الحياة ليست بحثاً عن الذات ولكنها رحلة لصُنع الذات ،

اخلق من نفسك شيئاً يصعبُ تقليده .

حساب النهايات جبرياً

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً

فيماسبق

درستُ كيفية تقدير النهايات بيانيًّا وعدديًّا. (الدرس 1–4)

والآن

- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

المفردات

التعويض المباشر

direct substitution

الصيغة غير المحددة

indeterminate form

shikhah_math اعداد: شيخة المرزوقي

لمـــــــاذا

إذا أُعطيت اتساع البؤبؤ بالملمترات لعين حيوان بالعلاقة $d(x) = \frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10}$؛ حيث x الاستضاءة الساقطة على البؤبؤ مقيسة بوحدة اللوكس (lux)، فإنه يمكنك استعمال النهاية عندما تقترب x من 0 أو ∞ لإيجاد اتساع البؤبؤ عندما تكون الاستضاءة في حدِّها الأدنى أو الأعلى.

حساب النهاية عند نقطة: تعلمتَ في الدرس 1-4 تقدير النهايات بيانيًّا، وباستعمال جداول قيم. وستكتشف في هذا الدرس طرائق جبرية لحساب النهايات.

*ماالنهاية التي تقترب منها X عندما تكون الاستضاءة في حدها الأعلى؟

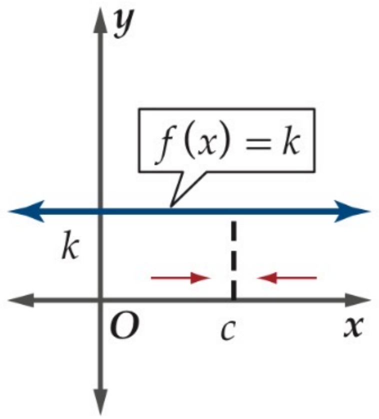
*مثل العلاقة بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية. وضح مالذي يحدث لقطر البؤبؤ عندما تزداد الاستضاءة.

مفهوم أساسي نهايات الدوال

نهايات الدوال الثابتة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

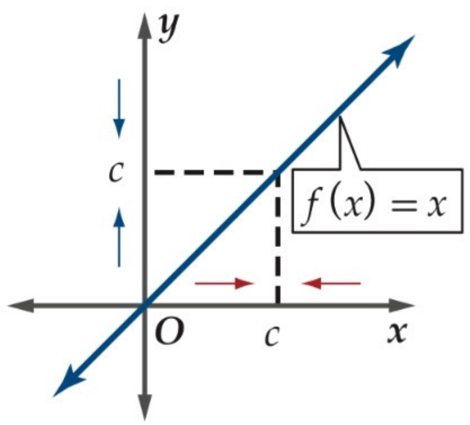
الرموز: $\lim\limits_{x \to c} k = k$



نهايات الدالة المحايدة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

الرموز: $\lim\limits_{x \to c} x = c$



تنبيه!

إذا كانت $f(c) \leq 0$ وَ n عددًا زوجيًا فإن $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)}$ غير موجودة.

مفهوم أساسي — خصائص النهايات

إذا كان c , k عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ موجودتين، فإن كلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x \to c} [k\, f(x)] = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

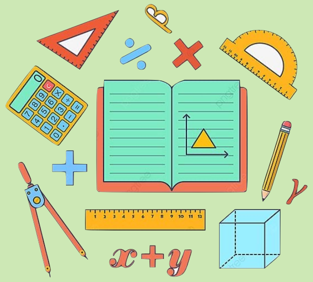
خاصية الضرب: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$

خاصية القسمة: $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ ، حيث $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]^n$

خاصية الجذر النوني: $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ ، حيث n عدد زوجي.

وإذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ ،



مثال ١ : استعمال خصائص النهايات .

