بسم الله الرحمن الرحيم

اليوم : التاريخ :

المادة :رياضيات الحصة :

الموضوع : المعادلات التربيعية المربعات الكاملة
رقم الصفحة ١٣٣

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق

درست إيجاد ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما.

والآن

- أحلّل ثلاثية الحدود التي على صورة مربع كامل.
- أحلّ معادلات تتضمن مربعات كاملة.

المفردات

المربع الكامل لثلاثية حدود

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

لماذا؟

يسقط الحجر والكيس بالسرعة نفسها؛ لذا ستحتاج إلى حل المعادلة $٠ = -٥ن^{٢} + ل_{٠}$، لمعرفة الزمن الذي يحتاج إليه الجسم كي يصل إلى الأرض إذا سقط من ارتفاع ابتدائي ($ل_{٠}$) مترًا فوق الأرض، حيث (ن) تمثّل الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم.

تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل: تعلمت قاعدة مفكوك ثنائيتي الحد $(أ + ب)^{٢}$، $(أ - ب)^{٢}$. تذكّر بأن تلك نواتج ضرب خاصة تتبع قاعدة معينة.

$$(أ + ب)^{٢} = (أ + ب)(أ + ب)$$
$$= أ^{٢} + أب + أب + ب^{٢}$$
$$= أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$$

$$(أ - ب)^{٢} = (أ - ب)(أ - ب)$$
$$= أ^{٢} - أب - أب + ب^{٢}$$
$$= أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$$

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تكون نواتج الضّرب هذه على صورة **مربع كامل لثلاثية الحدود**؛ لأنها مربعات ثنائيات حد. وتساعدك القواعد أعلاه على تحليل ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملًا.

ولتكون ثلاثية حدود قابلة للتحليل على صورة مربع كامل، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين، وأن يكون الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة.

فمثلاً ثلاثية الحدود $١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩$ تشكّل مربعًا كاملًا، كما هو موضح أدناه.

$$١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩$$

هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم؛ لأن $١٦س^{٢} = (٤س)^{٢}$.

هل الحدّ الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي لكل من الحدين الأول والأخير؟ نعم؛ لأن $٢٤س = ٢(٤س)(٣)$.

هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم؛ لأن $٩ = ٣^{٢}$.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملًا

أضف إلى مطويتك

الرموز:

$$أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢} = (أ + ب)(أ + ب) = (أ + ب)^{٢}$$

$$أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢} = (أ - ب)(أ - ب) = (أ - ب)^{٢}$$

أمثلة:

$$س^{٢} + ٨س + ١٦ = (س + ٤)(س + ٤) = (س + ٤)^{٢}$$

$$س^{٢} - ٦س + ٩ = (س - ٣)(س - ٣) = (س - ٣)^{٢}$$

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

مثال ١ تمييز ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملاً وتحليلها

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، و إذا كانت كذلك فحلِّلها.

أ) $٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٤ص^{٢} = (٢ص)^{٢}$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٩ = ٣^{٢}$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $٢ (٢ص) (٣)$؟ نعم، $١٢ص = ٢(٢ص)(٣)$.

بما أن الشروط الثلاثة متوفرة، فإن العبارة $٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩$ ثلاثية حدود تشكّل مربعًا كاملاً.

$٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = (٢ص)^{٢} + ٢(٢ص)(٣) + ٣^{٢}$ اكتب العبارة على صورة $أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

$= (٢ص + ٣)^{٢}$ حلّل باستعمال القاعدة

ب) $٩س^{٢} - ٦س + ٤$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٩س^{٢} = (٣س)^{٢}$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٤ = ٢^{٢}$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $-٢(٣س)(٢)$؟ لا، $-٦س \neq -٢(٣س)(٢)$.

بما أن الحد الأوسط لا يحقق الشرط، لذا فإن ثلاثية الحدود $٩س^{٢} - ٦س + ٤$ لا تشكّل مربعًا كاملاً.

إرشادات للدراسة

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملاً

إذا كان الحد الثابت في ثلاثية الحدود سالبًا، فإن ثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً، لذا ليس من الضروري التحقق من الشروط الأخرى.

