بسم الله الرحمن الرحيم

اليوم : التاريخ :

المادة : رياضيات الحصة :

الموضوع : استعمال خاصية التوزيع
رقم الصفحة ١٠٤

@Hnooood

٧-٢ استعمال خاصية التوزيع

فيما سبق

درست إيجاد (ق .م. أ) لمجموعة من وحيدات الحدّ.

والآن

- أستعمل خاصيّة التوزيع لتحليل كثيرة حدود.
- أحلّ معادلات تربيعيّة على الصورة:

أس^{٢} + ب س = ٠

المفردات

تحليل كثيرة حدود

التحليل بتجميع الحدود

خاصية الضرب الصفري

@Hnooooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

رقم الصفحة: ١٠٤

لماذا ؟

تُحدَّد أجرة متجر حسب مساحته. ويمكن تمثيل مساحة المتجر بالمعادلة م= ٦ , ١ض^{٢} + ٦ض، حيث تمثِّل ض عرض المتجر بالأمتار، ويمكننا استعمال التحليل إلى العوامل وخاصية الضّرب الصفري لإيجاد أبعاد المتجر الممكنة.

استعمال خاصيَة التوزيع في التحليل: استعملت خاصية التوزيع في الفصل السابق لضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود كما في المثال الآتي:

٥ع (٤ع + ٧) = ٥ع (٤ع) + ٥ع (٧)

= ٢٠ع^{٢} + ٣٥ع

ويمكنك الإفادة من ذلك في العمل عكسيًّا للتعبير عن كثيرة الحدود بصورة حاصل ضرب عاملين: وحيدة الحد، وكثيرة الحدود.

٦ , ١ض^{٢} + ٦ ض= ٦ , ١ض (ض) + ٦(ض) = ض (٦ , ١ض + ٦)

كذلك ٥ع (٤ع + ٧) يمثِّل تحليل ثنائية الحدّ ٢٠ع^{٢} + ٣٥ع. ويشتمل **تحليل كثيرة الحدود** تحليلها إلى عواملها الأوليّة.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ١ استعمال خاصيّة التوزيع في التحليل

استعمل خاصيّة التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

أ) ٢٧ص^{٢} + ١٨ص

أوجد (ق .م. أ) لجميع الحدود.

٢٧ص^{٢} = ٣ × ٣ × ٣ × ص × ص — حلّل كل حد.

١٨ص = ٢ × ٣ × ٣ × ص — ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

(ق .م. أ) = ٣ × ٣ × ص = ٩ص

اكتب كل حدّ على صورة حاصل ضرب (ق .م. أ) في باقي العوامل. واستعمل خاصيّة التوزيع لإخراج (ق .م. أ).

٢٧ص^{٢} + ١٨ص = ٩ص(٣ص) + ٩ص(٢) — أعد كتابة كلّ حدّ باستعمال (ق .م. أ).

= ٩ص(٣ص + ٢) — خاصية التوزيع.

ب) −٤أ^{٢}ب − ٨أب^{٢} + ٢أب

−٤أ^{٢}ب = −١ × ٢ × ٢ × أ × أ × ب — حلّل كلّ حدّ.

−٨أب^{٢} = −١ × ٢ × ٢ × ٢ × أ × ب × ب — ضع دائرة حول العوامل المشتركة .

٢أب = ٢ × أ × ب

(ق .م. أ) = ٢ × أ × ب = ٢أب

−٤أ^{٢}ب − ٨أب^{٢} + ٢أب = ٢أب(−٢أ) − ٢أب(٤ب) + ٢أب(١) — أعد كتابة كلّ حدّ باستعمال (ق .م. أ).

= ٢أب(−٢أ − ٤ب + ١) — خاصيّة التوزيع

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

تحقق من فهمك

١أ) ١٥و – ٣ف

١ب) ٧ل^{٢}ن^{٢} + ٢١ل ن^{٢} – ل ن

@Hnooooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تُسمّى الطريقة التي تُستعمل فيها خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود تتكوّن من أربعة حدود أو أكثر **التحليل بتجميع الحدود**؛ لأن الحدود تُجمع بطريقة معينة، ثم يحلِّل كل تجميع، ثم تطبق خاصية التوزيع لإخراج عامل مشترك.

مفهوم أساسي

التحليل بتجميع الحدود

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يمكن تحليل كثيرة الحدود بتجميع الحدود ، إذا توافرت جميع الشروط الآتية:

- تتكوّن كثيرة الحدود من أربعة حدود أو أكثر.
- يوجد للحدود التي يمكن تجميعها معًا عوامل مشتركة.
- يوجد عاملان مشتركان متساويان أو أن أحدهما نظير جمعيّ للآخر.