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 6x + 3)$

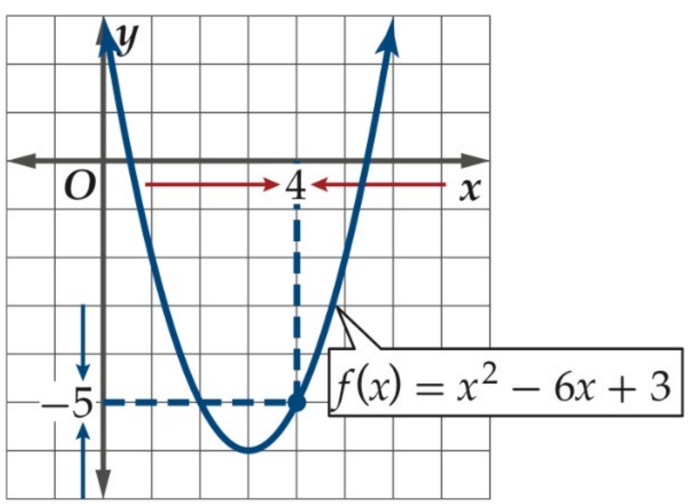
$\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 6x + 3) = \lim\limits_{x \to 4} x^2 - \lim\limits_{x \to 4} 6x + \lim\limits_{x \to 4} 3$ خاصيتا المجموع والفرق

$= \left(\lim\limits_{x \to 4} x\right)^2 - 6 \cdot \lim\limits_{x \to 4} x + \lim\limits_{x \to 4} 3$ خاصيتا القوة والضرب في ثابت

$= 4^2 - 6 \cdot 4 + 3$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$= -5$ بسّط

تحقق يعزّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 - 6x + 3$ هذه النتيجة.



موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً

مثال ١ : استعمال خصائص النهايات .

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4x^3+1}{x-5}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{4x^3+1}{x-5} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(4x^3+1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-5)}$$ خاصية القسمة

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -2} 4x^3 + \lim\limits_{x\to -2} 1}{\lim\limits_{x\to -2} x - \lim\limits_{x\to -2} 5}$$ خاصيتا المجموع والفرق

$$= \frac{4\left(\lim\limits_{x\to -2} x\right)^3 + \lim\limits_{x\to -2} 1}{\lim\limits_{x\to -2} x - \lim\limits_{x\to -2} 5}$$ خاصيتا القوة والضرب في ثابت

$$= \frac{4(-2)^3+1}{-2-5}$$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

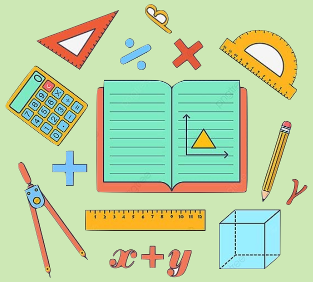
$$\approx 4.4$$ بسّط

تحقق كوّن جدولًا لقيم x التي تقترب من -2 من الجهتين.

x تقترب من -2 ⟵   ⟶ x تقترب من -2

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99	-1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

من الواضح أنه كلما اقترب x من العدد -2، فإن $f(x)$ تقترب من العدد 4.4

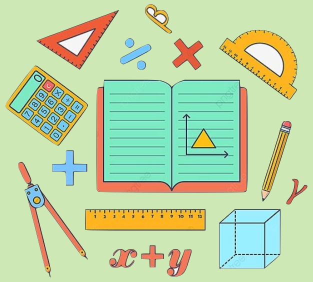


اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ١ : استعمال خصائص النهايات .

c) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{8 - x}$

$\lim\limits_{x \to 3} (8 - x) = \lim\limits_{x \to 3} 8 - \lim\limits_{x \to 3} x$	خاصية الفرق
$= 8 - 3$	عوّض
$= 5 > 0$	بسّط
$\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{8 - x} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 3} (8 - x)}$	خاصية الجذر النوني
$= \sqrt{\lim\limits_{x \to 3} 8 - \lim\limits_{x \to 3} x}$	خاصية الفرق
$= \sqrt{8 - 3}$	نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة
$= \sqrt{5}$	بسّط



تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1A) $\lim_{x\to 2}(-x^3+4)$

تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

(1B $\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{2x^2 - x - 15}$

تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1C) $\lim_{x \to -1} \sqrt{x+3}$

موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً

إرشادات للدراسة

الدوال الجيدة السلوك
تُعدُّ الدوال المتصلة مثل دوال كثيرات الحدود ودالتي الجيب وجيب التمام دوالّ جيدة السلوك، إذ يمكن حساب نهاياتها من خلال التعويض المباشر، ويمكن إيجاد نهاية الدوال من خلال التعويض المباشر حتى وإن لم تكن الدالة جيدة السلوك على مجالها، بشرط أن تكون متصلة عند النقطة التي تحسب عندها النهاية.