@Hnoooood

تحقق من فهمك

أ) $٩ص^{٢} + ٢٤ص + ١٦$

ب) $٢أ^{٢} + ١٠أ + ٢٥$

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

يكون تحليل ثلاثية الحدود تحليلاً تامًّا إذا كتب على صورة ناتج ضرب كثيرات حدود أولية. وقد تستعمل أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا. ويساعدك ملخص المفهوم الآتي لتقرر من أين تبدأ عند تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا، وإذا لم يناسب كثيرة الحدود أي نمط، أو لايمكن تحليلها فإنها تكون أوليّة.

ملخص المفهوم

طرق التحليل

أضف إلى مطويتك

الخطوات	عدد الحدود	أمثلة
الخطوة ١: حلّل بإخراج (ق . م . أ)	أي عدد	$٤س^{٣} + ٢س^{٢} - ٦س = ٢س(٢س^{٢} + س - ٣)$
الخطوة ٢: تحقق هل كثيرة الحدود تشكل فرقًا بين مربعين أم أنها ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.	٢ أو ٣	$٩س^{٢} - ١٦ = (٣س + ٤)(٣س - ٤)$ $١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩ = (٤س + ٣)^{٢}$
الخطوة ٣: طبّق أنماط التحليل لـِ $س^{٢} + ب س + جـ$ أو $أ س^{٢} + ب س + جـ$ أو حلّل بتجميع الحدود.	٣ أو ٤	$س^{٢} - ٨س + ١٢ = (س - ٢)(س - ٦)$ $١٢ص^{٢} + ٩ص + ٨ص + ٦$ $= (١٢ص^{٢} + ٩ص) + (٨ص + ٦)$ $= ٣ص(٤ص + ٣) + ٢(٤ص + ٣)$ $= (٤ص + ٣)(٣ص + ٢)$

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

رقم الصفحة: ١٣٥

مثال ٢ التحليل التام

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب "أولية":

أ) $٥س^{٢} - ٨٠$

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدين $٥س^{٢}$، -٨٠ هو ٥، حلّل بإخراج (ق. م. أ).

الخطوة ٢: بما أن عدد الحدود اثنان، لذا تحقق من أن كثيرة الحدود تشكّل فرقًا بين مربعين.

$٥س^{٢} - ٨٠ = ٥(س^{٢} - ١٦)$ (ق. م. أ) للحدين ٥

$= ٥(س^{٢} - ٤^{٢})$ $س^{٢} = س \times س$، $١٦ = ٤ \times ٤$

$= ٥(س - ٤)(س + ٤)$ تحليل الفرق بين مربعين

ب) $٩س^{٢} - ٦س - ٣٥$

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدود: $٩س^{٢}$، $-٦س$، -٣٥ هو ١.

الخطوة ٢: بما أن ٣٥ ليس مربعًا كاملاً، فثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً.

الخطوة ٣: حلّل باستعمال النمط $أ س^{٢} + ب س + جـ$. هل يوجد عددان ناتج ضربهما $٩(-٣٥)$، أو -٣١٥ ومجموعهما -٦؟ نعم، -٢١ وَ ١٥ ناتج ضربهما -٣١٥. ومجموعهما -٦.

$٩س^{٢} - ٦س - ٣٥ = ٩س^{٢} + م س + ن س - ٣٥$ استخدم القاعدة

$= ٩س^{٢} + ١٥س - ٢١س - ٣٥$ م = ١٥، ن = -٢١

$= (٩س^{٢} + ١٥س) + (-٢١س - ٣٥)$ جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

$= ٣س(٣س + ٥) - ٧(٣س + ٥)$ حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

$= (٣س + ٥)(٣س - ٧)$ (٣س+٥) عامل مشترك

إرشادات للدراسة

تحقق من إجابتك:

يمكنك التحقق من إجابتك من خلال:

- استعمال طريقة التوزيع بالترتيب.
- استعمال خاصية التوزيع
- تمثيل كلٍّ من العبارة الأصلية وتحليلها بالرسم والمقارنة بينهما.

