

ما خُلِقنا لنفسِنا ، ما خُلِقنا لنسقط ، خُلِقنا لنكون
عظاماً ، لنكون أسياراً أحلامنا ، لنراها واقعاً يفرحنا..

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية



موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

فيما سبق

درست إيجاد احتمال وقوع
حادثة إذا علم أن حادثة أخرى
قد وقعت. (الدرس 3-3)

الآن

المفردات

التوزيع الاحتمالي المنفصل
discrete probability
distribution
الاحتمال النظري
theoretical probability
الاحتمال التجريبي
experimental probability
القيمة المتوقعة
expected value

النجاح
success
الفشل
failure
المتغير العشوائي
random variable
المتغير العشوائي المنفصل
discrete random variable
التوزيع الاحتمالي
probability distribution

- أجد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق.
- أجد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية.
- أمثل بيانياً التوزيعات الاحتمالية وأستعملها.

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

لماذا؟



افترض أن شركة لديها 4 شواغر، وتشرط لتعيين الموظفين لديها اجتيازهم لمقابلة شخصية. إذا تقدم للشركة 8 أشخاص من المنطقة A ، و 10 أشخاص من المنطقة B ، وتمت مقابلة المتقدمين، واختير 4 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالوظائف 3 أشخاص من المنطقة A وشخص واحد من المنطقة B ؟

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية



الاحتمال تسمى النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثة معينة احتمالاً. ووقوع الشيء المرغوب فيه يُسمى **نجاحاً**، وعدم وقوعه يُسمى **فشلاً**. ومجموعة النواتج الممكنة تُسمى فضاء العينة. وكلما اقترب احتمال وقوع حادثة من 1، كانت فرصة أو إمكانية وقوعها أكبر.

احتمال النجاح والفشل

مفهوم أساسي

إذا كان عدد مرات نجاح وقوع حادثة S من المرات، وعدد مرات فشل وقوع الحادثة نفسها f من المرات، فإن احتمال النجاح يُكتب على النحو $P(S)$ ، كما يُكتب احتمال الفشل على النحو $P(F)$. ويُعطى كل من احتمال النجاح واحتمال الفشل بالصيغتين الآتيتين:

$$P(S) = \frac{s}{s+f} , \quad P(F) = \frac{f}{s+f}$$

لاحظ أن الصيغة: $P(S) = \frac{s}{s+f}$ لا تختلف في مضمونها عن الصيغة: $\frac{\text{عدد النواتج في الحادثة}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$ (الحادثة) P

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

مثال ١ : الاحتمال باستعمال التوافيق.



رُشّحت مدرسة 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي، و 16 طالبًا من الصف الأول الثانوي للتنافس على 6 جوائز؛ نظرًا لتفوقهم الدراسي. إذا تمت مقابلة المرشحين، واختير 6 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالجوائز 3 طلاب من الصف الأول الثانوي و 3 طلاب من الصف الثاني الثانوي؟

الخطوة 1 حدّد عدد مرات النجاح s

عدد طرق اختيار 3 طلاب من الصف الثاني هو ${}_{12}C_3$

عدد طرق اختيار 3 طلاب من الصف الأول هو ${}_{16}C_3$

استعمل التوافيق، ومبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النجاحات s .

$$s = {}_{12}C_3 \cdot {}_{16}C_3 = \frac{12!}{9!3!} \cdot \frac{16!}{13!3!} = 123200$$

الخطوة 2 حدّد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة)، $s + f$.

$$s + f = {}_{28}C_6 = \frac{28!}{22!6!} = 376740$$

الخطوة 3 أوجد الاحتمال

$$P(\text{فوز 3 من الأول و 3 من الثاني}) = \frac{s}{s + f}$$

$$s = 123200, s + f = 376740$$

استعمل الآلة الحاسبة

$$= \frac{123200}{376740}$$

$$\approx 0.327016$$

احتمال فوز 3 طلاب من الصف الأول و 3 من الصف الثاني هو تقريبًا 0.33 أو 33%.