مفهوم أساسي — نهايات الدوال

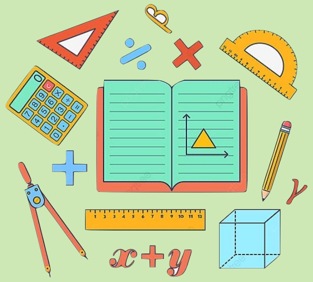
نهايات دوال كثيرات الحدود

إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود ، وكان c عددًا حقيقيًّا ، فإن $\lim\limits_{x \to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ دالةً نسبية، وكان c عددًا حقيقيًّا، حيث $q(c) \neq 0$، فإن $\lim\limits_{x \to c} r(x) = r(c) = \dfrac{p(c)}{q(c)}$.

وبشكل مختصر، فإنه يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال **التعويض المباشر** ، شريطة ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.



مثال ٢ : استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

(a $\lim\limits_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$

بما أن هذه نهاية دالة كثيرة حدود، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

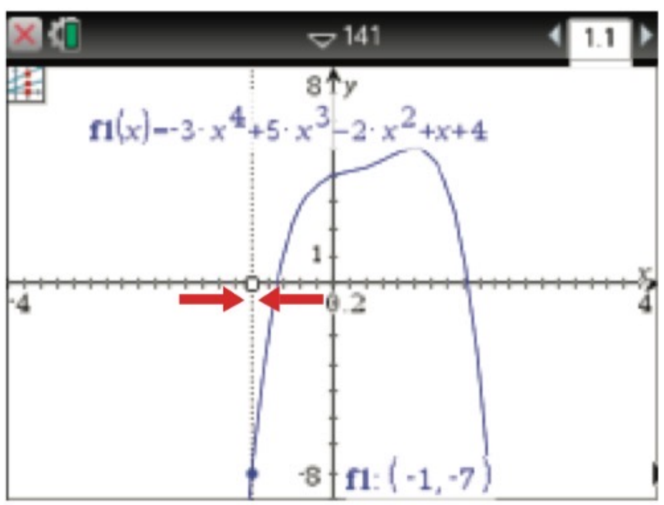
$$\lim_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4) = -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$

$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة

$f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$

هذه النتيجة.



[−4, 4] scl: 0.2 by [−8, 8] scl: 1

موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً

مثال ٢ : استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات

[−4, 4] scl: 0.2 by [−8, 8] scl: 1

(b $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^3-6}{x-x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامُها ليس صفرًا عندما $x = 3$ ، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-6}{x-x^2} = \frac{2(3)^3-6}{3-(3)^2}$$

$$= \frac{48}{-6}$$

$$= -8$$

(c $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 1$ ، فلا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

(d $\lim\limits_{x\to -6} \sqrt{x+5}$

بما أن $\lim\limits_{x\to -6} (x+5) = -6+5 = -1 < 0$ ، فلا يمكننا حساب $\lim\limits_{x\to -6}\sqrt{x+5}$ بالتعويض المباشر.

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

2A) $\lim_{x\to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$

2B) $\lim_{x\to -5} \dfrac{x+1}{x^2+3}$

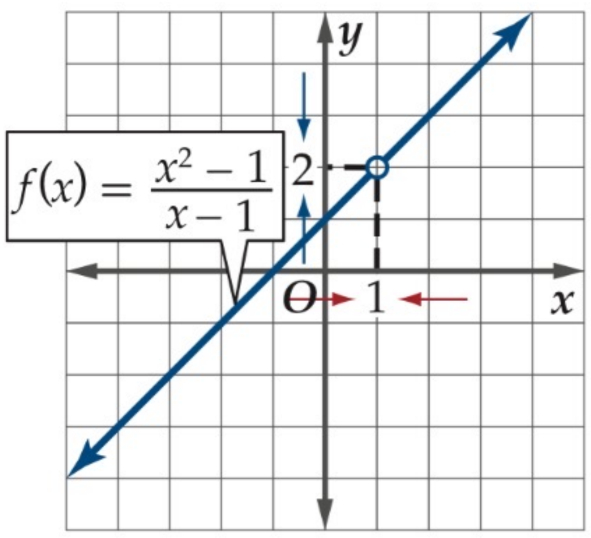
تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