@Hnoooood

تحقق من فهمك

٢أ) $٢س^{٢} - ٣٢$

٢ب) $١٢س^{٢} + ٥س - ٢٥$

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة : عند استخدام خاصية الضرب الصفري في حل معادلات تتضمن عوامل متكررة يكفي مساواة أحد هذه العوامل بالصفر.

مثال ٣ حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

حل المعادلة: $٩س^{٢} - ٤٨س = -٦٤$.

$٩س^{٢} - ٤٨س = -٦٤$	المعادلة الأصلية
$٩س^{٢} - ٤٨س + ٦٤ = ٠$	أضف ٦٤ إلى الطرفين
$(٣س)^{٢} - ٢(٣س)(٨) + (٨)^{٢} = ٠$	تحقق إن كانت ثلاثية الحدود $٩س^{٢} - ٤٨س + ٦٤$ تمثّل مربعًا كاملاً
$(٣س - ٨)^{٢} = ٠$	حلّل ثلاثية الحدود على صورة مربع كامل
$(٣س - ٨)(٣س - ٨) = ٠$	اكتب $(٣س - ٨)^{٢}$ كحاصل ضرب عاملين
$٣س - ٨ = ٠$	ضع أحد العوامل المتكررة = ٠
$٣س = ٨$	أضف ٨ إلى كلا الطرفين
$س = \frac{٨}{٣}$	اقسم كلا الطرفين على ٣

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :

٣أ) $أ^{٢} + ١٢أ + ٣٦ = ٠$

٣ب) $ص^{٢} - \frac{٤}{٣}ص + \frac{٤}{٩} = ٠$

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

قراءة الرياضيات

الجذر التربيعي

يقرأ $\pm\sqrt{١٦}$ موجب أو سالب الجذر التربيعي لـ ١٦

سبق أن حللت معادلات مثل $س^{٢}-١٦=٠$ بالتحليل إلى العوامل. ويمكنك أيضًا استعمال الجذر التربيعي لحل المعادلة.

$س^{٢}-١٦=٠$	المعادلة الأصلية
$س^{٢}=١٦$	أضف ١٦ إلى كلا الطرفين
$س=\pm\sqrt{١٦}$	خاصية الجذر التربيعي

تذكّر أنه يوجد جذران تربيعيان لـ ١٦، هما ٤ وَ -٤. لذا فإن مجموعة الحل هي {-٤، ٤}. ويمكنك التعبير عن ذلك بـ $\{\pm٤\}$.

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مفهوم أساسي

خاصية الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لحل المعادلة التربيعية على الصورة $س^{٢} = ن$، خُذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الرموز: لأي عدد حقيقي $ن \geq ٠$، إذا كان $س^{٢} = ن$ فإنَّ $س = \pm\sqrt{ن}$.

مثال: $س^{٢} = ٢٥$

$س = \pm\sqrt{٢٥} = \pm ٥$

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

إذا كانت ن في المعادلة س^{٢} = ن، ليست مربعًا كاملاً، فتحتاج إلى تقريب الجذر التربيعي، لذا استعمل الآلة الحاسبة. أما إذا كانت ن مربعًا كاملاً فستحصل على إجابة دقيقة.

مثال ٤ استعمال خاصية الجذر التربيعي

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) (ص − ٦)^{٢} = ٨١

(ص − ٦)^{٢} = ٨١	المعادلة الأصلية
ص − ٦ = ± $\sqrt{٨١}$	خاصية الجذر التربيعي
ص − ٦ = ± ٩	٨١ = ٩ × ٩
ص = ٦ ± ٩	أضف ٦ إلى كلا الطرفين
ص = ٦ + ٩ أو ص = ٦ − ٩	افصل المعادلة إلى معادلتين
= ١٥ = −٣	بسّط

الجذران هما ١٥ وَ −٣ تحقق بالتعويض في المعادلة الأصلية

س + ٦ = ± $\sqrt{١٢}$	خاصية الجذر التربيعي
س = −٦ ± $\sqrt{١٢}$	اطرح ٦ من كلا الطرفين

الجذران هما −٦ + $\sqrt{١٢}$ ، −٦ − $\sqrt{١٢}$.

