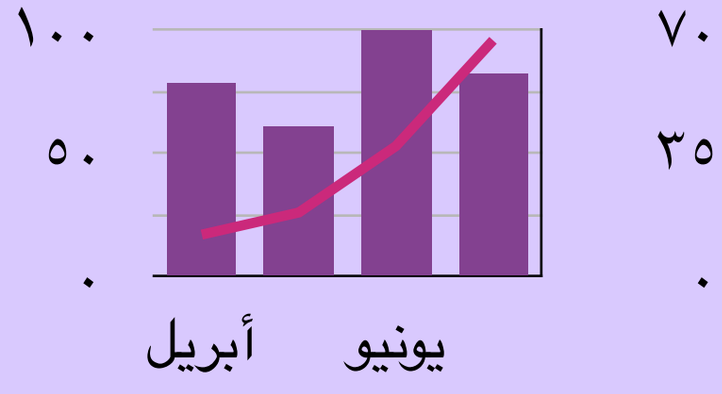
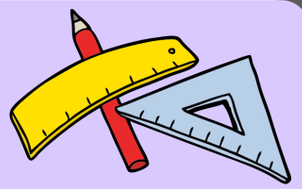
صباحَ الخيرِ , إستدع دائماً الافكار الطيبة والأحلام والطُّموحات التي تود الوصول إليها

التوزيع الطبيعي



اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



موضوع الدرس : التوزيع الطبيعي

فيما سبق

درست التوزيعات الاحتمالية. (الدرس 4–3)

والآن

- أحدِّد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزَّعة طبيعيًّا أو ملتوية .
- أستعمل القانون التجريبي لأجد الاحتمالات.

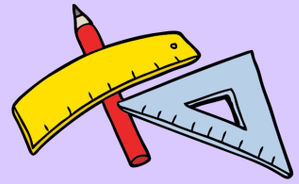
المفردات

التوزيع الاحتمالي المتصل
continuous probability distribution

التوزيع الطبيعي
normal distribution

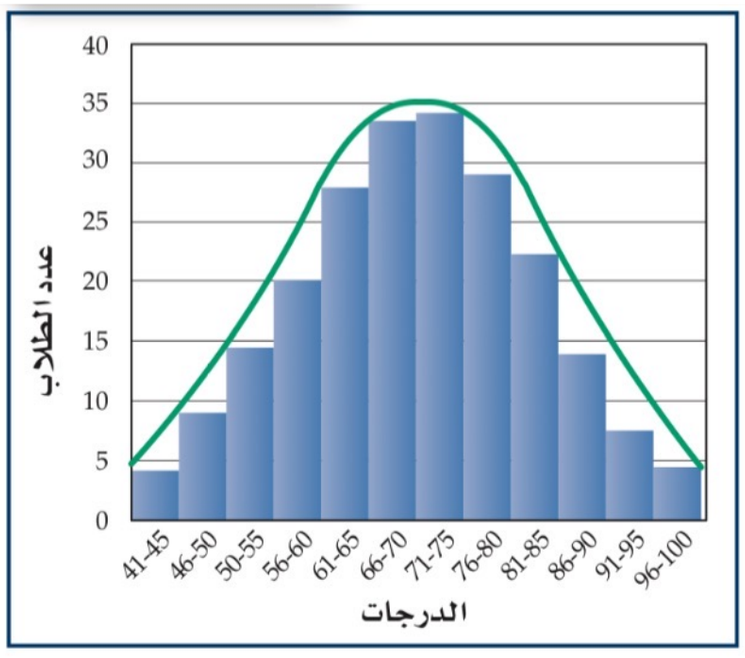
التوزيع الملتوي
skewed distribution

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

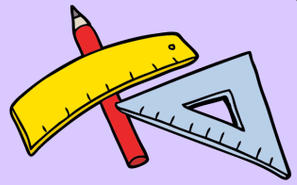


لماذا

مثَّل المعلم عبدالعزيز درجات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانيًّا كما هو مبيَّن في الشكل المجاور. لاحظ أن هناك تجمعًا لدرجات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع الدرجات يشبه الجرس تقريبًا. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعًا طبيعيًّا.