2C) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

2D) $\lim_{x \to -8} \sqrt{x + 6}$

يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ **الصيغة غير المحددة**؛ لأنه لا يمكنك تحديد نهاية الدالة مع وجود صفر في المقام، ومثل هذه النهايات قد تكون موجودة ولها قيمة حقيقية، أو غير موجودة، أو متباعدة نحو ∞ أو $-\infty$، ويُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ أن $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$ موجودة وتساوي 2 .



على الرغم من أن الصيغة غير المحددة تظهر من خلال تطبيق خاطئ لخصائص النهايات، إلا أن الحصول على هذه الصيغة قد يرشدنا إلى الطريقة الأنسب لإيجاد النهاية.

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ، فبسِّط العبارة جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال ٣ : استعمال التحليل لحساب النهايات

احسب كل نهاية مما يأتي :

a) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - x - 20}{x + 4}$

ينتج عن التعويض المباشر $\dfrac{0}{0} = \dfrac{(-4)^2 - (-4) - 20}{-4 + 4}$ ؛ لذا فإن علينا تحليل المقدار جبريًّا، واختصار أي عوامل مشتركة بين البسط والمقام.

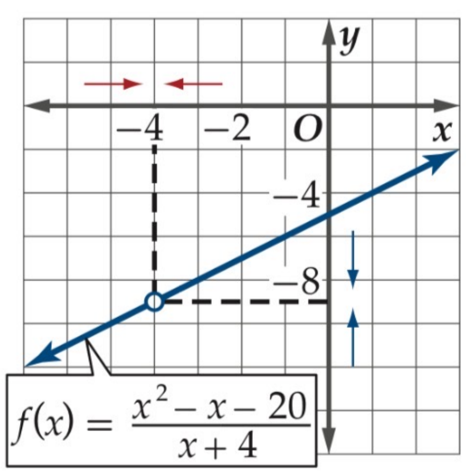
$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x-5)(x+4)}{x+4}$$ حلّل البسط

$$= \lim_{x \to -4} \frac{(x-5)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}$$ اختصر العامل المشترك

$$= \lim_{x \to -4} (x - 5)$$ بسّط

$$= (-4) - 5 = -9$$ عوّض وبسّط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 20}{x + 4}$ هذه النتيجة.



shikhah_math اعداد: شيخة المرزوقي

مثال ٣ : استعمال التحليل لحساب النهايات

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21}$

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0} = \frac{3-3}{3^3-3(3)^2-7(3)+21}$.

أعد تجميع المقام

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x^3-3x^2)+(-7x+21)}$$

أخرج العامل المشترك من الحدود المجمعة في المقام

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2(x-3)-7(x-3)}$$

أخرج العامل المشترك في المقام

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x^2-7)(x-3)}$$

اختصر

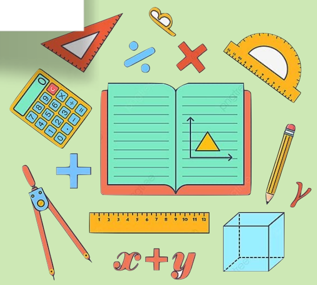
$$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{x-3}}{(x^2-7)\cancel{(x-3)}}$$

بسّط

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2-7}$$

عوّض وبسّط

$$= \frac{1}{(3)^2-7} = \frac{1}{2}$$



تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(3A $\lim_{x\to-2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x + 2}$

(3B $\lim_{x\to6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

ينتج عن اختصار العامل المشترك بين بسط ومقام الدالة النسبية دالة جديدة ، ففي المثال 3a ينتج عن الاختصار بين بسط ومقام الدالة f دالة جديدة g، حيث:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} \ , \ g(x) = x - 5$$

إن قيم هاتين الدالتين متساوية لجميع قيم x إلا عندما $x = -4$ ، فإذا تساوت قيم دالتين إلا عند قيمة وحيدة c ، فإن نهايتيهما عندما تقترب x من c متساويتان ؛ لأن قيمة النهاية لا تعتمد على قيمة الدالة عند النقطة التي تُحسبُ النهاية عندها؛ لذا فإن $\lim\limits_{x \to -4} (x-5) = \lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x+4}$.

