طاب صباحكم ، ابتسموا لقد ابتدأ يوم جديد من أعماركم ،

تفاءلوا بما تحبون أن يكون ، فوضوا أمركم لله دائماً .

موضوع الدرس: المساحة تحت المنحنى والتكامل

فيما سبق

درستُ حساب النهايات جبريًّا باستعمال خصائصها. (الدرس 2–4)

والآن

- أقرِّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.

المفردات

التجزيء المنتظم	regular partition
التكامل المحدد	definite integral
الحد الأدنى	lower limit
الحد الأعلى	upper limit
مجموع ريمان الأيمن	right Riemann sum
التكامل	integration

لماذا

التكلفة الحدية (الهامشية) هي التكلفة الإضافية المترتبة على إنتاج وحدة إضافية واحدة من منتج ما، ويمكن إيجاد معادلة التكلفة الحدية باشتقاق معادلة التكلفة الحقيقية للمنتج. تُمثل الدالة $f(x) = 10 - 0.002x$ التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من كتاب ما بالريال .

المساحة تحت منحنى سبق أن درست في الهندسة طريقة حساب مساحات الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف، كما درست حساب مساحات بعض الأشكال المركبة التي تتكون من أشكال أساسية، إلا أن العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية، مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة كالمستطيل. فمثلاً يمكننا تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال مستطيلات متساوية العرض.

مثال ١

المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال 4، 6، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

مثّل الدالة والمستطيلات كما في الأشكال التالية، باتباع الخطوات التالية:

1) أوجد طول الفترة $[0, 12]$ بطرح بدايتها من نهايتها.

2) أوجد عرض كل مستطيل بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات، فمثلًا إذا كان عدد المستطيلات 4 نقسم: $12 \div 4 = 3$

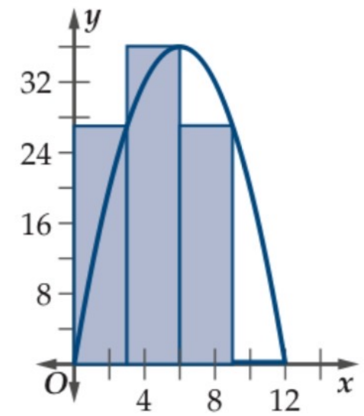
3) قسِّم الفترة $[0, 12]$ إلى 4 فترات (لأربعة مستطيلات) طول كل منها يساوي 3

4) ارسم على كل فترة جزئية مستطيلًا أحد بعديه يساوي طول هذه الفترة، والبعد الآخر يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة.

فمثلًا ارتفاعات المستطيلات في الشكل (1) هي $f(3), f(6), f(9), f(12)$. ويمكننا استعمال ارتفاعات المستطيلات وأطوال قواعدها لتقريب المساحة المطلوبة.

مثال ١

المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات



الشكل (1)

المساحة باستعمال 4 مستطيلات

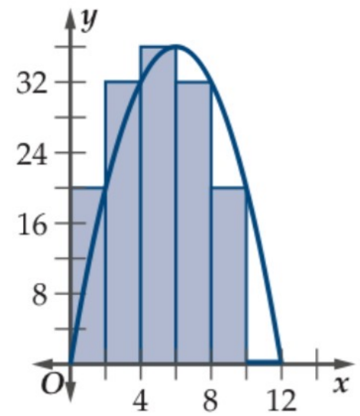
$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$

$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$

$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$

$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 270 وحدة مربعة.



الشكل (2)

المساحة باستعمال 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$

$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$

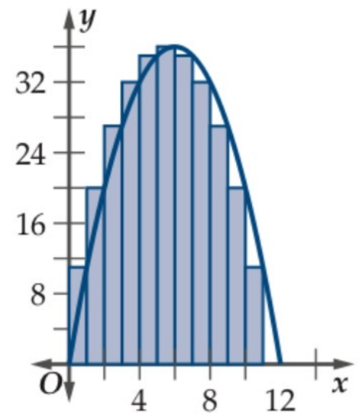
$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$

$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$

$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$

$R_6 = 2 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 280 وحدة مربعة.