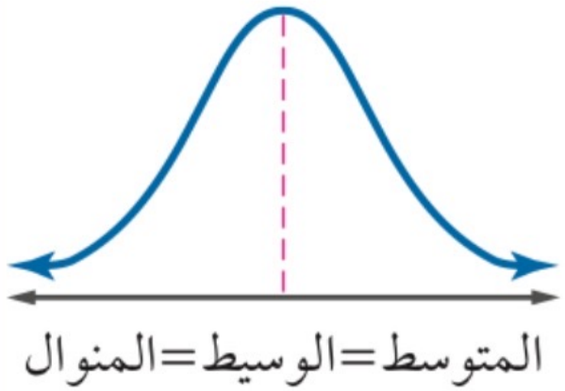
التوزيعات الطبيعية والملتوية في **التوزيع الاحتمالي المتصل** والذي هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل، يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، ومثال ذلك أطوال أشخاص وأوزانهم، ومستوى الدهنيات عند الأشخاص البالغين. وأفضل مثال على التوزيعات الاحتمالية المتصلة هو **التوزيع الطبيعي**.



موضوع الدرس : التوزيع الطبيعي

مفهوم أساسي

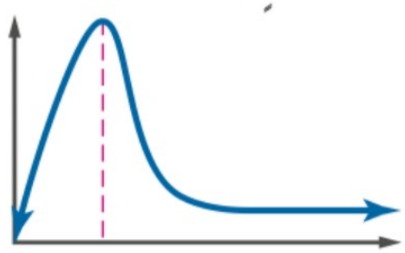
خصائص التوزيع الطبيعي



- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط.
- يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال.
- المنحنى متصل.
- يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب، ولكنه لا يمسه.

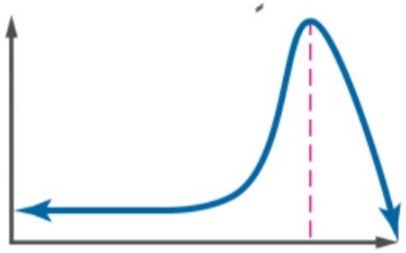
على الرغم من أن التوزيع الطبيعي متصل، فإن التوزيعات المنفصلة أيضًا يمكن أن يكون لها شكل التوزيع الطبيعي. ويمكن للتوزيعات أن تظهر بأشكال أخرى تُسمّى **توزيعات ملتوية**.

التواء موجب
(ملتوٍ إلى اليمين)



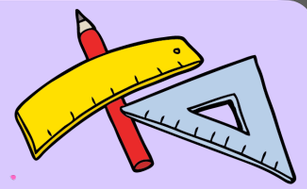
معظم البيانات تتركز في اليسار وقليل منها في اليمين.

التواء سالب
(ملتوٍ إلى اليسار)



معظم البيانات تتركز في اليمين وقليل منها في اليسار.

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



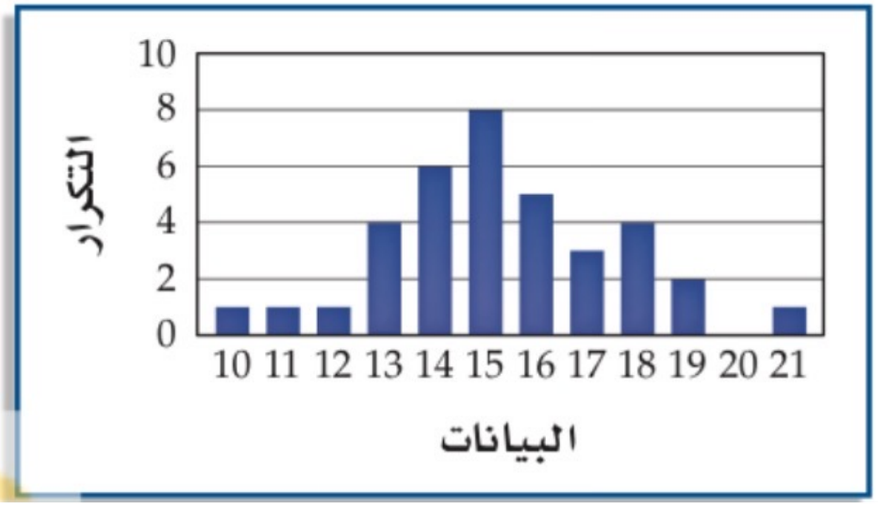
مثال ١ تصنيف بيانات التوزيع

حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

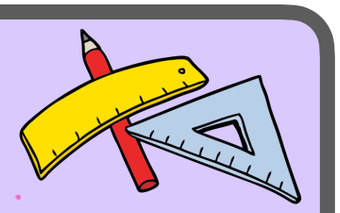
a)

البيانات	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21
التكرار	1	1	1	4	6	8	5	3	4	2	1

استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة.
وبما أن التمثيل عالٍ في الوسط، ويبدو كأنه إلى حد ما متماثل حول المتوسط، فإن البيانات تُعتبر موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا.



اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



مثال ١ تصنيف بيانات التوزيع

إرشادات للدراسة

«منفصل» مقابل «متصل»

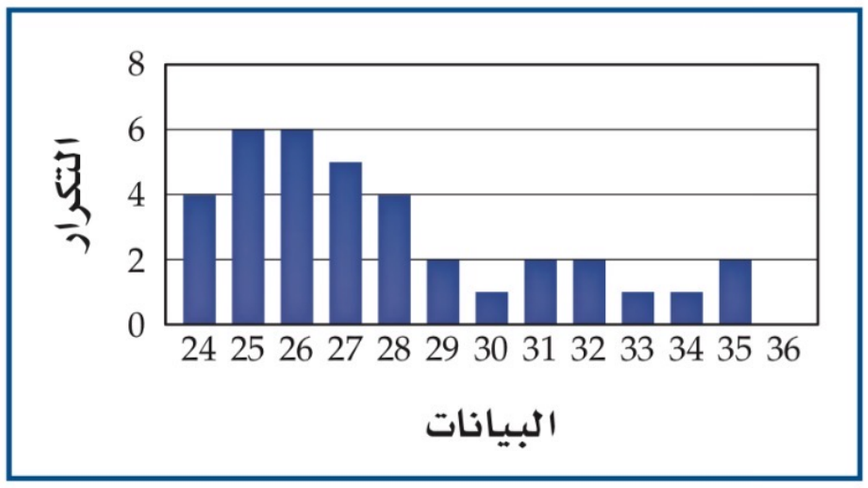
يأخذ التوزيع الاحتمالي المنفصل عددًا محدودًا من القيم، وغالبًا ما تكون أعدادًا صحيحة. أما التوزيع الاحتمالي المتصل، فيأخذ عددًا غير محدد من القيم تنتمي إلى فترة متصلة. وفي حالة التوزيع الاحتمالي المتصل يكون احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة واحدة فقط مساويًا للصفر .

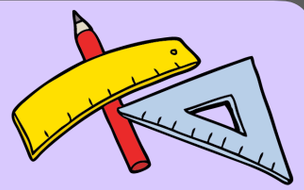
حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

(b

البيانات	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
التكرار	4	6	6	5	4	2	1	2	2	1	1	2

استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة. وبما أن التمثيل عالٍ في جهة اليسار ومنخفض في كل من الوسط وعلى اليمين، فإن التوزيع يبدو كأنه ملتوٍ إلى اليمين (التواء موجب).





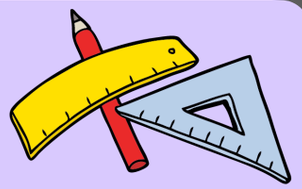
موضوع الدرس : التوزيع الطبيعي

تحقق من فهمك

1) حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا.

قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



موضوع الدرس : التوزيع الطبيعي

القانون التجريبي إن المساحة بين قيمتين من البيانات تمثِّل نسبة البيانات التي تقع بين هاتين القيمتين. ويمكن أن يستعمل القانون التجريبي لوصف المساحات تحت المنحنى الطبيعي، والتي تقع ضمن انحراف أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات معيارية من المتوسط.

مفهوم أساسي

القانون التجريبي

يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص الآتية:

- يقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

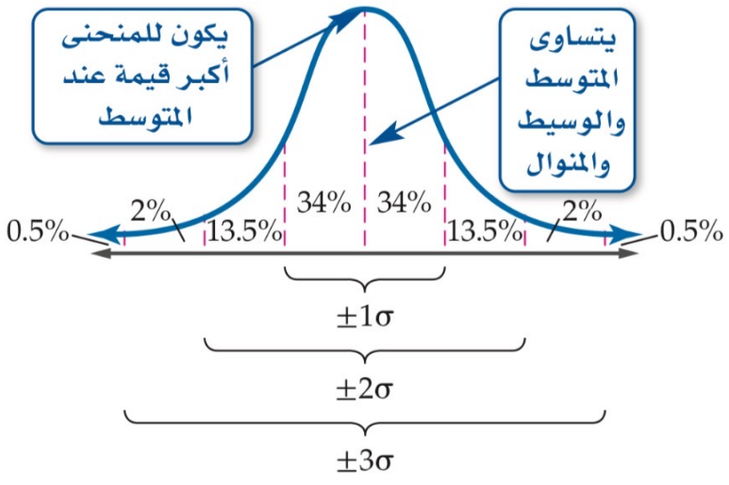
وهذا يعني أن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.