باستعمال الآلة الحاسبة، −٦ + $\sqrt{١٢}$ ≈ −٢,٥٤ ، −٦ − $\sqrt{١٢}$ ≈ −٩,٤٦

@Hnoooood

تحقق من فهمك

٤أ) $(أ - ١٠)^{٢} = ١٢١$

٤ب) $(ع + ٣)^{٢} = ٢٦$

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مثال ٥ من واقع الحياة

حل المعادلة

فيزياء: أُسقطت كرة من ارتفاع ٦٨ مترًا. إذا كانت المعادلة ع = −٥ن^{٢} + ع$_{.}$ تُستعمل لإيجاد عدد الثواني (ن) التي تحتاج إليها الكرة للوصول إلى الارتفاع (ع) من الارتفاع الابتدائي (ع$_{.}$) بالمتر، فأوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض.

عند مستوى الأرض، ع = ٠ والارتفاع الابتدائي ٦٨ ، إذن ع$_{.}$ = ٦٨

ع = −٥ ن^{٢} + ع$_{.}$	المعادلة الأصلية
٠ = −٥ ن^{٢} + ٦٨	عوض عن ع بـ صفر، وعن ع$_{.}$ بـ ٦٨
−٦٨ = −٥ ن^{٢}	اطرح ٦٨ من كلا الطرفين
١٣,٦ = ن^{٢}	اقسم على −٥
ن ≈ ± ٣,٧	خاصية الجذر التربيعي

بما أن العدد السالب هنا ليس منطقيًّا، لذا تستغرق الكرة ٣,٧ ثوانٍ تقريبًا للوصول إلى الأرض.

تاريخ الرياضيات

جاليليو جاليلي
(١٥٦٤م-١٦٤٢م)
كان جاليليو أول من أثبت أن الأجسام المختلفة الكتل تسقط بالسرعة نفسها، وذلك بإسقاط جسمين مختلفي الكتلة من قمة برج بيزا المائل في إيطاليا عام ١٥٨٩ ميلادية.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

٥) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض إذا أُسقطت من سطح مبنى ارتفاعه نصف الارتفاع المذكور أعلاه.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

تأكد

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١) $٢٥س^{٢} + ٦٠س + ٣٦$

٢) $٦س^{٢} + ٣٠س + ٣٦$

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية ، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية" :

٣) $٢س^{٢} - س - ٢٨$

٤) $٤س^{٢} + ٦٤$

٥) $٤س^{٢} + ٩س - ١٦$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

حل كلًّا من المعادلات الآتية ، وتحقق من صحة الحل:

٦) $٤س^{٢} = ٣٦$

٧) $٦٤ص^{٢} - ٤٨ص + ١٨ = ٩$

٨) $(ع + ٥)^{٢} = ٤٧$

٩) **طلاء:** سقطت فرشاة الدهان من نايف أثناء قيامه بطلاء غرفة نومه، من ارتفاع ٢م. استعمل المعادلة $ع = -٥ن^{٢} + ع_{.}$ لإيجاد العدد التقريبي للثواني التي تستغرقها الفرشاة للوصول إلى الأرض.

@Hnoooood

تدرب وحل المسائل

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١٠) $٤س^{٢} - ٤٢س + ١١٠$ ١١) $١٦س^{٢} - ٥٦س + ٤٩$ ١٢) $٨١س^{٢} - ٩٠س + ٢٥$

حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب " أولية ":