الشكل (3)

المساحة باستعمال 12 مستطيلًا

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 11$

$R_2 = 1 \cdot f(2) = 20$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 27$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 32$

$R_5 = 1 \cdot f(5) = 35$

$R_6 = 1 \cdot f(6) = 36$

$R_7 = 1 \cdot f(7) = 35$

$R_8 = 1 \cdot f(8) = 32$

$R_9 = 1 \cdot f(9) = 27$

$R_{10} = 1 \cdot f(10) = 20$

$R_{11} = 1 \cdot f(11) = 11$

$R_{12} = 1 \cdot f(12) = 0$

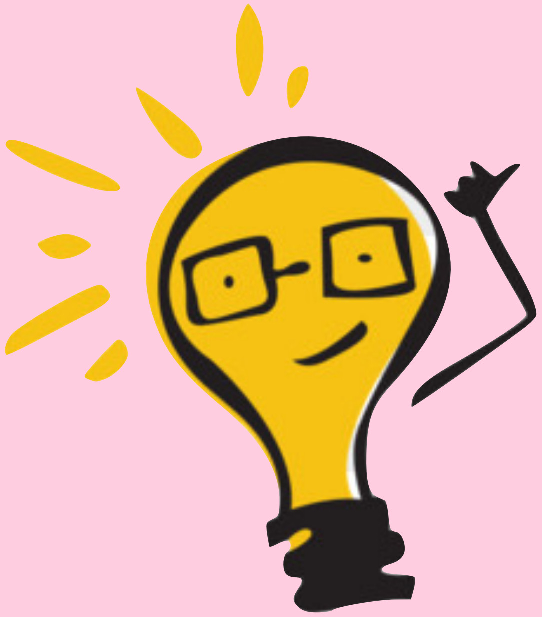
المساحة الكلية 286 وحدة مربعة

أي أن المساحة التقريبية باستعمال 4 ، 6 ، 12 مستطيلًا هي بالترتيب: 270 وحدة مربعة، 280 وحدة مربعة، 286 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

1) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال 6، 8، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

موضوع الدرس: المساحة تحت المنحنى والتكامل



لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضًا تمثِّل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريبًا أدق للمساحة الكلية. وكما استعملنا الأطراف اليمنى لقاعدة مستطيل لتحديد ارتفاعاتها ، فإنه يمكننا أيضًا استعمال أطرافها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها وهذا قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

إن استعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها قد يؤدي إلى إضافة أجزاء لا تقع بين المنحنى والمحور x ، أو حذف أجزاء تقع بين المنحنى والمحور x . ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين.

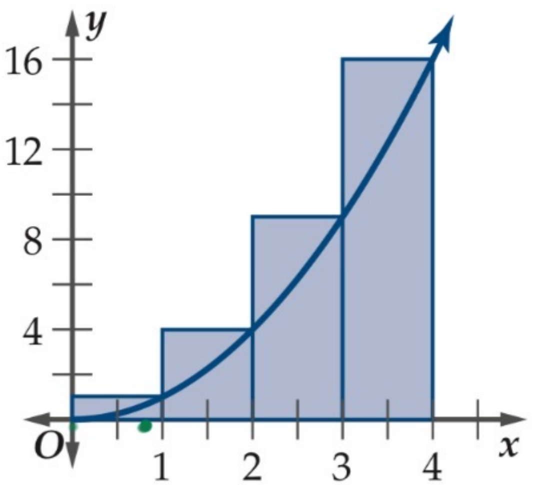
مثال ٢

المساحة تحت منحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

إن استعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة ينتج عنه 4 مستطيلات سواء أكانت الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات هي التي تحدد ارتفاعاتها. ويوضح الشكل (1) المستطيلات باستعمال الأطراف اليمنى، في حين يوضح الشكل (2) المستطيلات باستعمال الأطراف اليسرى.