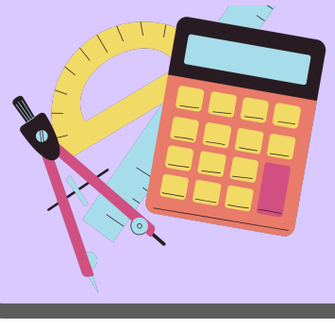
- يقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

وهذا يعني أن الغالبية العظمى من البيانات (95%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ضعف قيمة الانحراف المعياري.

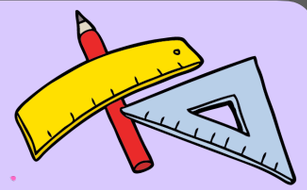
- يقع 99% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

وهذا يعني أن جميع البيانات تقريبًا (99%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ثلاثة أمثال الانحراف المعياري.





اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



مثال ٢ التوزيع الطبيعي

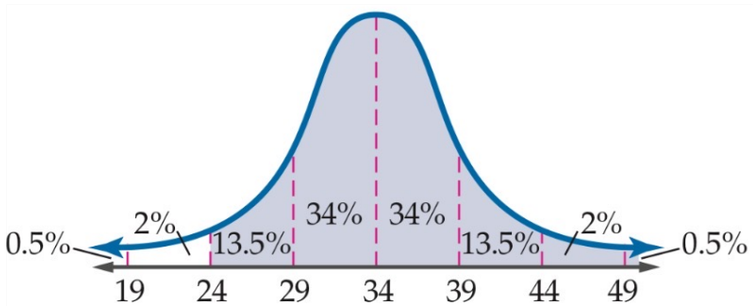
المتوسط لتوزيع طبيعي 34، وانحرافه المعياري 5. أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ X تم اختيارها عشوائيًّا في هذا التوزيع عن 24، (أي أوجد $P(X > 24)$).

$\mu = 34\,,\ \sigma = 5$

الخطوة 1 أوجد القيم $\mu \pm \sigma\,,\ \mu \pm 2\sigma\,,\ \mu \pm 3\sigma$ (وهي المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه المضاعفات الثلاثة الأولى للانحراف المعياري).

$$\mu \pm \sigma = 34 \pm 5 = 29,\ 39$$
$$\mu \pm 2\sigma = 34 \pm 10 = 24,\ 44$$
$$\mu \pm 3\sigma = 34 \pm 15 = 19,\ 49$$

الخطوة 2 ارسم منحنى التوزيع الطبيعي، وحدِّد عليه المتوسط $\mu = 34$ والقيم السابقة.

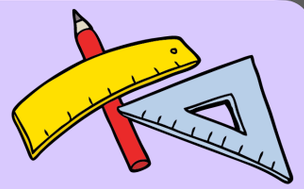


الخطوة 3 ظلل المنطقة التي تمثل الاحتمال المطلوب.

الخطوة 4 احسب الاحتمال المطلوب:

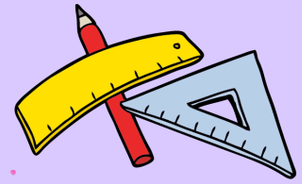
$$P(X > 24) = (13.5 + 34 + 34 + 13.5 + 2 + 0.5)\% = 97.5\%$$

إذن: $P(X > 24) \approx 97.5\%$



تحقق من فهمك

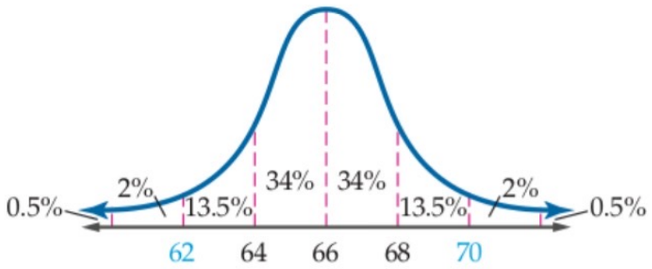
2) أوجد احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًّا في التوزيع الوارد في المثال 2 أقل من 49.



