؟
فراس في أقصى يمينها؟

وزارة
of Education
1443





ارجع إلى فقرة "لماذا؟"، وافترض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يتم اختيار 4 أشخاص فقط عشوائياً ليظهروا في الصورة. وباستعمال مبدأ العد الأساسي فإن عدد تباديل مجموعة من 6 أصدقاء مأخوذة 4 في كل مرة هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360.

وهناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء، إذا اختير 4 منهم في كل مرة ويرمز إليها بالرمز ${}_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروب.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:

أضف إلى
مطوبتك

التباديل

مفهوم أساسي

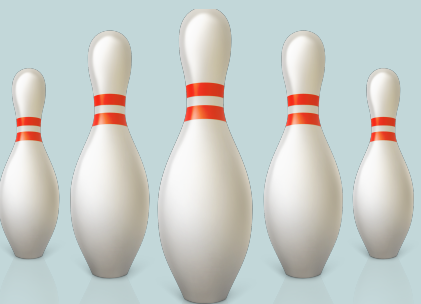
بالرموز:

يرمز إلى عدد **تباديل** n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nP_r$ حيث

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

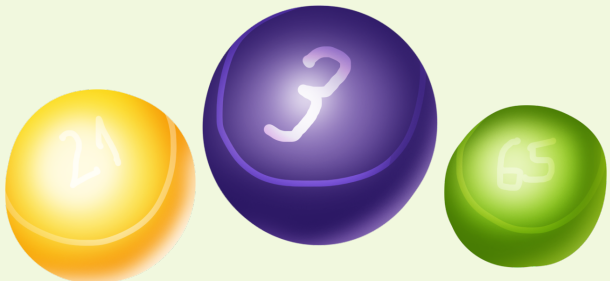
مثال:

عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$




مجلس الإدارة: يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، فما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسًا، ونائبًا للرئيس، وأمينًا للسّر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيًا؟

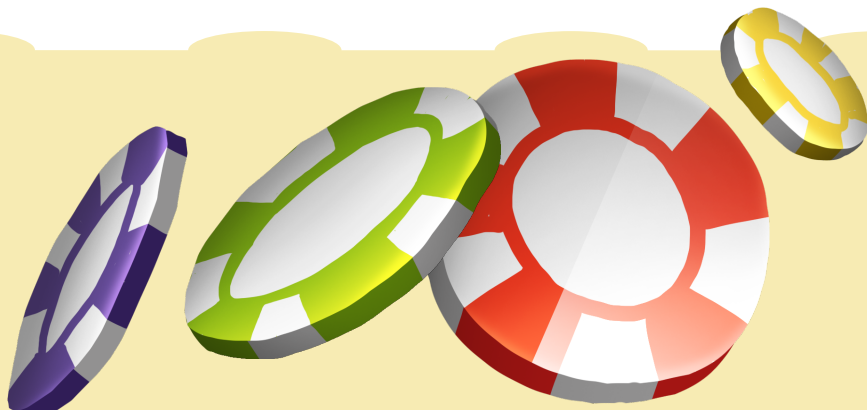


تحقق من فهمك



(2) **بطاقات جامعية:** تستعمل الأرقام 1-9 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