تنبيه!

احتمال النجاح والفضل

لاحظ أن الحرف الصغير s

يدل على عدد مرات النجاح

في وقوع حادثة، بينما الحرف

الكبير S يدل على حادثة

النجاح، وكذلك الأمر بالنسبة

للحرفين f و F .

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تحقق من فهمك



(1) في المثال 1 إذا كان عدد الذين رُشِّحوا من الصف الثاني الثانوي 3، ومن الصف الأول الثانوي 11، وكان عدد الجوائز 4، واختير 4 طلاب من الذين رُشِّحوا بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

مثال ٢ : الاحتمال باستعمال التباديل.



لدى صالح 6 أصدقاء تبدأ أسماءهم بالأحرف A, B, C, D, E, F ، ويتوقع من كل منهم اتصالاً هاتفياً للاتفاق على موعد رحلة ينوون القيام بها. ما احتمال أن يتصل A أولاً ثم B ثانيًا، ويتصل كل من D, E, F أخيرًا.

الخطوة 1 حدّد عدد مرات النجاح s .

عدد طرق اتصال A أولاً ثم B ثانيًا هو 1

عدد طرق اتصال كل من D, E, F في الأخير هو ${}_3P_3$

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s .

$$s = 1 \cdot {}_3P_3 = 1 \cdot 3! = 6$$

الخطوة 2 أوجد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة)، $s + f$.

وتمثل عدد الترتيبات الممكنة لاتصالات الأصدقاء الستة.

$$s + f = {}_6P_6 = 6! = 720$$

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

$$P(S) = \frac{s}{s + f}$$

$$s = 6, s + f = 720 \quad = \frac{6}{720}$$

$$\text{استعمل الآلة الحاسبة} \quad \approx 0.0083$$

الاحتمال المطلوب هو تقريباً 0.008 أو 0.8% تقريباً.

مراجعة المفردات

التباديل والتوافق

عند اختيار مجموعة من الأشخاص أو الأشياء بترتيب معين، فإن الاختيار يُسمى تباديلًا، وعندما لا نهتم بعملية ترتيب الأشخاص أو الأشياء، فإن الاختيار يُسمى توافقًا.

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تحقق من فهمك



(2) سباق: اشترك صلاح، وعبد الله، وسليم في سباق 400 m مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية



إرشادات للدراسة

البيانات المنفصلة والبيانات المتصلة
تكون البيانات منفصلة إذا أمكن عدّ البيانات مثل عدد الأرنب في مزرعة. وتكون البيانات متصلة إذا كانت تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، فمثلاً أطوال جميع أفراد العينة تمثل بيانات متصلة.

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي يُسمى المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة متغيراً عشوائياً. والمتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم يُسمى **متغيراً عشوائياً منفصلاً**.

التوزيع الاحتمالي هو دالة تربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، مع احتمال وقوعها، ويعبر عنه بجدول أو معادلة، أو تمثيل بياني. ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين الآتيين:

- احتمال كل قيمة من قيم X محصور بين 0 و 1، أي أن $0 \leq P(X) \leq 1$.
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1، أي أن $\sum P(X) = 1$.

والتوزيع الاحتمالي المنفصل هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي منفصل.