مثال ٢ المساحة تحت منحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات



الشكل (1)

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

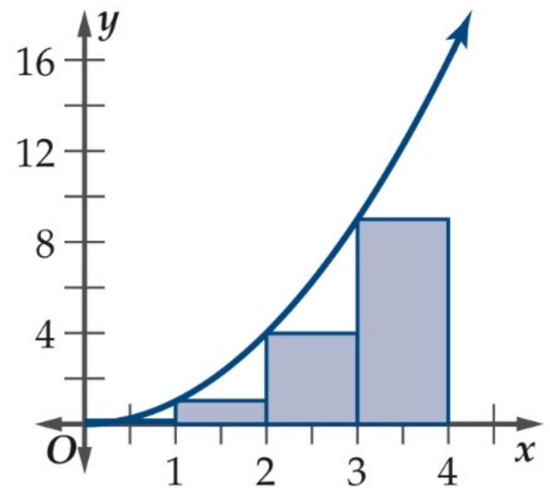
$R_1 = 1 \cdot f(1) = 1$

$R_2 = 1 \cdot f(2) = 4$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 9$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 16$

المساحة الكلية 30 وحدة مربعة



الشكل (2)

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$

$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$

$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$

$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$

المساحة الكلية 14 وحدة مربعة

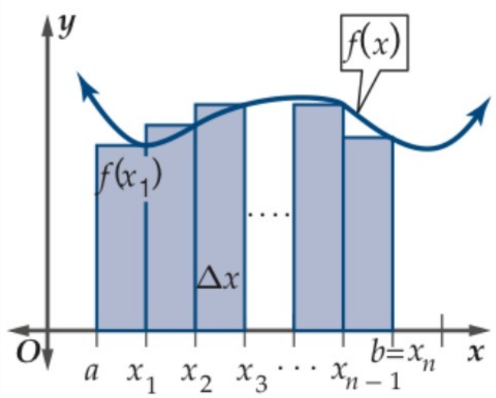
أي أن المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 30 وحدة مربعة، بينما المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليسرى هي 14 وحدة مربعة، وهذان تقديران تقع المساحة بينهما، وبحساب الوسط للقيمتين نحصل على تقريب أفضل للمساحة، وهو 22 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

2) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x في الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

عند تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x، فإنه يمكننا استعمال أي نقطة على قاعدة المستطيل لتحديد ارتفاعه، إلا أن النقاط الأكثر شيوعًا هي نقطتا الطرفين الأيمن والأيسر، ونقطة المنتصف.

التكامل لاحظت في مثال 1 أنه كلما قل عرض المستطيلات، فإن مساحتها الكلية تقترب من المساحة الفعلية تحت المنحنى، ومن ذلك نستنتج أن المساحة المطلوبة هي نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر.



في الشكل المجاور، قُسِّمت الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول، وتُسمَّى هذه التجزئة **التجزيء المنتظم**. إن طول الفترة الكلية من a إلى b هو $b-a$، وبذلك يكون طول كل فترة جزئية (عرض كل مستطيل من المستطيلات التي عددها n) هو $\frac{b-a}{n}$، ويُرمز له بالرمز Δx. وبما أن ارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن لقاعدة المستطيل، فإن ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$، وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$، وهكذا يكون ارتفاع المستطيل الأخير $f(x_n)$.

يمكن الآن حساب مساحة كل مستطيل من خلال ضرب Δx في ارتفاع ذلك المستطيل، أي أن مساحة المستطيل الأول هي $f(x_1)\,\Delta x$، ومساحة المستطيل الثاني هي $f(x_2)\,\Delta x$، وهكذا. وتُعطى المساحة الكلية A للمستطيلات بمجموع مساحاتها، ويمكن كتابتها باستعمال رمز المجموع.

$$A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$ اجمع المساحات

$$A = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$ أخرج العامل المشترك Δx

$$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$ استعمل رمز المجموع

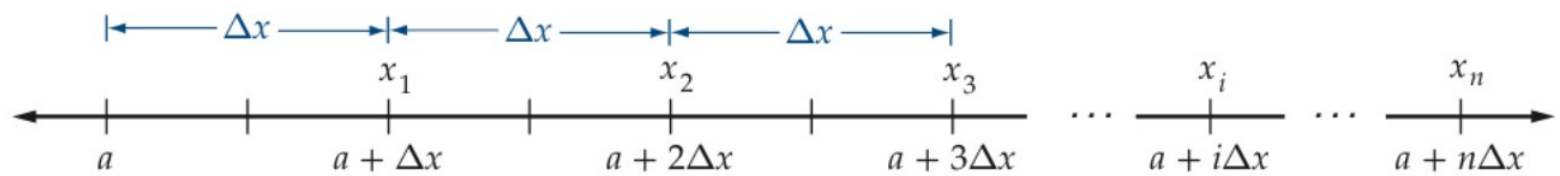
$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$ خواص رمز المجموع

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

تُقرأ العبارة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ كالآتي مجموع حواصل ضرب $f(x_i)$ في Δx من $i=1$ إلى $i=n$.