(A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟

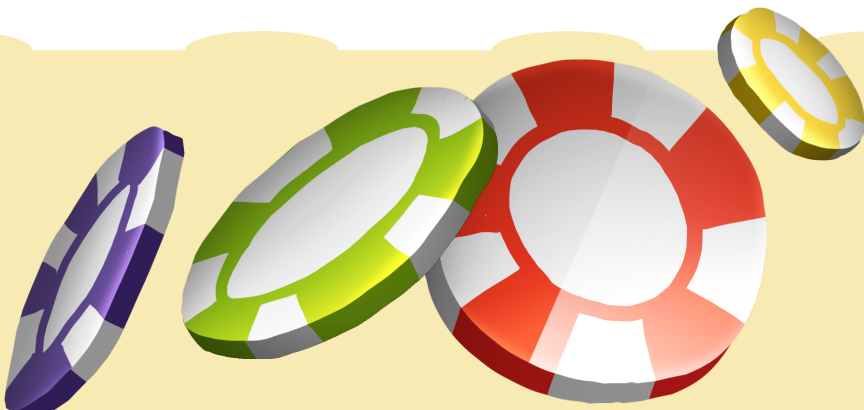


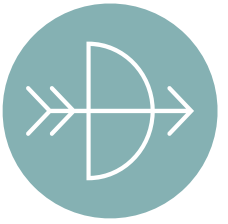
تحقق من فهمك



(2) **بطاقات جامعية:** تستعمل الأرقام 1–9 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

(B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائيًا، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976, 67953124؟





تتكرر في بعض الأحيان بعض العناصر، ولإيجاد عدد التباديل المختلفة في هذه الحالة نستعمل الصيغة الآتية:

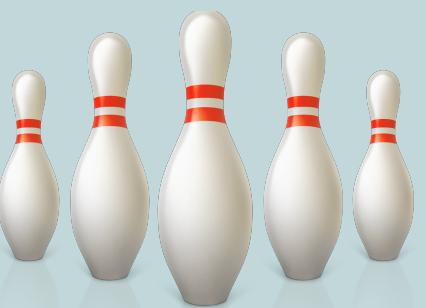
أضف إلى
مطويتك

مفهوم أساسي

التباديل مع التكرار

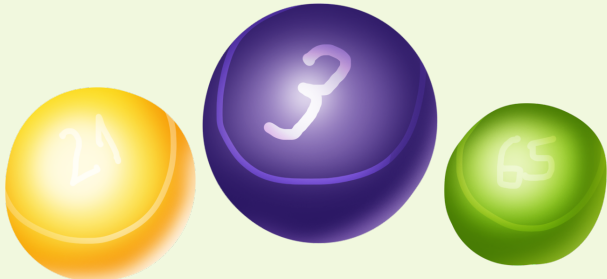
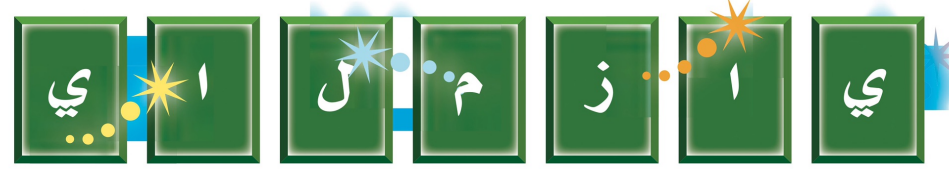
عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا ...، فإنه يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$





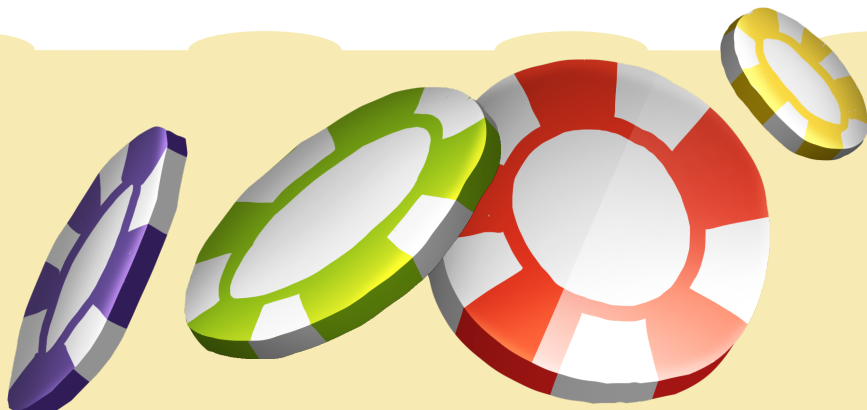
برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفاً مبعثرة، ويطلب إليه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت بديلاً لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟



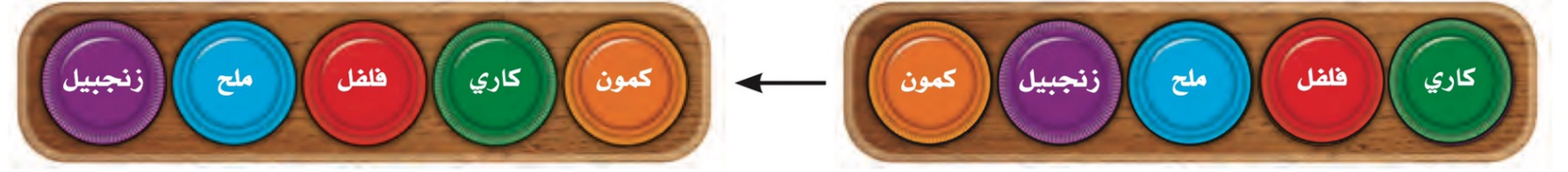
تحقق من فهمك



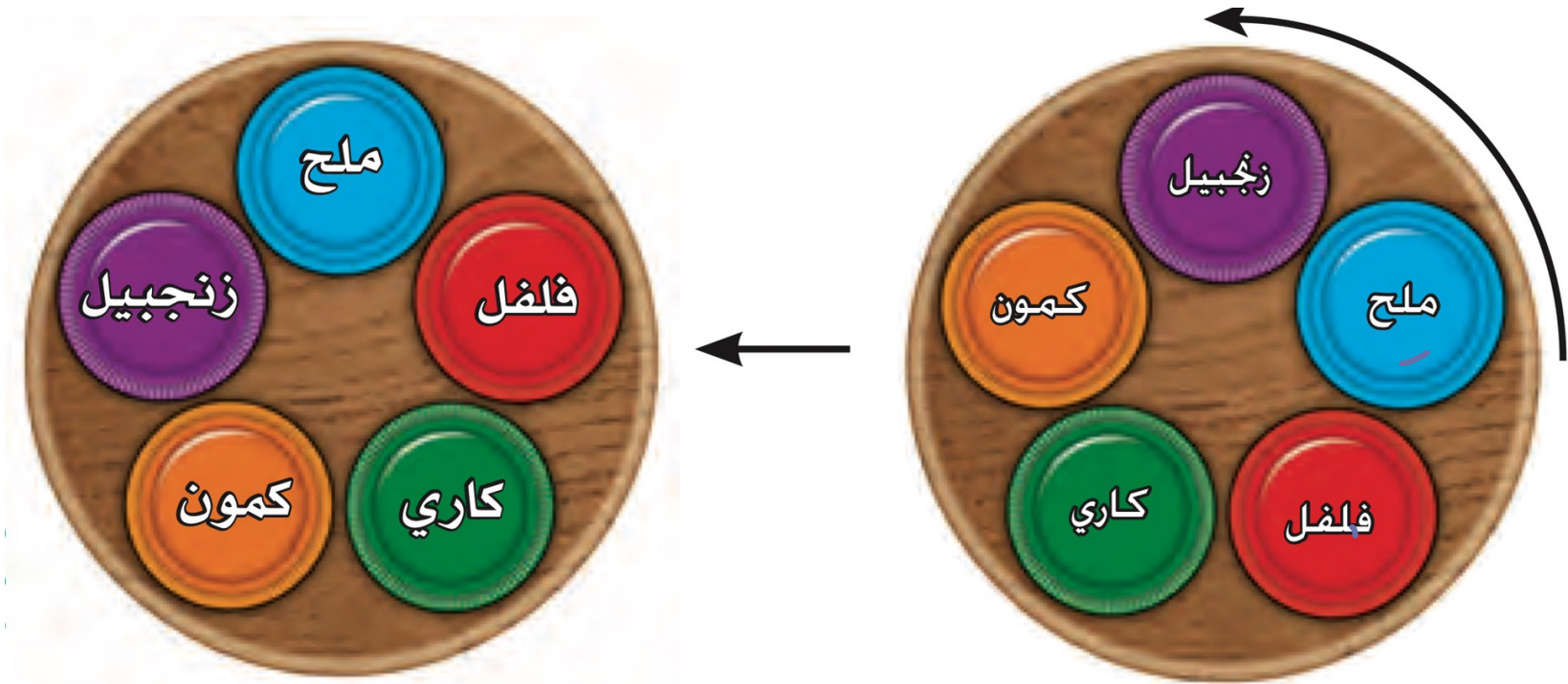
(3) **أعداد:** تم تكوين عدد مكون من 6 أرقام عشوائيًا باستعمال الأرقام 1, 5, 2, 1, 5, 3، ما احتمال أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا؟

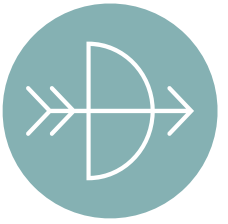


ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليسار (مثلًا)، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الكمون أولًا من اليمين بدلًا من الكاري؛ لذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي 5!.



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى الترتيب الممكنة **تباديل دائرية**، فإذا وضعت عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة عكس اتجاه عقارب الساعة (مثلًا) موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.





لذا فإن؛ تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي عندما تكون العُلب على خط مستقيم.

وزارة التعليم
- 1443

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5 - 1)!$$

أضف إلى

مطويتك

التباديل الدائرية

مفهوم أساسي

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n - 1)!$$

إذا رُتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة (وهي نقطة أو موقع يحدّد مسبقاً في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى أن الترتيبات ستُعامل خطأً وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

إرشادات للدراسة

التباديل الدائرية

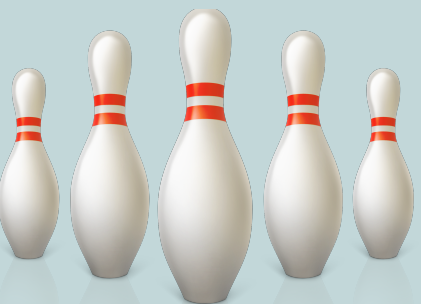
عدد التباديل الدائرية

لـ n من العناصر

يساوي عدد التباديل

الخطية لها مقسوماً

على عددها.



النقطة المرجعية

قبل بدء إيجاد
الاحتمال المطلوب،
حدّد إذا كان ترتيب
العناصر يتم وفق نقطة
مرجعية ثابتة أم لا.

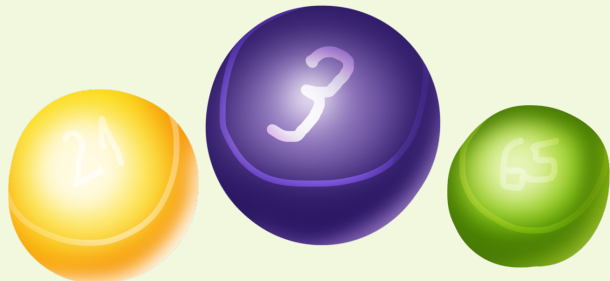
الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.

مثال



(a) **زينة:** إذا رُتبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائياً،
فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟



النقطة المرجعية

قبل بدء إيجاد
الاحتمال المطلوب،
حدّد إذا كان ترتيب
العناصر يتم وفق نقطة
مرجعية ثابتة أم لا.

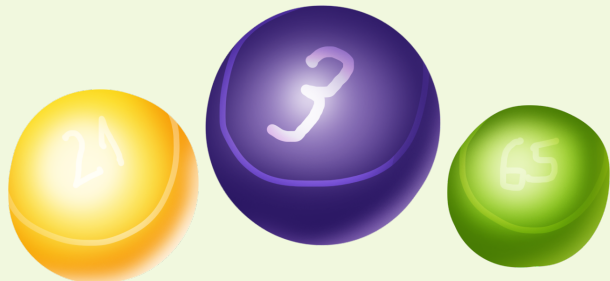
الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.

مثال



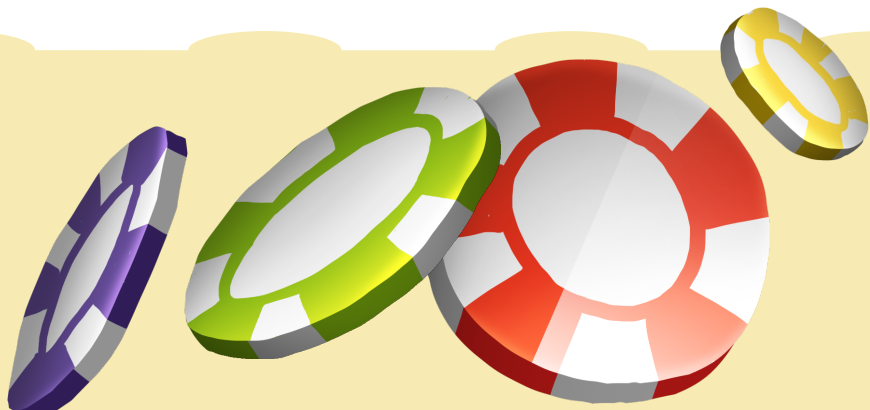
(b) **طعام:** جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضّدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟



تحقق من فهمك



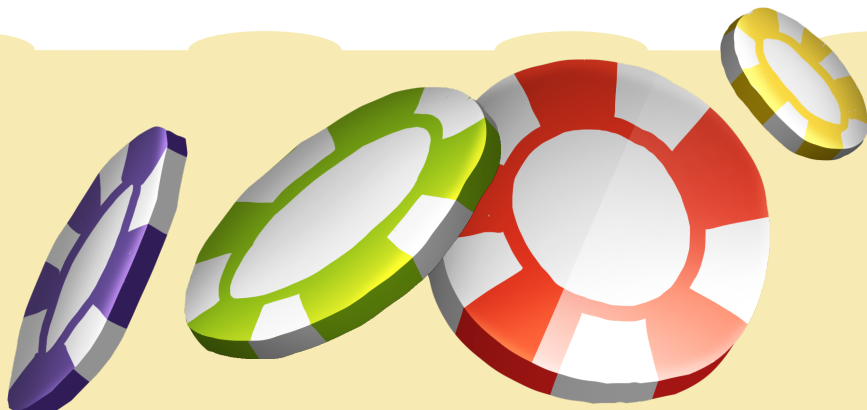
(4A) بطاقات: إذا رتبت 5 بطاقات مُسجل عليها الأسماء: (حسن، محمد، أحمد، سالم، سعود) على منضدة دائرية عشوائيًا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

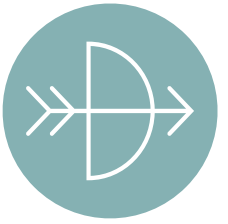


تحقق من فهمك



(4B) كرة قدم: تجمّع فريق كرة قدم مكوّن من 11 لاعبًا على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة، إذا وقف حكم المباراة تمامًا خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضح تبريرك.





الاحتمال باستعمال التوافيق التوافيق: هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم. افترض أنك تحتاج إلى اختيار موظفين من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظفين غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الموظفين.

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

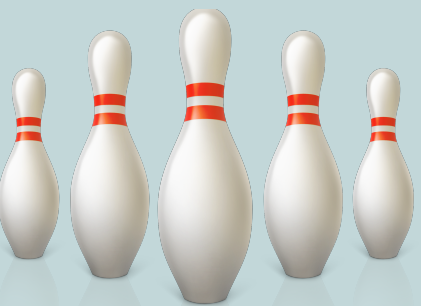
التوافيق

بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nC_r$ ، حيث ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{6 \cdot 5!} = 56$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443



التباديل والتوافيق

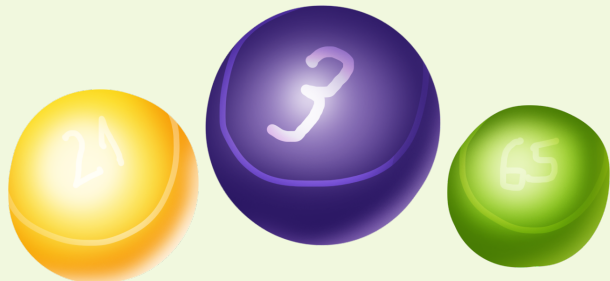
استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهماً، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهماً.

الاحتمال والتوافيق

مثال

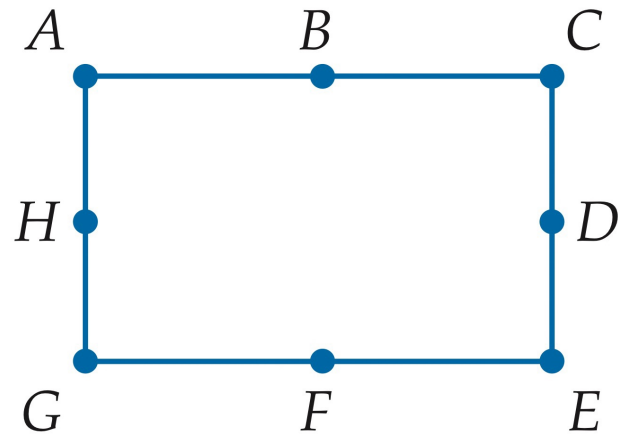


كرة طائرة: يريد مدرب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟



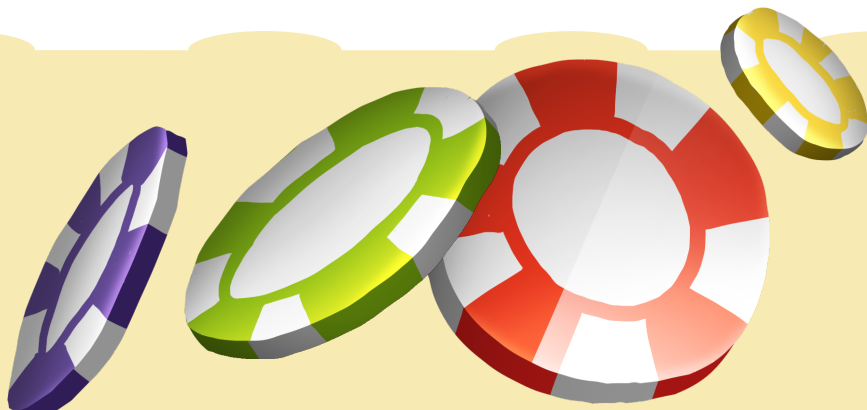
التباديل والتوافيق

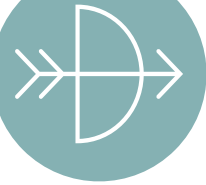
استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهماً، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهماً.



تحقق من فهمك

(5) **هندسة:** إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائياً من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟





الاحتمال باستخدام التباديل والتوافيق

طريقة إيجاد عدد النواتج (فضاء العينة) ومن

اختيار مجموعة r من n

توافيق

$$nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

لا يوجد شرط
والترتيب غير مهم

١/ اختيار شخصين

من ١٥ أشخاص

$$10C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

وإذا ذكر الترتيب
طارق أو لأم

سليم

نستخدم التباديل

$$10P_2 = 10 \times 9 = 90$$

تباديل

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

يوجد شرط
والترتيب مهم

١ ٢ ٣
٢ ١ ٣

إذا بدلنا الرقمين
يتغير العدد

١/ تكوين كلمة من ثلاثة

أحرف من كلمة المسجد

$$n = 6 \quad r = 3$$

$$6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

تباديل دائري

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا وجدت نقطة مرجعية نستخدم
تباديل خطي

١/ وقوف اللاعبين بشكل

دائري خلف الحكم

الحكم نقطة مرجعية

تباديل خطي

٢/ ترتيب العينات

بشكل دائري

لا توجد نقطة مرجعية

تباديل دائري

تباديل بتكرار

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_n!}$$

إذا كان بدون تكرار نستخدم
تباديل خطي

١/ تكوين كلمة

من حروف

$$\frac{7!}{(2!)(3!)}$$

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

المضروب التباديل الخطي

$$n! = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

١/ تكوين كلمة

من حروف

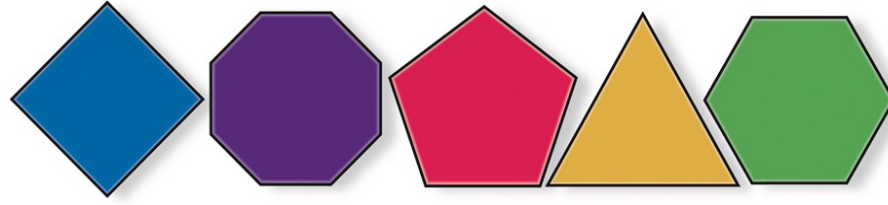
$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$3! = 6$$



(1) هندسة: إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلث هو الأول والمربع هو الثاني؟





(2) **معرض علمي:** تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 40 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟

(3) أعداد: يتكون عدد من الأرقام 1, 3, 3, 3, 6, 6, 5. ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133؟



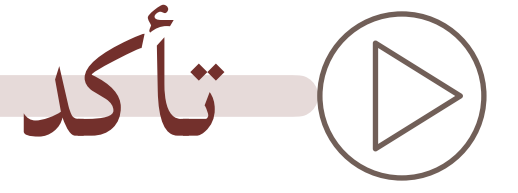
(4) كيمياء: في معمل الكيمياء طُلب إليك اختبار ست عينات رُتبت عشوائيًا على منضدة دائرية.



(a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟

(b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟

(5) **مسابقات:** اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبدالعزیز وخالـ وفوزي؟



تدريب على اختبار

(21) احتمال: يقف رجلان وولدان في صف واحد. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي؟

- A $\frac{1}{24}$ B $\frac{1}{12}$
C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{2}$

(22) إجابة قصيرة: إذا اخترت تبديلاً للأحرف المبينة أدناه عشوائياً، فما احتمال أن تتكون كلمة "فسيفساء"؟

ف س ع س ف ي س ا

(23) احتمال: ألقى مكعب مرقم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي 9 مرات. إذا ألقى المكعب نفسه للمرة العاشرة، فما الاحتمال النظري لظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟

- A 1 B $\frac{9}{10}$
C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{10}$



تخصيلي

إذا تم اختيار تبديل عشوائي للأحرف «ا، م، ل، م، ا، د»، فما احتمال أن تكون كلمة «الدمام»؟

① $\frac{1}{180}$

② $\frac{1}{720}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{2}{3}$

تحصيلي

أربعة أشخاص جالسين حول طاولة دائرية، كم طريقة يمكن التبديل بينهم؟

4 (A)

6 (B)

24 (C)

120 (D)

تحصيلي

يراد اختيار طالبين من بين 20 طالبًا، ما احتمال أن يكون الطالبان هما عمر ومصعب؟

Ⓐ $\frac{2}{190}$

Ⓑ $\frac{1}{10}$

Ⓒ $\frac{1}{380}$

Ⓓ $\frac{1}{190}$

تخصيلي

إذا كان $nP_2 = 56$ فإن قيمة n^2 تساوي ..

8 (A)

16 (B)

49 (C)

64 (D)