١٣) $٢٤د^{٢} + ٣٩د - ١٨$ ١٤) $٨س^{٢} + ١٠س - ٢١$

@Hnoooood

رقم الصفحة: ١٣٨

١٥) $٢ب^{٢} + ١٢ب - ٢٤$

١٦) $١٦أ^{٢} - ١٢١ب^{٢}$

١٧) $١٢م^{٣} - ٢٢م^{٢} - ٧٠م$

١٨) $٨جـ^{٢} - ٨٨جـ + ٢٤٢$

١٩) $و^{٤} - و^{٢}$

٢٠) $١٢ل^{٣} - ٣ل$

٢١) $١٦ك^{٣} - ٤٨ك^{٢} + ٣٦ك$

٢٢) $٤ن^{٣} + ١٠ن^{٢} - ٨٤ن$

@Hnoooood

رقم الصفحة: ١٣٨

٢٣) $٢أ^{٢}ب^{٢} - ٢أ^{٢} - ٢أب^{٣} + ٢أب$

٢٤) $٢ر^{٣} - ر^{٢} - ٧٢ر + ٣٦$

٢٥) $٣ك^{٣} - ٢٤ك^{٢} + ٤٨ك$

٢٦) $جـ^{٢} + ٢جـ - ٣هـ^{٢} + ٤هـ$

٢٧) $٨ص^{٢} - ٢٠٠ع^{٢}$

@Hnooood

رقم الصفحة: ١٣٨

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٢٨) $٤م^{٢} - ٢٤م + ٣٦ = ٠$

٢٩) $(ص - ٤)^{٢} = ٧$

٣٠) $أ^{٢} + \frac{١٠}{٧}أ + \frac{٢٥}{٤٩} = ٠$

٣١) $س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + \frac{٩}{١٦} = ٠$

٣٢) $س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٢٥$

٣٣) $٥س^{٢} - ٦٠س = -١٨٠$

٣٤) $٤س^{٢} = ٨٠س - ٤٠٠$

٣٥) $٩ - ٥٤س = -٨١س^{٢}$

٣٦) $٤جـ^{٢} + ٤جـ + ١ = ١٥$

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

٣٧) **فيزياء:** أُسقط بالون ماء في تجربة من نافذة في المدرسة. ارتفاعها ٩م. ما الزمن الذي يستغرقه البالون ليصل إلى الأرض؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

٣٨) **هندسة:** مُثِّلتْ مساحة مربع بالعبارة $٩س^{٢} - ٤٢س + ٤٩$. أوجد طول ضلع المربع.

٣٩) **هندسة** إذا كانت العبارة $٨ص^{٣} + ٤٠ص^{٢} + ٥٠ص$ تمثّل حجم منشور رباعي قاعدته مستطيلة. فأوجد أبعاد المنشور الممكنة على صورة كثيرات الحدود بمعاملات أعداد صحيحة.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٠) **اكتشف الخطأ:** حلّل منصور وفيصل العبارة $س^{٨} - س^{٤}$ تحليلاً تامًّا ، فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك.

منصور

$س^{٨} - س^{٤} = س^{٤}(س^{٢} + ١)(س^{٢} - ١)$

فيصل

$س^{٨} - س^{٤} = س^{٤}(س^{٢} + ١)(س - ١)(س + ١)$

٤١) **تحدّ:** حلّل $س^{ن+٦} + س^{ن+٢} + س^{ن}$ تحليلاً تامًّا.

٤٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة ثلاثية حدود تشكل مربعًا كاملاً يكون معامل الحد الأوسط سالبًا والحد الأخير كسرًا اعتياديًّا، ثم حلّ المعادلة.

@Hnoooood

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

٤٣) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًّا للعبارة:

"لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ثلاثة حلول حقيقية دائمًا".

٤٤) **اكتب:** فسّر كيف تحلّل كثيرة حدود تحليلاً تامًّا.

٤٥) حدّد ثلاثية الحدود التي تختلف عن كثيرات الحدود الأخرى فيما يأتي، وفسّر إجابتك:

$٩س^{٢} - ٢٤س + ١٦$	$٤س^{٢} + ١٠س + ٤$	$٢٥س^{٢} + ١٠س + ١$	$٤س^{٢} - ٣٦س + ٨١$

٤٦) **اكتب:** فسّر كيف تحدّد إذا كانت ثلاثية الحدود تشكل مربعًا كاملاً.

الرياضيات فن وإبداع
@Hnoooood

الواجب

رقم السؤال : .....

رقم الصفحة : .....

@Hnoooood