فعند رمي قطعتي نقد متميزتين مرةً واحدة، فإن فضاء العينة هو $\{TT, TL, LT, LL\}$ ، حيث يُمثّل L الوجه الذي يحمل الشعار، و T الوجه الذي يحمل الكتابة، إذا كان X متغيراً عشوائياً يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فإن X يأخذ القيم 0, 1, 2. ويمكنك حساب الاحتمال النظري لعدم الحصول على شعار، أو الحصول على شعار واحد، أو الحصول على شعارين، ثم تكوين جدول يمثل التوزيع الاحتمالي، كما يمكنك تمثيله بيانياً كما يأتي:

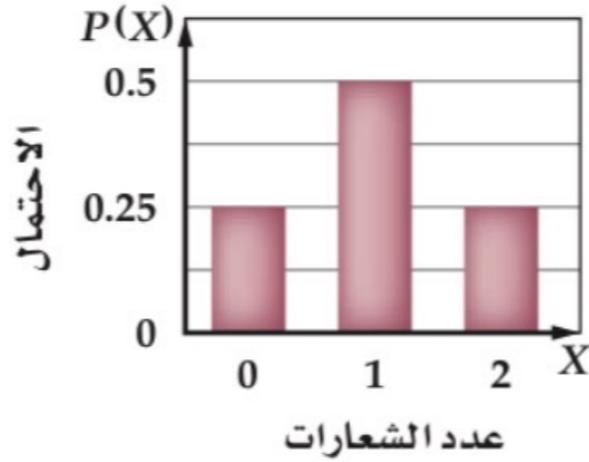
موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

قراءة الرياضيات

احتمالات المتغيرات العشوائية
يقرأ الرمز $P(1)$ احتمال أن
يكون المتغير العشوائي X
مساوياً لـ 1 .



عدد الشعارات واحتمالاتها



$$P(0) = \frac{1}{4} , P(1) = \frac{1}{2} , P(2) = \frac{1}{4}$$

يُبين الجدول أدناه والتمثيل بالأعمدة المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

عدد الشعارات X	0	1	2
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

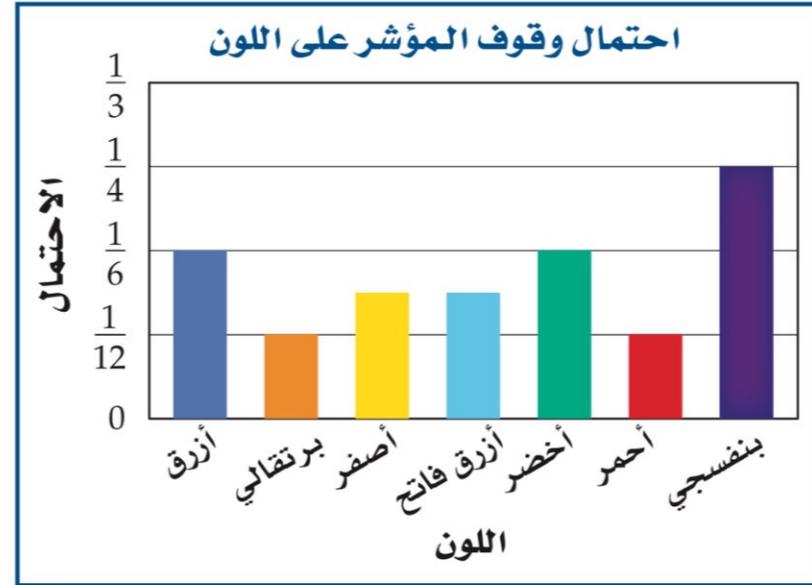
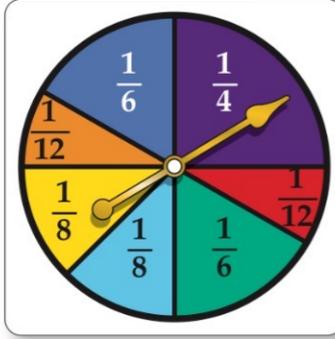
موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

مثال ٣: التوزيع الاحتمالي المنفصل .



يوضّح القرص ذو المؤشر الدوّار توزيعاً احتمالياً، حيث يمكن أن يتوقّف المؤشر على أيّ من القطاعات الملونة، وقد كتب على كل قطاع احتمال ظهوره (لاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1).

(a) مثل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي:



(b) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحديد اللون الأكبر إمكانية لوقوف المؤشر عنده، ثم أوجد احتمالته.

أكثر الألوان إمكانية لوقوف المؤشر عنده هو اللون البنفسجي، واحتماله يساوي $\frac{1}{4}$.

(c) أوجد (أخضر أو أزرق) P .

احتمال التوقف عند اللون الأزرق أو الأخضر هو $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

تنبيه!

احتمال الحوادث المتنافية
تذكر أنه إذا كانت A و B
حادثتين متنافيتين، فإن
 $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تحقق من فهمك



يوضح الجدول أدناه توزيعاً احتمالياً، حيث أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة، وسُجّل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين واحتمال كلٍّ منها.

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	المجموع
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	الاحتمال

(3A) مثلّ بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.

(3B) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحديد الناتج الأكثر إمكانية للوقوع؟ ثم أوجد احتمالاه.

(3C) أوجد $P(5 \text{ أو } 11)$.

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية



إن الاحتمالات التي تمت دراستها هنا هي **احتمالات نظرية**؛ لأنها مبنية على افتراضات يتوقع الحصول عليها، بينما **الاحتمالات التجريبية** يتم تقديرها من عدد من التجارب. والقيمة المتوقعة أو التوقع $E(X)$ هي المتوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي المنفصل؛ أي أن القيمة المتوقعة $E(x)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كل منها $P(X)$ ، ويمكن إيجادها باستعمال القانون $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} Xi.P(Xi)$ ، وتنتج هذه القيمة من خلال اعتماد الاحتمال النظري كوزن للمتغير العشوائي. ويخبرك بما يمكن حدوثه على المدى البعيد، وذلك بعد محاولات كثيرة.



مثال ٤ : القيمة المتوقعة .

أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة.

القيمة المتوقعة $E(X)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كلٍّ منها $P(X)$.

عوّض في قانون المتوسط الموزون

$$E(X) = 1 \left(\frac{1}{6}\right) + 2 \left(\frac{1}{6}\right) + 3 \left(\frac{1}{6}\right) + 4 \left(\frac{1}{6}\right) + 5 \left(\frac{1}{6}\right) + 6 \left(\frac{1}{6}\right)$$

اضرب

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$

اجمع

$$= \frac{21}{6} = 3.5$$

إرشادات للدراسة

قانون الأعداد الكبيرة

ينص قانون الأعداد الكبيرة على أنه كلما ازداد عدد مرات إجراء التجربة، اقتربت قيمة معدل القيم الناتجة من القيمة المتوقعة .

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تحقق من فهمك



4) أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تدرب وحل المسائل

(1) صندوق فيه 10 كرات، منها 6 حمراء، إذا سحبت منه كرتان معاً عشوائياً، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟ (مثال 1)

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تدرب وحل المسائل

(3) دخل 8 لاعبين A, B, C, D, E, F, G, H في مباراة، إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائياً، فما احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A, C, E, G على الترتيب؟ (مثال 2)

تدرب وحل المسائل

الاحتمال	المصدر
0.35	التلفاز
0.31	المذياع
0.02	الأصدقاء
0.11	الصحف
0.19	الإنترنت
0.02	مصادر أخرى

(6) أخبار: أجرى موقع إلكتروني مسحًا للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس. والجدول المجاور يبيّن نتائج هذا المسح. (مثال 3)

(a) بيّن أن هذه البيانات تمثّل توزيعًا احتماليًا.

(b) إذا اختير أحد الذين شملهم هذا المسح عشوائيًا، فما احتمال أن يكون مصدر أخباره الرئيس الصحف أو الإنترنت؟

(c) مثل البيانات بالأعمدة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(19) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً: «يُبنى الاحتمال النظري على نتائج التجارب». برّر إجابتك.

تدريب على اختبار

(25) ما القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي المبين في الجدول أدناه؟

x	3	2	1
p(x)	0.1	0.8	0.1

0.1 A

0.16 B

0.56 C

1 D