الرموز: أس + ب س + أص + ب ص = (أس + ب س) + (أص + ب ص)

= س(أ + ب) + ص(أ + ب)

= (س + ص)(أ + ب)

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

مثال ٢ التحليل بتجميع الحدود

حلّل: ٤ ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦

٤ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦	العبارة الأصلية
= (٤ك ر + ٨ ر) + (٣ ك + ٦)	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
= ٤ ر(ك + ٢) + ٣(ك + ٢)	حلّل كل تجميع بإخراج (ق.م.أ)
= (٤ر + ٣) (ك + ٢)	خاصية التوزيع

لاحظ أنّ (ك+ ٢) عامل مشترك لِـ ٤ ر (ك+٢) وَ ٣ (ك+٢).

@Hnoooood

تحقق من فهمك

حلّل كلاً من كثيرات الحدود الآتية :

٢أ) رن + ٥ن – ر – ٥

٢ب) ٣ن ك + ١٥ك – ٤ن – ٢٠

@Hnoooood

من المفيد معرفة متى تكون إحدى ثنائيتي الحد نظيرًا جمعيًّا للأخرى. فمثلاً ٦ – أ = –١ (أ – ٦)

إرشادات للدراسة

تحقق

تحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها في بعض؛ للحصول على العبارة الأصلية.

مثال ٣ التحليل بتجميع الحدود (العوامل نظائر جمعية)

حلّل: ٢م ك – ١٢ م + ٤٢ – ٧ ك

٢م ك – ١٢م + ٤٢ – ٧ ك	العبارة الأصلية
= (٢م ك – ١٢م) + (٤٢ – ٧ ك)	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة.
= ٢م(ك – ٦) + ٧(٦ – ك)	حلّل كلّ تجميع بإخراج (ق. م. أ).
= ٢م(ك – ٦) + ٧[(–١)(ك – ٦)]	٦ – ك = –١ (ك – ٦)
= ٢م(ك – ٦) – ٧(ك – ٦)	خاصيّة التجميع
= (٢م – ٧)(ك – ٦)	خاصيّة التوزيع

@Hnoooood

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية :

أ٣) جـ − ٢جـ د + ٨ د − ٤

ب٣) ٣ف − ٢ف^{٢} − ١٨ف + ٢٧

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكنك حلّ بعض المعادلات بالتحليل .

انظر إلى الجمل الآتية: ٣(٠) = ٠ ٠(٢ − ٢) = ٠ −٣١٢(٠) = ٠ ٠(٠,٢٥) = ٠

لاحظ أن أحد العاملين على الأقل في كلّ حالة يساوي صفرًا. وتبيِّن هذه الأمثلة **خاصيّة الضّرب الصفري**.

مفهوم أساسي

خاصية الضرب الصفري

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفرًا، فيجب أن يكون أحدهما على الأقل صفرًا.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب، إذا كان أ ب = ٠، فإنّ أ = ٠، أو ب = ٠، أو أن كليهما يساوي صفرًا.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

رقم الصفحة: ١٠٦

سبق أن تعلمت أن حلّ المعادلة أو جذرها هو أيّ قيمة للمتغير تجعلها صحيحة.

تنبيه ١

قيمة غير معروفة

قد تجد أنه من الأسهل حلّ معادلة بقسمة كلّ طرف منها على متغير. وبما أن قيمة المتغير غير معروفة، لذا قد تقسم في هذه الحالة على صفر، والقسمة على صفر غير معرّفة.

مثال ٤ **حل المعادلات**

حلّ كلاً من المعادلات الآتية وتحقق من صحة الحل:

أ) (٢د + ٦)(٣د − ١٥) = ٠

(٢د + ٦)(٣د − ١٥) = ٠ — المعادلة الأصلية

٢د + ٦ = ٠ أو ٣د − ١٥ = ٠ — خاصية الضرب الصفري

٢د = −٦ ، ٣د = ١٥ — حلّ كل معادلة

د = −٣ ، د = ٥ — اقسم

الجذران هما −٣ ، ٥

تحقق: عوّض عن د بكلٍّ من −٣، ٥ في المعادلة الأصلية.

(٢د + ٦)(٣د − ١٥) = ٠

[٢(−٣) + ٦][٣(−٣) − ١٥] ≟ ٠

(−٦ + ٦)(−٩ − ١٥) ≟ ٠

(٠)(−٢٤) ≟ ٠

٠ = ٠ ✓

(٢د + ٦)(٣د − ١٥) = ٠

[٢(٥) + ٦][٣(٥) − ١٥] ≟ ٠

(١٠ + ٦)(١٥ − ١٥) ≟ ٠

١٦(٠) ≟ ٠

٠ = ٠ ✓

ب) جـ^{٢} = ٣جـ

جـ^{٢} = ٣جـ — المعادلة الأصلية

جـ^{٢} − ٣جـ = ٠ — اطرح ٣ جـ من كل طرف للحصول على صفر في أحد طرفي المعادلة.

جـ(جـ − ٣) = ٠ — حلّل باستعمال (ق.م.أ) للحصول على الصورة أ ب = ٠

جـ = ٠ أو جـ − ٣ = ٠ — خاصيّة الضرب الصفري

جـ = ٣ — حلّ كلّ معادلة

الجذران هما ٠ ، ٣ — تحقّق بتعويض كل من صفر، ٣ بدلاً من جـ

@Hnoooood

تحقق من فهمك

٤أ) ٣ن(ن + ٢) = ٠

٤ب) ٨ب^{٢} − ٤٠ب = ٠

٤جـ) س^{٢} = −١٠س

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٥ من واقع الحياة

استعمال التحليل

رمي السهم: يمكن تمثيل ارتفاع سهم بالمعادلة ع = −٥ ن^{٢} + ٢٠ ن، حيث (ع) الارتفاع بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني. إذا أهمل ارتفاع رامي السهام، بعد كم ثانية يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه؟

عندما يصل السهم إلى الأرض ع = ٠

ع = −٥ن^{٢} + ٢٠ ن	المعادلة الأصلية
٠ = −٥ن^{٢} + ٢٠ ن	عوّض عن ع بـ ٠
٠ = ٥ ن (− ن + ٤)	حلّل بإخراج (ق .م.أ)
٥ ن = ٠ أو − ن + ٤ = ٠	خاصيّة الضرب الصفري
ن = ٠ أو −ن = −٤	حلّ كلّ معادلة
ن = ٤	اقسم كل حد على −١

يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه بِـ ٤ ثوانٍ.

تحقق من فهمك

٥) **قفز الأرنب:** يمكن تمثيل قفزة الأرنب بالمعادلة ع= ٥ , ٢ن− ٥ن^{٢}؛ حيث تمثل (ع) ارتفاع القفزة بالمتر، و(ن) الزمن بالثواني. أوجد قيمة ن عندما ع= صفرًا.

الربط مع الحياة

يتطلب رمي السهم أو الرمي بالقوس تركيزًا عاليًا ومهارة ودقة في التصويب؛ لضمان إصابة الهدف.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

تأكد

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

١) ٢١ب – ١٥أ

٢) ١٤جـ^{٢} + ٢جـ

٣) ١٢لك^{٢} + ٦ل^{٢}ك + ٢ل^{٢}ك^{٢}

رقم الصفحة: ١٠٧

حلّل كلاً من كثيرات الحدود الآتية:

٤) ن م + ٢ن + ٨م + ١٦

٥) س ص – ٧س + ٧ص – ٤٩

٦) ٣ب جـ – ٢ب – ١٠ + ١٥جـ

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٧) ٣ك(ك + ١٠) = ٠

٨) (٤م + ٢)(٣م − ٩) = ٠

٩) ر^{٢} = ١٤ر

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

١٠) **صواريخ:** أُطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ ثانية. وتمثّل المعادلة $ع = ٤٢ ن - ٥ن^{٢}$ ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

أ) ما ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض؟

ب) حلّ المعادلة $٤٢ ن - ٥ ن^{٢} = ٠$

جـ) كم ثانية يحتاج إليها الصاروخ كي يعود إلى الأرض؟

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

تدرب وحل المسائل

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كلّ من كثيرات الحدود الآتية:

١١) ١٦ن − ٤٠ص

١٢) ٣٠ف + ٥٠س

١٣) ٢ك^{٢} + ٤ك

١٤) ٥ع^{٢} + ١٠ع

١٥) ٤أ^{٢}ب^{٢} + ٢أ^{٢}ب − ١٠أب^{٢}

١٦) ٥جـ^{٢}ف − ١٥جـ^{٢}ف^{٢} + ٥جـ^{٢}ف^{٣}

@Hnooooood

رقم الصفحة: ١٠٨

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

١٧) $أ^{٢} - ٤أ - ٢٤ + ٦أ$

١٨) $هـ ل - ٢هـ + ٥ ل - ١٠$

١٩) $س ص - ٢س - ٢ + ص$

٢٠) $٢٤ن ص - ١٨ن + ٤ص - ٣$

٢١) $٣دن - ٢١د + ٣٥ - ٥ن$

٢٢) $٨ر^{٢} + ١٢ر$

@Hnooood

رقم الصفحة: ١٠٨

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

٢٣) ٢١ن هـ − ٣ن − ٣٥هـ + ٥

٢٤) ل ف + ١٢ل + ٨ف + ٩٦

٢٥) ٥ب ر − ٢٥ب + ٢ر − ١٠

٢٦) ٢ن و − ٨و + ٣ن − ١٢

٢٩) ١٨ر^{٣}ن^{٢} + ١٢ر^{٢}ن^{٢} − ٦ر^{٢}ن

٣٠) ١٦جـ هـ + ٢٤جـ − ٢هـ − ٣

@Hnoooood

رقم الصفحة: ١٠٨

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٣١) ٣ب(٩ب − ٢٧) = ٠

٣٢) ٢ن(٣ن + ٣) = ٠

٣٣) (٨ع + ٤)(٥ع + ١٠) = ٠

٣٤) (٧س + ٣)(٢س − ٦) = ٠

٣٥) $ب^{٢}$ = −٣ب

٣٦) $أ^{٢}$ = ٤أ

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٥ **٣٧) فروسية:** يمكن تمثيل ارتفاع قفزة فرس في سباق الحواجز بالمعادلة ع= −٥ن^{٢} + ٥ن؛ حيث (ن) تمثل الزمن بالثواني.

الربط مع الحياة

حقق فريق الفروسية في المملكة المركز الثاني في بطولة العالم للفروسية للفردي قفز الحواجز عام ٢٠١٠م.

أ) اكتب عبارة تمثّل الارتفاع على صورة حاصل ضرب عوامل.

ب) أوجد قيم ن عندما ع =٠؟

جـ) ما الارتفاع الذي يكون عليه الفارس بعد ٣ ثوانٍ من بداية القفز؟ وهل هذا ممكن؟ فسِّر إجابتك.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

٣٨) **هندسة عمارة:** يمكن تمثيل إطار قوس بوابة بالمعادلة ص = −١ , ٠ س^{٢} + ١٢ س؛ حيث س، ص بالسنتمتر. ومحور السينات يمر بطرفي القوس على الأرض.

أ) كوّن جدولًا لارتفاع القوس إذا كان س = ٠، ٢٠، ٤٠، ٦٠، ٨٠، ١٠٠ سم.

ب) مثّل نقاط الجدول في المستوى الإحداثي، وصِل بين النقاط لتكوّن منحنى يمثّل القوس.

جـ) ما أقصى ارتفاع لقوس البوابة؟

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

٣٩) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذه المسألة طريقة الصندوق للتحليل، ممثلاً لتحليل $س^{٢} + س - ٦$، اكتب أول حد في الزاوية اليمنى العليا من الصندوق، ثم اكتب آخر حد في الزاوية السفلى اليسرى.

	؟	؟
؟	$س^{٢}$	؟
؟	؟	-٦

أ) تحليليًا: حدّد عددين ناتج ضربهما -٦، وناتج جمعهما ١.

ب) رمزيًا: اكتب كل عامل منهما في المربع الفارغ، متضمنًا المتغير وإشارته الموجبة أو السالبة.

جـ) تحليليًا: أوجد عوامل كل صف وعمود في الصندوق، ثم أوجد عوامل $س^{٢} + س - ٦$.

د) لفظيًا: صف كيف تستعمل طريقة الصندوق لتحليل $س^{٢} - ٣س - ٤٠$.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

٤٠) **اكتشف الخطأ:** يحلّ كل من حمد وراشد المعادلة ٢ م^{٢} = ٤ م. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر ذلك

راشد

٢م^{٢} = ٤م

٢م^{٢} − ٤م = ٠

٢م(م − ٢) = ٠

٢م = ٠ أو م − ٢ = ٠

م = ٠ أو م = ٢

حمد

٢م^{٢} = ٤م

$\frac{٢م^{٢}}{٢م} = \frac{٤م}{٢م}$

م = ٢

٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرة حدود بأربعة حدود، يمكن تحليلها بتجميع الحدود، ثم حلّلها.

٤٢) **تبرير:** في المعادلة جـ = أ^{٢} − أ ب، ما قيم أ، ب التي تجعل جـ = ٠؟

٤٣) **اكتب:** وضّح كيف تحل معادلة تربيعية باستعمال خاصيّة الضرب الصفري.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

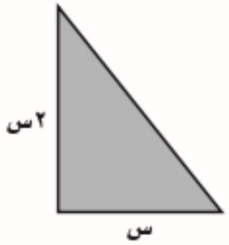
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تدريب على اختبار

٤٤) أي مما يأتي يمثِّل عاملاً لكثيرة الحدود:
$٦ع^{٢} - ٣ع - ٢ + ٤ع$؟

أ) $٢ع + ١$
ب) $٣ع - ٢$
جـ) $ع + ٢$
د) $٢ع - ١$

٤٥) **هندسة:** إذا كانت مساحة المثلث القائم الزاوية المبين أدناه ٥ س سم^{٢}، فما ارتفاعه؟



أ) ٢ سم
ب) ٥ سم
جـ) ٨ سم
د) ١٠ سم

الرياضيات فن وإبداع
@Hnooooood

الواجب

رقم السؤال : .....

رقم الصفحة : .....

@Hnoooood