والطريقة الأخرى لإيجاد نهايات ناتجِ التعويضِ فيها صيغة غير محددة ، هي إنطاق البسط أو المقام أولًا، ثم اختصار العوامل المشتركة.

مثال ٤ : استعمال انطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

احسب $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9}$ ؛ لذا أنطق البسط، ومن ثم اختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$ اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sqrt{x}+3$ ، والذي يمثل مرافق $\sqrt{x}-3$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$ بسّط

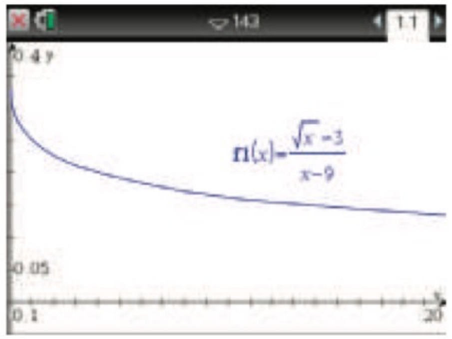
$$= \lim_{x\to 9} \frac{\cancel{x-9}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}$$ اختصر العامل المشترك

$$= \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$ بسّط

$$= \frac{1}{\sqrt{9}+3}$$ عوّض

$$= \frac{1}{6}$$ بسّط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ في الشكل المجاور هذه النتيجة.



[−0.1, 20] scl: 1 by [−0.05, 0.4] scl: 0.05

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

4A) $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(4B $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x}$

حساب النهايات عند المالانهاية: درست سابقًا أن لجميع الدوال الزوجية سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه، وكذلك الدوال الفردية لها جميعًا سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه.

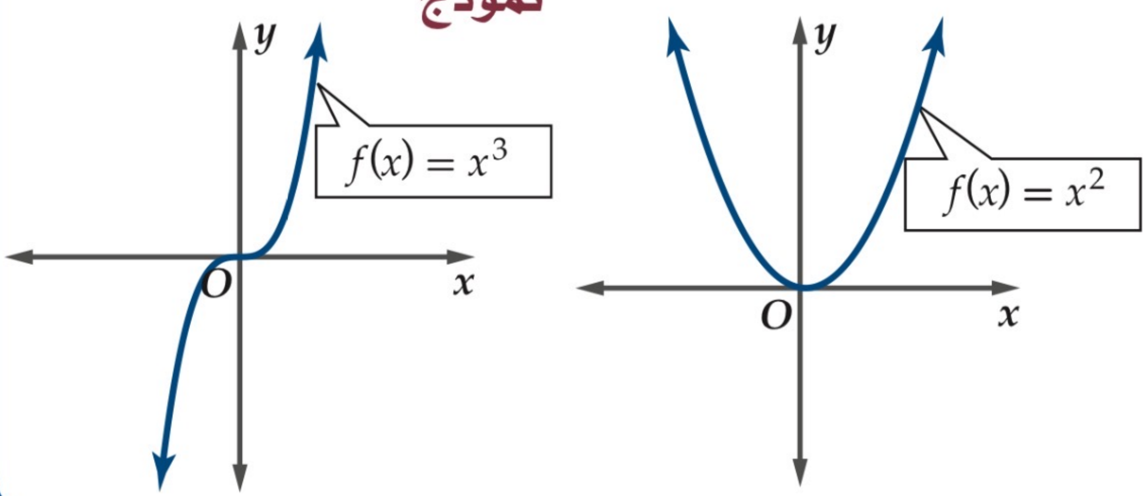
مفهوم أساسي

نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n،

- $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$، **إذا كان n عددًا زوجيًا.**
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$، **إذا كان n عددًا فرديًا.**

نموذج



إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود، وهو الحد ذو القوة الكبرى، ويمكننا وصف ذلك أيضًا باستعمال النهايات.