ولتسهيل الحسابات مستقبلًا، فإنه يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي x_i. فبما أن عرض أيٍّ من المستطيلات هو Δx ، ويساوي الفرق بين أي قيمتين متتاليتين من قيم x_i . وبالنظر إلى خط الأعداد أدناه:



يمكننا ملاحظة أن $x_i = a + i\Delta x$. ولهذه العلاقة أهميتها عند إيجاد المساحة تحت منحنى أي دالة لاحقًا.

لاحظ أنه كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالانهاية، وتُسمَّى هذه النهاية **التكامل المحدد**، ويعبَّر عنها برمزٍ خاص.

قراءة الرياضيات

رمز التكامل المحدد

يقرأ الرمز $\int_a^b f(x)dx$ التكامل من a إلى b للدالة $f(x)$ بالنسبة لـ x

مفهوم أساسي — التكامل المحدد

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \,,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

حيث a **الحد الأدنى**، و b **الحد الأعلى**، وتُسمَّى هذه الطريقة **مجموع ريمان الأيمن**.

تنبيه!

المجموع

إن مجموع عدد ثابت c هو $c\,n$، فمثلاً $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5\,n$

سُمي مجموع ريمان بهذا الاسم نسبةً للعالم الألماني بيرنارد ريمان (1866 – 1826). والذي يُعزى إليهِ إيجاد صيغة لتقريب المساحة المحصورة باستعمال النهايات. ويمكننا تعديل الصيغة باستعمال الأطراف اليُسرى أو نقاط المنتصف لتحديد ارتفاعات المستطيلات.

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وستُسهِّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد.

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad , \text{ عدد ثابت } c$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$$

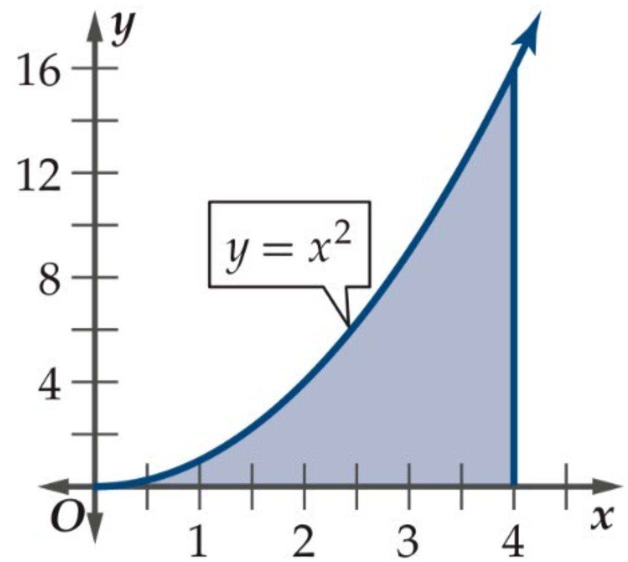
تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i \text{ , عدد ثابت } c$$

مثال ٣

المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ؛ أي $\int_0^4 x^2\, dx$.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n} \qquad b = 4 , a = 0$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \qquad \text{صيغة } x_i$$

$$= 0 + i\frac{4}{n} = \frac{4i}{n} \qquad a = 0 , \Delta x = \frac{4}{n}$$

احسب التكامل المحدد الذي يُعطي المساحة المطلوبة.

