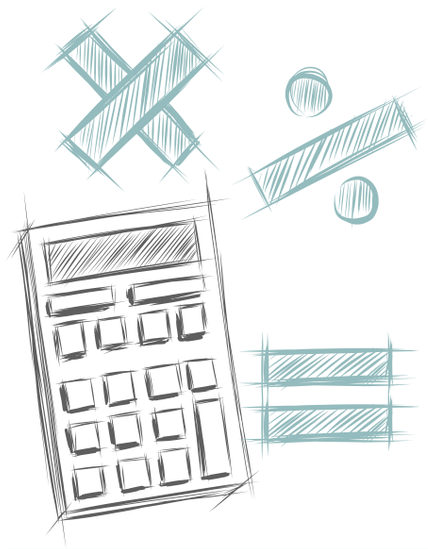
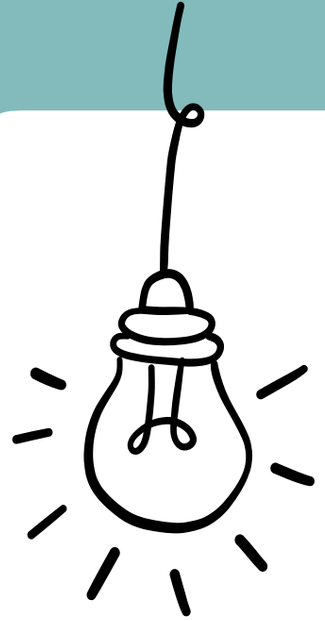
احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة





قدرات

إذا جمعت ٣ أعداد فردية متتالية فإنها تقبل القسمة على

أ/ ٢ ب/ ٣ ج/ ٥ د/ ٧

فيما سبق:

درست حساب الاحتمالات البسيطة. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.
- أجد احتمال حادثة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.

المفردات:

الحادثة المركبة
compound event

الحوادث المستقلة
independent events

الحوادث غير المستقلة
dependent events

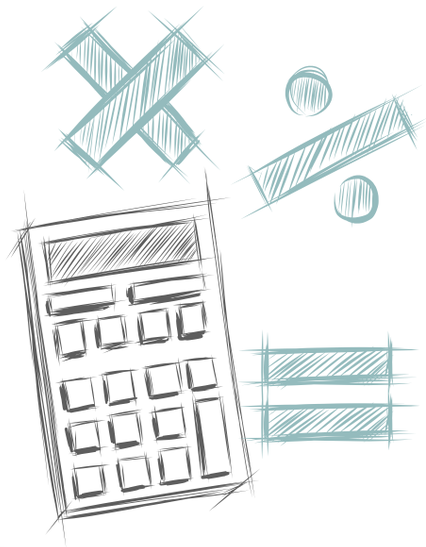
الاحتمال المشروط
conditional probability

شجرة الاحتمال
probability tree

الحادثة المشروطة
conditional event

لماذا

يسحب معلم الكيمياء عشوائيًّا بطاقات من صندوق فيه أسماء طلاب صفِّه البالغ عددهم 18 طالبًا، ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.



الحوادث المركبة

مستقلة - غير مستقلة

$P = (A \cap B)$

مستقلة
(السحب بارجاع)

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

غير مستقلة
(السحب بدون ارجاع)

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A/B)$

المتممة
(احتمال عدم وقوع حادثة)

$P(\acute{A}) = 1 - P(A)$

متنافية - غير متنافية

$P = (A \cup B)$

متنافية
(لا يوجد بينهما نواتج مشتركة)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

غير متنافية
(يوجد بينهما نواتج مشتركة)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة: تتكون **الحادثة المركبة** من حادثتين بسيطتين أو أكثر. وفي فقرة "لماذا؟" أعلاه، نجد أن اختيار سعود وفيصل لتقديم عرضيهما أولًا يُمثل حادثة مركبة؛ لأنها تتكون من حادثة اختيار سعود وحادثة اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الحوادث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.
- تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقةٍ ما احتمال حدوث B.

افترض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث غير مستقلة.