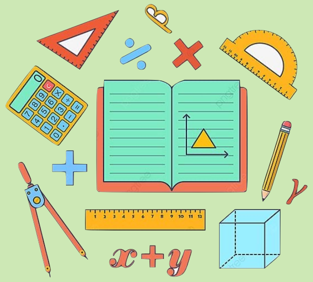
مفهوم أساسي

نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود ، فإن

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n \;,\; \lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

يمكنك استعمال هاتين الخاصيتين لحساب نهايات دوال كثيرات حدود عند المالانهاية. تذكَّر أن كون نهاية الدالة ∞ أو $-\infty$ لا يعني أنها موجودة، ولكنه وصف لسلوك منحناها؛ فإما أن يكون متزايدًا بلاحدود أو متناقصًا بلا حدود.



مثال ٥ : نهايات دوال كثيرات الحدود عند الما لانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3$$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$$=-\infty$$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(4+3x-x^2)$

$$\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)=\lim_{x\to\infty}-x^2$$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$$=-\lim_{x\to\infty}x^2$$ خاصية الضرب في ثابت

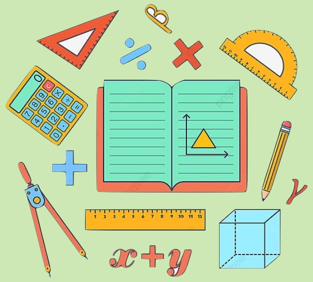
$$=-\infty$$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^4-3x)$

$$\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)=\lim_{x\to-\infty}5x^4$$ نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$$=5\lim_{x\to-\infty}x^4$$ خاصية الضرب في ثابت

$$=5\times\infty=\infty$$ نهاية دالة القوة عند المالانهاية



تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

5A) $\lim\limits_{x\to\infty} (-x^3 - 4x^2 + 9)$

5B) $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^6 + 3x^5 - x)$

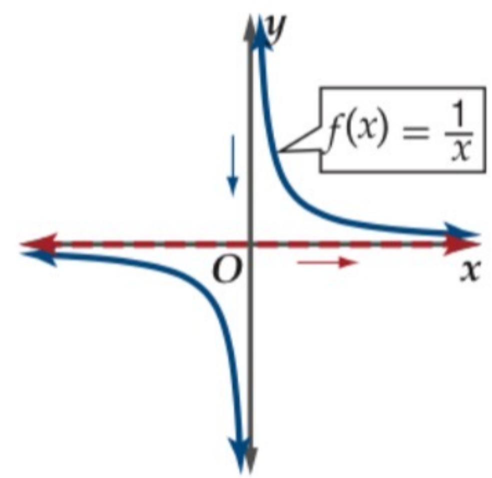
5C) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x - 6x^2 + 4x^5)$

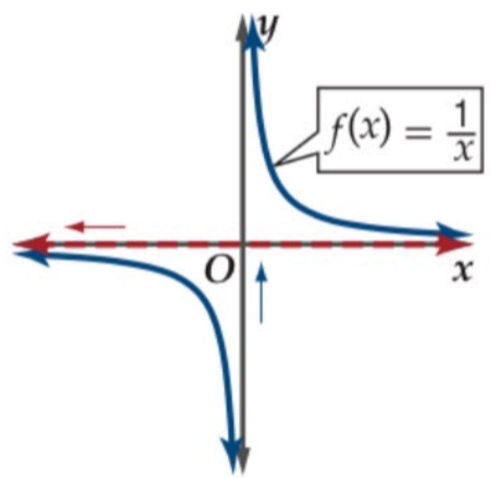
ولحساب نهاية دالة نسبية عند المالانهاية نحتاج إلى خصائص أخرى للنهايات.

مفهوم أساسي — نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

التعبير اللفظي: إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية هي صفر.