مثال ٣

المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

$\int_0^4 x^2\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$	تعريف التكامل المحدد
$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i)^2\,\Delta x$	$f(x_i) = x_i^2$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2 \left(\frac{4}{n}\right)$	$x_i = \frac{4i}{n}$, $\Delta x = \frac{4}{n}$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2$	خصائص المجموع
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2}$	وزّع القوة
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} i^2\right)$	خصائص المجموع
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$	$\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16n\,(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right)$	اضرب ووزّع
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3}$	اضرب
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2}$	اقسم
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{64}{6}\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right)$	حلّل
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{64}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$	اقسم على n^2
$= \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{64}{6}\right)\left[\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \left(\lim\limits_{n\to\infty} 3\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right]$	خصائص النهايات
$= \frac{64}{6}\,[2 + 3(0) + 0] = \frac{64}{3} \approx 21.33$	

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\int_0^1 3x^2\,dx$

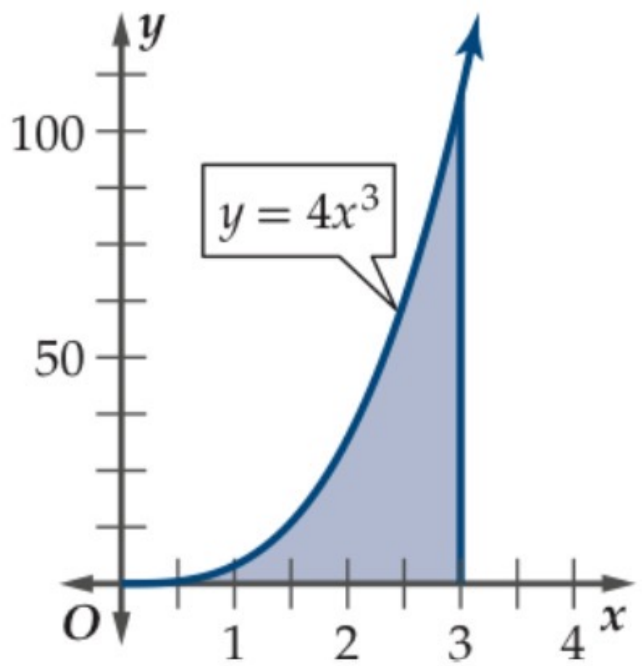
(3B $\int_0^3 x\,dx$

مثال ٤ المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x، في الفترة $[1, 3]$ ؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$	صيغة Δx
$= \dfrac{3-1}{n} = \dfrac{2}{n}$	$b = 3 , a = 1$
$x_i = a + i\,\Delta x$	صيغة x_i
$= 1 + i\,\dfrac{2}{n} = 1 + \dfrac{2i}{n}$	$a = 1 , \Delta x = \dfrac{2}{n}$



احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

مثال ٤

المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

$$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$ تعريف التكامل المحدد

$f(x_i)=4(x_i)^3$ $$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3\Delta x$$

$x_i = 1+\frac{2i}{n},\ \Delta x=\frac{2}{n}$ $$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$$

خصائص المجموع $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$$

مفكوك $\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$ $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1+3\left(\frac{2i}{n}\right)+3\left(\frac{2i}{n}\right)^2+\left(\frac{2i}{n}\right)^3\right]$$

بسّط $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{6i}{n}+\frac{12i^2}{n^2}+\frac{8i^3}{n^3}\right)$$

خصائص المجموع $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{12i^2}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^3}{n^3}\right)$$

خصائص المجموع $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^3\right)$$

صيغ المجموع $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$$

وزّع واضرب $$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n}{n}+\frac{48n(n+1)}{2n^2}+\frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3}+\frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right)$$

بسّط $$= \lim_{n\to\infty}\left(8+\frac{24(n+1)}{n}+\frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2}+\frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right)$$

اقسم $$= \lim_{n\to\infty}\left[8+24\left(1+\frac{1}{n}\right)+16\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+16\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

خصائص النهايات $$= \lim_{n\to\infty}8+24\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)+16\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+16\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

بسّط $$= 8+24(1+0)+16(2+0+0)+16(1+0+0)=80$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 80 وحدة مربعة.

تنبيه!

النهايات

عند تقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى باستعمال المجاميع، أوجد مجاميع قيم i قبل توزيع Δx أو أي ثوابت أخرى.