مثال ٣ من واقع الحياة عينة موزعة توزيعاً طبيعياً

أطوال: توزّع أطوال 1800 يافع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 66 in ، وانحراف معياري يساوي 2 in.

a) ما العدد التقريبي لليافعين الذين تتراوح أطوالهم بين 62 in و 70 in ؟

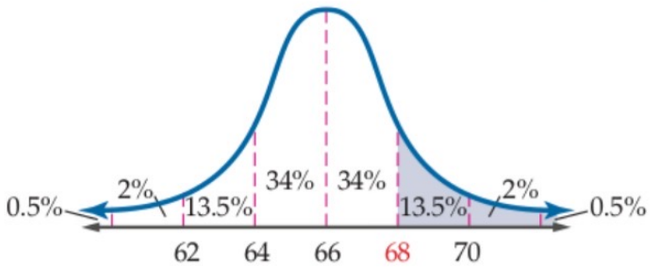


ارسم منحنى التوزيع الطبيعي.

تبعد كل من 62 , 70 عن المتوسط الحسابي انحرافين معياريين؛ لذا فإن 95% من البيانات واقعة بين الطولين 62 , 70.

ولأن $95\% \times 1800 = 1710$، لذا يوجد 1710 يافعين تقريبًا تقع أطوالهم بين 62 in و 70 in.

b) ما احتمال أن يتم اختيار أحد اليافعين عشوائيًّا، بحيث يزيد طوله على 68 in؟

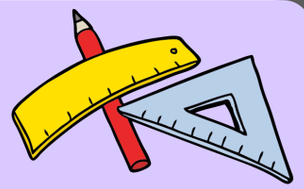


من الشكل المجاور، القيمة الأكبر من 68 تبعد أكثر من انحراف معياري واحد عن المتوسط الحسابي، وتتوزّع الأطوال على النحو الآتي: 13.5% بين انحراف معياري واحد وانحرافين معياريين، 2% بين انحرافين معياريين وثلاثة انحرافات معيارية، 0.5% فوق 3 انحرافات معيارية.

لذا فاحتمال اختيار يافع يكون طوله أكبر من 68 in

$(13.5 + 2 + 0.5)\% = 16\%$

إذن الاحتمال المطلوب يساوي 16% تقريبًا

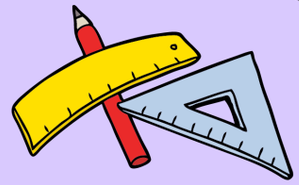


تحقق من فهمك

درجات: إذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزَّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي مقداره 70 كيلوجرامًا، وانحراف معياري 10 كيلوجرامات، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين :

3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 60, 80 كيلوجرامًا؟

3B) ما احتمال أن يتمّ اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلوجرامًا؟



موضوع الدرس : التوزيع الطبيعي

14) اكتشف الخطأ : تتوزّع أطوال أقطار نوع من الأشجار توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط مقداره 11.5 cm ، وانحراف معياري مقداره 2.5 cm ومدى من 3.6 cm إلى 19.8 cm ، وقد حاولت كل من مريم وأمينة إيجاد مدى 68% من البيانات التي تقع في وسط التوزيع. أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

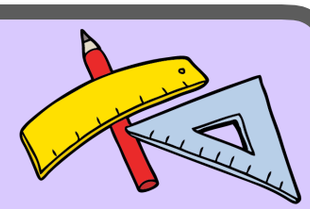
مريم

مدى البيانات 16.2cm ، 68% من المدى يساوي تقريبًا 11cm، ويتوزَّع هذا المدى بالتساوي حول المتوسط 11.5cm، أي أن مدى 68% سيكون من 6 cm إلى 17 cm

أمينة

تمتد النسبة 68% من $\mu + \sigma$ إلى $\mu - \sigma$ أي أن مدى 68% سيكون من 9 cm إلى 14 cm

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



مسائل
مهارات
التفكير العليا

17) **تبرير:** بحسب القانون التجريبي، فإن معظم البيانات في التوزيع الطبيعي تقع ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. هل هذا صحيح أم خاطئ؟ برِّر إجابتك.