مثال

تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.

b) في فقرة "لماذا ؟" أعلاه، اختير اسم أحد الطلبة عشوائيًّا دون إرجاع، ثم اختير اسم طالب آخر.

c) سحب كرة واحدة عشوائيّا من كل من صندوقين مختلفين.

إرشادات للدراسة

الحادثة البسيطة

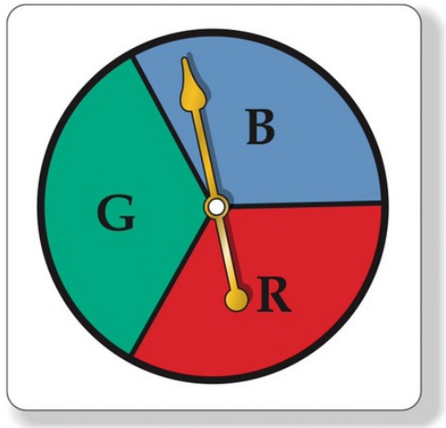
هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما. فمثلاً عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، فإنّ الحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلاً هي حادثة بسيطة.

تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سحبت بطاقة ثانية.

1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا.



إذا أُلقيت قطعة نقد وأُدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العيِّنة لهذه التجربة هو: {(L, B), (L, R), (L, G), (T, B), (T, R), (T, G)}.

باستعمال فضاء العيِّنة، فإن احتمال الحادثة المركبة؛ ظهور الشعار على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي: $P(L \cap G) = \frac{1}{6}$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحادثتين البسيطتين كما يأتي:

$$P(\mathbf{L}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad P(\mathbf{G}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \qquad P(\mathbf{L} \cap \mathbf{G}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{1}{6}$$

وهذا المثال يوضَح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال حادثتين مستقلتين

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالَي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A وB مستقلتين فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

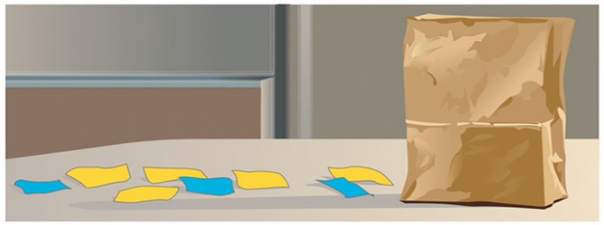
يمكن تعميم هذا القانون على أيِّ عدد من الحوادث المستقلة

قراءة الرياضيات

$(\cap)$ يدل هذا الرمز على تقاطع الحادثتين (وقوع الحادثتين معًا)، ويشير إلى ضرب الاحتمالات. وتقرأ العبارة $P(A \cap B)$: احتمال وقوع A ووقوع B معًا.

مثال

احتمالات الحوادث المستقلة



وسائل النقل: يرغب خالد وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في سيارة تركي، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في سيارة سعود.

افترض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة ، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

تحقق من فهمك

2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقّم مرة واحدة. فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6 ؟

2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال حادثتين غير مستقلتين

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولًا، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**، ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات. وتُسمى **شجرة الاحتمال**.

احتمالات الحوادث غير المستقلة

مثال

تنبيه

إشارة الاحتمال المشروط

يجب ألّا يفسر الرمز " | " في $P(B|A)$ على أنه رمز القسمة.

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قصاصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قصاصة، فما احتمال أن يسحب كلٌّ من الصديقين قصاصة صفراء؟

تحقق من فهمك

3) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 24 بطاقة، منها 6 بطاقات زرقاء مرقّمة من 1 إلى 6 وبالمثل 6 بطاقات حمراء و 6 صفراء و6 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟

إرشادات للدراسة

قيم الاحتمال

- لأيّ حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \leq P(X) \leq 1$.
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1

الاحتمال المشروط: علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين، يمكنك إيجاد احتمال وقوع **حادثة مشروطة**، وذلك بإعطاء معلومات إضافية عن وقوع حادثة أخرى، وذلك باختزال فضاء العينة، فمثلًا إذا رُمي مكعب مرقّم مرة واحدة وعُلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5؟

هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه المكعب؛ لذا سوف يختزل فضاء العيِّنة من {1, 2, 3, 4, 5, 6} إلى {1, 3, 5}، وعليه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي:

$P(5 \mid \text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$.

قراءة الرياضيات

الاحتمال المشروط

$P(5 \mid A)$ تقرأ احتمال أن يكون العدد الناتج 5 إذا وقعت الحادثة A.

مثال

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 8 عشوائيًّا حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.
- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.

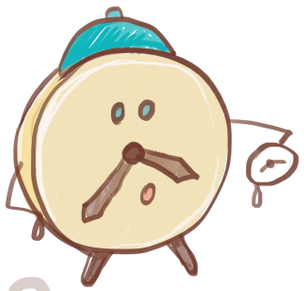
إذا كانت ليلى من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{1}{2}$

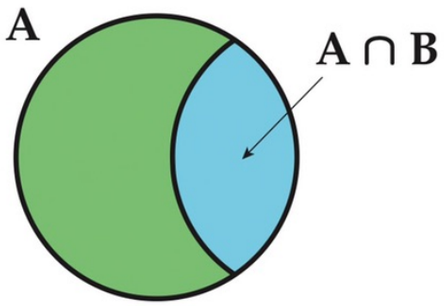
تحقق من فهمك

4) عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟

A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{1}{2}$



بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العيِّنة، فإنه يمكن تبسيط شكل ڤن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين النواتج المشتركة في A و B وهذا يعني أن $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$



مفهوم أساسي

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لِـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

حيث: $P(A) \neq 0$.

أضف إلى مطويتك

إرشادات للدراسة

التقاطع

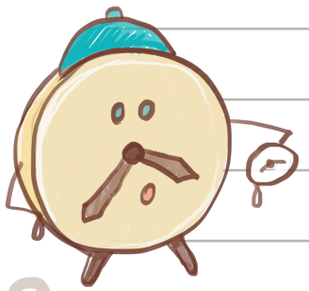
تقاطع مجموعتين هو مجموعة كل العناصر المشتركة التي تنتمي إلى المجموعة الأولى وإلى المجموعة الثانية في الوقت نفسه ويرمز لها بالرمز ∩ .

تأكد

حدّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1, 2) مستقلتين أم غير مستقلتين، ووضّح إجابتك:

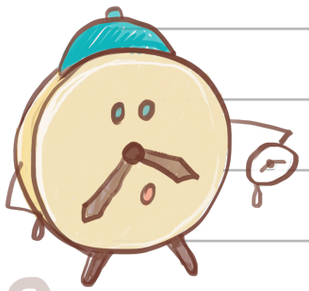
1) وصل فريق كرة القدم في مدرسة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في المباراة النهائية للبطولة.

2) نجاح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد ، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس.



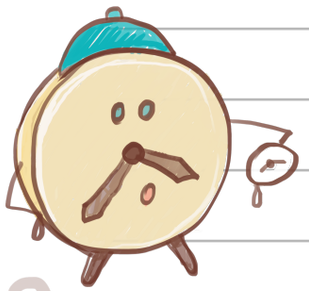
تأكد

3) **بطاقات:** يحتوي صندوق على 20 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية لكلٍّ منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق. سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من الصندوق، ثم أُعِيدت إليه، وبعد ذلك سُحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقة حمراء في المرتين؟



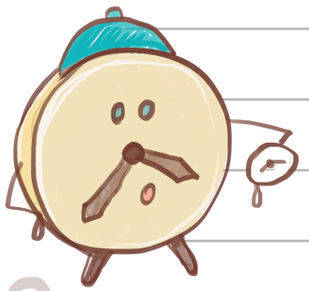
تأكد

4) **أوراق نقدية :** في جيب عبد السلام 3 أوراق نقدية من فئة 5 ريالات، و7 أوراق من فئة 10 ريالات، ما احتمال أن يسحب عبد السلام عشوائيًّا ورقتين على التوالي من فئة 5 ريالات على فرض أن فرص حصول الحوادث متساوية.

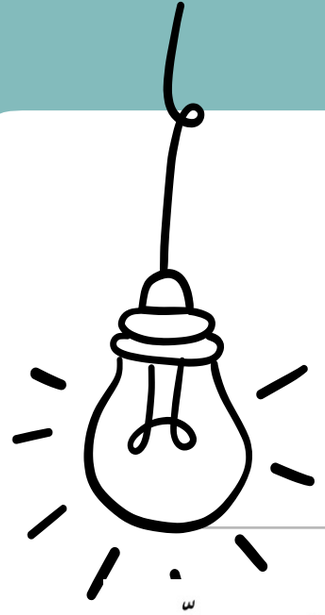


تأكد

5) **أصدقاء:** يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 10 عشوائيًّا، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال أن يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟



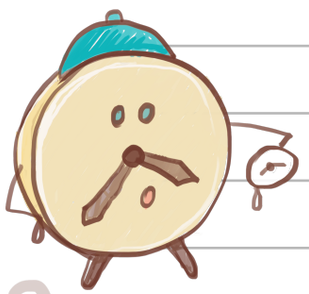
تدرب

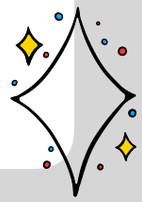


حدّد إذا كانت الحادثتان في الأسئلة (9–6) مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال:

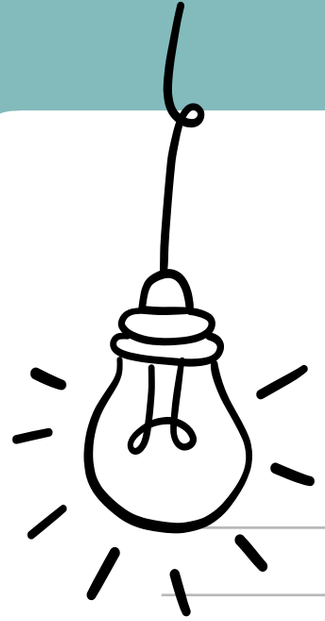
6) رمي مكعب مرقّم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسَّم إلى قطاعات متطابقة، ومرقّم من 1 إلى 5؛ للحصول على عدد فردي.

7) اختيار طالبين حصلا على الدرجة الكاملة في اختبار للرياضيات. واحدًا تلو الآخر من صفٍّ فيه 25 طالبًا، 5 منهم حصلوا على الدرجة الكاملة.



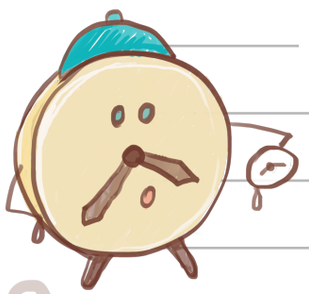


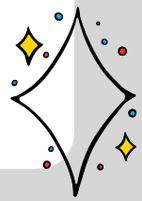
تدرب

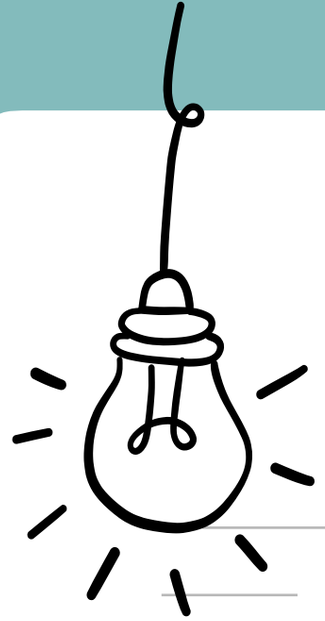


8) تكرار سحب كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائيًّا دون إرجاع ، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و 4 كرات زرقاء.

9) ظهور العدد 5 على الوجهين العُلويين لمكعبين مرقّمين متمايزين أُلقِيا مرة واحدة.

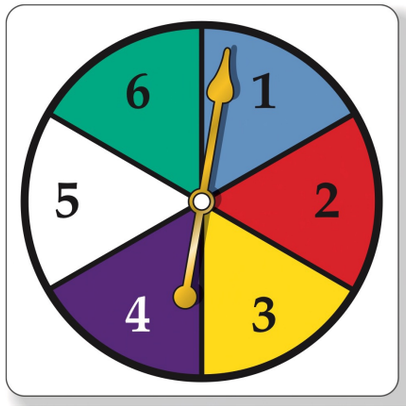


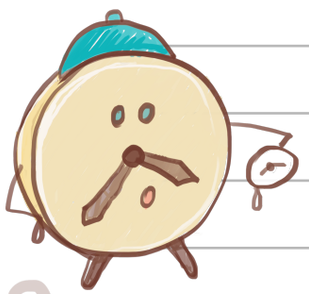




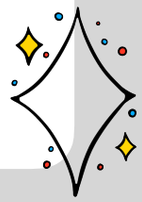
تدرب

10) ألعاب: إذا أُدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وأُلقيت قطعة نقد مرة واحدة.
فما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟

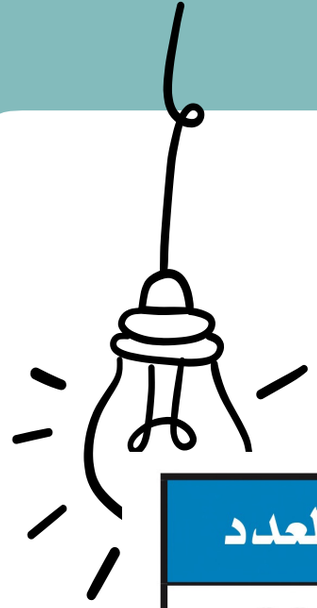




2 + 2 = 5

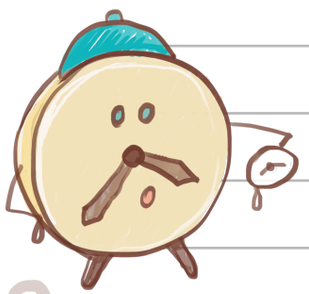


تدرب

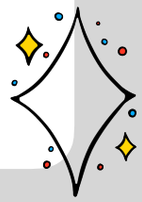


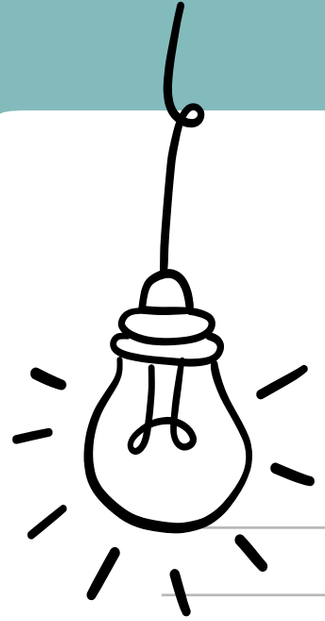
11) **شعارات:** معتمدًا على الجدول المجاور، إذا اختير شعاران عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون كلا الشعارين الأول والثاني أحمر؟

لون الشعار	العدد
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10



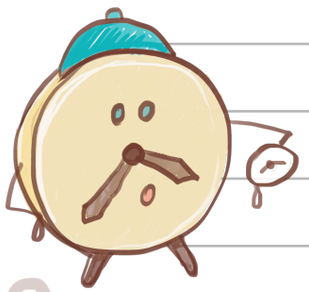
2+2=5

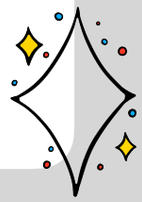


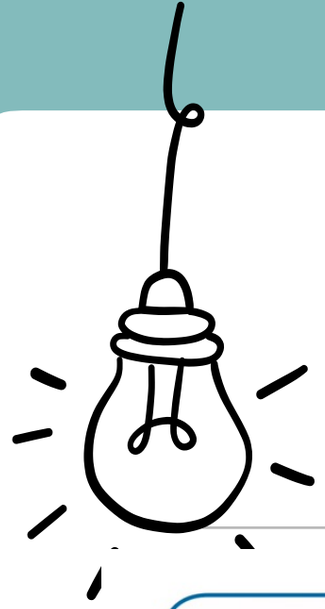


تدرب

15) **تقنيات:** يمتلك 43% من طلاب مدرسة جهازًا نقالًا، و 28% يمتلكون جهازًا نقالًا وجهاز حاسوب. فما احتمال أن يمتلك طالب منهم جهاز حاسوب إذا كان يمتلك جهازًا نقالًا؟







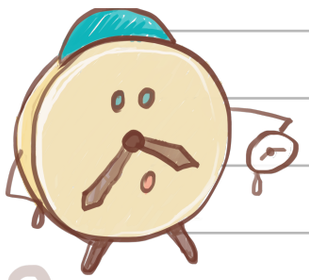
تدرب

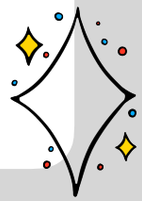
تدريب على اختبار

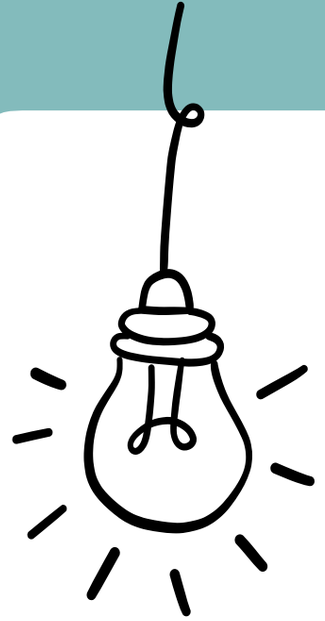
23) احتمال: يمكن أن يلعب بلال عشوائيًّا في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟

A $\frac{1}{18}$ **B** $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{9}$ **D** $\frac{1}{2}$

24) احتمال: يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ عمّار حبتَي حلوى من الكيس دون أن ينظر إليهما. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشرٍ.







تحصيلي

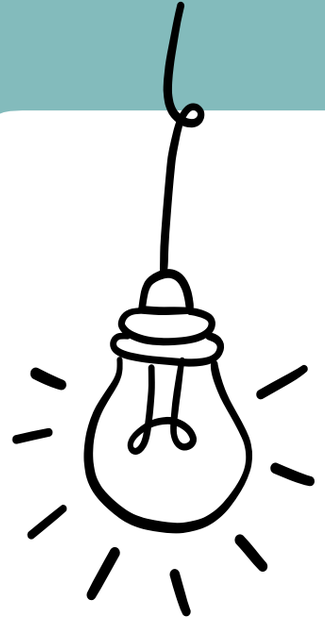
مكعب مرقم من 1 إلى 6 ، رُمي أول تسع مرات وكانت كل الحوادث ظهور عدد زوجي، ما احتمال ظهور عدد فردي في المرة العاشرة؟

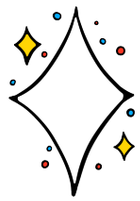
Ⓐ $\frac{1}{9}$

Ⓑ $\frac{1}{18}$

Ⓒ $\frac{1}{2}$

Ⓓ $\frac{1}{3}$





تحصيلي

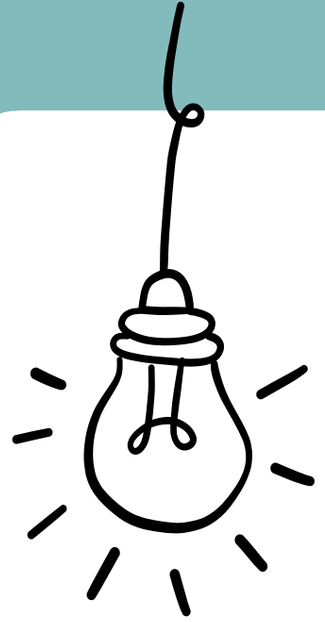
صندوق يحوي 4 كرات صفراء و 5 حمراء، وسُحبت كرتان على التوالي دون إرجاع؛ ما احتمال أن تكون الكرة الثانية صفراء إذا كانت الأولى حمراء؟

Ⓐ $\frac{1}{4}$

Ⓑ $\frac{4}{9}$

Ⓒ $\frac{1}{2}$

Ⓓ $\frac{5}{9}$



تحصيلي

ما احتمال أن تنجب عائلة صبيًا في 3 مرات ولادة متتالية؟

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{8}$