تحقق من فهمك

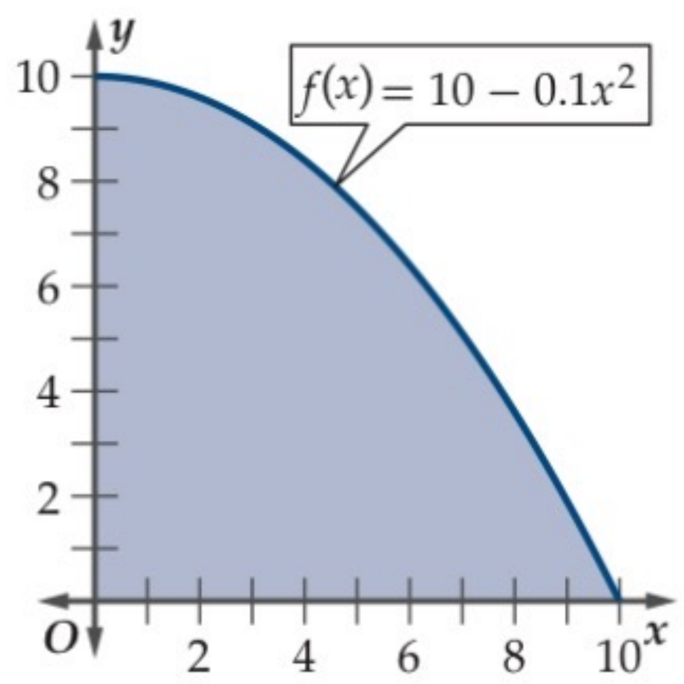
استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(4A $\int_1^3 x^2\,dx$

(4B $\int_2^4 x^3\,dx$

مثال ٥ من واقع الحياة

المساحة تحت منحنى



بلاط: يكلِّف تبليط القدم المربعة الواحدة من فناء منزل بالجرانيت 22.4 ريالًا. إذا تم تبليط ممرين متطابقين في فناء المنزل بالجرانيت، وكانت المساحة بالقدم المربعة لأيٍّ من الممرين تُعطى بالتكامل $\int_0^{10} (10 - 0.1x^2)\, dx$ ، فما تكلفة تبليط الممرين؟

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{10-0}{n} = \frac{10}{n} \qquad a = 0 , b = 10$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \qquad \text{صيغة } x_i$$

$$= 0 + i\frac{10}{n} = \frac{10i}{n} \qquad a = 0 , \Delta x = \frac{10}{n}$$

مثال ٥ من واقع الحياة

المساحة تحت منحنى

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$ تعريف التكامل المحدد

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(10-0.1x_i^2)\Delta x$$ $f(x_i) = 10 - 0.1x_i^2$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[10-0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{10}{n}$$ $x_i = \frac{10i}{n}, \Delta x = \frac{10}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(10-\frac{10i^2}{n^2}\right)$$ استعمل خصائص المجموع وبسّط

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\sum_{i=1}^{n}\frac{10i^2}{n^2}\right)$$ خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\frac{10}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)$$ خصائص المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(10n-\frac{10}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$ صيغ المجموع

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{100n}{n}-\frac{100n(2n^2+3n+1)}{6n^3}\right)$$ خاصية التوزيع

$$= \lim_{n\to\infty}\left(100-\frac{50(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$$ اقسم على n

$$= \lim_{n\to\infty}\left[100-\frac{50}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$$ اقسم على n^2

$$= \lim_{n\to\infty}100-\frac{50}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$ خصائص النهايات

$$= 100-\frac{50}{3}(2+0+0) = 66\frac{2}{3} \approx 66.67$$ بسّط

أي أن مساحة أيٍّ من الممرين تساوي $66.67\ ft^2$ تقريبًا؛ لذا فإن تكلفة تبليط الممرين هي $(66.67 \times 2) \times 22.4$ ريال أو 2986.8 ريالًا تقريبًا.

الربط مع الحياة

الجرانيت

الجرانيت هو صخر ناري يتميز بنسيج خشن يكسبه مظهرًا فريدًا، وهو مقاوم لعوامل الأكسدة، لذلك يستعمل في تبليط الأرضيات.

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

تحقق من فهمك

5) طلاء: لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ \text{ft}^2$ ، هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربعة تُعطَى بالتكامل $\int_0^5 (5 - 0.2x^2)dx$ ؟ برِّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **اكتب:** اكتب ملخصًا للخطوات المتبعة لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x على فترة معطاة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(34 **تحدٍّ:** أوجد $\int_0^t (x^2 + 2)\, dx$.