الرموز: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$





نتيجة: لأي عدد صحيح موجب n ، فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

مثال ٦ : نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+5}{8x-3}$

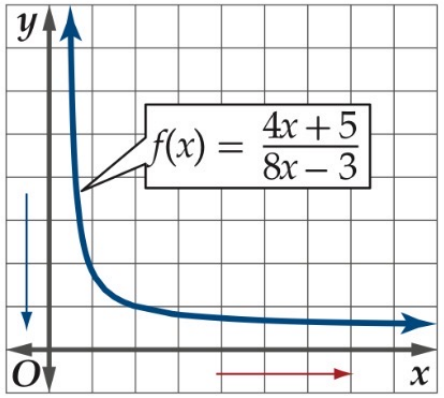
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{3}{x}}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{8-\frac{3}{x}}$$ بسّط

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 8 - 3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$$= \frac{4+5\cdot 0}{8-3\cdot 0} = \frac{1}{2}$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{4x+5}{8x-3}$ المجاور هذه النتيجة. ✔



مثال ٦ : نهايات الدوال النسبية عند الما لانهاية

(b $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2 - x}{3x^3 + 1}$

اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^3

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2 - x}{3x^3 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}$$

بسّط

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^3}}$$

خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$$= \frac{6 \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \to -\infty} 3 + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}}$$

نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

$$= \frac{6 \cdot 0 - 0}{3 + 0} = 0$$

مثال ٦ : نهايات الدوال النسبية عند الما لانهاية

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3 + 2x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{9}{x} + \frac{2}{x^3}}$$

اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^4

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 5}{9\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}$$

خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{5}{9 \cdot 0 + 2 \cdot 0} = \frac{5}{0}$$

نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

وحيث إن نهاية المقام صفر، فإننا نكون قد طبقنا خطأً خاصية القسمة، إلا أننا نعلم أنه عند قسمة العدد 5 على قيم صغيرة موجبة تقترب من الصفر، فإن الناتج سيكون كبيرًا بشكلٍ غير محدود، أي أن النهاية هي ∞.

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

6A) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x - 10}$

6B) $\lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 7}{5x + 1}$

6C) $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + 1}{2x^3 + 4x}$

إرشادات للدراسة

نهاية الدوال النسبية

توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية.

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية إما ∞ أو ∞−، بحسب إشارة الحد الرئيس في كل من البسط والمقام.

2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.

3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن النهاية صفر.

درست سابقًا أن المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية؛ لذا فإن نهاية المتتابعة غير المنتهية هي نهاية دالة عندما $n \to \infty$. إذا كانت النهاية موجودة ، فإن قيمة هذه النهاية هي العدد الذي تقترب منه المتتابعة . فمثلًا يمكن وصف المتتابعة $\ldots , \frac{1}{4} , \frac{1}{3} , \frac{1}{2} , 1 = a_n$ بـ $f(n) = \frac{1}{n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب . وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، فإن المتتابعة تقترب من الصفر.

مثال ٧ : نهايات المتتابعات

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

a) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+5}$

لحساب نهاية المتتابعة، أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{n+5}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 5\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{3+0}{1+5\cdot 0} = 3$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 3 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 3 .

تحقق كوّن جدولًا، واختر قيمًا متعددة لـِ n.

n	1	20	40	60	80	90	100	1000	10000
a_n	0.6667	2.44	2.6889	2.7846	2.8353	2.8526	2.8667	2.9861	2.9986

نلاحظ أن حدود المتتابعة تقترب من العدد 3 كلما كبرت n .

مثال ٧ : نهايات المتتابعات

(b $b_n = \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

الحدود الخمسة الأولى بصورة تقريبية هي 1.8 ,1.953 ,2.222 ,2.813 ,5 . والآن أوجد نهاية المتتابعة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\right]$$ ربّع ثنائية الحد

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$$ اضرب

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + 10\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 5\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n^4 ، ثم استعمل خصائص القسمة ، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{5}{4} = 1.25$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 1.25 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 1.25.

تحقَّق كوّن جدول قيم، واختر قيمًا كبيرة لـ n . قيم (b_n في الجدول أدناه مقربة إلى أقرب جزء من مئة)

n تقترب من ∞

n	10	100	1000	10000	100000
b_n	1.51	1.28	1.25	1.25	1.25

تحقق من فهمك

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

7A) $a_n = \dfrac{4}{n^2+1}$

7B) $b_n = \dfrac{2n^3}{3n+8}$

7C) $c_n = \dfrac{9}{n^3}\left[\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

مسائل مهارات التفكير العليا

51) **تبرير:** إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية، فهل العلاقة $\lim_{x \to c} r(x) = r(c)$ صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك.