

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها



المملكة العربية السعودية

رياضيات ١

التعليم الثانوي
(نظام المقررات)

(البرنامج المشترك)

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة ٢٠٢٢ - ١٤٤٤

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم

رياضيات ١ (التعليم الثانوي - نظام المقررات - (البرنامج المشترك)).
وزارة التعليم. - الرياض ، ١٤٣٧ هـ
٢٧٤ ص : ٥٢١ × ٢٧٤ سم
ردمك : ٩٧٨-٦٠٣-٥٠٨-٣٤٧

- الرياضيات - كتب دراسية ٢- التعليم الثانوي -
السعودية - كتب دراسية أ. العنوان
١٤٣٧ / ١٠٣٥٥ ديوبي ٥١٠،٧١٢

رقم الإيداع: ١٤٣٧ / ١٠٣٥٥

ردمك: ٩٧٨-٦٠٣-٥٠٨-٣٤٧

حول الغلاف

تسقط أشعة الشمس المتوازية على الطبق الشمسي
فترتد مكونة زوايا متاظرة وأخرى متحالفه.
تدرس هذه الزوايا في هذا الصف.



حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم

www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"



IEN.EDU.SA

تواصل بمقترناتك لتطوير الكتاب المدرسي



FB.T4EDU.COM



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





وزارة التعليم

Ministry of Education

2022 - 1444

المقدمة

الحمد لله والصلوة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهئُّ لـلطالب فرص اكتساب مستويات علية من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًّا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءً من المرحلة الابتدائية، سعيًّا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطالب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين الموقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلامًا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، وحل المشكلات، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في الموقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ونحن إذ نقدم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لتأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولی التوفيق



التبير والبرهان

الفصل
1

11	التهيئة للفصل 1
12	1-1 التبير الاستقرائي والتخمين
19	1-2 المنطق
26	1-3 العبارات الشرطية
36	توسيع 1-3 معلم الهندسة : العبارات الشرطية الثانية
37	1-4 التبير الاستنتاجي
45	1-5 المسلمات والبراهين الحرة
52	اختبار منتصف الفصل
53	1-6 البرهان الجبري
60	1-7 إثبات علاقات بين القطع المستقيمة
66	1-8 إثبات علاقات بين الزوايا
74	دليل الدراسة والمراجعة
79	اختبار الفصل
80	الإعداد للاختبارات
82	اختبار تراكمي

الفهرس

التوازي والتعامد

الفصل
2

85	التهيئة للفصل 2
86	2-1 المستقيمان والقاطع
92	استكشاف 2-2 معلم برمجيات الهندسة : الزوايا والمستقيمات المتوازية
94	2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية
102	2-3 إثبات توازي مستقيمين
108	اختبار منتصف الفصل
109	2-4 ميل المستقيم
117	2-5 صيغ معادلة المستقيم
125	توسيع 2-5 معلم الهندسة : معادلة العمود المنصف
126	2-6 الأعمدة والمسافة
135	دليل الدراسة والمراجعة
139	اختبار الفصل
140	الإعداد للاختبارات
142	اختبار تراكمي

المثلثات المتطابقة

الفصل
3

الفهرس

145	التهيئة للفصل 3
146	3-1 تصنيف المثلثات
153	استكشاف 3-2 معمل الهندسة : زوايا المثلثات
154	3-2 زوايا المثلثات
162	3-3 المثلثات المتطابقة
170	3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS
178	اختبار منتصف الفصل
179	3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS
186	توسيع 3-5 معمل الهندسة : تطابق المثلثات القائمة
188	3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع
196	3-7 المثلثات والبرهان الأحادي
202	دليل الدراسة والمراجعة
207	اختبار الفصل
208	الإعداد للاختبارات
210	اختبار تراكمي

العلاقات في المثلث

الفصل
4

213	التهيئة للفصل 4
214	استكشاف 4-1 معمل الهندسة : إنشاء المنصّفات
215	4-1 المنصّفات في المثلث
224	استكشاف 4-2 معمل الهندسة : إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات
225	4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث
233	4-3 المتباينات في المثلث
240	اختبار منتصف الفصل
241	4-4 البرهان غير المباشر
248	استكشاف 4-5 معمل الحاسبة البيانية : متباينة المثلث
249	4-5 متباينة المثلث
255	4-6 المتباينات في مثلثين
263	دليل الدراسة والمراجعة
267	اختبار الفصل
268	الإعداد للاختبارات
270	اختبار تراكمي
272	الصيغ والرموز

ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات هندسية، تشمل ما يأتي:

- **المنطق الرياضي** واستعماله في البراهين الهندسية والجبرية.
- العلاقات بين **الزوايا والمستقيمات**.
- العلاقات في **المثلث**، وتطابق المثلثات، وتشابهها.
- التحويلات الهندسية والتماثل في الأشكال الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- خواص **الأشكال الرباعية** ونظريات **الدائرة**.

وفي أثناء دراستك، ستعلم طرائق لحل المسائل الهندسية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.



كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- اقرأ فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد
اقرأ فقرة **والآن**.
- ابحث عن **المفردات** المطللة باللون الأصفر باللغتين العربية والإنجليزية ، واقرأ تعريف كل منها.
- راجع المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسية.
- ارجع إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- ارجع إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتنذكر نطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- اربط بين المعنى اللغوي والمعنى الرياضي للمفردة، من خلال فقرة **ربط المفردات**
- تذكر بعض المفردات التي تعلمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات**
- ارجع إلى فقرة **تقبيل** دائمًا لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجتنبها.
- ارجع إلى **الصيغ والرموز** في آخر الكتاب لتعرف الرموز التي تعلمتها في المرحلة المتوسطة وما يقابلها في المرحلة الثانوية، ولتعرف أيضًا أهم الصيغ والرموز التي وردت في هذا الكتاب.
- ارجع إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدريب وحل المسائل** ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابها.
- تُفذ **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس الرئيسية في **دليل الدراسة والمراجعة**. أو بعد مراجعة ما دوّنته من أفكار في **المخطوبات**
- استعن بصفحتي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلّها .
- تُنفذ **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسية للفصل وما قبله من فصول.



التبير والبرهان

Reasoning and Proof

فيما سبق:

درست القطع المستقيمة وعلاقات الزوايا.

والآن:

- أكتب تخمينات، وأجد أمثلة مضادة للعبارات.
- أستعمل التبير الاستنتاجي للتوصل إلى نتيجة صحيحة.
- أكتب براهين تتضمن نظريات القطع المستقيمة والزوايا.

لماذا؟

العلوم والطبيعة :

يستعمل علماء الأحياء التبريرات الاستنتاجية والاستقرائية لاتخاذ القرارات، ووضع الاستنتاجات المنطقية عن مملكة الحيوانات.

المطويات

منظم أفكار

التبير والبرهان: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 1، مبتدئاً بورقة من دفتر الملاحظات.

3 عنون الأشرطة كما في الشكل أدناه.



1 اطو الورقة طولياً، بحيث تكون حافتها قص خمسة أشرطة كما يظهر في الشكل أدناه.





التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

اختبار سريع

مثال 1

. $x = 6$ إذا كانت $x^2 - 2x + 11$

$$\begin{aligned} \text{العبارة المعطاة} & \quad x^2 - 2x + 11 \\ \text{عَوْض} & = (6)^2 - 2(6) + 11 \\ \text{أوجد قيم القوى} & = 36 - 2(6) + 11 \\ \text{اضرب} & = 36 - 12 + 11 \\ \text{بسط} & = 35 \end{aligned}$$

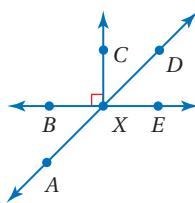
مثال 2

. $36x - 14 = 16x + 58$

$$\begin{aligned} \text{المعادلة المعطاة} & \quad 36x - 14 = 16x + 58 \\ \text{اطرح } 16x \text{ من الطرفين} & \quad 36x - 14 - 16x = 16x + 58 - 16x \\ \text{بسط} & \quad 20x - 14 = 58 \\ \text{اجمع } 14 \text{ للطرفين} & \quad 20x - 14 + 14 = 58 + 14 \\ \text{بسط} & \quad 20x = 72 \\ \text{اقسم الطرفين على } 20 & \quad \frac{20x}{20} = \frac{72}{20} \\ \text{بسط} & \quad x = 3.6 \end{aligned}$$

مثال 3

، $m\angle BXA = (3x + 5)^\circ$ ، $m\angle DXE = 56^\circ$.



زاویتان متقابلتان بالرأس
عَوْض
اطرح 5 من الطرفين
اقسم الطرفين على 3

$$\begin{aligned} m\angle BXA &= m\angle DXE \\ 3x + 5 &= 56 \\ 3x &= 51 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي عند قيمة x المعلنة.

$$180(x - 2), x = 8 \quad (2) \quad 4x + 7, x = 6 \quad (1)$$

$$\frac{x(x - 3)}{2}, x = 6 \quad (4) \quad 5x^2 - 3x, x = 2 \quad (3)$$

$$x + (x + 1) + (x + 2), x = 3 \quad (5)$$

اكتب كل تعبير لفظي مما يأتي على صورة عبارة جبرية:

(6) أقل من خمسة أمثال عدد بثمانية.

(7) أكثر من مربع عدد بثلاثة.

حل كل معادلة فيما يأتي:

$$8x - 10 = 6x \quad (8)$$

$$18 + 7x = 10x + 39 \quad (9)$$

$$3(11x - 7) = 13x + 25 \quad (10)$$

$$\frac{3}{2}x + 1 = 5 - 2x \quad (11)$$

(12) **قراءة:** اشتربت عائشة 4 كتب بقيمة 52 ريالاً؛ لتقرأها في أثناء الإجازة الصيفية. إذا كانت الكتب متساوية السعر، فاكتب معادلة لإيجاد ثمن الكتاب الواحد، ثم حلّها.

استعمل الشكل المجاور في مثال 3 للإجابة عما يأتي:

(13) عَيْن زاویتين منفرجتين متقابلتين بالرأس.

(14) عَيْن زاویتين متتامتين.

(15) عَيْن زاویتين متجاورتين متكاملتين في آن واحد.

(16) إذا كان: $m\angle EXA = (3x + 2)^\circ$ و $m\angle DXB = 116^\circ$ ، فأوجد قيمة x .

(17) إذا كان: $m\angle CXD = (6x - 13)^\circ$ و $m\angle DXE = (10x + 7)^\circ$ ، فأوجد قيمة x .



التبير الاستقرائي والتخمين

Inductive Reasoning and Conjecture



رابط الدرس الرقمي

**لماذا؟**

في أبحاث التسويق، يتم تحليل إجابات مجموعة من الأشخاص عن أسئلة محددة حول المنتج، ثم يتم البحث عن نمطية معينة في الإجابات حتى الوصول إلى نتيجة. وتسمى هذه العملية التبير الاستقرائي.

التخمين: التبير الاستقرائي هو تبير يستعمل فيه أمثلة محددة للوصول إلى نتيجة. وعندما تفترض استمرار نمط على نفس الوتيرة، فإنك تستعمل التبير الاستقرائي، وتُسمى العبارة النهائية التي توصلت إليها باستعمال التبير الاستقرائي **تخميناً**.

فيما سبق:

درستُ استعمال البيانات
لإيجاد أنماط والتوصيل إلى
توقعات.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أكتب تخمينات مبنية على التبير الاستقرائي.
- أجد أمثلة مضادة.

المفردات:

التبير الاستقرائي

inductive reasoning

التخمين

conjecture

المثال المضاد

counterexample

مثال 1**الأنماط والتخمين**

اكتب تخميناً يصف النمط في كلٌّ من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٌ منها.

(a) مواعيد وصول الحافلات إلى محطة الركوب هي: 8:30 صباحاً، 9:10 صباحاً، 9:50 صباحاً، 10:30 صباحاً،

الخطوة 1: ابحث عن نمط.

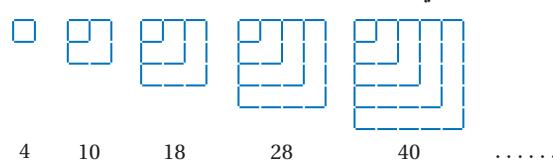


الخطوة 2: ضع تخميناً: يزيد موعد وصول الحافلة 40 دقيقة عن موعد وصول الحافلة التي سبقتها.

الخطوة 3: جد الحد التالي:

موعد وصول الحافلة التالية سوف يكون $10:30 + 40$ دقيقة = 11:10 صباحاً.

الحد التالي هو: 11:10 صباحاً.



(b)

الخطوة 1: ابحث عن نمط



الخطوة 2: ضع تخميناً: يزيد عدد القطع المستقيمة في كل شكل عن الشكل الذي يسبقه بمقدار الزيادة السابقة مضافاً لها 2.

الخطوة 3: جد الحد التالي: يزيد عدد القطع المستقيمة في الشكل التالي على ساقبه بمقدار $12 + 2$ أي 14 قطعة مستقيمة.



الحد التالي هو شكل يحتوي على 14 قطعة مستقيمة، وهو:

تحقق: ارسم الشكل التالي؛ لكي تتحقق من صحة تخمينك. ✓

مراجعة المفردات**المتتابعة**

هي مجموعة من الأعداد
أو الأشياء المنظمة
بترتيب معين.

**تاريخ الرياضيات**

أبو علي الحسن بن الهيثم
430 - 354 هـ

عالم موسوعي من
أعظم علماء الرياضيات
والفيزياء، اعتمد في
بحوثه على منهجين هما:
الاستقراء، والاستنباط
وفي الحالتين كان يعتمد
على التجربة والملاحظة.

إرشادات للدراسة

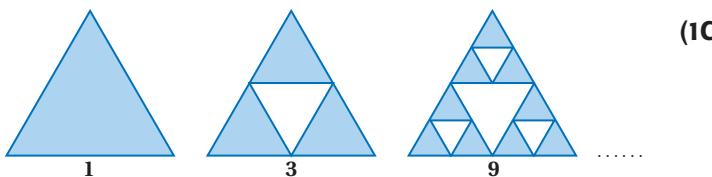
اخبر جميع العمليات الحسابية الأساسية بما فيها الجذور والقوى عند البحث عن قاعدة تحدد النمط، وقد تتضمن القاعدة، استعمال عمليتين حسابيتين.

تحقق من فهمك

اكتب تخميناً يصف النمط في كلٌّ من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٌّ منها.

(1A) متتابعة أشهر: صفر، رجب، ذو الحجة، جمادى الأولى،

$$(1B) 10, 4, -2, -8, \dots$$



لوضع تخمينات جبرية أو هندسية يجب أن تقدم أمثلة.

التخمينات الجبرية والهندسية

مثال 2

ضع تخميناً لكل قيمة أو علاقة هندسية لكلٌّ مما يأتي، وأعطِ أمثلة عدديَّة أو ارسم أشكالاً تساعد على الوصول لهذا التخمين.

(a) ناتج جمع عددين فرد़يين.

الخطوة 1: اكتب أمثلة.

$$1 + 3 = 4, 1 + 5 = 6, 3 + 5 = 8, 7 + 9 = 16$$

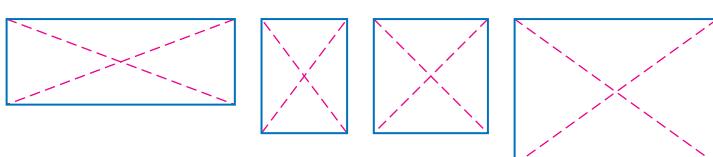
الخطوة 2: ابحث عن نمط.

لاحظ أن الأعداد 4, 6, 8, 16, 10 جميعها زوجية.

الخطوة 3: ضع تخميناً.

ناتج جمع عددين فردِّيين هو عدد زوجي.

(b) القطعان المستقيمتان الواثلتان بين كل رأسين متقابلين في المستطيل.



الخطوة 2: لاحظ أن أطوال القطع المستقيمة الواثلة بين كل رأسين متقابلين في كل مستطيل تبدو متساوية. استعمل المسطرة أو الفرجار للتحقق من ذلك.

الخطوة 3: التخمين: القطعان المستقيمتان الواثلتان بين كل رأسين متقابلين في المستطيل متطابقتان.

تحقق من فهمك

(2A) ناتج جمع عددين زوجيين.

(2B) العلاقة بين $CD = EF$ و $AB = CD$ ، إذا كانت:

(2C) مجموع مربعَي عددين كليين متساوين.



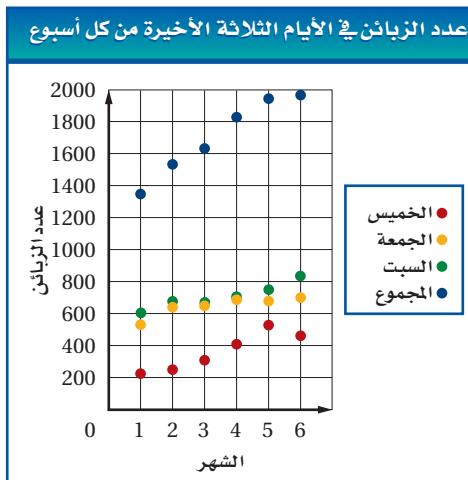
تعتمد التخمينات في المواقف الحياتية على بيانات يتم جمعها حول موضوع التخمين.

مثال 3 من واقع الحياة وضع تخمين من مجموعة بيانات

حلاقة: قام صاحب صالون حلاقة بجمع معلومات حول عدد الزبائن الذين يرتدون الصالون أيام الخميس والجمعة والسبت مدة ستة أشهر؛ كي يقرر ما إذا كان يجب زيادة عدد الحلاقين العاملين لديه في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع.



عدد الزبائن في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع						
الشهر 6	الشهر 5	الشهر 4	الشهر 3	الشهر 2	الشهر 1	اليوم
450	540	406	321	255	225	الخميس
705	685	692	642	635	552	الجمعة
832	746	712	652	658	603	السبت
1987	1971	1810	1615	1548	1380	المجموع



(a) أنشئ التمثيل البياني المناسب لعرض هذه البيانات.

بما أنك تبحث عن نمط له علاقة بالزمن، إذن استعمل شكل الانتشار لعرض هذه البيانات، يجعل المحور الأفقي يمثل الشهر والمحور الرأسي يمثل عدد الزبائن. ارسم كل مجموعة من البيانات باستعمال لون مختلف، وضع مفتاحاً للتلمذل البياني.

(b) وضع تخميناً يعتمد على هذه البيانات، مفسراً كيف يؤيد التمثيل البياني هذا التخمين.

ابحث عن نمط في هذه البيانات. لاحظ أن عدد الزبائن لكل من الأيام الثلاثة يبدو آخذًا في الارتفاع بمرور الأشهر، كما أن المجموع الكلي يزداد كل شهر عن الشهر السابق.

بيانات هذا المسح تؤيد تخمين صاحب صالون الحلاقة بأن العمل في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع يزداد، مما يتطلب زيادة عدد الحلاقين العاملين لديه في هذه الأيام.

يتطلب العمل في صالونات الحلاقة مراعاة شروط صحية تضمن عدم انتقال الأمراض، ومنها غسل اليدين وتعقيم الأدوات المستخدمة بعد كل عملية حلاقة، وعدم الاستعمال الخاطئ للأدوات والمستحضرات.

تحقق من فهتمك

السعر (ريال)	السنة
20	1414
22	1419
29	1424
32	1429
37	1434
41	1439

(3) أسعار: يبين الجدول المجاور سعر منتج خلال السنوات من 1414هـ إلى 1439هـ.

(A) أنشئ التمثيل البياني المناسب لعرض هذه البيانات.

(B) وضع تخميناً لسعر المنتج عام 1444هـ.

(C) هل من المنطقي القول بأن هذا النمط سيستمر بمرور الزمن؟

وإذا لم يكن كذلك، فكيف سيتغير؟ فسر إجابتك.



ربط المفردات

المثال المضاد

المعنى اللغوي

المضاد هو المخالف.

المعنى الرياضي

المثال المضاد هو مثال

معاكس لمثال معطى.

قراءة الرياضيات

يرمز للنقطة بحرف كبير

مثل: A, B, C, ...

ويرمز للقطعة المستقيمة

التي طرفاها A, B أو B, A

ويرمز للمسافة بين النقطتين

بالرمز AB

بالرمز A, B

مثال 4 إيجاد أمثلة مضادة

أعط مثلاً مضاداً يبين أن كلاً من التخمينات الآتية خاطئة.

(a) إذا كان n عددًا حقيقيًا، فإن $n^2 > n$.

إذا كان n يساوي 1، فإن التخمين خاطئ؛ لأن $1^2 \neq 1$.

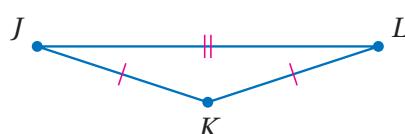
(b) إذا كان K متصرف \overline{JL} .

عندما لا تقع J, K, L على استقامة واحدة، يكون التخمين خاطئاً. ففي الشكل المجاور $JK = KL$ ولكن K ليست نقطة متصرف \overline{JL} .

تحقق من فهمك

(4A) إذا كان n عددًا حقيقيًا، فإن $-n$ يكون سالبًا.

(4B) إذا كان: $\angle ABE \cong \angle DBC$ ، فإن $\angle ABE \cong \angle DBC$ و $\angle ABC \cong \angle DBC$ متقابلتان بالرأس.



تأكد

اكتب تخميناً يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منها:

(1) التكلفة: 4.50 ريال، 6.75 ريال، 9.00 ريال،

(2) مواعيد انطلاق الحافلات: 10:15 صباحاً، 11:00 صباحاً، 11:45 صباحاً،



(3)

.....

(4)



.....

3, 3, 6, 9, 15, (5)

2, 6, 14, 30, 62, (6)

ضع تخميناً لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي:

(7) ناتج ضرب عددين زوجيين.

(8) العلاقة بين العددين a و b إذا كان $a + b = 0$.



المثال 2

(9) العلاقة بين مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن النقطة A

(10) العلاقة بين \overline{AP} و \overline{PB} إذا كانت M نقطة متصرف \overline{AB} والنقطة P نقطة متصرف \overline{AM}

عدد القطع المنتجة لمصنع	
السنة	عدد القطع (بالملايين)
2012	5
2013	7.2
2014	9.2
2015	14.1
2016	19.7
2017	28.4

المثال 3 (11) **إنتاج مصنع:** استعمل الجدول المجاور الذي يبين عدد القطع المنتجة في مصنع لبعض السنوات.

- (a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.
 (b) ضع تخميناً لعدد القطع في سنة 2022 م.

أعطي مثلاً مضاداً يبين أن كلاماً من التخمينات الآتية خاطئة.

- (12) إذا كانت $\angle A$ و $\angle B$ متكاملتين، فإن لهما ضلعاً مشتركاً.
 (13) إذا قطع نصف مستقيم قطعةً مستقيمةً عند منتصفها، فإنه يعادلها.

المثال 4

تدريب و حل المسائل

المثال 1 اكتب تخميناً يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منها.

4, 8, 12, 16, 20 (16)

3, 6, 9, 12, 15 (15)

0, 2, 4, 6, 8 (14)

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ (19)

1, 4, 9, 16 (18)

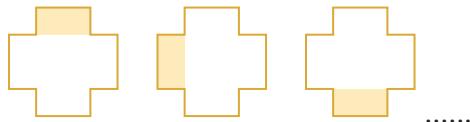
2, 22, 222, 2222 (17)

(20) مواعيد الوصول: 10:00 صباحاً، 12:30 مساءً ، 0:00 مساءً ،

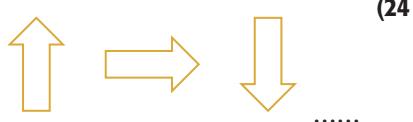
(21) النسبة المئوية للرطوبة: , 100% , 93% , 86% ,

(22) أيام العمل: الأحد، الثلاثاء، الخميس،

(23) اجتماعات النادي: المحرم، ربيع أول، جمادى الأولى،



(25)



(24)



(27)



(26)

(28) **رياضة:** بدأ ماجد تمارين الجري السريع قبل خمسة أيام. فركض في اليوم الأول 0.5 km . وفي الأيام الثلاثة التالية 0.75 km, 1 km, 1.25 km . إذا استمر تمرينه على هذا النمط، فما المسافة التي يقطعها في اليوم السابع؟

ضع تخميناً لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي:

- (29) ناتج ضرب عددين فرديين .
 (30) ناتج ضرب عدد في اثنين، مضاعف إلية واحد .
 (31) العلاقة بين العددين a و b ، إذا كان $1 = ab$.

(32) العلاقة بين \overline{AB} ومجموعة النقاط التي تبعد مسافات متساوية عن A و B .

(33) العلاقة بين حجم المنشور وحجم الهرم اللذين لهما القاعدة نفسها والارتفاع نفسه.

المثال 2

السنة	عدد الطلاب
1435	190
1436	210
1437	240
1438	260

(34) **مدارس:** يبين الجدول المجاور عدد الطلاب في إحدى المدارس الثانوية خلال الفترة من 1435هـ إلى 1438هـ.

- (a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.
 (b) ضع تخميناً معتمداً على بيانات الجدول، وشرح كيف يؤيد تمثيلك البياني هذا التخمين.

حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينات الآتية صحيحاً أو خاطئاً، وإذا كان التخمين خاطئاً، فأعط مثالاً مضاداً.

إذا كان n عدداً أولياً، فإن $1 + n$ ليس أولياً.

إذا كان x عدداً صحيحاً، فإن $x -$ عدد موجب.

في المثلث ABC إذا كان: $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ ، فإن $\triangle ABC$ قائم الزاوية.

إذا كانت مساحة مستطيل تساوي 20 m^2 ، فإن طوله يساوي 10 m ، وعرضه 2 m.

(39) **سكان:** استعمل الجدول أدناه لتعطي مثالاً مضاداً لكلٍّ من العبارتين الآتتين:

المنطقة المدنية من عدد سكان المملكة	العدد التقريبي للسكان بالليون	المنطقة الإدارية
24.8%	8.1	الرياض
26%	8.5	مكة المكرمة
6.7%	2.2	المدينة المنورة
15.3%	5	الشرقية

المصدر: مسح الخصائص السكانية 2017م - الهيئة العامة للإحصاء.

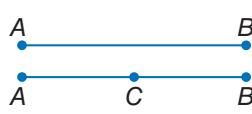
(a) النسبة المئوية لمجموع عدد سكان المناطق الإدارية الأربع الواردة في الجدول أقل من 25% من سكان المملكة العربية السعودية.

(b) يزيد عدد سكان أيٌّ من المناطق الإدارية الأربع على ثلاثة ملايين نسمة.

(40) **تخمين جولدباخ:** ينص تخمين جولدباخ على أنه يمكن كتابة أي عدد زوجي أكبر من 2 على صورة مجموع عددين أوليين. فعلى سبيل المثال: $5 = 3 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$.

(a) أثبت أن التخمين صحيح للأعداد الزوجية من 10 إلى 20

(b) إذا أعطيت التخمين الآتي: يمكن كتابة أي عدد فردي أكبر من 2 على صورة مجموع عددين أوليين. فهل التخمين صحيح أم خاطئ؟ إذا كان خاطئاً، فأعط مثالاً مضاداً.



(41) **هندسة:** النقطتان الواقعتان على مستقيم تشكّلان قطعة مستقيمة، مثل AB . إذا أضيفت نقطة أخرى C على القطعة المستقيمة AB ، فإن النقاط الثلاث تشكّل ثلاث قطع مستقيمة.

(a) ما عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من أربع نقاط على مستقيم؟ ومن خمس نقاط على مستقيم؟

(b) ضع تخميناً لعدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من n نقطة على مستقيم.

(c) اختبر تخمينك بإيجاد عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من 6 نقاط.

مسائل مهارات التفكير العليا

(42) **اكتشف الخطأ:** يتناقش أحمد وعلي في موضوع الأعداد الأولية. فيقول أحمد إن جميع الأعداد الأولية أعداد فردية. في حين يقول علي: ليست جميع الأعداد الأولية فردية. هل قول أيٍّ منهما صحيح؟ فسر إجابتك.

وزارة التعليم

Ministry of Education

2022 - 1444

الدرس 1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين 17

المثال 3

المثال 4



الربط مع الحياة

منطقة مكة المكرمة هي أكثر مناطق المملكة تعداداً للسكان، وتضم 12 محافظة هي: مكة المكرمة وجدة والطائف والقنفذة والليث ورابغ والجموم وخليص والكامل والخرمة ورنية وترية.

المصدر: الهيئة العامة للإحصاء.

(43) **مسألة مفتوحة:** اكتب متتابعة عدديّة تتبع حدودها نمطين مختلفين، ووضح النمطين.

(44) **تبرير:** تأمل التخمين: "إذا كانت نقطتان تبعدان المسافة نفسها عن نقطة ثالثة معلومة، فإن النقاط الثلاث تقع على استقامة واحدة". هل هذا التخمين صحيح أم خاطئ؟ وإذا كان خاطئاً، فأعط مثالاً مضاداً.

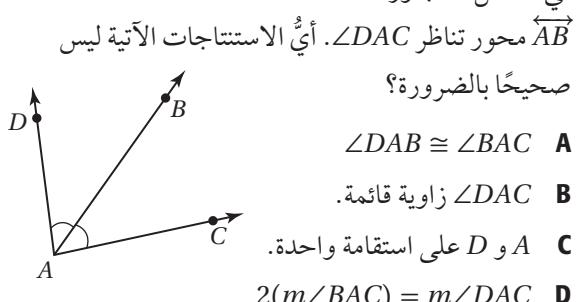
(45) **اكتب:** افترض أنك تجري مسحًا. اختر موضوعاً واكتب ثلاثة أسئلة يتضمنها مسحوك. كيف تستعمل التبرير الاستقرائي مع البيانات التي تحصل عليها من خلال هذا المسح؟

تدريب على اختبار

(47) إذا علمت أن $b = 10$ ، $a = 1$ ، فما قيمة العبارة الآتية؟

$$2b + ab \div (a + b)$$

(48) في الشكل المجاور،



محور تناظر \overleftrightarrow{AB} . أي الاستنتاجات الآتية ليس

صحيحاً بالضرورة؟

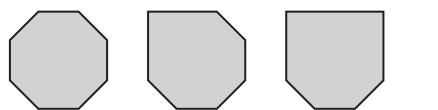
$$\angle DAB \cong \angle BAC \quad \text{A}$$

$\angle DAC$ زاوية قائمة.

على استقامة واحدة.

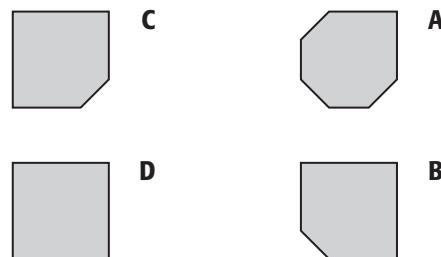
$$2(m\angle BAC) = m\angle DAC \quad \text{D}$$

(46) انظر إلى النمط الآتي:



.....

ما الشكل التالي في النمط؟



مراجعة تراكمية

(49) **أحواض سُكك:** اشتري باسم حوض سميك صغير على شكل أسطوانة دائرية قائمة، طول قطر قاعدتها 25 cm ، وارتفاعها 35 cm .
أوجد حجم الماء اللازم لملء الحوض. (مهارة سابقة)

أوجد محيط $\triangle ABC$ إذا أعطيت إحداثيات رؤوسه في كلٍ مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$A(-3, 2), B(2, -9), C(0, -10) \quad (51)$$

$$A(1, 6), B(1, 2), C(3, 2) \quad (50)$$

(52) **جبر:** قياس زاويتين متماثلتين يساوي $16z - 9$ و $4z + 3$. أوجد قياس كلٍ منها. (مهارة سابقة)

(53) **جبر:** إذا علمت أن: $3 = x - 4$ و $-5 = y - z$ ، فأوجد قيمة: $|x + y| - 3|z - 5|$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

جبر: اكتب الكلمة "صح" بجوار العبارة الصحيحة وكلمة "خطأ" بجوار العبارة الخاطئة.



(56)

العدد 9 عدد أولي

5 - 2 × 3 = 9 (55)

(54) كل مربع هو مستطيل

1-2

المنطق Logic

لماذا؟



عند إجابتكم عن «أسئلة من النوع صحيحة أو خطأ» في اختبار، فإنك تستعمل مبدأ أساسياً في المنطق. فمثلاً انظر إلى خريطة المملكة العربية السعودية وأجب عن الخبر التالي بصحيح أو خاطئ: أبها مدينة سعودية.

أنت تعرف أنه يوجد إجابة وحيدة صائبة، إما صحيح أو خاطئ.

تحديد قيم الصواب: العبارة هي جملة خبرية لها حالتان فقط إما أن تكون صائبة أو تكون خاطئة، ولا تحتمل أي حالة أخرى. وصواب العبارة (T) أو خطؤها (F) يسمى **قيمة الصواب** لها، ويرمز للعبارة برمز مثل p أو q .

قيمة الصواب: T

p : المستطيل شكل رباعي

نفي العبارة يفيد معنى **مُضاداً** لمعنى العبارة. وقيمة الصواب له هو عكس قيمة الصواب للعبارة الأصلية، فمثلاً: نفي العبارة p أعلاه هو $\sim p$ ، أو "ليس p " ، حيث:

قيمة الصواب: F

$\sim p$: المستطيل ليس شكلًا رباعيًا

يمكنك ربط عبارتين أو أكثر باستعمال الرابط (\wedge) ، أو الرابط (\circ) لتكونين **عبارة مركبة**. والعبارة المركبة التي تحتوي (\circ) تسمى **عبارة وصل**. وتكون عبارة الوصل صائبة فقط عندما تكون جميع العبارات المكونة لها صائبة.

قيمة الصواب: T

$p \wedge q$: المستطيل شكل رباعي

قيمة الصواب: T

$p \wedge q$: المستطيل مضلع محدب

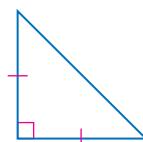
بما أن كلتا العبارتين p و q صائبتان، فإن عبارة الوصل $p \wedge q$ و q صائبة.

تكتب عبارة الوصل p و q بالرموز على الصورة $p \wedge q$.

مثال 1

قيم الصواب لعبارات الوصل

استعمل العبارات r , p , q والشكل المجاور لكتابه عبارة الوصل في كلٌ مما يأتي. ثم أوجد قيمة الصواب لها مبرراً إجابتك:



p : الشكل مثلث.

q : في الشكل ضلعان متlappingان.

r : جميع زوايا الشكل حادة.

$r \wedge p$ (a)

و r : الشكل مثلث وجميع زوايا الشكل حادة.
 العبارة p صائبة، لكن العبارة r خاطئة، إذن عبارة الوصل $r \wedge p$ خاطئة.

$q \wedge \sim r$ (b)

$q \wedge \sim r$: في الشكل ضلعان متlappingان، وليس جميع زوايا الشكل حادة.
بما أن كلا العبارتين q و $\sim r$ صائبتان، فإن عبارة الوصل $q \wedge \sim r$ صائبة.

تحقق من فهمك

$p \wedge q$ (1A)



(1B) ليس p وليس q

إرشادات للدراسة

المضلعل المحدب أو المقعر:

يكون المضلعل محدباً إذا لم يحوم امتداد أيٍ من أضلاعه نقاطاً داخله، وعكس ذلك يكون مقعرًا.



نفي العبارة

كما أن معكوس العدد الصحيح لا يكون سالبًا دائمًا، فإن نفي العبارة ليس بالضرورة أن يكون خطأً، وإنما له عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.

تسمى العبارة المركبة التي تحتوي (أو) عبارة فصل.

p : درس مالك الهندسة.

q : درس مالك الكيمياء.

p أو q : درس مالك الهندسة أو درس مالك الكيمياء.

تكون عبارة الفصل صائبة إذا كانت إحدى العبارات المكونة لها صائبة، وتكون خاطئة إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة. فإذا درس مالك الهندسة أو الكيمياء أو كليهما، فإن عبارة الفصل p أو q صائبة. وإذا لم يدرس مالك أيًا من الهندسة والكيمياء، فإن عبارة الفصل p أو q خاطئة.
تكتب عبارة الفصل p أو q بالرموز على الصورة $p \vee q$.

مثال ٢

قيم الصواب لعبارات الفصل



استعمل العبارات p , q , r والصورة المجاورة؛ لكتابية عبارة الفصل في كلٌ مما يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها مبررًا إجابتك.

p : يناير من أشهر فصل الربيع.

q : عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط.

r : يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

$p \vee q$ (a)

أو r : عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط أو يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

أو r : صائبة لأن العبارة r صائبة. وكون العبارة q خاطئة لا يؤثر.

$p \vee q$ (b)

$p \vee q$: يناير من أشهر فصل الربيع، أو عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط. بما أن كلاً من العبارتين خاطئة، فإن $p \vee q$ خاطئة.

$\sim p \vee r$ (c)

$\sim p \vee r$: يناير ليس من أشهر فصل الربيع أو يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.
 $\sim p$ صائبة؛ لأن $\sim p$ صائبة و r صائبة أيضًا.

تحقق من فهمك

$p \vee \sim q$ (2C)

$q \vee \sim r$ (2B)

$p \vee r$ أو r (2A)



الربط مع الحياة

فصول السنة بالترتيب:
الشتاء: 21 ديسمبر - 20 مارس
من العام التالي.
الربيع: 21 مارس - 20 يونيو
الصيف: 21 يونيو - 20 سبتمبر
الخريف: 21 سبتمبر - 20 ديسمبر

نفي العبارة، عبارة التوصل، عبارة الفصل

ملخص المفهوم

اضف إلى
مطويتك

العبارة	التعبير اللقظي	الرموز
نفي العبارة	عبارة تفيد معنى مضاداً لمعنى العبارة الأصلية، وقيمة الصواب لها عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.	$\sim p$ ، وتقرأ ليس
عبارة التوصل	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و).	$p \wedge q$ ، وتقرأ وهو
عبارة الفصل	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (أو).	$p \vee q$ ، وتقرأ أو

إرشادات للدراسة

جدول الصواب:

- كي يسهل عليك تذكر جداول الصواب لعبارة الوصل والفصل، تذكر ما يأتي:
- عبارة الوصل تكون صائبة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها صائبة.
- عبارة الفصل تكون خاطئة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة.

يمكن تنظيم قيم الصواب للعبارات في جداول تسمى **جدول الصواب**. ويمكن استعمال جداول الصواب لتحديد قيم الصواب لنفي العبارة ولعبارة الوصل والفصل.

عبارة الفصل		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

عبارة الوصل		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

نفي العبارة	
p	$\sim p$
T	F
F	T

وكذلك يمكنك استعمال جداول الصواب أعلاه لإنشاء جدول الصواب للعبارات المركبة الأكثر تعقيداً.

مثال 3 إنشاء جدول الصواب

أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

2

3

4

① أنشئ عموداً لكل من $p, q, \sim p, \sim p \vee q$

② ضع جميع حالات قيم صواب p, q

③ استعمل قيم صواب العبارة p لتحديد قيم صواب $\sim p$

④ استعمل قيم صواب p, q لتحديد قيم صواب $\sim p \vee q$

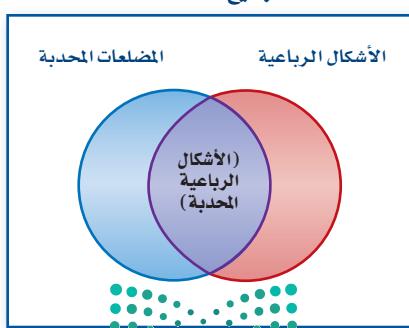
تحقق من فهمك

3) أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \wedge q$.

أشكال فن: يمكن تمثيل عبارة الوصل باستعمال أشكال فن. عُد إلى عبارة الوصل في بداية الدرس.

p و q : **المستطيل شكل رباعي** و **المستطيل مضلع محدب**.

جميع المضلعات



تعلم أن المستطيلات أشكال رباعية، وهي أيضاً مضلعات محدبة، ويبيّن شكل فن أن المستطيلات تقع في منطقة تقاطع مجموعة الأشكال رباعية ومجموعة المضلعات المحدبة.

إرشادات للدراسة

أشكال فن

المستطيل الذي يحيط أشكال فن يمثل المجموعة الكلية. شكل فن الذي يحوي دائرتين يقسم المجموعة الكلية إلى أربع مناطق على الأكثر. أما الشكل الذي يحوي ثلاثة دوائر فينقسم المجموعة الكلية إلى 8 مناطق على الأكثر. ويمكن إثبات أن شكل فن الذي يحوي n من الدوائر يقسم المجموعة الكلية إلى 2^n من المناطق على الأكثر.

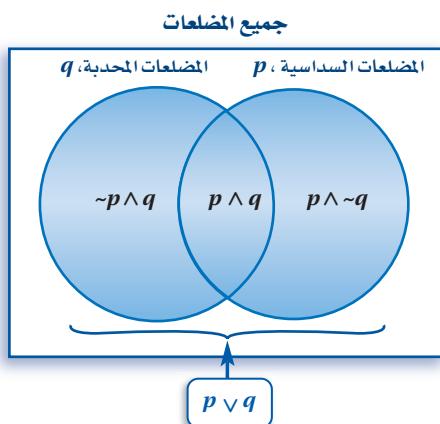
إرشادات للدراسة

تقاطع المجموعات

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بينهما.

إرشادات للدراسة

اتحاد المجموعات
اتحاد مجموعتين هو مجموعة عناصرهما كلها.



يمكن أيضًا تمثيل عبارة الفصل باستعمال أشكال فن. إليك العبارات الآتية:

p : الشكل سداسي.

q : الشكل مضلع محدب.

$p \cup q$: الشكل سداسي أو مضلع محدب.

في شكل فن المجاور تمثل عبارة الفصل باتحاد المجموعتين، ويحوي الاتحاد جميع المضلعات التي هي إما سداسية أو محدبة أو كلاهما.

تضمن عبارة الفصل المناطق الثلاث الآتية:

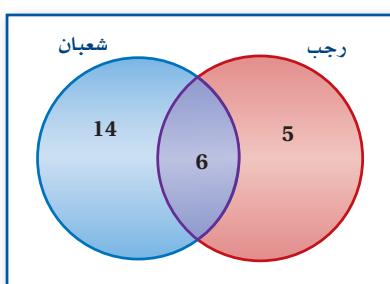
$p \wedge \neg q$ المضلعات السداسية غير المحدبة.

$\neg p \wedge q$ المضلعات المحدبة غير السداسية.

$p \wedge q$ المضلعات السداسية المحدبة.

مثال 4 من واقع الحياة استعمال أشكال فن

حملة الاقتصادية في استعمال الورق



بيئة: يظهر شكل فن المجاور عدد الأشخاص الذين شاركوا في حملة بيئية للتوعية بأهمية الاقتصاد في استعمال الورق أقيمت خلال شهر رجب وشعبان.

(a) كم شخصاً شارك في الحملة لشهر رجب أو شعبان؟

اتحاد المجموعتين يمثل الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال شهر رجب أو شعبان.

فيكون $14 + 6 + 5 = 25$ أو 25 شخصاً شاركوا في الحملة خلال الشهرين.

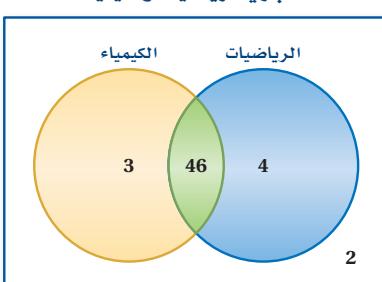
(b) كم شخصاً شارك في الحملة خلال شهر رجب وشعبان؟

تقاطع المجموعتين يمثل عدد الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال كلا الشهرين، لذلك هناك 6 أشخاص فقط شاركوا في الحملة خلال كلا الشهرين.

(c) ماذا يمثل العدد 14 في الشكل؟

عدد الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال شهر شعبان، ولم يشاركوا خلال شهر رجب.

اختباري الرياضيات والكيمياء



تحقق من فهمك



الربط مع الحياة

الورق الذي تستعمله الولايات المتحدة في يوم واحد يمكن أن يحيط الكرة الأرضية 20 مرة، ولكن تتخيل عدد الأشجار التي تقطع لصنع هذه الكمية من الورق.

(4) اختبارات : بين شكل فن المجاور عدد طلاب الصف الأول الثانوي الذين نجحوا والذين لم ينجحوا في اختباري الرياضيات أو الكيمياء.

(A) ما عدد الطالب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات، ولم ينجحوا في اختبار الكيمياء؟

(B) ما عدد الطالب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات و اختبار الكيمياء؟

(C) ما عدد الطالب الذين لم ينجحوا في أيٍ من الاختبارين؟

(D) ما عدد طلاب الصف الأول الثانوي؟

استعمل العبارات p, q, r لكتابية كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسّراً تبريرك:

p : في الأسبوع الواحد سبعة أيام.

q : في اليوم الواحد 20 ساعة.

r : في الساعة الواحدة 60 دقيقة.

$$q \vee r \quad (3)$$

$$p \wedge q \quad (2)$$

$$r \text{ و } p \quad (1)$$

$$\sim p \wedge \sim r \quad (6)$$

$$p \vee r \quad (5)$$

$$q \text{ أو } \sim p \quad (4)$$

المثال 3 أكمل جدول الصواب المجاور.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	
T	F		
F	T		
F	F		

أنشئ جدول صواب لكُل من العبارتين المركبتين الآتتين:

$$\sim p \vee \sim q \quad (9)$$

$$p \wedge q \quad (8)$$

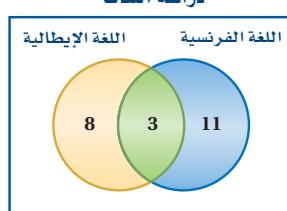
المثال 4

لغات: استعمل شكل قن المجاور، والذي يمثل عدد الطلاب الذين يدرسون اللغتين الفرنسية والإيطالية في معهد اللغات.

(a) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإيطالية فقط؟

(b) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإيطالية والفرنسية معاً؟

(c) ماذا يمثل العدد 11 في الشكل؟



تدريب و حل المسائل

استعمل العبارات s, p, q, r ; لكتابية كل عبارة وصلٍ أو فصلٍ أدناه. ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسّراً تبريرك:

p : الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية.

q : تقع مكة المكرمة على الخليج العربي.

r : توجد حدود مشتركة للمملكة العربية السعودية مع العراق.

s : المملكة العربية السعودية تقع غربى البحر الأحمر.

$$s \text{ أو } r \quad (13)$$

$$p \wedge q \quad (12)$$

$$r \text{ و } p \quad (11)$$

$$\sim s \vee \sim p \quad (16)$$

$$\sim r \text{ و } \sim p \quad (15)$$

$$r \vee q \quad (14)$$

أكمل جدول الصواب الآتي:

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T		F	
T		F	
F		T	
F		T	

المثال 3

أنشئ جدول الصواب لكُل من العبارات المركبة الآتية:



أنشئ جدول الصواب لـ كلٌ من العبارات المركبة الآتية:

$$\sim p \wedge r \quad (20)$$

$$\sim (\sim r \wedge q) \quad (19)$$

$$\sim (\sim p) \quad (18)$$

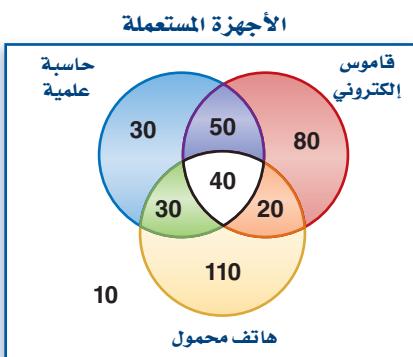
يسمح له بالذهاب	الطلاب المسماو لهم بالذهاب في الرحلة	
	الاختبار الأول	الاختبار الثاني
	تفوق	
T	لم يتفوق	تفوق

(21) **مكافأة:** قرر مدرس الرياضيات مكافأة الطالب المتفوقين باصطحابهم في رحلة مدرسية، وقرر أن تكون القاعدة أنه "إذا تفوق الطالب في الاختبار الأول أو الاختبار الثاني فإنه سيذهب في الرحلة".

(a) أكمل جدول الصواب المجاور.

(b) إذا تفوق الطالب في الاختبارين، فهل سيذهب في هذه الرحلة؟

(c) إذا تفوق الطالب في الاختبار الأول فقط، فهل سيذهب في هذه الرحلة؟



(22) **الكترونيات:** سُئل 370 شخصاً من الفئة العمرية بين 13-19 سنة عن الجهاز الذي يستعملونه من بين الهاتف المحمول والقاموس الإلكتروني وال浣سبة العلمية، وتمت نتائج الاستطلاع بشكل قن المجاور.

المثال 4

(a) ما عدد الذين يستعملون حاسبة علمية وقاموساً إلكترونياً فقط؟

(b) ما عدد الذين يستعملون الأجهزة الثلاثة؟

(c) ما عدد الذين يستعملون هاتفاً محمولاً فقط؟

(d) ما عدد الذين يستعملون قاموساً إلكترونياً وهاتفاً محمولاً فقط؟

(e) ماذا يمثل العدد 10 في الشكل؟

أنشئ جدول الصواب لـ كلٌ من العبارات المركبة الآتية. ثم عِّين قيمة الصواب لـ كلٌ منها، إذا علمت أن العبارات p, q, r تكون صائبة إذا تم ذكرها بجانب العبارة المعطاة، وخاطئة إذا لم تذكر:

$$(\sim p \vee q) \wedge r ; q, r \quad (25)$$

$$p \wedge (\sim q \vee r) ; p, r \quad (24)$$

$$p \wedge (q \wedge r) ; p, q \quad (23)$$

$$(\sim p \vee q) \vee \sim r ; p, q \quad (28)$$

$$\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim r) ; p, q, r \quad (27)$$

$$p \vee (\sim q \wedge \sim r) ; p, q, r \quad (26)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدّ: لنفي العبارة التي تحوي كلمة "جميع" أو "كل"، يمكنك استعمال جملة "يوجد واحد على الأقل" أو "هناك واحد على الأقل". ولنفي العبارة التي تحوي الكلمة "يوجد"، يمكنك استعمال الكلمة "جميع" أو "كل".

p : جميع المضلعات محدبة. $\sim p$: يوجد مضلع واحد على الأقل ليس محدباً.

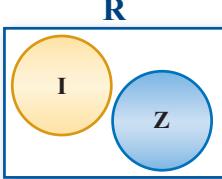
q : جميع المسائل لها حل. $\sim q$: توجد مسألة ليس لها حل.

انفِ كـلـاً من العبارات الآتية:

(29) جميع المربعات مستطيلات.

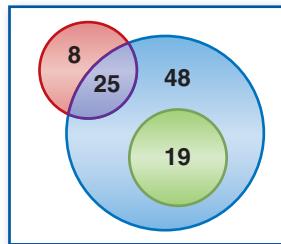
(31) لكل عدد حقيقي جذر تربيعي حقيقي.





(33) تبرير: الأعداد غير النسبية (I)، والأعداد الصحيحة (Z) تتبع إلى مجموعة الأعداد الحقيقة (R). معتمداً على شكل فن المجاور، هل صحيح أحياناً أم دائمًا، أم غير صحيح أبداً، أن الأعداد الصحيحة هي أعداد غير نسبية؟ فسر تبريرك.

(34) اكتب: صفت موقعاً يمكن تمثيله بشكل فن الآتي.



(35) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة مركبة صائبة تحوي «و» فقط.

تدريب على اختبار

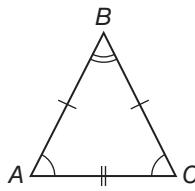
(37) خمن الحد التالي في النمط ... $\cdot \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3$

$\frac{11}{3}$ **C**

$\frac{9}{3}$ **D**

$\frac{8}{3}$ **A**

4 **B**



(36) أي العبارات الآتية لها نفس قيمة
صواب العبارة $?AB = BC$

$AC = BC$ **C**

$AB = AC$ **D**

$m\angle A = m\angle C$ **A**

$m\angle A = m\angle B$ **B**

مراجعة تراكمية

(38) طعام: في كل يوم ثلاثة من الأسابيع الأربع الماضية، قدّم مطعم سلطة فواكه هدية بعد كل وجبة. افترض جميل أنه سيتم تقديم سلطة فواكه يوم الثلاثاء القادم. ما نوع التبرير الذي استعمله جميل؟ فسر إجابتك. (الدرس 1-1)

خمن الحد التالي في كلٌ من المتتابعات الآتية . (مهارة سابقة)

$6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ **(41)**

$1, 3, 9, 27$ **(40)**

$3, 5, 7, 9$ **(39)**

جبر: حل كلًّا من المعادلات الآتية: (مهارة سابقة)

$4(m - 5) = 12$ **(44)**

$3x + 9 = 6$ **(43)**

$\frac{y}{2} - 7 = 5$ **(42)**

$\frac{y}{5} + 4 = 9$ **(47)**

$2x - 7 = 11$ **(46)**

$6(w + 7) = 0$ **(45)**

استعد للدرس اللاحق

جبر: أوجد قيمة كلٌ من العبارات الجبرية الآتية للقيم المعطاة.



$c = 2, d = 4$ إذا كانت $4d - c$ **(49)**

$x = -1, y = 3$ إذا كانت $2y + 3x$ **(48)**



العبارات الشرطية

Conditional Statements



لماذا؟

عند إجراء مكالمة هاتفية مع بعض المؤسسات، يحيلك جهاز الرد الآلي إلى قائمة من البذائع تختار منها القسم الذي تريده، ويُسمّعك إرشادات بصيغة عبارات شرطية.

عبارة إذا... فإن... هي عبارة يمكن كتابتها على صورة (إذا ... فإن...). والإرشاد المبين في الصورة أعلاه مثال على العبارة الشرطية.

مفهوم أساسى		
أضف إلى مطويتك	العبارة الشرطية	مثال
	التعبير اللفظي	الرموز
إذا كان الشكل مربعاً فإنه مستطيل.	العبارة الشرطية (إذا ... فإن...) وتقراً إذا كان p فإن q , أو p تؤدي إلى q	$p \rightarrow q$
الشكل مربع.	في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (إذا) مباشرةً الفرض .	p
الشكل مستطيل.	في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (إن) مباشرةً النتيجة .	q

عندما تكتب العبارة الشرطية على صورة (إذا ... فإن ...)، يمكنك تحديد الفرض والنتيجة فيها بسهولة.

مثال 1 تحديد الفرض والنتيجة

حدّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:

(a) إذا كان الطقس ماطراً، فسوف أستعمل المظلة.

الفرض: الطقس ماطر.

النتيجة: سوف أستعمل المظلة.

(b) يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان آحاده صفرًا.

الفرض: آحاد العدد صفر.

النتيجة: يقبل العدد القسمة على 10

تحقق (من فهمك)

(1A) إذا كان لمضلع ستة أضلاع، فإنه سداسي.



فيما سبق:

درست استعمال المنطق وأشكال فن لتحديد قيم الصواب لعبارات النفي والوصل والفصل.

(الدرس 2-2)

والآن:

- أححل العبارة الشرطية (إذا ... فإن...).
- أكتب العكس، والمعكوس، والمعاكش الإيجابي، لعبارات (إذا ... فإن...).

المفردات:

العبارة الشرطية	conditional statement
الفرض	hypothesis
النتيجة	conclusion
العبارات الشرطية المرتبطة	related conditionals

العكس	converse
المعكوس	inverse

المعاكش الإيجابي	contrapositive
التكافؤ المنطقي	logically equivalent



(إذا) و (فإن)

كلمة (إذا) ليست جزءاً من الفرض، كذلك كلمة (فإن) ليست جزءاً من النتيجة.

عند شرائك أيّاً من منتجاتنا قبل يوم الأربعاء

الفرض

تحصل على خصم تشجيعي

النتيجة

إذا اشتريت أيّاً من منتجاتنا قبل يوم الأربعاء ، فإنك تحصل على خصم تشجيعي.

تذكر أن النتيجة تعتمد على الفرض.

كتابة العبارة الشرطية على الصورة (إذا... فإن...)

مثال 2

حدّد الفرض والنتيجة في كل عبارة شرطية مما يأتي، ثم اكتبها على صورة (إذا... فإن...):

a) الثدييات حيوانات من ذوات الدم الحار.

الفَرض: الحيوان من الثدييات.

النْتِيَجَة: هو من ذوات الدم الحار.

إذا كان الحيوان من الثدييات، فإنه من ذوات الدم الحار.

b) المنشور الذي قاعدته مضلعين منتظمان، يكون منتظمًا.

الفَرض: قاعدتا المنشور مضلعين منتظمان.

النْتِيَجَة: يكون المنشور منتظمًا.

إذا كانت قاعدتا المنشور مضلعين منتظمين، فإنه يكون منتظمًا.

تحقق من فهمك

(2A) يمكن تبديل 5 أوراق نقدية من فئة الريال بورقة نقدية واحدةٍ من فئة 5 ريالات.

(2B) مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين يساوي 90°

تذكر أن الفرض والنتيجة والعبارة الشرطية نفسها جميعها عبارات قد تكون صائبة وقد تكون خاطئة.

قال عمر لزملائه: إذا أنهيت واجبي المنزلي ، فإني سوف ألعب الكرة معكم .

العبارة الشرطية	الفرض	النتيجة
إذا أنهيت واجبي المنزلي ، فإني سوف ألعب الكرة معكم .	أني عمر مع زملائي	يلعب عمر الكرة
إذا أنهى عمر واجبه المنزلي، ولعب الكرة مع زملائه، فإن العبارة الشرطية تكون صائبة؛ لأنّه أوفى بوعده.	T	T
إذا أنهى عمر واجبه المنزلي ولم يلعب الكرة مع زملائه، تكون العبارة الشرطية خاطئة؛ لأنّه لم يف بوعده.	F	F
إذا لم يُنهِ عمر واجبه، ولعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئاً ولكن النتيجة صائبة. وبما أن العبارة الشرطية لا تقرّر شيئاً في حالة عدم حل عمر واجبه، فإن الأمر راجع إلى عمر، إما أن يلعب الكرة مع زملائه أو لا، وتكون العبارة الشرطية صائبة بغض النظر عما يفعله عمر.	T	T
إذا لم يُنهِ عمر واجبه، ولم يلعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئاً، والنتيجة خاطئة. ولتسبيب نفسه في الحالة السابقة تكون العبارة الشرطية صائبة.	T	F

ليست خاطئة

إذا كانت العبارة المنطقية ليست خاطئة، فإنها تكون صائبة.

لاحظ أن العبارة الشرطية تكون صائبة في جميع الحالات، إلا أن يكون الفرض صائباً والنتيجة خاطئة.



تحليل العبارات الشرطية

عند تحديد قيم الصواب للعبارة الشرطية، لا تحاول أن تحدد ما إذا كان للعبارة معنى أم لا، بل اهتم بالسؤال: هل النتيجة تتبع الفرض بالضرورة؟

العبارات الشرطية		
<i>p</i>	<i>q</i>	<i>p → q</i>
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تكون العبارة الشرطية خاطئة
فقط عندما يكون الفرض صائباً والنتيجة خاطئة.

عندما يكون الفرض خاطئاً، تكون العبارة الشرطية صائبة بغض النظر عن النتيجة.

لإثبات صحة العبارة الشرطية، يجب عليك إثبات أنه عندما يكون الفرض صائباً، فإن النتيجة صائبة أيضاً.
ولإثبات أن العبارة الشرطية خاطئة يكفي أن تعطي مثالاً مضاداً.

مثال 3

حدّد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت صائبة، ففسّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعطي مثالاً مضاداً:

(a) عند قسمة عدد صحيح على عدد صحيح آخر، يكون الناتج عدداً صحيحاً أيضاً.

مثال مضاد: عند قسمة 1 على 2، يكون الناتج 0.5

بما أن 0.5 ليس عدداً صحيحاً، فإن النتيجة خاطئة. وبما أنك استطعت إيجاد مثال مضاد، فالعبارة الشرطية خاطئة.

(b) إذا كان الشهر القادم هو رمضان، فإن هذا الشهر هو شهر شعبان.

رمضان هو الشهر الذي يلي شهر شعبان؛ إذن كلما كان الفرض (الشهر القادم رمضان) صائباً، فإن النتيجة (هذا الشهر هو شهر شعبان) تكون صائبة أيضاً؛ وعليه فإن العبارة الشرطية صائبة.

(c) إذا كان للمثلث أربعة أضلاع، فإنه مصلعٌ مقلعٌ.

لا يمكن أن يكون للمثلث أربعة أضلاع؛ إذن الفرض خاطئ وعندما يكون الفرض خاطئاً، فإن العبارة الشرطية تكون صائبة.

تحقق من فهمك

(3A) إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A = 35^\circ$

(3B) إذا كان $-1 = \sqrt{x}$ ، فإن $-1 = (-1)^2$



العبارات الشرطية المرتبطة: يرتبط بالعبارة الشرطية المعطاة عبارات شرطية أخرى تسمى **العبارات الشرطية المرتبطة**.

مفهوم أساسي

العبارات الشرطية المرتبطة

أضف إلى

مطويتك

أمثلة	الرموز	التعبير اللفظي
إذا كان $m\angle A = 35^\circ$ فإن $\angle A$ حادة.	$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية هي العبارة التي يمكن كتابتها على صورة إذا كان p ، فإن q .
إذا كانت $\angle A$ حادة، $m\angle A = 35^\circ$.	$q \rightarrow p$	ينتج العكس من تبديل الفرض مع النتيجة في العبارة الشرطية.
إذا كان $m\angle A \neq 35^\circ$ فإن $\angle A$ ليست حادة.	$\sim p \rightarrow \sim q$	ينتج المعكوس عن نفي كل من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.
إذا لم تكن $\angle A$ حادة، $m\angle A \neq 35^\circ$.	$\sim q \rightarrow \sim p$	ينتج المعاكس الإيجابي من نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية.

إذا كانت العبارة الشرطية صائبة، فليس بالضرورة أن يكون عكسها ومعكوسها صائبين، بينما يكون المعاكس الإيجابي صائباً. ويكون المعاكس الإيجابي خاطئاً إذا كانت العبارة الشرطية خاطئة. وبالتالي فإن عكس العبارة الشرطية ومعكوسها إما أن يكونا صائبين معاً أو خاطئين معاً. وتسمى العبارات التي لها قيم الصواب نفسها **عبارات متكافئة منطقياً**.

جدول الصواب والعبارات المتكافئة منطقياً

مثال 4

أوجد قيم الصواب للعبارة الشرطية وعكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي على نفس الجدول، ثم اكتب عبارتين متكافئتين منطقياً.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	العبارة الشرطية $p \rightarrow q$	عكس العبارة الشرطية $q \rightarrow p$	معكوس العبارة الشرطية $\sim p \rightarrow \sim q$	المعاكس الإيجابي $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

من خلال جدول الصواب نلاحظ أنه للعبارتين $q \rightarrow p$ و $\sim p \rightarrow \sim q$ قيم الصواب نفسها لذا هما متكافئتان منطقياً.

تحقق من فهمك

(4) أوجد قيم الصواب للعبارات: $(p \wedge q)$, $\sim p \vee \sim q$, $\sim(p \vee q)$, $\sim(p \wedge q)$ على نفس الجدول، ثم اكتب زوجين من العبارات المتكافئة منطقياً.

مما سبق نلاحظ أن:

مفهوم أساسي

العبارات المتكافئة منطقياً

أضف إلى

مطويتك

- العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي متكافئان منطقياً.

- عكس العبارة الشرطية ومعكوسها متكافئان منطقياً.

- $\sim p \vee \sim q \sim(p \wedge q)$

- $\sim p \wedge \sim q \sim(p \vee q)$



يمكنك استعمال التكافؤ المنطقي للتحقق من قيمة الصواب لعبارة ما. في المثال 5 أدناه، لاحظ أن كلاً من العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي صائبان. وأن كلاً من العكس والمعكس خاطئان.

مثال 5 من واقع الحياة العبارات الشرطية المرتبطة

طبيعة: اكتب العكس والمعكس المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة؛ لتحديد ما إذا كان أيٌ منها صائباً أم خاطئاً. وإذا كان خاطئاً، فأعط مثلاً مضاداً. الأسود هي قطة تستطيع أن تزار.



الربط مع الحياة

تُعد الأسود والنمور من فصيلة القطط، وهي القطة الوحيدة التي تزار ولا تموء.

العبارة الشرطية: أعد كتابة العبارة على صورة (إذا... فإن...).
إذا كان الحيوانأسداً، فإنه قطًّا يستطيع أن يزأر.
اعتماداً على المعلومات المجاورة عن اليمين، تكون العبارة صائبة.

العكس: إذا كان الحيوان قطًّا يستطيع أن يزأر، فإنه يكونأسداً.
مثال مضاد: النمر قط يستطيع أن يزأر، لكنه ليسأسداً.
إذن فالعكس خاطيء.

المعكس: إذا لم يكن الحيوانأسداً، فإنه لا يمكن قطًّا يستطيع أن يزأر.
مثال مضاد: النمر ليسأسداً، ولكنه قط يستطيع أن يزأر.
إذن المعكس خاطيء.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الحيوان قطًّا يستطيع أن يزأر، فإنه لا يمكنأسداً.
اعتماداً على المعلومات التي في الهاشم تكون العبارة صائبة.

تحقق: تتحقق من أن للعبارات المتكافئة منطقياً قيم الصواب نفسها.
 العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي كلاهما صائب. ✓
العكس والمعكس كلاهما خاطيء. ✓

تحقق من فهمك

اكتب العكس والمعكس والمعاكس الإيجابي لكلٍ من العبارتين الشرطيتين الآتتين، ثم حدد ما إذا كان أيٌ منها صائباً أم خاطئاً. وإذا كان خاطئاً فأعط مثلاً مضاداً.

(5A) الزاويتان اللتان لهما القياس نفسه متطابقتان.

(5B) الفأر من القوارض.

تأكد

المثال 1

حدّد الفرض والنتيجة في كُلٍ من العبارات الشرطية الآتية:

(1) يوم غد هو السبت إذا كان اليوم هو الجمعة.

(2) إذا كان $7 > 5 + 2x$ ، فإن $x > 1$.

(3) إذا كانت الزاويتان متكمالتين، فإن مجموع قياسيهما 180°

(4) يكون المستقيمان متعامدين إذا نتج عن تقاطعهما زاوية قائمة.



المثال 2

- اكتب كل عبارة شرطية مما يأتي على صورة (إذا... فإن...).
- (5) الشخص الذي تجاوز عمره 18 عامًا يمكنه استخراج رخصة قيادة.
 - (6) يحتوي الجبن على عنصر الكالسيوم.
 - (7) قياس الزاوية الحادة بين 0° و 90° .
 - (8) المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا.
 - (9) **مطر:** هناك أنواع مختلفة من هطل المطر، تتشكل في ظروف مختلفة. اكتب العبارات الشرطية الثلاث الآتية على صورة (إذا... فإن...).
 - (a) يتكون بخار الماء في الغلاف الجوي فيسقط على شكل مطر.
 - (b) يتجمد بخار الماء الشديد البرودة في الغيوم الركامية فيسقط على شكل بَرد.
 - (c) يكون الهاطل على شكل ثلَج، عندما تكون درجة الحرارة متعدنةً جدًا إلى حد التجمد في الغلاف الجوي.

المثال 3

- حدّد قيمة الصواب لـ كلّ عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت العبارة صائبة، ففسّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعط مثلاً مضادًا.
- (10) إذا كان $16 = x^2$ ، فإن $4 = x$
 - (11) إذا كنت تعيش في الرياض، فإنك تعيش في الكويت.
 - (12) إذا كان يوم غد هو الجمعة، فإن اليوم هو الخميس.
 - (13) إذا كان للحيوان قرنان، فإنه كبش.
 - (14) إذا كان قياس الزاوية القائمة 95° ، فإن النحلة تكون سحلية.

المثال 4

- أوجد قيم الصواب لكل عبارتين فيما يأتي، ثم قرّر هل هما مكافئتان منطقياً أم لا؟
- $$\sim p \wedge q, \sim(p \wedge q) \quad (15)$$
- $$\sim p \vee \sim q, \sim(p \vee q) \quad (16)$$

المثال 5

- اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لـ كلّ من العبارتين الشرطيتين الآتتين. ثم حدد ما إذا كان أيًّا منها صائباً أم خاطئاً، وإذا كان خاطئاً فأعط مثلاً مضاداً.
- (17) إذا كان العدد يقبل القسمة على 2 ، فإنه يقبل القسمة على 4
 - (18) جميع الأعداد الكلية أعداد صحيحة.

تدريب وحل المسائل

المثال 1

حدّد الفرض والنتيجة في كلّ من العبارات الشرطية الآتية:

- (19) إذا كانت الزاويتان متجلوبتين، فإن لهما ضلعًا مشتركًا.
- (20) إذا كنت قائداً مجموعتنا، فإني سأتبعك.



(21) إذا كان $11 = 4 - 3x$ ، فإن $x = 5$

(22) إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما متطابقتان.

اكتب كل عبارة شرطية مما يأتي على صورة (إذا ... فإن ...).

(23) احصل على قارورة ماء مجانًا عند شراء ثلاث خمس قوارير.

(24) كل من حضر الحفل سيحصل على هدية.

(25) تقاطع مستويين يمثل مستقيماً.

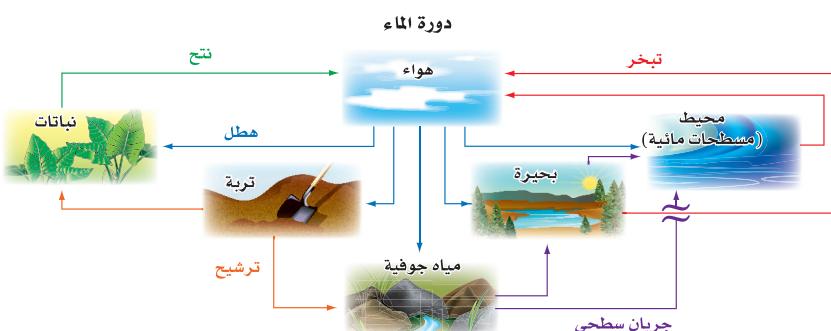
(26) مساحة الدائرة تساوي πr^2

(27) قياس الزاوية القائمة 90°

(28) **كيمياء:** اكتب العبارة الآتية على صورة (إذا ... فإن ...).

ينصهر الفوسفور عند درجة 44° سيليزية.

(29) **أحياء:** يتغير الماء على الأرض باستمرار عبر عملية تسمى دورة الماء. اكتب العبارات الشرطية الثلاث أدنى الشكل على صورة (إذا ... فإن ...).



(a) جريان الماء السطحي يصب في المسطحات المائية.

(b) تعيد النباتات الماء إلى الهواء من خلال عملية التنافس.

(c) تعيد المسطحات المائية الماء إلى الهواء عن طريق التبخر.

حدد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي. وإذا كانت صائبة، ففسّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعط مثلاً مضاداً:

(30) إذا كان العدد فردياً، فإنه يقبل القسمة على 5

(31) إذا كان الأرنبي حيواناً برمائياً، فإن هذا الفصل هو فصل الصيف.

(32) إذا كانت جدة في اليمن، فإن صنعاء هي عاصمة المملكة العربية السعودية.

(33) إذا نتج اللون الأبيض عن مزج اللونين الأزرق والأحمر، فإن $0 = 2 - 3$

(34) إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإنهما متقابلتان بالرأس.

(35) إذا كان الحيوان طائراً، فإنه يكون نسراً.

(36) إذا كان الموز أزرق، فإن التفاح من الخضروات.

المثال 2

طبيعة: استعمل العبارة أدناه لكتابية كل من العبارات الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة لتحديد قيمة الصواب لكل منها، وإذا كانت أي منها خاطئة، فأعط مثلاً مضاداً.

”الحيوان الذي تظهر على جسمه خطوط هو الحمار الوحشي“.

(37) عبارة شرطية (38) عكس العبارة الشرطية

(39) معكوس العبارة الشرطية (40) المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية

أوجد قيم الصواب لكل عبارتين فيما يأتي، ثم قرّر هل هما متكافئان منطقياً أم لا؟

$$\sim(p \rightarrow q), \sim p \rightarrow \sim q \quad (41)$$

$$\sim(p \rightarrow q), \sim(\sim q \rightarrow \sim p) \quad (42)$$

$$(p \wedge q) \vee r, p \wedge (q \vee r) \quad (43)$$

المثال 4

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكل من العبارات الشرطية الآتية، ثم حدد ما إذا كان أي منها صائباً أم خاطئاً. وإذا كان خاطئاً، فأعط مثلاً مضاداً.

(44) إذا كنت تعيش في الدمام، فإنك تعيش في المملكة العربية السعودية.

(45) إذا كان الطائر نعامة، فإنه لا يستطيع أن يطير.

(46) جميع المربعات مستطيلات.

(47) جميع القطع المستقيمة المتطابقة لها الطول نفسه.

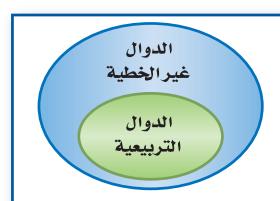
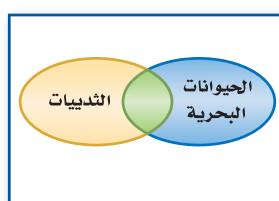
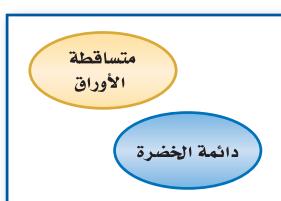
(48) المثلث القائم الزاوية يحوي زاوية قياسها 90° .

المثال 5



الربط مع الحياة

موطن ظباء الدكاك هو أفريقي، وهي ظباء صغيرة الحجم، يبلغ متوسط طولها من قدم واحدة إلى ما يزيد على قدمين قليلاً، وتتميز أجسامها بخطوط تشبه خطوط الحمر الوحشية.



(49) إذا كانت الدالة غير خطية، فإنها تكون دالة تربيعية.

(50) إذا كان الحيوان من الثدييات، فإنه لا يكون حيواناً بحرياً.

(51) إذا كانت الشجرة متساقطة الأوراق، فإنها لا تكون دائمة الخضرة.

(52) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي أحد قوانين المنطق باستعمال العبارات الشرطية.

a) **منطقياً:** اكتب ثلاث عبارات شرطية صائبة، بحيث تكون نتيجة كل عبارة فرضاً للعبارة التي تليها.

b) **بيانياً:** ارسم شكل ثُن يوضح هذه السلسلة من العبارات الشرطية.

c) **منطقياً:** اكتب عبارة شرطية مستعملاً فرض العبارة الأولى، ونتيجة العبارة الثالثة. إذا كان فرض العبارة الأولى صائباً. فهل تكون العبارة الشرطية الناتجة صائبة؟

d) **لفظياً:** إذا أعطيت العبارتين الشرطيتين الصائبتين: إذا كان a ، فإن b ، إذا كان b ، فإن c ، فما تكتب تخميناً حول قيمة الصواب للعبارة c عندما تكون العبارة a صائبة. فسر تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا

(53) **اكتشف الخطأ:** حدد كل من أحمد و Mageed قيمة الصواب للعبارة الشرطية "إذا كان العدد 15 أولياً، فإن العدد 20 يقبل القسمة على 4". كلاهما يعتقد أن هذه العبارة صائبة، ولكنهما برأ ذلك بتبريرين مختلفين. أيهما كان مصيباً؟ فسر تبريرك.

Mageed

الفرض خاطئ؛ لأن 25 ليس عدداً أولياً؛ إذن العبارة الشرطية صائبة.

Ahmed

النتيجة صائبة؛ لأن العدد 20 يقبل القسمة على 4؛ إذن العبارة الشرطية صائبة.

(54) **تبرير:** عبارة شرطية فرضها صائب، و نتيجتها خاطئة. هل يكون معکوسها صائباً؟

(55) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة شرطية، بحيث يكون العكس والمعکوس والمعاكس الإيجابي لها جميعها صائبة. فسر تبريرك.

(56) **تحď:** تجد أدناه معکوس العبارة الشرطية A . اكتب العبارة الشرطية A و عکسها و معاكسها الإيجابي. فسر تبريرك.

"إذا لم تدرك تكبيرة الإحرام مع الإمام، فإنك ذهبت إلى المسجد متأنحاً".

(57) **اكتب:** صِف العلاقة بين العبارة الشرطية و عکسها و معکوسها و معاكسها الإيجابي.

تدريب على اختبار

(59) **جبر:** ما أبسط صورة للعبارة $\frac{10a^2 - 15ab}{4a^2 - 9b^2}$ ؟

$$\frac{a}{2a + 3b} \quad \text{C}$$

$$\frac{5a}{2a - 3b} \quad \text{A}$$

$$\frac{a}{2a - 3b} \quad \text{D}$$

$$\frac{5a}{2a + 3b} \quad \text{B}$$

(58) إذا كان مجموع قياسي زاويتين يساوي 90° فإنهما متتممان. أي العبارات الآتية هي عكس العبارة الشرطية أعلاه؟

A إذا كانت الزاويتان متتممان، فإن مجموع قياسيهما 90°

B إذا كانت الزاويتان غير متتممان، فإن مجموع قياسيهما 90°

C إذا كانت الزاويتان متتممان، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي 90°

D إذا كانت الزاويتان غير متتممان، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي 90°



أنشئ جدول الصواب لكُلّ من العبارات المركبة الآتية. (الدرس 1-2)

$$\sim p \wedge \sim q \quad (63)$$

$$\sim p \wedge q \quad (62)$$

$$\sim q \vee p \quad (61)$$

$$q \wedge p \quad (60)$$

اكتب تخميناً معتمداً على المعلومات المعطاة في كُلّ مما يأتي. وارسم شكلًا يوضح تخمينك (الدرس 1-1)

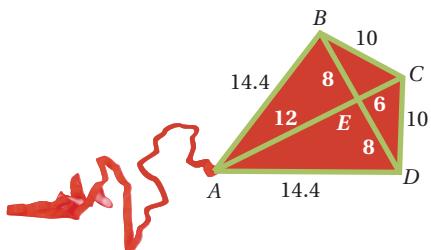
(64) تقع النقاط K, H, J على أضلاع مختلفة لمثلث.

$$. R(3, -4), S(-2, -4), T(0, -4) \quad (65)$$

$$A(-1, -7), B(4, -7), C(4, -3), D(-1, -3) \quad (66)$$

(67) طائرة ورقية: تصنع الطائرات الورقية بشكل يشبه الماسة؛ لذلك تسمى الطائرة الماسية.

سم جميع القطع المستقيمة المتطابقة في الشكل المجاور. (مهارة سابقة)



استعد للدرس اللاحق

جبر: حدد العملية التي استعملتها لتحويل المعادلة (1) إلى المعادلة (2) في كُلّ مما يأتي.

$$\frac{1}{3}m = 2 \quad (1) \quad (70)$$

$$m = 6 \quad (2)$$

$$x + 9 = 4 - 3x \quad (1) \quad (69)$$

$$4x + 9 = 4 \quad (2)$$

$$8(y - 11) = 32 \quad (1) \quad (68)$$

$$y - 11 = 4 \quad (2)$$



العبارات الشرطية الثنائية Biconditional Statements

1-3



يُعد سعد أفضل طلاب المدرسة في لعبة كرة القدم. وإذا انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي، فإنه سيمثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية. إذا مثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية، فإنه يكون قد انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

p : انتُخب سعد من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

q : مثل سعد المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

$q \rightarrow p$: إذا انتُخب سعد من قبل فريق كرة القدم المدرسي، فإنه سيمثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

$p \rightarrow q$: إذا مثل سعد المدرسة في فريق المنطقة التعليمية، فإنه قد انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي. في هذه الحالة، العبارة الشرطية $q \rightarrow p$ وعكسها $p \rightarrow q$ كلاهما صائب. والعبارة المركبة الناتجة عن وصل هاتين العبارتين باستعمال (و) تسمى عبارة شرطية ثنائية.

مفهوم أساسى

العبارات الشرطية الثنائية

اضف إلى
مطويتك

التعبير اللغطي: العبارة الشرطية الثنائية هي عبارة وصل مكونة من العبارة الشرطية وعكسها.

الرموز: $q \leftrightarrow p$ ($q \rightarrow p$ \wedge $(p \rightarrow q)$) ، ويرمز لها اختصاراً ($q \leftrightarrow p$) ، وتقرأ p إذا وفقط إذا كان q

إذن تكتب العبارة الشرطية الثنائية السابقة على النحو التالي:

$q \leftrightarrow p$: يُنتخب سعد من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي إذا وفقط إذا مثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

مثال

اكتب كلاماً من العبارتين الشرطيتين الثنائيتين الآتيتين على صورة عبارة شرطية وعكسها، ثم حدد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعط مثلاً مضاداً.

(a) تكون الزاوية قائمة إذا وفقط إذا كان قياسها 90°

العبارة الشرطية: إذا كانت الزاوية قائمة، فإن قياسها 90°

العكس: إذا كان قياس الزاوية 90° ، فإنها زاوية قائمة.

كل من العبارة الشرطية وعكسها صائبان؛ إذن العبارة الشرطية الثنائية صائبة.

(b) x عددٌ موجبٌ إذا وفقط إذا كان $-2 < x$

العبارة الشرطية: إذا كان x عددًا موجباً، فإن $-2 < x$. العبارة الشرطية صائبة.

العكس: إذا كان $-2 < x$ ، فإن x عدد موجب. افترض أن $-1 = x$ ؛ إذن $-2 < -1$ ، لكن -1 ليس عددًا موجباً؛ إذن عكس العبارة الشرطية خاطئ، والعبرة الشرطية الثنائية خاطئة.

تمارين:

اكتب كل عبارة شرطية ثنائية مما يأتي على صورة عبارة شرطية وعكسها. ثم حدد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعط مثلاً مضاداً.

1) تكون الزوايا متساويتان إذا وفقط إذا كان مجموع قياسيهما 90° 2) لا دوام في المدارس إذا وفقط إذا كان اليوم من الجمعة

$$x = 4 \quad |2x| = 4 \quad (4)$$

3) ينقطع المستقيمان إذا وفقط إذا كانوا غير أفقين.

1-4

التبير الاستناتجي Deductive Reasoning

لماذا؟



عندما يقوم المحققون بتحليل قضية جنائية، فإنهم يجمعون الأدلة مثل بصمات الأصابع، ويستعملونها لتقليل قائمة الاتهام، باستبعاد المتهمين وتحديد الجاني في نهاية الأمر.

التبير الاستناتجي: الطريقة التي يستعملها المحققون من أجل تحديد الجاني تسمى التبیر الاستناتجي.

وكما ترى فإن **التبير الاستناتجي** يستعمل حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص من أجل الوصول إلى نتائج منطقية من عبارات معطاة، على خلاف التبیر الاستقرائي الذي تستعمل فيه أنماط من الأمثلة أو المشاهدات لعمل تخمين.

فيما سبق:

درست استعمال التبیر الاستقرائي لتحليل الأنماط ووضع تخمينات.

(الدرس 1-1)

والآن:

- استعمل قانون الفصل المنطقي للتبير الاستناتجي.
- استعمل قانون القياس المنطقي للتبير الاستناتجي.

المفردات:

التبير الاستناتجي
deductive reasoning

قانون الفصل المنطقي
Law of Detachment

قانون القياس المنطقي
Law of Syllogism

مثال 1 من واقع الحياة

التبير الاستقرائي والتبير الاستناتجي

حدّد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبیر الاستناتجي أم التبیر الاستقرائي في كلٍ مما يأتي:

a) في كل مرة تستخدم هند الخلطة الجاهزة لإعداد قالب كيك، تلاحظ أن قالبها صغير لا يكفي لخبز الكيك، جهزت هند اليوم خلطة الكيك فاستنتجت أنَّ قالبها لن يكفي لخبز الكيك.

اعتمدت هند على المشاهدات للتوصول إلى النتيجة، فهي بذلك استعملت التبیر الاستقرائي.

b) تأخر مشاري مرتين عن الحضور إلى مقر العمل في الوقت المحدد، فاستنتاج أنه سيتم خصم 5% من أجر اليومين.

اعتمد مشاري على حقائق ينص عليها عقده الوظيفي في الحصول على النتيجة، لذلك فقد استعمل التبیر الاستناتجي.

تحقق من فهمك



1A) يُجري طالب مرحلة ابتدائية تجربة دمج الألوان في المختبر، فقام بثلاث محاولات للحصول على درجة معينة من اللون الرمادي، فاكتشف أنه كلما زادت كمية اللون الأسود كانت درجة اللون الرمادي أغمق.

1B) دُعي خالد إلى حفل عشاء، وقد حضر جميع المدعوين الحفل، إذن فقد حضر خالد الحفل.

قانون الفصل المنطقي: يستعمل المثال المضاد لإثبات عدم صحة التخمين الذي يتم التوصل إليه عن طريق التبیر الاستقرائي، ولا يعد المثال طريقة صائبة لإثبات صحة التخمين. فالإثبات صحة التخمين يرجع استعمال التبیر الاستناتجي، وأحد أشكاله **قانون الفصل المنطقي**.

قانون الفصل المنطقي

مفهوم أساسى

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صائبة، والفرض p صائبًا، فإن النتيجة q تكون صائبة أيضًا.

المعطيات: إذا لم يكن في السيارة وقود، فإنها لن تعمل.
مثال: لا يوجد وقود في سيارة عبدالله.

نتيجة صائبة: لن تعمل سيارة عبدالله.

إرشادات للدراسة

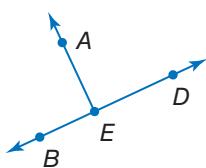
المعلومات المعطاة
من الآن فصاعدًا اعتبر جميع المعلومات في الكتاب صائبة.

عندما تكون العبارات المعطاة صائبة، فإن النتائج التي تتوصل إليها بتطبيق التبرير الاستنتاجي حتماً تكون صائبة.

استعمال قانون الفصل المنطقي

مثال 2

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا في كل مما يأتي ألم لا اعتمادًا على المعطيات. فسر تبريرك.



(a) المعطيات: إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإن ضلعاهما غير المشتركين يكونان نصفٍ مستقيم متعاكسان.

و $\angle AEB = \angle AED$ متجاورتان على مستقيم.

الاستنتاج: \overrightarrow{EB} و \overrightarrow{ED} نصفٍ مستقيم متعاكسان.

الخطوة 1: حدد الفرض p والتنتة q للعبارة الشرطية الصائبة.

p: زاويتان متجاورتان على مستقيم.

q: ضلعاهما غير المشتركين يكونان نصفٍ مستقيم متعاكسان.

الخطوة 2: حل النتيجة.

العبارة المعطاة $\angle AEB = \angle AED$ متجاورتان على مستقيم تتحقق الفرض.

إذن **p** عبارة صائبة. وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة

\overrightarrow{EB} و \overrightarrow{ED} نصفٍ مستقيم متعاكسان، التي تمثل **q** نتائج صائبة.

(b) المعطيات: عندما يذهب مالك إلى النادي الرياضي، فإنه يرتدي ملابس رياضية.

و **p:** ارتدى مالك ملابس رياضية.

الاستنتاج: ذهب مالك إلى النادي الرياضي.

الخطوة 1: **p:** ذهب مالك إلى النادي الرياضي.

q: ارتدى مالك ملابس رياضية.

الخطوة 2: العبارة المعطاة "ارتدى مالك ملابس رياضية" تتحقق النتائج **q** للعبارة الشرطية الصائبة. لكن كون العبارة الشرطية صائبة، و نتيجتها صائبة أيضًا، لا يعني صواب الفرض، فقد يرتدي مالك ملابس رياضية، ولا يذهب إلى النادي الرياضي؛ وبذلك تكون النتائج خاطئة.

تحقق من فهمك

(2A) المعطيات: إذا كانت ثلاثة نقاط لا تقع على استقامة واحدة، فإنها تحدد مستوى.

• النقاط A, B, C تقع في المستوى ℓ .

الاستنتاج: النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.



(2B) المعطيات: إذا أحضر الطالب موافقة من ولد أمره، فإنه يمكنه الذهاب في الرحلة المدرسية.

• أحضر سلمان موافقة من ولد أمره.

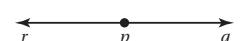
الاستنتاج: يمكن أن يذهب سلمان في الرحلة المدرسية.

إرشادات للدراسة

نصف المستقيم

المتعاكسان

هما نصف المستقيم نفسه، لهما نقطة البداية نفسها، ولكن باتجاهين متعاكسان.

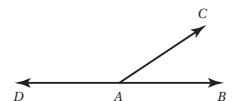


$\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr}$

نصفٍ مستقيمٍ متعاكسان

الزوايا المتجاورتان على مستقيم

هما زاويتان متجاورتان؛ بحيث يكون ضلعاهما غير المشتركين نصفٍ مستقيم متعاكسان.



متجاورتان على مستقيم

يمكنك استعمال أشكال قن لاختبار صحة الاستنتاج.

مثال 3 من واقع الحياة الحكيم على الاستنتاج باستعمال أشكال قن

مكافآت وحوافز: صرف شركة خاصة مكافآت وحوافز لبعض موظفيها؛ بناءً على المعلومات أدناه. حدد ما إذا كان الاستنتاج صائباً أم لا، اعتماداً على المعطيات.

المعطيات: • إذا صُرِفَ للموظف مكافأة، فإن عدد ساعات عمله تكون قد تجاوزت 175 ساعةً في الشهر.

• تجاوز عدد الساعات التي عملها محمد 175 ساعة في الشهر.

استنتاج: صُرِفَ لمحمد مكافأة.

موظفو الشركة

عملوا
أكثر من 175 ساعة

فهم: أرسم شكل قن بناءً على المعطيات، عدد ساعات العمل للموظفي الذي صُرِفَت له المكافأة أكثر من 175 ساعةً؛ لذا أرسم دائرة تمثل الموظفين الذين تجاوز عدد ساعات عملهم 175 ساعةً.

خطط: بما أن عدد ساعات العمل للموظفيين الذين صُرِفَت لهم مكافآت أكثر من 175 ساعةً، إذن هم يمثلون مجموعة جزئية من الموظفين الذين عملوا أكثر من 175 ساعةً.

حل: بما أن عدد ساعات عمل محمد أكثر من 175 ساعةً، إذن هذا يضعه داخل دائرة الموظفين الذين تجاوز عدد ساعات عملهم 175 ساعةً، لكن ليس بالضرورة داخل دائرة من صُرِفَت لهم مكافآت، فربما يكون داخل الدائرة أو خارجها، وعليه فالاستنتاج غير صائب.

تحقق: نعرف إنه إذا صُرِفَ للموظف مكافأة، فإن عدد ساعات عمله تكون قد تجاوزت 175 ساعةً، لكن لا نعرف أن كل موظف تجاوزت عدد ساعات عمله 175 ساعةً قد صُرِفَت له مكافأة.



موظفو الشركة

محمد
عملوا
أكثر من 175 ساعة

الدليل المنطقي يكون مدعوماً بقوانين المنطق، ويختلف عن الدليل الإحصائي المدعوم بالأمثلة أو البيانات.

تحقق من فهمك



(3) المعطيات: • إذا كان الشكل مربعًا، فإنه مضلع.

• الشكل A مربع.

استنتاج: الشكل A مضلع.

قانون القياس المنطقي: قانون القياس المنطقي هو طريقة أخرى للتبرير الاستنتاجي، وباستعمال هذا القانون يمكنك الحصول على نتائج من عبارتين شرطيتين صائبتين، وذلك عندما تكون نتيجة العبارة الشرطية الأولى هي الفرض في العبارة الشرطية الثانية.

إرشادات للدراسة

أضف إلى
مخطوبيتك

قانون القياس المنطقي

مفهوم أساسى

التعبير اللغوي: إذا كانت العبارتان الشرطيتان $r \rightarrow q$ و $q \rightarrow p$ صائبتين، فإن العبارة الشرطية $r \rightarrow p$ صائبة أيضاً.

المعطيات: إذا حصلت على عمل، فسوف تكسب نقوداً.

إذا كسبت نقوداً، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

مثال:

نتيجة صائبة: إذا حصلت على عمل، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس 4-1 التبرير الاستنتاجي ٤٤٤-٣٩٢٢



الربط مع الحياة

حوافز: هي وسائل وعوامل من شأنها حث الموظفين والعمال على أداء أعمالهم بجد وإخلاص، وتشجعهم علىبذل أكبر جهد في مجال الإنتاج، وهي تتتنوع ما بين الحوافز المادية كالتقدير المادي، والحوافز المعنوية كالمشاركة في الأهداف المستقبلية وشهادات التقدير وغيرها.

مثال 4 من الاختبار

أي العبارات الآتية تنتج منطقياً عن العبارتين الآتيتين؟

(1) إذا أمطرت اليوم فسوف تؤجل المباراة.

(2) إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تؤجل المباراة.

A إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تمطر اليوم.

B إذا أمطرت اليوم فسوف يعتذر أحد الفريقين.

C إذا لم تمطر فلن يعتذر أحد الفريقين.

D لا توجد نتيجة صائبة.

اقرأ فقرة الاختبار

افترض أن p, q, r تمثل أجزاء العبارتين الشرطيتين المعلومتين.

p: أمطرت اليوم

q: تأجلت المباراة

r: اعتذر أحد الفريقين

حل فقرة الاختبار

حلّل منطقياً العبارتين الشرطيتين باستعمال الرموز.

العبارة (1): $p \rightarrow q$

يمكن اعتبار كل من العبارتين الشرطيتين صائبة، ومع ذلك لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي؛ لأن نتيجة العبارة الشرطية الأولى ليست فرضاً للعبارة الشرطية الثانية. وعلى الرغم من أنه يتحمل أن تكون العبارات A, B, C صائبة إلا أن المنطق الذي استعمل فيها غير صائب؛ لذلك تكون D هي الإجابة الصائبة.

تحقق من فهمك

أ أي العبارات الآتية تنتج منطقياً عن العبارتين الآتيتين؟

(1) إذا لم تأخذ قسطاً كافياً من النوم، فسوف تكون مرهقاً.

(2) إذا كنت مرهقاً، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيداً.

A إذا كنت مرهقاً، إذن أنت لم تأخذ قسطاً كافياً من النوم.

B إذا لم تأخذ قسطاً كافياً من النوم، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيداً.

C إذا لم يكن أداؤك في الاختبار جيداً، فإنك لم تأخذ قسطاً كافياً من النوم.

D لا توجد نتيجة صائبة.

مثال 5 تطبيق قوانيين التبرير الاستنتاجي

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة فاكتب "لا نتيجة صائبة"، وفسّر تبريرك.

المعطيات: • إذا كان عمرك 18 عاماً، فإنه يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.

• عمر سلمان 18 عاماً.

p: عمرك 18 عاماً.

q: يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.

بما أن عمر سلمان 18 عاماً، فذلك يحقق الفرض **p**. وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة: "يمكن أن يتقدم سلمان للحصول على رخصة القيادة" نتيجة صائبة.

تحقق من فهمك

5) المعطيات: • إذا كانت القطعتان المستقيمتان متطابقتين فإن طوليهما متساوياً.

. \overline{AB} نقطة متتصف

المثال 1

حدّد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍ مما يأتي:

- (1) جميع الطلاب الذين تم تكريمهم معدلهم العام يزيد على 95%. محمد من الطلاب الذين تم تكريمهم؛ إذن معدل محمد العام يزيد على 95%.

- (2) لاحظ خالد أن جاره يسقي أشجار حديقته كل يوم جمعة. واليوم هو الجمعة، فاستنتج أن جاره سوف يسقي أشجار حديقته اليوم.

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائباً أم لا فيما يأتي اعتماداً على المعطيات. فسر تبريرك.

- (3) المعطيات: • إذا كان العدد يقبل القسمة على 4، فإنه يقبل القسمة على 2.

- العدد 12 يقبل القسمة على 4.

الاستنتاج: العدد 12 يقبل القسمة على 2.

- (4) المعطيات: • إذا ذهب فيصل إلى النوم متأخراً، فسوف يكون مرهقاً في اليوم التالي.

- فيصل مرهق.

الاستنتاج: ذهب فيصل إلى النوم متأخراً.

المثال 2

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائباً أم لا فيما يأتي اعتماداً على المعطيات.

فسر تبريرك باستعمال أشكال فن.

- (5) المعطيات: • إذا كان الشاطئ عاماً، فإنه لا يوجد فيه منقذون.

- الشاطئ الجنوبي لا يوجد فيه منقذون.

الاستنتاج: الشاطئ الجنوبي عام.

- (6) المعطيات: • إذا اجتاز الطالب اختبار القبول، فسوف يُقبلون في الكلية.

- اجتاز عبدالله اختبار القبول.

الاستنتاج: سيُقبل عبدالله في الكلية.

المثال 3

- (7) اختيار من متعدد: أي العبارات الآتية تتبع منطقياً عن العبارتين (1)، (2)؟

- (1) إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن قياس إحدى زواياه 90°

- (2) إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90° ، فإن زاويتيه الحاديتين تكونان متمامتين.

A إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإنه يحوي زاوية قياسها 90° .

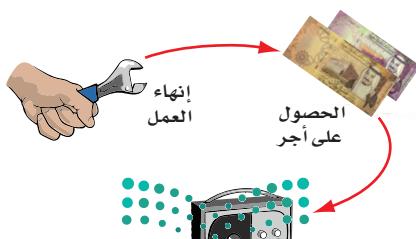
B إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90° ، فإن زاويتيه الحاديتين لا تكونان متمامتين.

C إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن زاويتيه الحاديتين متمامتان.

D إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90° ، فإنه لا يكون مثلاً قائم الزاوية.

المثال 4

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك.



- (8) المعطيات: • إذا أنهى وليد عمله، فإنه سيحصل على أجر.

- إذا حصل وليد على أجر، فإنه سيشتري مذيعاً.

- (9) المعطيات: الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

$$\angle 1 \cong \angle 2$$

المثال 5

المثال 1

حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٌ مما يأتي:

- (10) تنصُّ التعليمات المدرسية على أنه إذا تأخرت الطالبة عن المدرسة خمس مرات، فسوف تُعطى تنبِيئاً. تأخرت فاطمة خمس مرات عن المدرسة؛ لذلك سوف تُعطى تنبِيئاً.
- (11) لاحظ طبيب الأسنان أنَّ فهدًا يأتي في موعده المحدد، إذن سوف يأتي فهد في الموعد المحدد للزيارة القادمة.
- (12) إذا قرَر سعد الذهاب إلى الحفل، فلن يحضر تدريب كرة القدم هذه الليلة. ذهب سعد إلى الحفل. ولذلك لم يحضر سعد تدريب كرة القدم.

- (13) لاحظت علياء أنه عندما تأخذ دروس تقوية، فإن درجاتها تتحسن. أخذت علياء درس تقوية، ولذلك افترضت أن درجاتها سوف تتحسن.

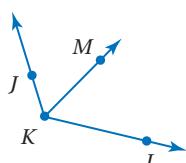
حدد ما إذا كان الاستنتاج صائباً في كلٌ مما يأتي اعتماداً على المعطيات. وفسّر تبريرك.

- (14) المعطيات: الزوايا القائمة متطابقة، $\angle 1 \cong \angle 2$.

الاستنتاج: $\angle 1 \cong \angle 2$.

- (15) المعطيات: إذا كان الشكل مربعاً فإن له أربع زوايا قائمة. الشكل $ABCD$ له أربع زوايا قائمة.

الاستنتاج: الشكل $ABCD$ مربع.



- (16) المعطيات: منصف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين. \overrightarrow{KM} منصف لـ $\angle JKL$.

الاستنتاج: $\angle JKM \cong \angle MKL$.

- (17) المعطيات: إذا بَعَثَت 75% من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء، فسيُقام في قاعة المدينة. بَعَثَت 75% من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء.

الاستنتاج: سيُقام الحفل في قاعة المدينة.

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائباً أم لا فيما يأتي اعتماداً على المعطيات. وفسّر تبريرك باستعمال أشكال فن.

- (18) المعطيات: إذا انخفضت درجة الحرارة إلى أقل من الصفر السيليزية، فمن المحتمل أن يسقط الثلج. لم تنخفض درجة الحرارة عن الصفر السيليزية في يوم الإثنين.

الاستنتاج: لم يسقط الثلج يوم الإثنين.

- (19) المعطيات: إذا كان الشخص يسكن مدينة الرياض، فإنه لا يسكن بجوار الشاطئ. لا يسكن حمود بجوار الشاطئ.

الاستنتاج: يسكن حمود في مدينة الرياض.

- (20) المعطيات: يرتدي بعض الممرضين زياً موحَّداً أزرق اللون. يعمل أحمد ممِّراً.

الاستنتاج: يرتدي أحمد الزي الموَّحد الأزرق اللون.

المثال 3



المثال 5

(21) **الألعاب الأولمبية:** حق العداء السعودي هادي صوعان إنجازاً سعدياً كبيراً في دورة الألعاب الأولمبية في سيدني عام 2000م في سباق 400m حواجز، حيث أنهى السباق في زمن قدره 47.53 ثانية.

(1) إذا وصل هادي صوعان خط النهاية بعد صاحب المركز الأول مباشرة فسيحل في المركز الثاني.

(2) إذا حل العداء في المركز الثاني، فسيحصل على الميدالية الفضية.

استعمل العبارتين (1)، (2) للحصول على نتيجة صائبة.



الربط مع الحياة

يعتبر هادي صوعان أول رياضي سعودي يحرز ميدالية أولمبية.

استعمل قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية. وإذا تعذر ذلك، فاكتتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك.

(22) إذا حصلت شيماء على معدل 98 فأكثر، فإن اسمها سوف يُكتب في لوحة الشرف هذا العام.
إذا كُتب اسم شيماء في لوحة الشرف هذا العام فإنه سيتم تكريمهما.

(23) إذا تعاون مستقيمان في مستوى، فإنهم سيفقاطعان ويكونان زوايا قائمة.
المستقيمان 2 و 5 في نفس المستوى ويكونان زوايا قائمة.

(24) إذا لم يكن المستقيمان في المستوى متوازيين، فإنهم يتقاطعان.
إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته، وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتتب "لا نتيجة صائبة"، وفسر تبريرك.

(25) المعطيات: إذا كانت الزاويتان متتماتتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي 90°
 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

(26) المعطيات: المثلثان يحجبون المطالعة.

إذا كنت تحب المطالعة، فأنت من زوار المكتبة العامة.

(27) المعطيات: إذا كنت رياضياً، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.

إذا كنت تحب المنافسة، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.

مسائل مهارات التفكير العليا

(28) **أكتب:** فسر لماذا لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي لاستنتاج نتيجة من العبارتين الشريطتين الآتتين:

إذا ارتديت قفازات الشتاء، فإنك ستشعر بدفعٍ في يديك.

إذا لم تكن يداك دافعتين، فإن قفازاتك رقيقة.

(29) **تحدد:** استعمل الرموز \rightarrow ، \wedge ، \neg لتمثيل كلّ من قانون الفصل المنطقي وقانون القياس المنطقي بالرموز.
لتكن p هي الفرض، q هي النتيجة.

(30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين يمكن تطبيق قانون القياس المنطقي للحصول على نتيجة صائبة منها، موضحاً تلك النتيجة.

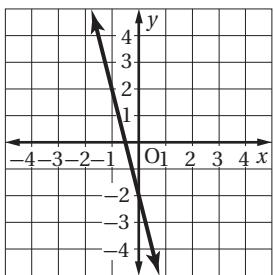
(31) **تحدد:** افترض أن كل المثلثات التي تتحقق الخاصية B تتحقق نظرية فيثاغورس، فهل العبارة الآتية صائبة أم خاطئة؟ علّ إجابتك.

إذا لم يكن المثلث قائم الزاوية، فإنه لا يتحقق الخاصية B .

(32) **أكتب:** يُّنّ أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين قانون القياس المنطقي وخاصية التعدي للمساحة.

تدريب على اختبار

(34) ما ميل المستقيم الممثل بيانياً؟



- A $\frac{1}{4}$
B $-\frac{1}{4}$
C 4
D -4

(33) بين أيّاً من العبارات الآتية تنتج منطقياً عن العبارتين التاليتين.
إذا اشتريت وجبيتين، فإنك ستحصل على علبة عصير مجاناً.

اشترى خليل وجبيتين.

- A اشتري خليل وجبة واحدة فقط.
B سيحصل خليل على وجبة مجانية.
C سيحصل خليل على علبتي عصير مجاناً.
D حصل خليل على علبة عصير مجاناً.

مراجعة تراكمية

تسويق: استعمل المعلومات الآتية في حل السؤالين 35، 36. (المدرس 1-3)

يستعمل مدير التسويق عبارات مكتوبة على صورة (إذا ... فإن ...) لترويج سلعهم وخدماتهم. يوجد إعلان في إحدى محلات صيانة الحواسيب جاء فيه: "إذا كنت تبحث عن السرعة والأمان في حاسوبك، فعليك بمحل النجوم لصيانة الحواسيب".

(35) اكتب عكس العبارة الشرطية.

(36) ما الرسالة التي يريد الإعلان إيصالها إلى الناس حول محل النجوم؟

أنشئ جدول صواب لكُل من العبارات المركبة الآتية: (المدرس 1-2)

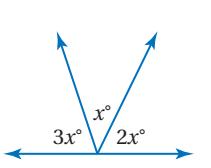
z أو y (40)

-m و k (39)

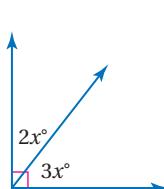
-q و p (38)

b و a (37)

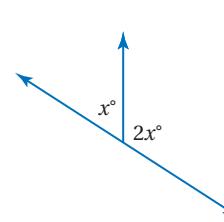
جبر: أوجد قيمة x في كُل من الأشكال الآتية: (مهارة سابقة)



(43)



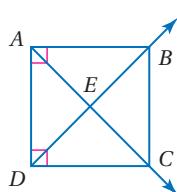
(42)



(41)

استعد للدرس اللاحق

هل يمكن افتراض صواب أيٍ من العبارات الآتية اعتماداً على الشكل المجاور؟ فسر إجابتك:



$\angle DAB$ زاوية قائمة. (44)

$\angle AEB \cong \angle DEC$ (45)

$\angle DAE \cong \angle ADE$ (46)

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (47)



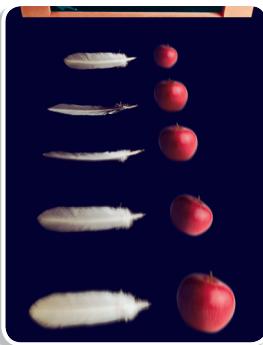
ال المسلمات والبراهين الحرة

Postulates and Paragraph Proofs

1-5

لماذا؟

التجربة في الصورة المجاورة تُظهر سقوط الريشة والتفاحة بالسرعة نفسها في حجرة مفرغة من الهواء، وتوضح هذه التجربة قوانين نيوتن في الجاذبية الأرضية والقصور الذاتي، والتي تُقبل على أنها حقائق أساسية في الفيزياء. وفي الهندسة أيضاً توجد قوانين تُقبل على أنها صحيحة دون برهان.



النقط والمستقيمات والمستويات: المسلمَة أو البدهية عبارة تعطي وصفاً لعلاقة أساسية بين المفاهيم الهندسية الأولية وتُقبل على أنها صحيحة دون برهان. درست مبادئ أساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات، ويمكن اعتبار هذه المبادئ الأساسية مسلمات.

فيما سبق:

درست استعمال التبرير الاستنناتجي بتطبيق قانون الفصل المنطقي وقانون القياس المنطقي.

(الدرس 1-4)

والآن:

- أتعرف المسلمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات وأستعملها.
- أكتب برهاناً حرّاً.

المفردات:

المسلمة

axiom or postulate

البرهان

proof

النظرية

theorem

البرهان الحر

paragraph proof

قراءة الرياضيات

يرمز لل المستقيم بحرف صغير مثل مثل: n, m, l, \dots نقطتين واقعن عليه $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \dots$ مثل: يرمز للمستوى بحرف كبير مثل مثل: K, G, F, \dots نقاط فيه ليست على XYZ استقامة واحدة.

أضف إلى
مطويتك

النقط والمستقيمات والمستويات

مسلمات

مثال	التعبير اللفظي
المستقيم n هو المستقيم الوحيد المار بالنقطتين P و R .	1.1 أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.
المستوى K هو المستوى الوحيد الذي يحوي النقاط A و B و C ، والتي لا تقع على استقامة واحدة.	1.2 أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.
المستقيم n يحوي النقاط P و Q و R .	1.3 كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.
يحوي المستوى K النقاط L و B و C و E ، وهي ليست على استقامة واحدة.	1.4 كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.
تقع النقطتان A و B في المستوى K ، ويمر بهما المستقيم m ؛ إذن المستقيم m يقع كلياً في المستوى K .	1.5 إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كلياً في ذلك المستوى.

تعلق المسلمات الآتية بتقاطع المستقيمات والمستويات.

أضف إلى
مطويتك

تقاطع المستقيمات والمستويات

مسلمتان

مثال	التعبير اللفظي
المستقيمان s و t يتقاطعان في النقطة P .	1.6 إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.
يتقاطع المستويان F و G في المستقيم w .	1.7 إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون مستقيماً.

زيارة التعلم

Ministry of Education

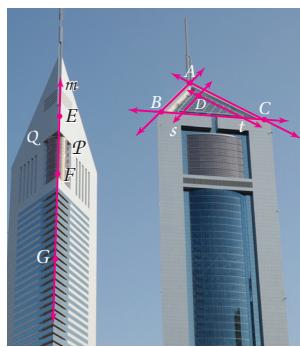
2022 - 1444

الدرس 5-5 المسلمات والبراهين الحرة

45

تُعد المسلمات أساساً للبراهين والتبيريات المتعلقة بالنقاط المستقيمات والمستويات.

مثال 1 من واقع الحياة تحديد المسلمات



هندسة معمارية: اذكر المسلمات التي تبرر صحة كل عبارة مما يأتي:

- (a) يحتوي المستقيم m على النقاطين F و G ، ويمكن أن تقع النقطة E أيضًا على المستقيم m .

المسلمة 1.3، التي تنص على أن كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل. حيث إن حافة البناء عبارة عن المستقيم m . والنقط E, F, G واقعة على هذه الحافة؛ لذا فهي تقع على المستقيم m .

- (b) يتقطع المستقيمان ω و τ في النقطة D .

المسلمة 1.6 التي تنص على أنه إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

حيث إن الشبكة المثلثة أعلى واجهة البناء تتشكل من مستقيمات متقطعة، والمستقيمان ω و τ يتقاطعان في نقطة واحدة فقط هي D .

تحقق من فهمك

- (1A) الن نقاط A, B, C تحدد مستوى. (1B) يتقطع المستويان \mathcal{P} و Q في المستقيم m .

يمكنك استعمال المسلمات لتفسير تبريرك في أثناء تحليل بعض العبارات.

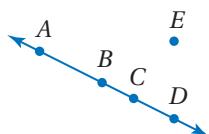
مثال 2 تحليل العبارات باستعمال المسلمات

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صائبة دائمًا أو صائبة أحياناً أو غير صائبة أبدًا. فسر تبريرك.

- (a) إذا تقاطع مستقيمان واقعان في مستوى واحد، فإن نقطة تقاطعهما تقع أيضًا في المستوى الذي يحويهما.

صائبة دائمًا؛ تنص المسلمة 1.5 على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع بكماله في ذلك المستوى، وبما أن المستقيمين يقعان في المستوى نفسه، فإن أي نقطة واقعة عليهما بما فيها نقطة التقاطع تقع في المستوى نفسه.

- (b) أي أربع نقاط لا تقع على استقامرة واحدة.



صائبة أحياناً: تنص المسلمة 1.3 على أن كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل، وهذا يعني أنه يمكن أن يحوي المستقيم نقطتين أو أكثر؛ إذن يمكن أن تكون أربع نقاط ليست على استقامرة واحدة مثل A, E, C, D في الشكل المجاور، أو تكون على استقامرة واحدة مثل A, B, C, D مثل .

تحقق من فهمك

- (2A) المستقيمان المتتقاطعان يحددان مستوى. (2B) تتقطع ثلاثة مستقيمات في نقطتين.

إرشادات للدراسة

نظام المسلمات
هو مجموعة من المسلمات التي يمكن استعمال بعضها أو كلها لاستنتاج النظريات عن طريق المنطق.

البرهان الحر: عند إثباتك نتيجة تخمين ما، فإنك تستعمل التبرير الاستنتاجي للانتقال من الفرض إلى النتيجة التي تزيد إثبات صحتها بكتابه **برهان**، وهو دليل منطقي فيه كل عبارة تكتبها تكون مبرهنة بحارة سبق إثباتها أو قبول صحتها.

في حال إثبات صحة عبارة (أو تخمين) فإنها تُسمى **نظريّة**، ويمكن بعد ذلك استعمالها في البراهين لتبرير صحة عبارات أخرى.



البرهان الحر هو أحد أنواع البراهين، وفيه تُكتب فقرة تفسر أسباب صحة التخمين في موقف مُعطى.

كتابة البرهان الحر

مثال 3

المعطيات: M نقطة متصف \overline{XY} ، اكتب برهاناً حرّاً لإثبات أن $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

المعطيات: M نقطة متصف \overline{XY} .

المطلوب: $\overline{XM} \cong \overline{MY}$



إذا كانت M نقطة متصف \overline{XY} ، فإنه بحسب تعريف نقطة متصف القطعة المستقيمة تكون \overline{XM} و \overline{MY} لهما الطول نفسه. ومن تعريف التطابق، إذا كانت القطعتان المستقيمتان لهما الطول نفسه، فإنهما تكونان متطابقتين.

لذا $\overline{XM} \cong \overline{MY}$

الخطوتن 1 و 2

الخطوتن 3 و 4

الخطوة 5

إرشادات حل المسألة

العمل عكسيًّا

إحدى استراتيجيات كتابة البرهان هي العمل عكسيًّا، وذلك بأن تبدأ من المطلوب وتعمل عكسيًّا خطوة بخطوة حتى تصل إلى المعطيات.

(3) إذا علمت أن C تقع على \overline{AB} ، حيث $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ ، فاكتب برهاناً حرّاً لإثبات أن C هي نقطة متصف \overline{AB} .

تحقق من فهمك

يعرف التخمين في مثال 3 بنظرية نقطة المنتصف.

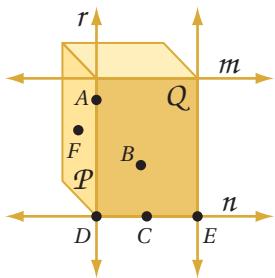
نظريّة 1.1 نقطة المنتصف

إذا كانت M نقطة متصف \overline{AB} ، فإن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.



المثال 1

اذكر المسلمة التي تبرر صحة كل عبارة من العبارات الآتية:



- (1) المستويان P و Q يتقاطعان في المستقيم r .
- (2) المستقيمان r و n يتقاطعان في النقطة D .
- (3) المستقيم n يحوي النقاط C, D, E .
- (4) المستوى P يحوي النقاط A, F, D .
- (5) المستقيم n يقع في المستوى Q .
- (6) المستقيم r هو المستقيم الوحيد الذي يمر بالنقطتين A و D .

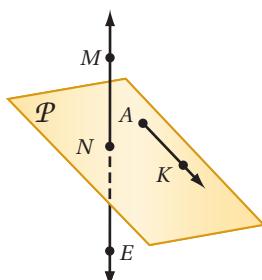
حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. وفسّر تبريرك.

المثال 2

(7) تتقاطع ثلاثة مستويات في مستقيم.

(8) المستقيم r يحوي النقطة P فقط.

(9) يمر مستقيم واحد فقط ب نقطتين معلومتين.



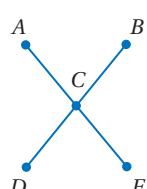
في الشكل المجاور: يقع \overrightarrow{AK} في المستوى P وتقع النقطة M على \overleftrightarrow{NE} .

اذكر المسلمة التي تثبت صحة كلٍ من العبارات الآتية:

(10) تقع في مستوى واحد.

(11) يحوي النقطتين M, N على \overleftrightarrow{NE} .

(12) النقط N, K, A تقع في المستوى نفسه.



(13) **برهان:** في الشكل المجاور، $\overline{AE} \cong \overline{DB}$

والنقطة C نقطة متصف كُلًّا من \overline{AE} و \overline{DB} .

. اكتب برهاناً حراً لإثبات أن $AC = CB$.

المثال 3

كعك: اذكر المسلمة التي تبرر صحة كل عبارة من العبارات

الآتية:

(14) المستقيمان n و ℓ يتقاطعان في النقطة K .

(15) المستويان P, Q يتقاطعان في المستقيم m .

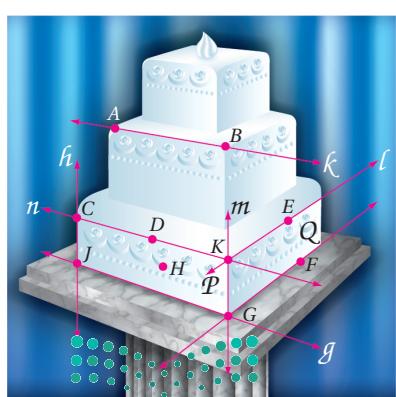
(16) النقاط D, K, H تحدّد مستوى.

(17) النقطة D تقع على المستقيم n المار بالنقطتين C, K .

(18) النقاط E, F, G تقع في المستوى نفسه.

(19) يقع في المستوى Q .

(20) المستقيمان h, g يتقاطعان في النقطة J .



المثال 2

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. فسر تبريرك.

(21) يوجد مستوى واحد فقط يحوي النقاط الثلاث A, B, C التي لا تقع على استقامة واحدة.

(22) ثلاثة مستقيمات على الأقل تمر بال نقطتين J و K .

(23) إذا وقعت النقاط M, N, P في المستوى X ، فإنها تقع على استقامة واحدة.

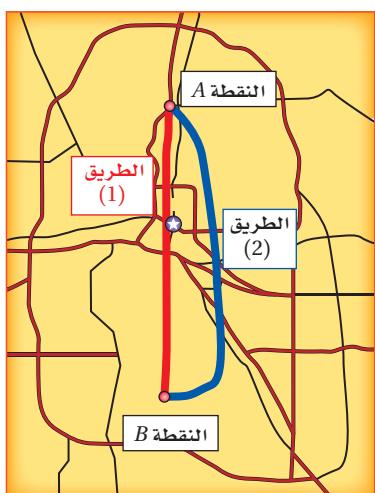
(24) تقع النقطتان X و Y في المستوى Z . وأي نقطة على استقامة واحدة مع X و Y تقع أيضاً في المستوى Z .

(25) النقاط A, B, C تحدد مستوى.

(26) **برهان:** إذا علمت أن Y هي نقطة متصف \overline{XZ} ، وأن Z هي نقطة متصف \overline{YW} ، فأثبت أن $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$

المثال 3

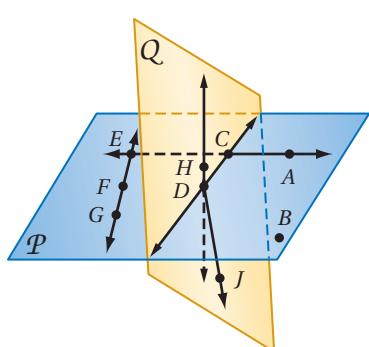
(27) **برهان:** النقطة L هي نقطة متصف \overline{JK} ، ويتقاطع \overline{MK} مع \overline{JK} في النقطة K . إذا كان $\overline{JL} \cong \overline{LK}$. فأثبت أن $\overline{LK} \cong \overline{MK}$.



(28) **خرائط:** أمام خالد طريقان للانتقال من الموقع إلى A الموقع B كما يظهر في الخريطة المجاورة. إذا كان الحد الأعلى للسرعة المسموح بها على الطريق (1) هو 90 km/h ، وعلى الطريق (2) هو 110 km/h .

(a) أي الطريقين يبدو أقصر طولاً؟ فسر تبريرك.

(b) إذا كانت المسافة من B إلى A عبر الطريق (1) تساوي 16.8 km ، والمسافة بينهما عبر الطريق (2) تساوي 17.6 km ، فأي الطريقين أسرع وصولاً، إذا قاد خالد سيارته بالحد الأعلى للسرعة المسموح بها؟



في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{CE} و \overleftrightarrow{CD} و \overleftrightarrow{DJ} و \overleftrightarrow{DH} واقعان في المستوى P ، \overleftrightarrow{EG} و \overleftrightarrow{EG} واقعان في المستوى Q . اذكر المسلمات التي يمكن استعمالها لإثبات صحة كل عبارة فيما يأتي :

(29) النقاطان C و B على استقامة واحدة.

(30) يحوي النقاط E, F, G \overleftrightarrow{EG}

(31) النقاطان D و F تقعان على استقامة واحدة.

(32) النقاط C, D, B تقع في المستوى نفسه.

(33) المستوى Q يحوي النقاط C, H, D, J .

(34) المستوى P يتقاطع مع المستوى Q في \overleftrightarrow{CD} .



(35) **هندسة عمارة:** يُحسب ميل السطح عادة بقسمة الارتفاع مقسماً بالبوصة على المسافة الأفقية مقسماً بالقدم. استعمل العبارات أدناه لكتاب برهاناً حراً للعبارة الآتية: ميل السطح في تصميم أحمد غير كافٍ.



- عند استعمال مواد عازلة للماء، يجب أن يكون الميل $\frac{1}{4}$ بوصة لكل قدم على الأقل.
- حتى ينحدر الماء بتأثير الجاذبية الأرضية، يجب أن يكون ميل السطح 4 بوصات لكل قدم.
- صمم أحمد سطح منزله بحيث يكون مائلاً.
- الميل في تصميم أحمد يساوي 2 بوصة لكل قدم.

الربط مع الحياة

تُصمم أسطح المنازل بطرق هندسية مختلفة لمنع تسرب الماء. من هذه الطرق استعمال مواد عازلة لا تسمح بمنفذ الماء، أو أن تبني مائلة؛ لتسهيل انحدار الماء عنها بتأثير الجاذبية الأرضية.



(36) **رياضة:** أقيمت بطولة شاركت فيها ثمان فرق كرة قدم للناشئين.

- ما عدد المباريات التي ستجرى في الدور الأول؟
- ارسم شكلاً يوضح عدد مباريات الدور الأول. أي مسلمة يمكنك استعمالها لتبرير هذا الشكل؟
- أوجد طريقة حسابية لإيجاد عدد المباريات التي ستجرى في الدور الأول، بغض النظر عن عدد الفرق المشاركة في البطولة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(37) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلاً يحقق خمساً من المسلمات السبع التي تعلمتها في هذا الدرس. اشرح كيف تحققت كل منها في الشكل.

(38) **اكتشف الخطأ:** قام كل من عمر وسعيد بكتابة برهان لإثبات أنه إذا كانت \overline{AB} تطابق \overline{BD} ، وكانت A, B, D على استقامة واحدة، فإن B نقطة متتصف \overline{AD} . وقد بدأ كل منهما ببرهانه بطريقة مختلفة. أيهما بدأ برهانه بطريقة صحيحة؟ فسر إجابتك.

للعيد
 \overline{AB} تطابق \overline{BD} ، والنقط
 A, B, C تقع على استقامة واحدة.

عمر
إذا كانت B نقطة متتصف \overline{AB} ، فإن B تقسم \overline{AD} إلى قطعتين متساويتين متتاظبتين.

تبrier: حدد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحياناً أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبداً. فسر تبريرك أو أعط مثالاً مضاداً:



- (39) أي ثلات نقاط يمر بها مستوى واحد فقط.
- (40) **كتب:** بين أوجه الشبه والاختلاف بين المسلمات والنظريات.

تدريب على اختبار

(42) ما أكبر عدد من المناطق التي تتشكل عندما تقطع ثلاثة مستقيمات مختلفة دائرة؟

6 C

7 D

4 A

5 B

(41) أي العبارات الآتية ليست صائبة؟

A أي ثلات نقاط ليست على استقامة واحدة تحدد مستوى واحداً فقط.

B يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة فقط.

C يوجد على الأقل مستقيمان بحولان نقطتين نفسهما.

D تقسم نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة إلى قطعتين متطابقتين.

مراجعة تراكمية

استعمل قانون الفصل المنطقى أو قانون القياس المنطقى؛ لتحصل على نتيجة صائبة من العبارات الآتية إن أمكن، واذكر القانون الذى استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك. (الدرس 1-4)

(43) (1) إذا كانت الزوايا متقابلتين بالرأس، فإنهما لا تكونان متجاورتين على مستقيم.

(2) إذا كانت الزوايا متجاورتين على مستقيم فهما غير متطابقتين.

(44) (1) إذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها أقل من 90°

. $\angle EFG$ حادة.

اكتب العبارتين الشرطيتين الآتىتين على صورة (إذا ... فإن ...). (الدرس 1-3)

(46) يخشى البطل أن يخسر.

(45) يُكتب اسم الطالب المتفوق في لوحة الشرف.

استعد للدرس اللاحق

حلَّ كلاً من المعادلات الآتية:

$$5(x^2 + 2) = 30 \quad (49)$$

$$\frac{1}{3}x + 6 = 14 \quad (48)$$

$$4x - 3 = 19 \quad (47)$$



اختبار منتصف الفصل

استعمل أشكال في أدناه لتحديد قيمة الصواب لكل من العبارات الشرطية الآتية. فسر تبريرك. (الدرس 1-3)



(14) إذا كان المضلع مربعاً، فإنه يكون مستطيلاً.

(15) إذا كان المستقيمان متوازيان، فإنهما لا يمكن أن يكونا متوازيين.

(16) **كرة قدم:** تقابل فريقا الفرسان وال فهو في المباراة النهائية. معمداً على المعطيات، حدد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا في كل مما يأتي. فسر تبريرك. (الدرس 1-4)

المعطيات: الفريق الفائز بالكأس هو الفريق الذي يحرز أهدافاً أكثر في نهاية المباراة.

أحرز فريق الفرسان 3 أهداف، بينما أحرز فريق فهو هدفين.

النتيجة: فاز فريق الفرسان بالكأس.

(17) **اختيار من متعدد:** أي العبارات الآتية تتبع منطقياً عن العبارتين (1) و (2)? (الدرس 1-4)

(1) إذا كنت أحد طلاب المرحلة الثانوية، فإن عمرك 16 سنة على الأقل.

(2) إذا كان عمرك 16 سنة على الأقل، فإن عمرك يؤهلك لقيادة السيارة.

A إذا كان عمرك يؤهلك لقيادة السيارة، فإنك أحد طلاب المرحلة الثانوية.

B إذا كان عمرك لا يؤهلك لقيادة السيارة، فأنت في المرحلة المتوسطة.

C إذا كنت أحد طلاب المرحلة الثانوية، فإن عمرك يؤهلك لقيادة السيارة.

D إذا كان عمرك 16 سنة على الأقل، فإنك أحد طلاب المرحلة الثانوية.

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. فسر تبريرك. (الدرس 1-5)

(18) النقاط J, K, L, N ليست على استقامة واحدة، وتقع جميعها في المستوى M .

(19) يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطتين S, R .

(20) المستقيم a يحتوي على النقطة Q فقط.

اكتب تخمينياً يصف النمط في كل متابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كل منها. (الدرس 1-1)



(2) 5, 5, 10, 15, 25,

أعط مثلاً مضاداً يبين أن كلًّا من التخمينين الآتيين خاطئ: (الدرس 1-1)

(3) إذا كان $AB = BC$ ، فإن B نقطة متصرف \overline{AC} .

(4) إذا كان n عددًا حقيقياً، فإن $n^3 > n^2$.

استعمل العبارات r, q, p لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسر تبريرك. (الدرس 1-2)

p : في الأسبوع الواحد 7 أيام.

q : في اليوم الواحد 24 ساعة.

r : صفر هو الشهر الذي يأتي قبل شهر المحرم.

$$(5) p \wedge r$$

$$(6) q \text{ و } p$$

$$(7) p \wedge \sim r$$

(8) أكمل الجدول الآتي. (الدرس 1-2)

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	F		
F	T		
F	F		
T	T		

حدد الفرض والنتيجة في كل من العبارات الشرطية الآتية: (الدرس 1-3)

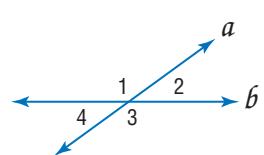
(9) إذا كان للمضلع خمسة أضلاع، فإنه خماسي.

(10) إذا كان $10 = 4x - 6$ ، فإن $x = 4$.

(11) الزاوية التي قياسها أقل من 90° تكون حادة.

حدد قيمة الصواب لكل من العبارتين الشرطيتين الآتتين. وإذا كانت العبارة صائبة، فبرأ إجابتك. (الدرس 1-3)

(12) $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.



(13) $\angle 1$ و $\angle 4$ متطابقتان.

البرهان الجبري

Algebraic Proof

1-6

المادة



تحتوي بعض السيارات على شاشة لعرض درجة الحرارة الخارجية بالمقاييس الفهرنهائي أو المقاييس السيليزي. والمقاييس الفهرنهائي يحدد درجة تجمد الماء عند 32° ، ودرجة غليانه عند 212° ، أما المقاييس السيليزي فيحدد درجة تجمد الماء عند 0° ، وغليانه عند 100° .

يمكنك استعمال البرهان الجبري؛ لإثبات أنه إذا كانت العلاقة التي تربط هذين المقاييسين معطاة بالصيغة.

$$F = \frac{5}{9}(C - 32)$$

البرهان الجيري: الجبر نظام مكون من مجموعات من الأعداد، وعمليات عليها وخصائص تمكّن من إجراء هذه العمليات. والجدول الآتي يلخص عدة خصائص للأعداد الحقيقة التي ستستعملها في الجبر.

فيما سبق:

درست المسلمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات.

(الدرس 1-5)

والآن:

- أستعمل الجبر لكتابة برهان ذي عمودين.
- أستعمل خصائص المساواة لكتابة برهان هندسي.

المفردات:

- البرهان الجيري algebraic proof
- البرهان ذو العمودين two-column proof

مفهوم أساسى	
خصائص الأعداد الحقيقة	
a, b, c أعداد حقيقة	الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقة a, b, c
$a + c = b + c$ ، فإن $a = b$	خاصية الجمع للمساواة
$a - c = b - c$ ، فإن $a = b$	خاصية الطرح للمساواة
$a \cdot c = b \cdot c$ ، فإن $a = b$	خاصية الضرب للمساواة
$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ، $c \neq 0$ و $a = b$	خاصية القسمة للمساواة
$a = a$	خاصية الانعكاس للمساواة
$b = a$ ، فإن $a = b$	خاصية التماثل للمساواة
$a = c$ و $b = c$ ، فإن $a = b$	خاصية التعدي للمساواة
$a = b$ ، فإنه يمكننا أن نضع b مكان a في أي معادلة أو عبارة جبرية تحتوي على a	خاصية التعويض للمساواة
$a(b + c) = ab + ac$	خاصية التوزيع

البرهان الجيري هو برهان يتكون من سلسلة عبارات جبرية، وتبرر خصائص المساواة أعلاه كثيرةً من العبارات المستعملة في البراهين الجبرية.

مثال 1 تبرير كل خطوة عند حل المعادلة

أثبتت أنه إذا كان $70 = -5(x + 4)$ ، فإن $-18 = x$. اكتب تبريراً لكل خطوة.

المعادلة الأصلية، أو المعطيات

$$-5(x + 4) = 70$$

استعمل خاصية التوزيع

$$-5 \cdot x + (-5) \cdot 4 = 70$$

بسط

$$-5x - 20 = 70$$

استعمل خاصية الجمع للمساواة

$$-5x - 20 + 20 = 70 + 20$$

بسط

$$-5x = 90$$

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{90}{-5}$$

$$x = -18$$

تحقق من فهمك



اذكر الخاصية التي تبرر كلاً من العبارتين الآتتين:

$$(1A) \text{ إذا كان } -1 - 4 + (-5) = x - 1 - 4, \text{ فإن } -5 = x - 1$$

$$(1B) \text{ إذا كانت } y = 5, \text{ فإن } 5 = y$$

(1C) أثبت أنه إذا كان $-5 = 2x - 13$, فإن $x = 4$. اكتب تبريراً لكل خطوة.

يوضح المثال 1 برهان العبارة الشرطية "إذا كان $70 = -5(x + 4)$, فإن $-18 = x$ ". لاحظ في هذا البرهان أن العمود الأيمن يحتوي على تفصيل الطريقة التي تقود إلى الحل خطوة بخطوة، أما العمود الأيسر فيحتوي على مبرر كل خطوة.

وتكتب براهين النظريات والتخمينات الهندسية عادةً على هذا النحو فيما يسمى **البرهان ذو العمودين** ، حيث العبارات مرتبة في عمود، والتبريرات في عمود موازي.

مثال 2 من واقع الحياة كتابة البرهان الجبري



علوم: إذا كانت الصيغة التي تحول درجات الحرارة من فهرنهايتية إلى سيليزية هي $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ، فإن الصيغة التي تحول درجات الحرارة من سيليزية إلى فهرنهايتية هي $F = \frac{9}{5}C + 32$. اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات صحة هذا التخمين.

اكتب المعطيات والمطلوب وإثباته أولاً.

$$\text{المعطيات: } C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$\text{المطلوب: } F = \frac{9}{5}C + 32$$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطيات	$C = \frac{5}{9}(F - 32) \quad (1)$
(2) خاصية الضرب للمساواة	$\frac{9}{5}C = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(F - 32) \quad (2)$
(3) بالتبسيط	$\frac{9}{5}C = F - 32 \quad (3)$
(4) خاصية الجمع للمساواة	$\frac{9}{5}C + 32 = F - 32 + 32 \quad (4)$
(5) بالتبسيط	$\frac{9}{5}C + 32 = F \quad (5)$
(6) خاصية التماثل للمساواة	$F = \frac{9}{5}C + 32 \quad (6)$

إرشادات للدراسة

الخوارزميات

الخوارزمية هي سلسلة من الخطوات المتتابعة لإجراء عملية أو حل مسألة ما. ويمكن اعتبار البرهان من أنواع الخوارزميات؛ لأنّه يتم خطوة بخطوة.

إرشادات للدراسة

رياضيات ذهنية

إذا سمح معلمك، يمكنك حذف بعض الخطوات، وذلك لأن بعض الحسابات يمكن إجراؤها ذهنياً؛ ففي المثال 2 يمكن حذف العبارتين 2 و 4؛ ليصبح مبرر العبارة "خاصية الضرب للمساواة" ، والعبارة 5 "خاصية الجمع للمساواة".

تحقق من فهمك

اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات صحة كلٌ من التخمينين الآتيين:

$$(2A) \text{ إذا كان } 0 = -8 - \frac{5x+1}{2}, \text{ فإن } 3 = x$$



(2B) **فيزياء:** إذا كانت المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بسرعة ابتدائية u وسرعة نهاية v في زمان t

$$\text{تعطى بالعلاقة } d = t \cdot \frac{u+v}{2}, \text{ فإن } d = t \cdot \frac{2d}{t} - v$$

خاصية الإبدال
والتجمیع

الخصائص الآتیة

صحیحة لأنّ أعداد
 a, b, c

خاصیة الإبدال للجمع

$$a + b = b + a$$

خاصیة الإبدال للضرب

$$a \cdot b = b \cdot a$$

خاصیة التجمیع للجمع

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

خاصیة التجمیع
للضرب

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

الزوايا	القطع المستقيمة	الخاصية
$m\angle 1 = m\angle 1$	$AB = AB$	الانعکاس
إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ $.m\angle 2 = m\angle 1$ فـإن	إذا كان $AB = CD$ $.CD = AB$ فـإن	التماثل
إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ $.m\angle 1 = m\angle 3, m\angle 2 = m\angle 3$ و	إذا كانت $AB = CD$ $.AB = EF, CD = EF$ و	التعدي

يمكن استعمال هذه الخصائص لكتابـة براهين هندسـية .

مثال 3 كتابة البرهان الهندسي

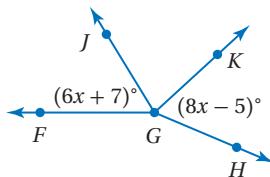
اكتب برهاناً ذا عـودين لإثبات أنه إذا كانت:

. $x = 6$ ، $\angle FGJ \cong \angle JGK, \angle JGK \cong \angle KGH$ المعطـيات: $\angle FGJ \cong \angle JGK, \angle JGK \cong \angle KGH,$

$$m\angle FGJ = (6x + 7)^\circ, m\angle KGH = (8x - 5)^\circ$$

$$\text{المطلوب: } x = 6$$

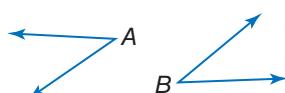
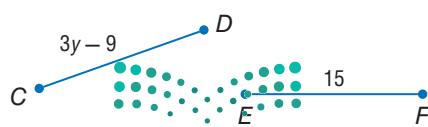
البرهـان:



المبررات	العبارات
(1) معطـيات	$\angle FGJ \cong \angle JGK; \angle JGK \cong \angle KGH \quad (1)$
(2) تعـريف تطابق الزوايا	$m\angle FGJ = m\angle JGK; m\angle JGK = m\angle KGH \quad (2)$
(3) خاصـیة التعـدي للمسـاواة	$m\angle FGJ = m\angle KGH \quad (3)$
(4) خاصـیة التـعـويض للمسـاواة	$6x + 7 = 8x - 5 \quad (4)$
(5) خاصـیة الجـمـع للمسـاواة	$6x + 7 + 5 = 8x - 5 + 5 \quad (5)$
(6) بالـتبـسيـط	$6x + 12 = 8x \quad (6)$
(7) خاصـیة الـطـرح للمسـاواة	$6x + 12 - 6x = 8x - 6x \quad (7)$
(8) بالـتبـسيـط	$12 = 2x \quad (8)$
(9) خاصـیة الـقـسـمـة للمسـاواة	$\frac{12}{2} = \frac{2x}{2} \quad (9)$
(10) بالـتبـسيـط	$6 = x \quad (10)$
(11) خاصـیة التـماـثـل للمسـاواة	$x = 6 \quad (11)$

تحقق من فهمك

اكتب برهاناً ذا عـودين؛ لإثبات صـحة كـلـ من التـخـمينـين الآتـيين:

إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $y = 8$. $\angle A \cong \angle B, m\angle A = 37^\circ$ ، فإن $m\angle B = 37^\circ$.

المثال 1 اذكر الخاصية التي تبرر العبارة:

(1) إذا كان $x = 5$, فإن $x + 5 = 5$

(2) أثبت أنه إذا كان $x = \frac{1}{2}(x + 5) = 11$, فإن $x = 2$ اكتب تبريراً لكل خطوة.

(3) أكمل البرهان الآتي:

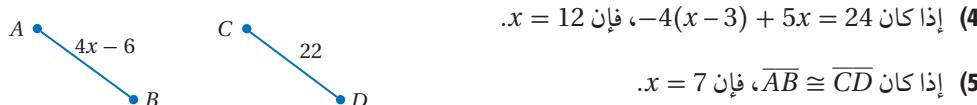
$$\frac{y+2}{3} = 3$$

$$\text{المطلوب: } y = 7$$

البرهان:

المبررات	العبارات
_____ (a) معطيات	_____ (a)
_____ (b)	$3\left(\frac{y+2}{3}\right) = 3(3)$ (b)
_____ (c)	_____ (c)
(d) خاصية الطرح للمساواة	$y = 7$ (d)

المثالان 2, 3 برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات صحة كلٌ من التخمينين الآتيين:



(6) صحة: يراقب بدر معدل نبضات قلبه في الدقيقة الواحدة مستعملاً جهاز قياس النبض، ليتحقق من أنه يقع ضمن المدى الطبيعي. ويمكن تقدير هذا المعدل باستعمال الصيغة: $T = 0.75(220 - a)$, حيث T معدل نبضات القلب، و a عمر الشخص.

(a) أثبت أنه إذا علمت معدل نبضات قلب شخص، فإنه يمكنك حساب عمره مستعملاً الصيغة:
 $a = 220 - \frac{T}{0.75}$.

(b) إذا كان معدل نبضات قلب بدر يساوي 153، فكم يكون عمره؟ ما الخاصية التي تؤكّد صحة حساباتك؟

تدريب وحل المسائل

المثال 1 اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

(7) إذا كان $a + 10 = 20$, فإن $a = 10$.

(8) إذا كان $-15 = -45$, فإن $\frac{x}{3} = 15$.

(9) إذا كان $-3 = -35$, فإن $5(x + 7) = 5$.

(10) إذا كان $4 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)$, فإن $3x - 2 = 4$.

(11) أثبت أنه إذا كان $x + 2 = x + \frac{22}{3}$, فإن $4(x - 5) = x$ مبرراً كل خطوة.



اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

$$\text{إذا كان } m\angle 1 = m\angle 2, m\angle 2 = m\angle 3 \text{، فإن } m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 \quad (12)$$

$$XY = XY \quad (13)$$

$$\text{إذا كان } BC = DE, \text{ فإن } \frac{1}{5}BC = \frac{1}{5}DE \quad (14)$$

$$\text{إذا كان } m\angle 1 = m\angle 2 = 25^\circ, m\angle 1 = 25^\circ, m\angle 2 = 25^\circ \quad (15)$$

$$\text{إذا كان } AB = CD, BC = CD \text{، فإن } AB = BC \quad (16)$$

أكمل البرهانين الآتيين:

المثال 2

$$\frac{8 - 3x}{4} = 32 \quad (17)$$

$$\text{المطلوب: } x = -40$$

البرهان:

العبارات	المبررات
$\frac{8 - 3x}{4} = 32$ (a)	معطيات
$4 \left(\frac{8 - 3x}{4} \right) = 4(32)$ (b)	?
$8 - 3x = 128$ (c)	?
$x = -40$ (e)	(d) خاصية الطرح للمساواة ?
	(e)

(18) علوم: تعطى المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بالقدم بالصيغة: $d = vt + \frac{1}{2}at^2$ ، حيث v سرعة

الجسم بالقدم لكل ثانية، t الزمن بالثانية، و a التسارع بالقدم لكل ثانية تربع.

$$a = \frac{2d - 2vt}{t^2}$$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٌ من التخمينين الآتيين:

المثال 3

$$\text{إذا كان } r = -\frac{7}{6}n, \text{ فإن } -36 = -\frac{1}{3}n \quad (19)$$

$$\text{إذا كان } 4 = -3r + \frac{1}{2}, \text{ فإن } n = . \quad (20)$$

(21) علوم: يُعطي قانون الغاز المثالي بالصيغة $PV = nRT$ ، حيث P : الضغط بوحدة الضغط الجوي(atm)، V : الحجم باللترات ، و n : عدد مولات الغاز ، و R : ثابت الغاز المثالي ، حيث $T = 0.0821$ درجة الحرارة بالكلفن.

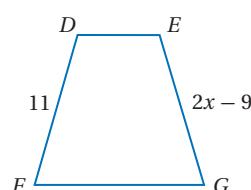
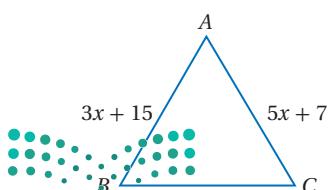
(a) أثبتت أنه إذا كان ضغط الغاز وحجمه وعدد مولاته جميعها معلومة، فإنه يمكن حساب درجة حرارته باستعمال الصيغة $T = \frac{PV}{nR}$.

(b) ما درجة حرارة 1 مول من الأكسجين موجود في إناء سعته 25 L ، وتحت ضغط مقداره 1 atm؟ ما الخاصية التي تبرر حساباتك؟

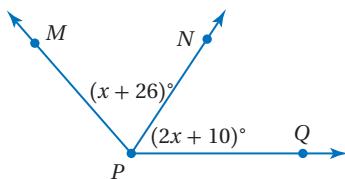
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٌ من التخمينات الآتية:

$$\text{إذا كانت } \overline{AB} \cong \overline{AC}, \text{ فإن } x = 4 \quad (23)$$

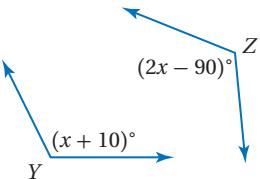
$$\text{إذا كانت } \overline{DF} \cong \overline{EG}, \text{ فإن } x = 10 \quad (22)$$



(25) إذا كانت $\angle MPN \cong \angle QPN$, فإن $x = 16$.



(24) إذا كانت $\angle Y \cong \angle Z$, فإن $x = 100$.



(26) **كهرباء:** يمكن حساب فرق الجهد V للدائرة الكهربائية باستعمال القانون $V = \frac{P}{I}$, حيث: P : القدرة الكهربائية، و I : شدة التيار الكهربائي المار في الدائرة.

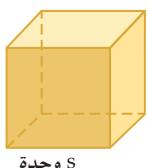
- (a) اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون القدرة الكهربائية ثابتة، فإن فرق الجهد يصبح نصف ما كان عليه عندما يتضاعف شدة التيار الكهربائي.
- (b) اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون شدة التيار الكهربائي ثابتة، فإن فرق الجهد يتضاعف عندما يتضاعف القدرة الكهربائية.



الربط مع الحياة

يحدث البرق عند تفريع الشحنات بين السحب المشحونة كهربائيًا. وتستمر هذه العملية لمدة تقل عن ثانية واحدة، وينتج عنها من 100 مليون إلى 1 بليون فولت. قارن هذه الكمية مع فرق الجهد في المنازل، والذي يبلغ 120 فولت أو 220 فولت فقط.

(27) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مكعبًا طول ضلعه s وحدة.



(a) **حسبيًا:** ارسم أو اعمل نماذج لمكعبات أطوال أضلاعها 16, 8, 4, 2, 1 وحدة.

(b) **جدولياً:** أوجد حجم كل مكعب. نظم نتائجك في جدول مثل المجاور.

(c) **لقطياً:** استعمل الجدول لعمل تخمين حول تغيير حجم المكعب عندما يتضاعف طول ضلعه. عبر عن تخمينك لفظياً.

(d) **جيبرياً:** اكتب تخمينك على صورة معادلة جبرية.

(e) **منطقياً:** اكتب برهاناً لتخمينك. تأكد من كتابة المعطيات والمطلوب في بداية البرهان.

مسائل مهارات التفكير العليا

(28) **تحدُّ:** تقع النقطة P على \overline{AB} . إذا علمت أن طول \overline{AP} يساوي $3x + 1$ وطول \overline{PB} يساوي $2x + 3$, وطول \overline{AB} يساوي 10.5 وحدات ، فارسم شكلاً يوضح المسألة، وأثبت أن طول \overline{AP} يساوي ثلثي طول \overline{AB} .

تبرير: صنف الجمل الآتية إلى صحيحة أحياناً أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبداً. فسر تبريرك.

(29) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a + b = 0$, فإن $a = -b$.

(30) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a^2 = b$, فإن $a = \sqrt{b}$.

(31) **تحدُّ:** وضعتم آمنة تخميناً ينصل على أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.

(a) أعط أمثلة تؤيد هذا التخمين، ثم فسر لماذا لا تثبت هذه الأمثلة صحة التخمين.

(b) يمكن كتابة العدد الفردي على الصورة $1 - 2n$. أعط أمثلة تؤيد ذلك.

(c) ما العدد الذي تكون الأعداد الزوجية جميعها مضاعفات له؟ فسر لفظياً كيف يمكن استعمال إجابتك عن الفرعين a , b , لإثبات صحة التخمين.



(d) اكتب برهاناً جبرياً لإثبات أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح زوجي.

(32) اكتب: ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين البرهان الحر والبرهان ذي العمودين. أيُّ البرهانين تجده أسهل للكتابة؟ برب إجابتك.

تدريب على اختبار

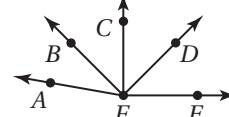
(34) مراجعة: أي علاقة يمكن أن تُستعمل لإيجاد قيم $s(n)$ في الجدول التالي؟

n	-8	-4	-1	0	1
$s(n)$	1	2	2.75	3	3.25

$$s(n) = \frac{1}{2}n + 5 \quad \text{C} \quad s(n) = -n + 7 \quad \text{A}$$

$$s(n) = \frac{1}{4}n + 3 \quad \text{D} \quad s(n) = -2n + 3 \quad \text{B}$$

(33) في الشكل أدناه: $\angle AFB \cong \angle CFD$ و $m\angle CFE = 90^\circ$.



أيُّ مما يأتي ليس صحيحاً بالضرورة؟

$m\angle CFD = m\angle AFB$ **C** $m\angle BFD = m\angle BFD$ **A**
 $m\angle CFE = m\angle AFB$ **D** محور تناول للشكل \overleftarrow{FC} **B** قائمة.

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. فسر إجابتك. (الدرس 1-5)

(35) أي أربع نقاط تقع في المستوى نفسه.

(36) الزاويتان المنفرجتان متكمالتان.

(37) المستويان P و Q يتقاطعان في المستقيم m . والمستقيم m يقع في كلا المستويين P و Q .

حدد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا في كلٌ مما يأتي؛ اعتماداً على العبارة التالية والمعطيات مبرراً إجابتك.

"يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان يقبل القسمة على 6". (الدرس 1-4)

(38) المعطيات: 24 يقبل القسمة على 6. النتيجة: 24 يقبل القسمة على 3.

(39) المعطيات: 27 يقبل القسمة على 6. النتيجة: 27 يقبل القسمة على 3.

(40) المعطيات: 85 لا يقبل القسمة على 6. النتيجة: 85 لا يقبل القسمة على 3.

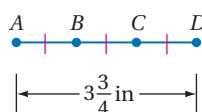
(41) مبانٍ: توجد أربع بناءات في مدرسة، لا يوجد ثلث منها على استقامة واحدة.

ما عدد ممرات المشاة الالزامية لربط كل بناءتين بممر مشاه واحد؟ (الدرس 1-5)

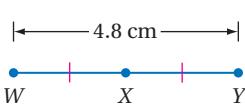
استعد للدرس اللاحق

أوجد طول كل قطعة مستقيمة مما يأتي مستعيناً بالشكل.

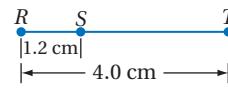
\overline{BC} (44)



\overline{WX} (43)



\overline{ST} (42)



إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

Proving Segments Relationships

1-7



لماذا؟

يعمل عبدالله في محل لبيع الأقمشة، ويقيس القماش بوضع حافه عند حافة تدريج المسطرة التي طولها متر واحد. ولكي يقيس أطوالاً مثل 125 cm يقيس متراً من القماش ويضع علامة عليه، ثم يقيس من تلك العلامة 25 cm أخرى.

$$\text{فيصبح الطول: } 100 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 125 \text{ cm}$$

فيما سبق:

درست كتابة البرهان الجبري والبرهان ذي العمودين.

(الدرس 1-6)

والآن:

- أكتب براهين تتضمن جمع أطوال القطع المستقيمة.
- أكتب براهين تتضمن تطابق قطع مستقيمة.

مسلمة أطوال القطع المستقيمة: علمت كيف تقيس القطع المستقيمة باستعمال المسطرة، وذلك بوضع صفر المسطرة على أحد طرفي القطعة المستقيمة وقراءة التدريج المقابل للطرف الآخر من القطعة المستقيمة، فيمثل هذا التدريج طول القطعة المستقيمة. وهذا يوضح مسلمة المسطرة.

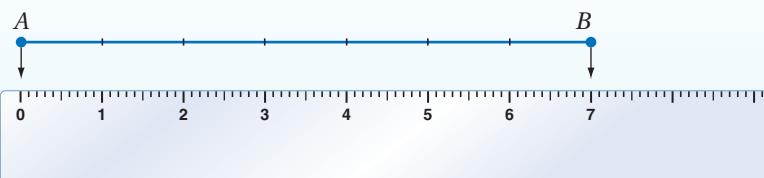
أضف إلى
مطويتك

مسلمة أطوال القطع المستقيمة

مسلمة 1.8

التعبير اللغطي: النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية.

مثال: إذا أعطيت نقطتين A و B على مستقيم، وكانت A تقابل الصفر، فإن B تقابل عدداً موجباً.



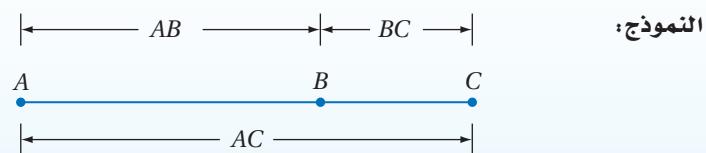
يمكن التعبير عن معنى وقوع نقطة بين نقطتين آخرتين بمسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة.

أضف إلى
مطويتك

مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة

مسلمة 1.9

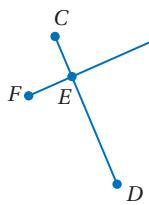
التعبير اللغطي: إذا علمت أن النقاط A, B, C على استقامه واحدة، فإن النقطة B تقع بين A و C إذا كان $AB + BC = AC$ والعكس.



ومسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة تستعمل تبريراً في العديد من البراهين الهندسية.

مثال 1

استعمال مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة



أثبت أنه إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{FG}$ ، فإن $\overline{CE} \cong \overline{FE}$ ، $\overline{ED} \cong \overline{EG}$

المعطيات: $\overline{CE} \cong \overline{FE}$ ، $\overline{ED} \cong \overline{EG}$

المطلوب: $\overline{CD} \cong \overline{FG}$

البرهان:

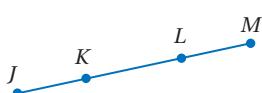
المبررات	العبارات
(1) معطيات	$\overline{CE} \cong \overline{FE}$ ، $\overline{ED} \cong \overline{EG}$ (1)
(2) تعريف تطابق القطع المستقيمة	$CE = FE$ ، $ED = EG$ (2)
(3) مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة	$CE + ED = CD$ (3)
(4) بالتعويض من الخطوة 2 في الخطوة 3	$FE + EG = CD$ (4)
(5) مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة	$FE + EG = FG$ (5)
(6) بالتعويض من الخطوة 4 في الخطوة 5	$CD = FG$ (6)
(7) تعريف تطابق القطع المستقيمة	$\overline{CD} \cong \overline{FG}$ (7)

قراءة الرياضيات

اختصارات:

رغبة في الاختصار عند كتابة البراهين نكتب:
"بالتعويض" بدلاً من "خاصية التعويض"
"للمساواة" ونكتب
"بالطرح" بدلاً من "خاصية الطرح
"للمساواة" وهكذا.

تحقق من فهمك



(1) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{KM}$

المطلوب: $\overline{JK} \cong \overline{LM}$

البرهان:

المبررات	العبارات
(a) معطيات	$\overline{JL} \cong \overline{KM}$ (a)
(b) ؟	$JL = KM$ (b)
(c) مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة	$JK + KL = ?$ ، (c) $KL + LM = ?$
(d) ؟	$JK + KL = KL + LM$ (d)
(e) بالطرح	$JK + KL - KL = KL + LM - KL$ (e)
(f) بالتبسيط	? (f)
(g) تعريف تطابق القطع المستقيمة	$\overline{JK} \cong \overline{LM}$ (g)

تطابق القطع المستقيمة: درست سابقاً أن تساوي أطوال القطع المستقيمة تحقق خاصية الانعكاس والتماثل والتعدي. وبما أن القطع المستقيمة المتساوية الطول متطابقة، فإن تطابق القطع المستقيمة يحقق أيضاً خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي.

نظريّة 1.2

خصائص تطابق القطع المستقيمة

أضف إلى
مطويتك

$$\overline{AB} \cong \overline{AB}$$

خاصية الانعكاس للتطابق

$$\overline{CD} \cong \overline{AB} \text{ ، فإن } \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

خاصية التماثل للتطابق

$$\overline{AB} \cong \overline{EF} \text{ ، فإن } \overline{AB} \cong \overline{CD} , \overline{CD} \cong \overline{EF}$$

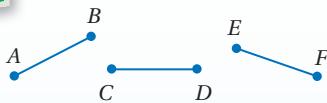
خاصية التعدي للتطابق

برهان

خاصية التعدي للتطابق

أضف إلى

مطويتك



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

برهان حر:

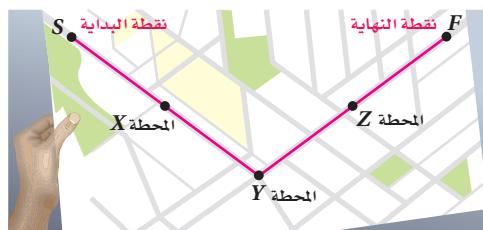
بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, فإن $AB = CD$, $CD = EF$, وذلك من تعريف تطابق القطع المستقيمة. وباستعمال خاصية التعدي للمساواة ينتج أن $AB = EF$; لذا $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ من تعريف التطابق.

مثال 2 من واقع الحياة البرهان باستعمال تطابق القطع المستقيمة

ماراثون: تبين الخريطة أدناه المسار الذي سيسلكه المشاركون في سباق ماراثون. تقع المحطتان X و Z عند نقطتي المنتصف بين نقطة البداية S والممحطة Y ونقطة النهاية F والممحطة Y على التوالي. إذا كان Z عدماً المحطة Y عن نقطتين X و Z متساويتين، فأثبت أن الطريق من المحطة Z إلى نقطة النهاية يتطابق مع الطريق من المحطة X إلى نقطة البداية.



الربط مع الحياة

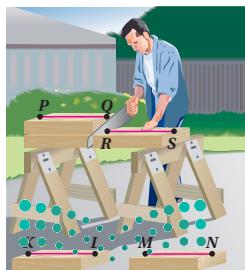


المعطيات: X نقطة منتصف \overline{SY} , Z نقطة منتصف \overline{YF}

المطلوب: $\overline{ZF} \cong \overline{SX}$

البرهان:

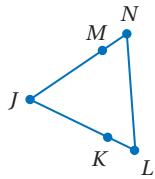
المبررات	العبارات
(1) معطيات	X نقطة منتصف \overline{SY} , Z نقطة منتصف \overline{YF} $XY = YZ$ (1)
(2) نظرية نقطة المنتصف	$\overline{SX} \cong \overline{XY}$, $\overline{YZ} \cong \overline{ZF}$ (2)
(3) تعريف تطابق القطع المستقيمة	$\overline{XY} \cong \overline{YZ}$ (3)
(4) خاصية التعدي للتطابق	$\overline{SX} \cong \overline{YZ}$ (4)
(5) خاصية التعدي للتطابق	$\overline{SX} \cong \overline{ZF}$ (5)
(6) خاصية التماثل للتطابق	$\overline{ZF} \cong \overline{SX}$ (6)



تحقق من فهمك



2) نجارة: قص نجار قطعة خشبية \overline{RS} طولها 22 in. ثم استعملها نموذجاً ليقص قطعة أخرى \overline{PQ} مطابقة لها. وهكذا استعمل ليقص قطعة ثالثة \overline{MN} . ثم استعمل القطعة الثالثة \overline{MN} ليقص قطعة رابعة \overline{KL} . أثبت أن $RS = KL$.



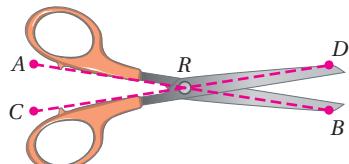
1) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\overline{LK} \cong \overline{NM}$, $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$

المطلوب: $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$

البرهان:

المبررات	العبارات
_____ (a)	$\overline{LK} \cong \overline{NM}$, $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$ (a)
تعريف تطابق القطع المستقيمة _____ (b)	_____ (b)
_____ (c)	$LK + KJ = NM + KJ$ (c)
_____ (d)	$LK + KJ = NM + MJ$ (d)
مسلسلة جمع أطوال القطع المستقيمة _____ (e)	_____ (e)
_____ (f)	$LJ = NJ$ (f)
_____ (g)	$\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$ (g)



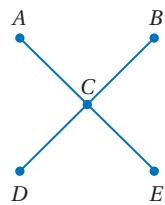
2) مقص: في الشكل المجاور،

المعطيات: $\overline{AR} \cong \overline{CR}$, $\overline{DR} \cong \overline{BR}$

المطلوب: $AR + DR = CR + BR$

تدريب وحل المسائل

3) أكمل البرهان الآتي:



المعطيات: C نقطة متصرف.

نقطة متصرف C

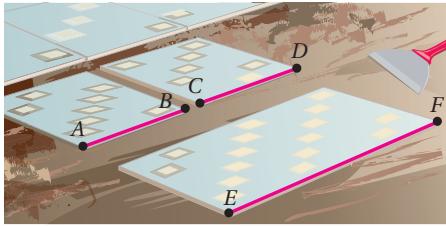
$\overline{AE} \cong \overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

البرهان:

المبررات	العبارات
معطيات _____ (a)	_____ (a)
_____ (b)	$AC = CE, BC = CD$ (b)
_____ (c)	$AE = BD$ (c)
مسلسلة جمع أطوال القطع المستقيمة _____ (d)	_____ (d)
_____ (e)	$AC + CE = BC + CD$ (e)
_____ (f)	$AC + AC = CD + CD$ (f)
بالتبسيط _____ (g)	_____ (g)
بالقسمة _____ (h)	_____ (h)
_____ (i)	$\overline{AC} \cong \overline{CD}$ (i)





المثال 2



(4) **تبليط:** قص مبلّط قطعة بلاط بطول معين،

ثم استعملها نموذجاً ليقص بلاطة ثانية تطابق الأولى، ثم استعمل هاتين البلاطتين لقص بلاطة ثالثة طولها يساوي مجموع طولي البلاطتين. أثبت أن طول البلاطة الثالثة يساوي مثلّي طول البلاطة الأولى.

أثبتت الخاصيتين الآتيتين في النظرية (1.2).

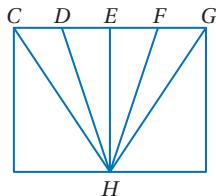
(5) خاصية التماثل للتطابق.

(6) خاصية الانعكاس للتطابق.

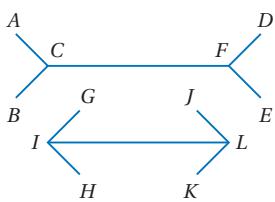
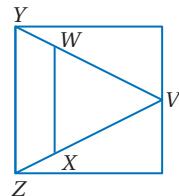
الربط مع الحياة

المبلّط: هو الشخص الذي يقوم بتركيب بلاط الأرضيات أو الجدران. ويستعمل في أثناء عمله أدوات قياس الطول والميل؛ من أجل وضع البلاط بشكل دقيق وترتيبه بأنماط جميلة. وعادة يلتحق المبلّط بمركز تدريب مهني ليتلقى تدريبياً خاصاً.

- (8) إذا كانت E نقطة متصرف ، \overline{DF} ، فإن E نقطة متصرف \overline{DF} ، $\overline{CE} \cong \overline{EG}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{FG}$.



- (7) إذا كان $\overline{VZ} \cong \overline{VY}$ ، $\overline{VY} \cong \overline{XZ}$ ، فإن $\overline{VW} \cong \overline{VX}$.



- (9) إذا كان $\overline{FE} \cong \overline{LK}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{GI}$ ، $AC + CF + FE = GI + IL + LK$. فأثبت أن $\overline{CF} \cong \overline{IL}$.

(b) بـبرهانك بقياس أطوال القطع المستقيمة. فـسر إجابتك.

- (10) **تمثيلات متعددة:** A نقطة متصرف \overline{PQ} ، و B نقطة متصرف \overline{PA} ، و C نقطة متصرف \overline{PB} .

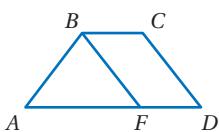
(a) هندسياً: ارسم شكلاً يوضح هذه المعطيات.

(b) جبرياً: ضع تخميناً للعلاقة الجبرية بين PQ و PC و PA .

(c) حسياً: استعمل مسطرة لرسم قطعة مستقيمة تطابق \overline{PQ} ، ولتعيين النقاطين B و C على \overline{PQ} ، استعمل هذا الرسم لتؤيد التخمين الذي وضعته.

(d) منطقياً: أثبت صحة تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا



- (11) **اكتشف الخطأ:** في الشكل المجاور: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، اختبر النتائج التي حصل عليها أحمد وسعد، وهل وصل أيٌ منها إلى نتيجة صحيحة؟

سعد

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، إذن $\overline{AB} \cong \overline{BF}$ وذلك بتطبيق خاصية الانعكاس للتطابق.

أحمد

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، إذن $\overline{AB} \cong \overline{AF}$ وذلك بتطبيق خاصية التعدي للتطابق.

(12) تحد: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ مربع. أثبت أن $ABCD$

(13) اكتب: هل توجد خاصية في التطابق تشبه خاصية الجمع في المساواة؟ فسر إجابتك.

(14) تبرير: صنف العبارة الآتية إلى صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فأعط مثالاً مضاداً.

إذا كانت النقاط A, B, C, D, E تقع على استقامة واحدة، بحيث تقع B بين A و C ، وتقع C بين B و D ، وتقع D بين C و E ، وكان $AB = BC = CE = DE$ ، فإن $AC = BD$

(15) مسألة مفتوحة: ارسم شكلًا يمثل تعديلاً ل المسلمـة جمع أطوال القطع المستقيمة، (جمع 3 قطع مستقيمة) واكتـب التـيـجـة.

تدريب على اختبار

(17) أي العبارات الآتية يعطي وصفاً أفضل لل المسلمـة؟

- A تخمين ينشأ عن أمثلة.
- B تخمين ينشأ عن حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص.
- C عبارة تقبل على أنها صحيحة.
- D عبارة تم إثبات صحتها.

(16) النقاط A, B, C, D تقع على استقامة واحدة، بحيث تقع النقطة B بين A و C وبين B و D . أي عبارة مما يلي ليست بالضرورة صحيحة؟

$$\overline{BC} \cong \overline{DC} \quad \text{C}$$

$$AB + BD = AD \quad \text{A}$$

$$BC + CD = BD \quad \text{D}$$

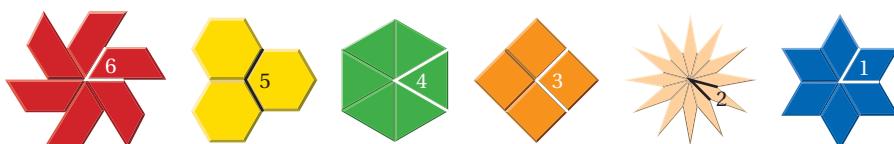
$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \text{B}$$

مراجعة تراكمية

(18) برهان: أثبت أنه إذا كان $57 = -3(2x+1)$ ، فإن $x = -10$ ، وابتـرـيرـاً لـكـلـ خطـوـةـ. (الدرس 6)

(19) نماذج: استعمل حاتم ستة مربعات من الورق المقوى لعمل منشور رباعي. ما الجزء من الفراغ الذي يمثله كل وجه من المنصور، وكم مستقيماً يتبع عن تقاطعها؟ (الدرس 5)

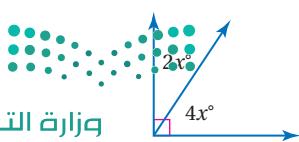
(20) أنماط: يمكن ترتيب مجموعة من قطع النماذج لتكوين نمط دوراني دون ترك فراغات بين هذه القطع، وكما تعلم أن قياس الدورة الكاملة يساوي 360° ، أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل من الأشكال الآتية بالدرجات. (الدرس 1)



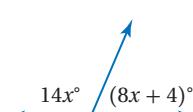
استعد للدرس اللاحق

جبر: أوجـدـ قـيـمـةـ x ـ فـيـ كـلـ مـاـ يـأـتـيـ:

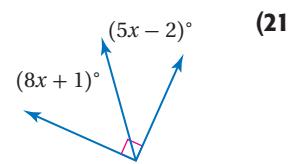
(23)



(22)



(21)



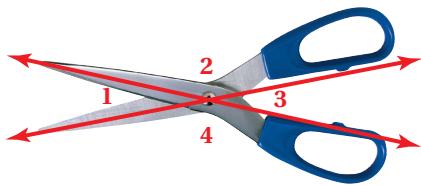


إثبات علاقات بين الزوايا

Proving Angles Relationships

1-8

لماذا؟



تلاحظ أن $\angle 1$ بين شفرة المقص، و $\angle 2$ بين الشفرة ومقبض المقص تشكلان زوجاً من الزوايا المجاورة على مستقيم. وبالمثل فإن $\angle 2$ و $\angle 3$ بين مقبضي المقص تشكلان أيضاً زوجاً من الزوايا المجاورة على مستقيم.

الزوايا المترادفة والمتكاملة: توضح مسلمة المنقلة العلاقة بين قياس الزوايا والأعداد الحقيقة.

فيما سبق:

درست تعين أزواج خاصة من الزوايا واستعملتها.

(مهارة سابقة)

والآن:

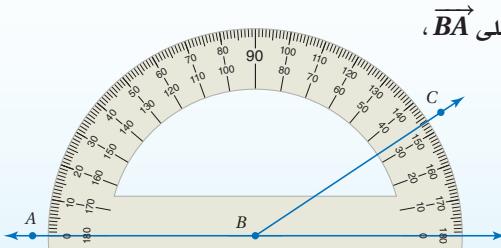
- أكتب براهين تتضمن زوايا مترادفة وزوايا متكاملة.
- أكتب براهين تتضمن زوايا متطابقة وزوايا قائمة.

مسلمة المنقلة

1.10 مسلمة المنقلة

التعبير اللغطي: تستعمل المنقلة للربط بين قياس زاوية وعدد حقيقي يقع بين 0° و 180° .

مثال: في $\angle ABC$, إذا انطبق صفر المنقلة على \overrightarrow{BA} فإن العدد الذي ينطبق على \overrightarrow{BC} يمثل قياس $\angle ABC$.

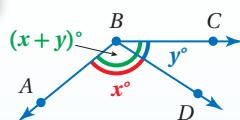


درست سابقاً مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة، وتوجد علاقة مشابهة لها بين قياسات الزوايا.

مسلمة جمع قياسات الزوايا

1.11 مسلمة جمع قياسات الزوايا

تقع النقطة D داخل $\angle ABC$ إذا وفقط إذا كان $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$



استعمال مسلمة جمع قياسات الزوايا

مثال 1

إذا كان $\angle JKL = 145^\circ$, $m\angle 2 = 56^\circ$. فأوجد $m\angle 1$.
 $m\angle 2 = 56^\circ$, $m\angle JKL = 145^\circ$.
مسلمة جمع قياسات الزوايا
عوض 56° من الطرفين

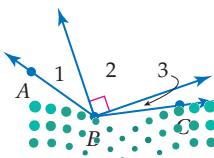
$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle JKL$$

$$m\angle 1 + 56^\circ = 145^\circ$$

$$m\angle 1 + 56^\circ - 56^\circ = 145^\circ - 56^\circ$$

$$m\angle 1 = 89^\circ$$

تحقق من فهمك



(1) إذا كان $\angle ABC = 131^\circ$, $m\angle 1 = 23^\circ$, فأوجد $m\angle 3$.
برر خطوات حلّك.

الزاويتان المتكاملتان

هما زاويتان مجموع
قياسيهما يساوي 180°

الزاويتان المتمامتان

هما زاويتان مجموع
قياسيهما يساوي 90°

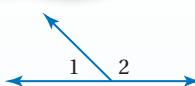
الزاويتان المجاورتان

على مستقيم هما
زاويتان متجاورتان،
بحيث يكون ضلعاً هما
غير المشتركين نصفاً
مستقيم متعاكسين.

أضف إلى

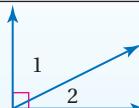
مطويتك

نظريتان



نظريّة الزاويتين المتكاملتين: إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإنّهما متكاملتان.

$$\text{مثال: } m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ \text{ إذن } \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$



نظريّة الزاويتين المتمامتين: إذا شكل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة، فإنّ الزاويتين تكونان متمامتين.

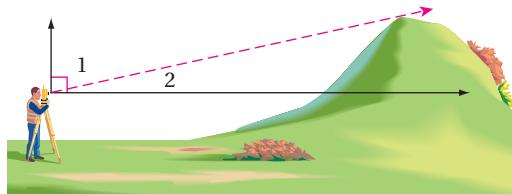
$$\text{مثال: } m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ \text{ إذن } \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

سوف تبرهن نظريتين 1.3 و 1.4 في السؤالين 14 و 15

مثال 2 من واقع الحياة استعمال خصائص الزوايا المتكاملة أو المتمام

مسح الأرضي: قام مساح بقياس الزاوية بين خط نظره إلى قمة تلة، والمستقيم الرأسى فكانت 73° تقريرياً. ما قياس الزاوية بين خط نظره والخط الأفقى؟ ببر خطوات الحل.

فهم: ارسم شكلاً يوضح المسألة. قاس المساح الزاوية بين خط نظره والخط الرأسى؛ لذا ارسم نصف المستقيم الرأسى والأفقى من النقطة التي يشاهد منها المساح التلة، ثم سُمِّيَّ الزوايا الناتجة. وكما تعلم فإن نصفى المستقيمين (الأفقى والرأسى) يكونان زاوية قائمة.



خطٌ: استعمل نظرية الزاويتين المتكاملتين.

حلٌ: بما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ تكُونان زاوية قائمة فإنّهما متمامتان.

نظرية الزاويتين المتكاملتين

$$m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$$

$$m\angle 1 = 73^\circ$$

$$73^\circ + m\angle 2 = 90^\circ$$

اطرح 73° من الطرفين

$$73^\circ + m\angle 2 - 73^\circ = 90^\circ - 73^\circ$$

بسْط

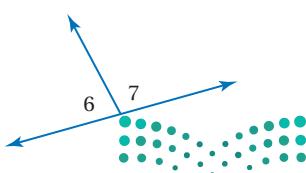
$$m\angle 2 = 17^\circ$$

قياس الزاوية بين خط نظر المساح وخط الأفق 17°

تحقق: تعلم أنه يجب أن يكون ناتج جمع قياسي $\angle 1$ و $\angle 2$ يساوي 90°

$$\checkmark \quad 17^\circ + 73^\circ = 90^\circ$$

تحقق من فهمك



(2) في الشكل المجاور، $\angle 6$ و $\angle 7$ متجاورتان على مستقيم. إذا كان:

$$m\angle 7 = (5x + 12)^\circ \text{ و } m\angle 6 = (3x + 32)^\circ$$

فأوجد قيمة x ، $m\angle 6$ ، $m\angle 7$. ببر خطوات الحل.

تطابق الزوايا: إن الخصائص الجبرية التي تتطابق على تطابق القطع المستقيمة وتساوي قياساتها، تتطابق أيضًا على تطابق الزوايا وتساوي قياساتها.

نظريّة 1.5 خصائص تطابق الزوايا

مطويتك

خاصية الانعكاس للتطابق
 $\angle 1 \cong \angle 1$

خاصية التماش للتطابق
إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$ ، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.

خاصية التعدي للتطابق
إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 2 \cong \angle 3$ ، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

ستُبرهن خصائص الانعكاس والتعدي للتطابق في السؤالين 16 و 17

برهان خاصية التماش للتطابق

مطويتك

المعطيات: $\angle A \cong \angle B$

المطلوب: $\angle B \cong \angle A$

برهان حر:
تعلم من المعطيات أن $\angle B \cong \angle A$. ومن تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle A = m\angle B$ ، وباستعمال خاصية التماش للمساواة يكون $m\angle B = m\angle A$ ، وعليه فإن $\angle B \cong \angle A \cong \angle A$ من تعريف تطابق الزوايا.

يمكنك تطبيق الخصائص الجبرية لإثبات نظريات على تطابق الزوايا تتضمن زوايا متممة وزوايا متكاملة.

نظريتان

مطويتك

نظريّة تطابق المكمّلات: 1.6
الزوايا المكملتان للزاوية نفسها أو زوايتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال: إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$ ، لأن $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$ ، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

نظريّة تطابق المتممّات: 1.7
الزوايا المتممّتان للزاوية نفسها أو زوايتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

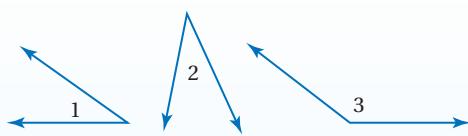
مثال: إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 90^\circ$ ، فإن $\angle 4 \cong \angle 6$ ، لأن $m\angle 5 + m\angle 6 = 90^\circ$.

برهان

إحدى حالات نظرية تطابق المكملا

أضف إلى

مطويتك



المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان.

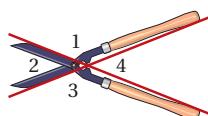
$\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.

المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطيات	(1) $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.
(2) تعريف الزاويتين المتكاملتين	$m\angle 1 + m\angle 3 = 180^\circ$, $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$ (2)
(3) بالتعويض	$m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$ (3)
(4) خاصية الطرح للمساواة	$m\angle 1 = m\angle 2$ (4)
(5) تعريف تطابق الزوايا	$\angle 1 \cong \angle 2$ (5)

مثال 3 مثال 3



أثبت أن الزاويتين المتقابلتين بالرأس 2 و 4 في الشكل المجاور متطابقتان.

المعطيات: $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 4$

البرهان:

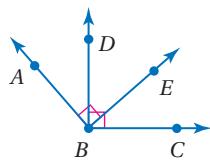
المبررات	العبارات
(1) معطيات	(1) $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.
(2) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم	(2) $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم. $\angle 3$ و $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم.
(3) نظرية الزاويتين المتكاملتين	(3) $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.
(4) نظرية تطابق المكملا	$\angle 2 \cong \angle 4$ (4)

مراجعة المفردات

الزاويتين المتقابلتين

بالرأس

هما زاويتان غير متجاورتين تتكونان من تقاطع مستقيمين.



تحقق من فهمك

(3) في الشكل المجاور $\angle ABE \cong \angle DBC$ و $\angle ABD \cong \angle EBC$.

أثبت أن

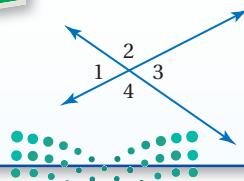
في المثال 3، لاحظ أن $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس. ونتيجة هذا المثال ثبتت نظرية الزوايا المقابلة بالرأس الآتية:

نظرية 1.8

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

أضف إلى

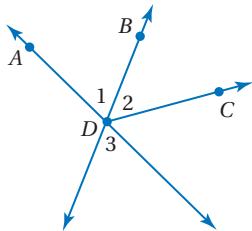
مطويتك



الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان.

مثال: $\angle 1 \cong \angle 3$
 $\angle 2 \cong \angle 4$

مثال 4 استعمال الزوايا المتقابلة بالرأس



أثبت أنه إذا كان \overrightarrow{DB} ينصف $\angle ADC$ ، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$

المعطيات: $\angle ADC$ ينصف \overrightarrow{DB}

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 3$

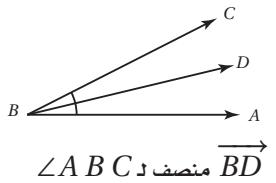
البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطيات	$\angle ADC$ ينصف \overrightarrow{DB} (1)
(2) تعريف منصف الزاوية	$\angle 1 \cong \angle 2$ (2)
(3) تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس.	$\angle 1 \cong \angle 3$ (3)
(4) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس	$\angle 3 \cong \angle 1$ (4)
(5) خاصية التعدي للتطابق	$\angle 3 \cong \angle 2$ (5)
(6) خاصية التمايز للتطابق	$\angle 2 \cong \angle 3$ (6)

إرشادات للدراسة

منصف الزاوية

هو نصف مستقيم يقع داخل الزاوية ويفصل الزاوية قسمين متطابقين، وتكون بدايته عند رأس الزاوية.



تحقق من فهمك

- (4) إذا كانت $\angle 3 \cong \angle 4$ متقابلتين بالرأس، وكان $m\angle 3 = (6x + 2)^\circ$ و $m\angle 4 = (8x - 14)^\circ$. فأوجد $m\angle 3$ و $m\angle 4$. بّرر خطوات حلك.

يمكن استعمال النظريات الواردة في هذا الدرس لإثبات نظريات الزاوية القائمة الآتية:

نظريات	نظريات الزاوية القائمة	اضف إلى موطئتك
مثال	النظرية	
	يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونان أربع زوايا قائمة. مثال: إذا كان $AC \perp DB$ ، فإن $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ جميعها قائمة	1.9
	جميع الزوايا القائمة متطابقة. مثال: إذا كانت $\angle 4, \angle 1, \angle 2, \angle 3$ جميعها قائمة ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$	1.10
	المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا متجاورة متطابقة. مثال: إذا كان $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$ ، $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 2 \cong \angle 4,$ $\angle 4 \cong \angle 3, \angle 3 \cong \angle 1$	1.11
	إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين، فإنهما قائمتان. مثال: إذا كانت $\angle 6 \cong \angle 5$ ، وكانت $\angle 5 \cong \angle 6$ متكاملتين، فإن $\angle 5$ و $\angle 6$ قائمتان.	1.12
	إذا تجاورت زاويتان على مستقيم، وكانتا متطابقتين، فإنهما قائمتان. مثال: إذا كانت $\angle 7 \cong \angle 8$ متجاورتين على مستقيم، وكانت $\angle 7 \cong \angle 8$ قائمتان.	1.13

قراءة الرياضيات

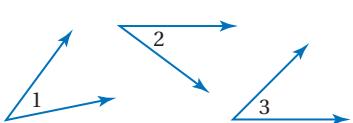
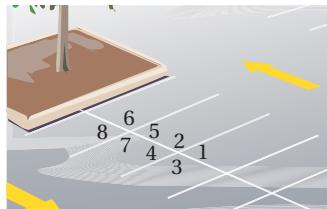
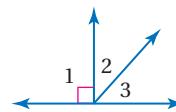
رمز التعماد

تذكر أن الرمز \perp يقرأ
يعامد.

أوجد قياس الزوايا المرّقة في كلّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلّك.

$$m\angle 4 = (3(x - 1))^\circ, m\angle 5 = (x + 7)^\circ \quad (2)$$

$$m\angle 2 = x^\circ, m\angle 3 = (x - 16)^\circ \quad (1)$$



المثال 1 (4) **برهان:** فيما يأتي أكمل برهان إحدى حالات نظرية تطابق المتممّات.

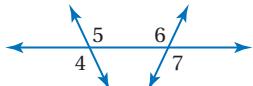
المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متمامّتان.

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 3$

البرهان:

العبارات	العبارات
?	(a) $\angle 1$ و $\angle 3$ متمامّتان.
?	(b) $m\angle 1 + m\angle 3 = 90^\circ$
?	(c) $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$
?	(d) $m\angle 1 = m\angle 2$
?	(e) $\angle 1 \cong \angle 2$

المثال 2 (5) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين فيما يأتي:



المعطيات: $\angle 4 \cong \angle 7$

المطلوب: $\angle 5 \cong \angle 6$

تدريب وحل المسائل

أوجد قياس الزوايا المرّقة في كلّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلّك.

الأمثلة 1-3

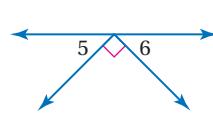
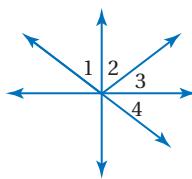
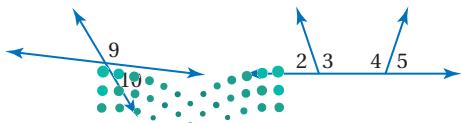
$$m\angle 9 = (3x + 12)^\circ \quad (9) \quad m\angle 5 = m\angle 6 \quad (6)$$

(7) $\angle 2$ و $\angle 3$ متمامّتان، (8) $\angle 2$ و $\angle 4$ متمامّتان،

$\angle 1 \cong \angle 4$

$$m\angle 10 = (x - 24)^\circ \quad m\angle 4 = 105^\circ$$

$$m\angle 2 = 28^\circ$$



المثال 4

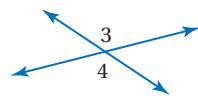
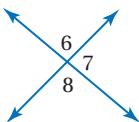
أوجد قياس الزوايا الممرضة في كلٌ مما يأتي، وادرك النظريات التي تبرر حلك.

$$m\angle 6 = (2x - 21)^\circ \quad (11)$$

$$m\angle 3 = (2x + 23)^\circ \quad (10)$$

$$m\angle 7 = (3x - 34)^\circ$$

$$m\angle 4 = (5x - 112)^\circ$$



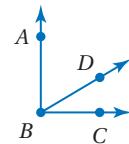
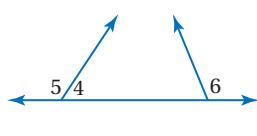
برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين في كلٌ مما يأتي:

(13) المعطيات: $\angle 5 \cong \angle 6$

(12) المعطيات: $\angle ABC$ زاوية قائمة.

المطلوب: $\angle 6, \angle 4$ متكمالتان.

المطلوب: $\angle ABD, \angle CBD$ متتامتان.



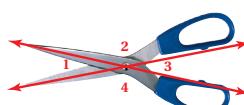
اكتب برهاناً لكُلٌ من النظريات الآتية:

(15) نظرية الزاويتين المتكمالتين.

(14) نظرية الزاويتين المتتامتين.

(17) خاصية التعدي للتطابق.

(16) خاصية الانعكاس للتطابق.



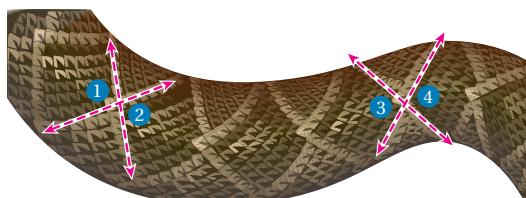
(18) **برهان:** أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الأربع الناتجة عند فتح المقص يساوي 360° .



(19) **طبيعة:** الأفعى المجلجلة أفعى سامة، ويوجد على جلدتها زركرة تأخذ أشكالاً نمطية.

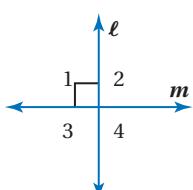
انظر إلى الشكل أدناه، والذي يمثل صورة مكبرة لجلد الأفعى المبينة جهة اليمين.

إذا كانت $\angle 4 \cong \angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$ ، فأثبت أن $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$.



الربط مع الحياة

يصل طول أنياب الأفعى 6 in ،
المجلجلة إلى 6 in ،
ويمكنها طُيّ أنيابها داخل
فمها لتكون موازية لسقف
الفم عندما يكون مغلقاً.



برهان: استعمل الشكل المجاور لكتابة برهان لكُلٌ من النظريات الآتية.

(22) نظرية 1.10

(21) نظرية 1.11

(20) نظرية 1.9

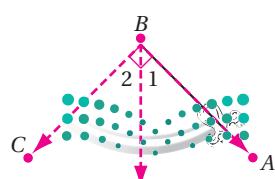
(24) نظرية 1.13

(23) نظرية 1.12

(25) **بندول:** يظهر في الشكل المجاور وضع بندول ساعة تقليدية.

إذا علمت أن $\angle ABC$ قائمة. وأن $m\angle 1 = 45^\circ$ ،

فاكتب برهاناً حُراً لإثبات أن \overrightarrow{BR} ينصف $\angle ABC$.



(26) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستكشف علاقات الزوايا.

(a) هندسياً: استعمل المنقلة لرسم زاوية قائمة ABC ، وحدد نقطة داخلها، وسمّها D . ارسم \overrightarrow{BD}

ثم ارسم \overrightarrow{KL} ، وارسم $\angle JKL$ التي تطابق $\angle ABD$.

(b) لفظياً: ضع تخميناً حول العلاقة بين $\angle JKL$ و $\angle DBC$.

(c) منطقياً: أثبت صحة التخمين الذي وضعته.

مسائل مهارات التفكير العليا

(27) **تحدد:** لقد تم إثبات حالة واحدة من نظرية تطابق المكملات، وفي السؤال 4 برهنت الحالة المشابهة من نظرية تطابق المتممـات. فـسر لماذا توجد حالاتان لكـل من هاتين النظريـتين، واكتـب بـرهـاـنـاـ لـلـحـالـةـ الـثـانـيـةـ لـكـلـ مـنـهـماـ.

(28) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتـيـةـ صـحـيـحةـ أـحـيـاـنـاـ أوـ صـحـيـحةـ دـائـماـ أوـ غـيرـ صـحـيـحةـ أـبـدـاـ. فـسرـ تـبـرـيرـكـ.

إذا كانت إحدى الزوايا المكونـةـ منـ مـسـتـقـيمـيـنـ مـتـقـاطـعـيـنـ حـادـةـ، فـانـ الزـواـيـاـ الـثـلـاثـ الـأـخـرـيـ مـتـكـونـةـ مـنـ هـذـاـ التـقـاطـعـ حـادـةـ أـيـضـاـ.

(29) **اكتـبـ:** فـسرـ كـيفـ يـمـكـنـ استـعـمـالـ الـمـنـقـلـةـ لـإـيجـادـ قـيـاسـ الزـاوـيـةـ الـمـتـمـمـةـ لـزـاوـيـةـ أـخـرـيـ بـطـرـيـقـ سـرـيعـةـ.

تدريب على اختبار

(31) إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متواليتين هي $1:4$ ، فما قياس الزاوية الصغرى؟

24° C

36° D

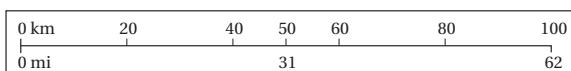
15° A

18° B



مراجعة تراكمية

(32) **خرائط:** يُظهر الشكل المجاور مقاييس رسم خريطة تدريجيـنـ أحـدـهـماـ بالـكـيلـوـمـترـاتـ،ـ والـآـخـرـ بـالـأـمـيـالـ.ـ إـذـاـ كـانـ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ قـطـعـتـيـنـ مـسـتـقـيمـيـنـ مـتـقـاطـعـيـنـ عـلـىـ الخـرـيـطـةـ،ـ



حيـثـ $CD = 62\text{ mi}$ ، $AB = 100\text{ km}$.

فـهلـ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ؟ فـسرـ إـجـابـتكـ.ـ (الدرس 1-7)

اذكرـ الخـاصـيـةـ الـتـيـ تـبـرـرـ كـلـ عـبـارـةـ مـاـ يـأـتـيـ:ـ (الدرس 1-6)

(34) إذا كان $PQ = MN$ ، فإن $MN = PQ$

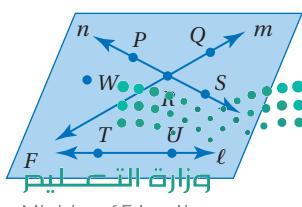
(33) إذا كان $y + 7 = 5 - 2y$ ، فإن $y =$

(36) إذا كان $xy + xz = 4$ ، فإن $x(y + z) =$

(35) إذا كان $a - 3 = x$ ، فإن $a - b = x - b$ و $a - b =$

استعد للدرس اللاحق

استعمل الشكل المجاور للإجابة عما يأتي:



(38) سمّ تقاطع المستقيمين n و m .

(37) سمّ مستقيماً يحوي النقطة P .

(39) سمّ نقطة لا تقع على أيٍ من المستقيمات l, m, n .

(40) اذكر اسمًا آخر للمستقيم n .

(41) هل يتقاطع المستقيم l مع المستقيم m أو المستقيم n ؟ فـسرـ إـجـابـتكـ.

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العكس (ص. 29)	ال تخمين (ص. 12)
المعكوس (ص. 29)	التبرير الاستقرائي (ص. 12)
العبارات الشرطية المرتبطة (ص. 29)	المثال المضاد (ص. 15)
التكافؤ المنطقي (ص. 29)	قيمة الصواب (ص. 19)
التبرير الاستنتاجي (ص. 37)	العبارة المركبة (ص. 19)
قانون الفصل المنطقي (ص. 37)	نفي العبارة (ص. 19)
قانون القياس المنطقي (ص. 39)	العبارة (ص. 19)
المسلمة (ص. 45)	عبارة الوصل (ص. 19)
البرهان (ص. 46)	عبارة الفصل (ص. 20)
البرهان الحر (ص. 47)	جدول الصواب (ص. 21)
النظريّة (ص. 47)	النتيجة (ص. 26)
البرهان الجبري (ص. 53)	العبارة الشرطية (ص. 26)
البرهان ذو العمودين (ص. 54)	الفرض (ص. 26)
	المعاكس الإيجابي (ص. 29)

اختبار المفردات

بيان ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

- (1) المسلمة هي العبارة التي تحتاج إلى برهان.
- (2) الجزء الأول في العبارة الشرطية يسمى تخميناً.
- (3) يستعمل التبرير الاستنتاجي قوانين ونظريات للوصول إلى نتائج منطقية من العبارات المعطاة.
- (4) يتبع المعاكس الإيجابي عن نفي الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.
- (5) تكون عبارة الوصل المنطقي من ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و).
- (6) النظريّة يُسلم بصحتها دائمًا.
- (7) يتبع العكس بتبديل الفرض مع النتيجة في العبارة الشرطية.
- (8) لإثبات أن التخمين خاطئ، يجب أن يعطى برهان.
- (9) يمكن أن يكتب معكوس العبارة p ، على صورة ليس p .
- (10) في البرهان ذي العمودين الخصائص التي تبرر كل خطوة تسمى البررات.



المطويات منظم أفكار

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين (ص 12-18)

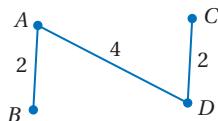
مثال 1

حدد ما إذا كان أيٌ من التخمينين الآتيين صحيحًا أو خاطئًا، وإذا كان خاطئًا، فأعطِ مثالاً مضادًا.

(a) $c = d, d = c$ هو مثال على خاصية من خصائص الأعداد الحقيقية.

(b) $c = d, d = c$ هو مثال على خاصية التماثل للمساواة في الأعداد الحقيقية. وهذا التخمين صحيح.

إذا كان $AB + CD = AD$ ، فإن B و C تقعان بين A و D وهذا التخمين خاطئ. في الشكل أدناه، $AB + CD = AD$ ولكن B و C لا تقعان بين A و D .



حدد ما إذا كان أيٌ من التخمينين الآتيين صحيحًا أو خاطئًا، وإذا كان خاطئًا، فأعطِ مثالاً مضادًا.

(11) إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متكمالتين، فإنهما متجاورتان على مستقيم.

(12) إذا أعطيت النقاط $W(-3, 2), X(-3, 7), Y(6, 7), Z(6, 2)$ ، فإن الشكل الرباعي $WXYZ$ مستطيل.

(13) **منازل:** معظم أسطح المنازل في البلدان القريبة من القطب الشمالي تكون مائلة، بينما تكون مستوية في المناطق الحارة. أعط تخميناً عن سبب اختلاف الأسطح.

1-2 المنطق (ص 25-19)

مثال 2

استعمل العبارات p, q, r لكتابية كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسر تبريرك.

p : x^2 عدد غير سالب.

q : الزوايا المتجاورة لها ضلع مشترك.

r : العدد السالب ليس عدداً حقيقياً.

$\sim q \wedge r$ (a)

$\sim q \wedge r$: الزوايا المتجاورة ليس لها ضلع مشترك، والعدد السالب ليس عدداً حقيقياً.

بما أن كلاً من $\sim q$ و r خاطئتان، فإن $\sim q \wedge r$ خاطئة أيضاً.

r أو p (b)

أو r : x^2 عدد غير سالب، أو العدد السالب ليس عدداً حقيقياً.

أو r : صائبة؛ لأن p صائبة، وليس الكون جنباً مثاليّاً.

استعمل العبارات p, q, r لكتابية كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسر تبريرك.

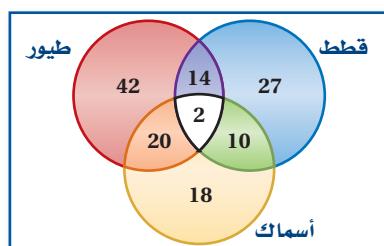
p : يحوي المستوى ثلث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

q : الباردة المربعة تكافئ ثلاثة أقدام مربعة.

r : مجموع قياسي الزاويتين المتتماتتين يساوي 180° .

$\sim p \vee q$ (16) $p \wedge \sim r$ (15) $\sim q \vee r$ (14)

(17) **حيوانات أليفة:** شكل في الآتي يُظهر عدد الأشخاص الذين لديهم حيوانات أليفة في منازلهم.



(a) ما عدد الأشخاص الذين لديهم أسماك فقط؟

(b) ما عدد الأشخاص الذين لديهم قطة وطيور فقط؟

(c) ما عدد الأشخاص الذين لديهم طيور وأسماك؟

دليل الدراسة والمراجعة

العبارات الشرطية (ص 35-26)

1-3

مثال 3

- أكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الصائبة الآتية:
- إذا كان الشكل مربعًا فإنه متوازي أضلاع.
- إذا كان الشكل متوازي أضلاع، فإنه مربع.
- العكس:
- إذا لم يكن الشكل مربعًا، فإنه ليس متوازي أضلاع.
- المعكوس:
- إذا لم يكن الشكل متوازي أضلاع، فإنه ليس مربعًا.
- المعاكس الإيجابي:

حدد قيمة الصواب للعبارات الشرطتين الآتتين، وإذا كانت العبارة صائبة، ففسر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعطي مثلاً مضاداً.

(18) إذا ربعت العدد الصحيح، فإن الناتج يكون عددًا صحيحًا موجباً.

(19) إذا كان للشكل السداسي ثمانية أضلاع، فإن جميع زواياه تكون منفرجة.

(20) أكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الصائبة الآتية. ثم حدد ما إذا كانت أي منها صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعطي مثلاً مضاداً.
إذا كانت الزوايا متطابقتين، فإن لهما القياس نفسه.

مثال 4

استعمل قانون الفصل المنطقى أو قانون القياس المنطقى؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذى استعملته. وإذا تذرر الحصول على نتيجة صائبة فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك.

(1) إذا كان قياس الزاوية أكبر من 90° ، فإنها منفرجة.

(2) إذا كانت الزاوية منفرجة، فإنها ليست قائمة.

p : قياس الزاوية أكبر من 90°

q : الزاوية منفرجة

r : الزاوية ليست قائمة

العبارة (1): $p \rightarrow q$

العبارة (2): $q \rightarrow r$

بما أن العبارتين الشرطيتين (1)، (2) صائبتان، فإنه يمكن استنتاج أن $r \rightarrow p$; باستعمال قانون القياس المنطقى؛ أي أنه إذا كان قياس الزاوية أكبر من 90° ، فإنها ليست قائمة.



التبرير الاستناتجي (ص 44-37)

1-4

استعمل قانون الفصل المنطقى أو قانون القياس المنطقى؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذى استعملته. وإذا تذرر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك.

(21) المعطيات: إذا نصف قطر الشكل الرباعي كلّ منهما الآخر، فإن الشكل متوازي أضلاع.

ينصف قطر الشكل الرباعي $PQRS$ كلّ منهما الآخر.

(22) المعطيات: إذا واجهت عائلة صعوبة في مادة العلوم، فإنها ستخصص وقتاً إضافياً للدراسة المادّة.

إذا لم تذهب عائلة لسوق، فإنها ستخصص وقتاً إضافياً للدراسة مادّة العلوم.

(23) **زلزال**: حدد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا فيما يأتي، اعتماداً على المعطيات. فسر تبريرك.

المعطيات: إذا كانت قوة زلزال 7.0 درجات فأكثر على مقياس ريختر، فإنه يُعتبر زلزالاً مدمرًا، ويحدث دماراً وخراباً كبيرين.

كانت قوة زلزال سان فرانسيسكو عام 1906م 8.0 درجات على مقياس ريختر.

نتيجة: كان زلزال سان فرانسيسكو عام 1906م زلزالاً مدمرًا، وأحدث دماراً وخراباً كبيرين.

المسلمات والبراهين الحرة (ص 45-51)

مثال 5

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. فسر تبريرك.

(a) إذا وقعت النقاط X, Y, Z في المستوى \mathcal{R} ، فإن هذه النقاط لا تقع على استقامة واحدة.

صحيحة أحياناً؛ الحقيقة المعطاة هي أن X, Y, Z تقع في المستوى \mathcal{R} لا ضمن وقوعها على استقامة واحدة أو لا.

(b) يمر مستقيم واحد فقط بالنقاطين A و B .

صحيحة دائمًا؛ بتطبيق المسلمنة 1.1، يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقاطين معلومتين.

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً. فسر تبريرك.

(24) يتقاطع المستويان في نقطة.

(25) تقع ثلاثة نقاط في أكثر من مستوى.

(26) إذا وقع المستقيم m في المستوى X ، ومر المستقيم m بالنقطة Q ، فإن النقطة Q تقع في المستوى X .

(27) إذا كانت الزوايا متساوية، فإنهما تكون زاوية قائمة.

(28) **عمل:** دُعي ستة أشخاص لحضور اجتماع عمل. إذا صافح كل شخص بقية الأشخاص، فما عدد المصفحات التي تبادلها هؤلاء الأشخاص جميعاً؟ ارسم نموذجاً يؤيد تخمينك.

البرهان الجبري (ص 53-59)

مثال 6

أكمل البرهان الآتي:

$$\frac{5x - 3}{6} = 2x + 1 \quad (1)$$

$$x = -\frac{9}{7} \quad \text{المطلوب:}$$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطيات	$\frac{5x - 3}{6} = 2x + 1 \quad (1)$
(2) خاصية الضرب للمساواة	$5x - 3 = 6(2x + 1) \quad (2)$
(3) خاصية التوزيع	$5x - 3 = 12x + 6 \quad (3)$
(4) خاصية الطرح للمساواة	$-3 = 7x + 6 \quad (4)$
(5) خاصية الطرح للمساواة	$-9 = 7x \quad (5)$
(6) خاصية القسمة للمساواة	$x = -\frac{9}{7} \quad (6)$
(7) خاصية التماثل للمساواة	$x = -\frac{9}{7} \quad (7)$

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

(29) إذا كان $35 = 7(x - 3)$ ، فإن $x = 35 - 7(x - 3)$

(30) إذا كان $27 = 2x + 19$ ، فإن $2x = 27 - 19$

$5(3x + 1) = 15x + 5 \quad (31)$

(32) إذا كان $8 = 2x + 12$ و $3y = 12$ ، فإن $x = 8 - 12$ و $y = 3$

(33) أكمل البرهان الآتي:

$$\text{المعطيات: } 6(x - 4) = 42$$

$$\text{المطلوب: } x = 11$$

المبررات	العبارات
?	(a) $6(x - 4) = 42$
?	(b) $6x - 24 = 42$
?	(c) $6x = 66$
?	(d) $x = 11$

(34) اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أنه إذا كان $PQ = RS$ و $PQ = 5x + 9$ ، $RS = x - 31$ ، فإن $x = 10$

(35) **اختبارات:** حصل أحمد على درجة مساوية لدرجة عمر في اختبار الرياضيات، وحصل عمر على درجة مساوية لدرجة سعد. ما الخاصية التي تثبت أن أحمد وسعداً حصلا على الدرجة نفسها؟

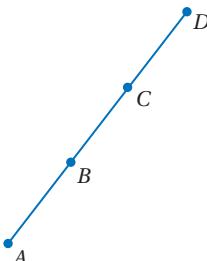


دليل الدراسة والمراجعة

1-7

أثبات العلاقات بين القطع المستقيمة (ص 60-65)

مثال 7



أكتب برهانًا ذا عמודين.

المعطيات: B نقطة متتصف \overline{AC} المطلوب: نقطة متتصف \overline{BD}

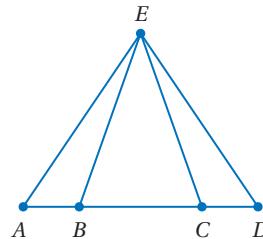
البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) \overline{AC} نقطة متتصف B
2) نظرية نقطة المتتصف	2) $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
3) معطيات	3) \overline{BD} نقطة متتصف C
4) نظرية نقطة المتتصف	4) $\overline{BC} \cong \overline{CD}$
5) خاصية التعدي للتطابق	5) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

أكتب برهانًا ذا عמודين في كلٍ من المسألتين الآتىتين:

(36) المعطيات: X نقطة متتصف كلٌ من \overline{WY} و \overline{WZ} المطلوب: $VW = ZY$ (37) المعطيات: $AB = DC$

المطلوب:

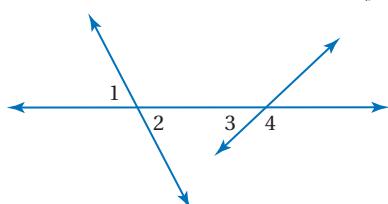


(38) **جغرافية:** أراد طارق السفر من مدينة جدة إلى الطائف، مرورًا بمكة المكرمة لاصطحاب أخيه. ويلم أن المسافة من جدة إلى مكة المكرمة تساوي 79 km ، والمسافة من مكة المكرمة إلى الطائف تساوي 88 km، استنتج أنه سيقطع 167 km في هذه الرحلة. فسر كيف استنتج ذلك؟ افترض أن الطريق الذي يربط هذه المدن الثلاث يشكل مستقيماً.

1-8

أثبات علاقات بين الزوايا (ص 66-73)

مثال 8

إذا علمت أن: $m\angle 1 = 72^\circ$ ، $m\angle 3 = 26^\circ$ ، فأوجد قياس كل زاوية مرقمة في الشكل أدناه. $m\angle 2 = 72^\circ$ لأن $\angle 1, \angle 2$ متقابلان بالرأس. $\angle 3, \angle 4$ متجاورتان على مستقيم؛ إذن فهما متكمالتان.

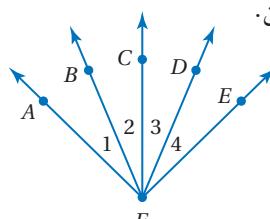
تعريف الزاويتين المتكاملتين

$$26^\circ + m\angle 4 = 180^\circ$$

$$m\angle 4 = 154^\circ$$

بطرح 26 من كلا الطرفين

أوجد قياس كل زاوية فيما يأتي:

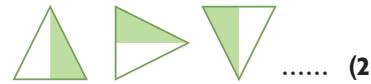
 $\angle 5$ (39) $\angle 6$ (40) $\angle 7$ (41)(42) **برهان:** أكتب برهانًا ذا عמודين.المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 4$ ، $\angle 2 \cong \angle 3$ المطلوب: $\angle AFC \cong \angle EFC$ 

اختبار الفصل

1

اكتب تخميناً يصف النمط في كلٍّ من المتابعين الآتيين، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منهما.

$$15, 30, 45, 60, \dots \quad (1)$$



استعمل العبارات r, q, p لكتابه كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسر إجابتك.

$$5 < -3 : p$$

q : جميع الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

$$r: \text{إذا كان } 36 = 4x, \text{ فإن } 9 = x.$$

$$p \text{ و } q \quad (3)$$

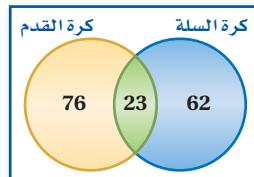
$$(p \vee q) \wedge r \quad (4)$$

برهان: اكتب برهاناً حراً.

المعطيات: $\overline{JK} \cong \overline{CB}$, $\overline{KL} \cong \overline{AB}$

المطلوب: $\overline{JL} \cong \overline{AC}$

رياضة: استعمل شكل قن الآتي الذي يبين نوع الرياضة التي اختارها الطالب للإجابة عن السؤالين أدناه.



(a) صف اختيار الطلاب الذين هم خارج منطقة التقاء وداخل دائرة كرة السلة.

(b) ما عدد الطلاب الذين اختاروا كرة السلة وكرة القدم؟

(7) حدد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا فيما يأتي اعتماداً على المعطيات. فسر تبريرك.

المعطيات: • إذا اجتاز الطبيب اختيار المجلس الطبي، فإنه يستطيع مزاولة مهنة الطب.

• اجتاز فهد اختبار المجلس الطبي. النتيجة، يمكن أن يزاول فهد مهنة الطب.

- (8) **برهان:** أكمل البرهان الآتي:
المعطيات: $3(x - 4) = 2x + 7$
المطلوب: $x = 19$
البرهان:

المبررات	العبارات
(a) معطيات	$3(x - 4) = 2x + 7 \quad (a)$
?	$3x - 12 = 2x + 7 \quad (b)$
(c) خاصية الطرح للمساواة	?
?	$x = 19 \quad (d)$

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً.

(9) الزاويتان المتكاملتان تكونان متجاورتين على مستقيم.

(10) إذا وقعت B بين A و C , فإن $AC + AB = BC$.

(11) إذا تقاطع مستقيمان وكُوئنَا زاويتين متطبقيتين متجاورتين، فإنهما متعامدان.

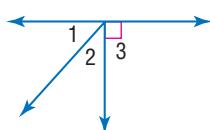
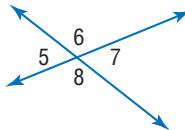
أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

$$m\angle 7 = (2x + 15)^\circ, \quad (13)$$

$$m\angle 8 = (3x)^\circ$$

$$m\angle 1 = x^\circ, \quad (12)$$

$$m\angle 2 = (x - 6)^\circ$$



اكتب كلاً من العبارتين الشرطيتين الآتيتين على صورة (إذا... فإن...).

(14) قياس الزاوية الحادة أقل من 90°

(15) يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونا زوايا قائمة.

(16) **اختيار من متعدد:** أي العبارات الآتية هي المعاكس الإيجابي للعبارة الآتية؟

إذاحتوى المثلث على زاوية منفرجة واحدة، فإنه مثلث منفرج الزاوية.

A إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

B إذا لم يكن في المثلث زاوية منفرجة واحدة، فإنه ليس مثلثاً منفرج الزاوية.

C إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه لا يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

D إذا كان المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

الإعداد للاختبارات

التبرير المنطقي



أحياناً كثيرة يتطلب حل مسائل الهندسة استعمال التبريرات المنطقية؛ لذا يمكنك استعمال أساسيات التبرير المنطقي في حل مسائل الاختبارات.

استراتيجيات استعمال التبرير المنطقي

الخطوة 1

اقرأ المسألة لتحديد المعطيات، وما يجب أن تجده للإجابة عن السؤال.

الخطوة 2

حدّد هل بإمكانك تطبيق أحد مبادئ التبرير المنطقي في هذه المسألة.

- المثال المضاد: المثال المضاد هو المثال الذي ينافق عبارة يفترض أنها صائبة. حدّد بدائل الإجابة التي تراها مناقضة لنص المسألة واحذفها.
- ال المسلمات: المسلمات هي عبارة تصف علاقة أساسية في الهندسة. حدّد هل بإمكانك تطبيق مسلمة للتوصل إلى نتيجة منطقية.

الخطوة 3

إذا لم تصل إلى أي نتيجة من مبادئ الخطوة 2،

فحدد ما إذا كانت الأدوات الآتية تساعدك على الحل أم لا.

- الأنمات: ابحث عن نمط لعمل تخمين مناسب.
- جدوال الصواب: استعمل جدول صواب لتنظيم قيم الصواب للعبارات المعطاة في المسألة.
- أشكال فن: استعمل أشكال فن لتمثيل العلاقات بين عناصر المجموعات بوضوح.
- البراهين: استعمل التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي للوصول إلى نتيجة على شكل برهان.

الخطوة 4

إذا لم يكن بإمكانك الوصول إلى نتيجة حتى باستعمال مبادئ الخطوة 3، فخمن بديل الإجابة الأنسب، ثم ضع علامة على السؤال حتى ترجع إليه إذا بقي متسع من الوقت في نهاية الاختبار.



مثال

اقرأ المسألة جيداً، وحدد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.

عدد طلاب مدرسة 292 طالباً، شارك 94 منهم في الألعاب الرياضية، و 122 في النادي الثقافي، و 31 في كليهما. كم طالباً لم يشارك في الألعاب الرياضية أو في النادي الثقافي؟

122 C

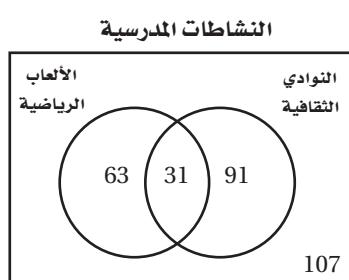
95 A

138 D

107 B

اقرأ المسألة جيداً. من الواضح أنه ليس هناك أمثلة مضادة واضحة، ولا يمكن استعمال المسلمات للوصول إلى نتيجة منطقية؛ إذن علينا استعمال أدوات لتنظيم المعلومات المعطاة؛ لترتها بوضوح.

يمكنا رسم شكل فن لنرى التقابل بين المجموعتين، وتحديد معطيات السؤال على هذا الشكل.
حدّد عدد الطالب الذين شاركوا في الألعاب الرياضية أو في النادي الثقافي فقط.



استعمل هذه المعلومات لحساب عدد الطالب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النادي الثقافي.

$$292 - 63 - 91 - 31 = 107$$

إذن عدد الطالب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النادي الثقافي يساوي 107 طالب.
وعليه فالإجابة الصحيحة هي B.

تمارين ومسائل

(2) أوجد الحد التالي في النمط أدناه.

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة.



(1) حدّد قيمة الصواب للعبارة الآتية. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثلاً مضاداً.



نتائج ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي.

A خاطئة؛ $8 \times 4 = 32$

B خاطئة؛ $7 \times 6 = 42$

C خاطئة؛ $3 \times 10 = 30$

D صحيحة



اختبار تراكمي

للفصل 1

أسئلة الاختيار من متعدد

(4) أي العبارات أدناه تعد نتيجةً منطقيةً للعباراتتين الآتتين؟

إذا نزل المطر اليوم، فستوجل المباراة.

ستُقام المباريات المؤجلة أيام الجمعة.

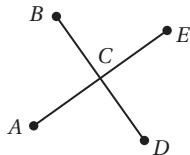
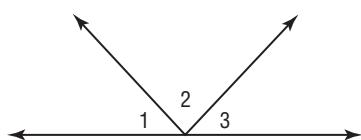
A إذا أُجلت المباراه، فإنها تُوجل بسبب المطر.

B إذا نزل المطر اليوم، فستُقام المباراة يوم الجمعة.

C لا تقام بعض المباريات المؤجلة أيام الجمعة.

D إذا لم ينزل المطر اليوم، فلن تُقام المباراة يوم الجمعة.

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة.

(1) أي عبارات الوصل الآتية صائبة اعتماداً على p و q أدناه؟ p : يوجد أربعة حروف في الكلمة ربيع. q : يوجد حرف علة في الكلمة ربيع. $\sim p \wedge \sim q$ A $p \wedge q$ B $p \wedge \sim q$ C $\sim p \wedge q$ D(5) في الشكل أدناه تتقاطع \overline{BD} و \overline{AE} في C . أي التائج الآتية ليست صائبة؟ $\angle ACB \cong \angle ECD$ A $\angle ACD$ و $\angle ACB$ متجاورتان على مستقيم B $\angle ACD$ و $\angle BCE$ متقابلتان بالرأس. C $\angle ECD$ و $\angle BCE$ متمامتان . D(2) في الشكل الآتي $\angle 1 \cong \angle 3$.

أي الاستنتاجات الآتية صحته ليست مؤكدة؟

 $m\angle 1 - m\angle 2 + m\angle 3 = 90^\circ$ A $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$ B $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$ C $m\angle 2 - m\angle 1 = m\angle 2 - m\angle 3$ D

(6) أرجوحة: في حديقة بيت صغير ست شجرات مزروعة على شكل رؤوس سداسيٍّ منتظم. بكم طريقة يمكنك تعليق الأرجوحة وتنبيتها على شجرتين من الشجرات الست؟

22 طريقة A

12 طريقة B

15 طريقة C

36 طريقة D

(3) الزوايا المتكمالتان تكونان متجاورتين على مستقيم دائمًا.

أي مما يأتي يعد مثلاً مضاداً للعبارة السابقة؟

زاويتان غير متجاورتين A

زاويتان منفرجتان غير متجاورتين B

زاويتان قائمتان غير متجاورتين C

زاويتان متكمالتان ومتجاورتان على مستقيم D

إرشادات للاختبار

السؤال 3: المثال المضاد هو المثال الذي يعطى لإثبات أن الجملة المعطاة ليست صحيحة دائماً.



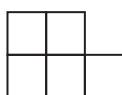
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجاباتك في ورقة الإجابة مبيناً خطوات الحل.

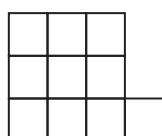
(12) إليك النمط الآتي:



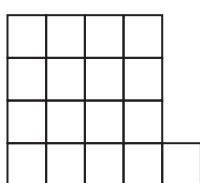
الشكل (1)



الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)

- (a) ضع تخميناً لعدد المربعات في أيٍ من أشكال النمط.
- (b) اكتب عبارةً جبريةً يمكن استعمالها لإيجاد عدد المربعات في الشكل رقم n من هذا النمط.
- (c) ما عدد المربعات في الشكل السادس من هذا النمط؟

(7) تقع النقاط A, B, C, D على استقامة واحدة، وتقع النقطة C بين A و B و تقع النقطة D بين B و D . أكمل العبارة الآتية:

$$AB + \underline{\quad} = AD$$

(8) يحتوي المستقيم m على النقاط D, E, F ، إذا كان $DE = 12\text{ cm}$ ، $m\angle B = 46^\circ$ ، $m\angle A = 44^\circ$ ، $EF = 15\text{ cm}$ ، $\angle B$ هي متممة $\angle A$ ، E, F ، D ، B ، A . فما طول \overline{DF} ؟

(9) استعمل البرهان الآتي للإجابة عن السؤال أدناه .

المعطيات: $\angle A$ هي متممة $\angle B$ ، $m\angle B = 46^\circ$

المطلوب: $m\angle A = 44^\circ$

البرهان:

العبارات	المبررات
$m\angle A + m\angle B = 90^\circ$ (2)	(1) معطيات $\angle A$ هي متممة $\angle B$. $m\angle B = 46^\circ$
$m\angle A + 46^\circ = 90^\circ$ (3)	(2) تعريف الزاويتين المترادفات
$m\angle A = 44^\circ$ (5)	(3) بالتعويض _____ (4) $m\angle A + 46^\circ - 46^\circ = 90^\circ - 46^\circ$ (4) (5) بالتبسيط.

ما التبرير الذي يفسر الخطوة 4 ؟

(10) اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الآتية:

إذا كان قياس الزاوية أكبر من 90° ، فإنها منفرجة.

(11) النقطة E متتصف \overline{DF} ، إذا كانت $DE = 8x - 3$ ، $EF = 3x + 7$ ، $?x$ ، فأوجد قيمة x .

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية ؟

إذا لم تستطع الإجابة عن ...

فعد إلى الدرس ...

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
1-1	1-7	1-3	1-8	1-7	1-7	1-5	1-8	1-4	1-1	1-8	1-2	

التوازي والتعامد

Parallel And Perpendicular



فيما سبق:

درست المستقيمات والزوايا واستعمال التبرير الاستنتاجي لكتابة براهين هندسية.

والآن:

- أحدد علاقات بين زوايا ناتجة عن قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين. وأبرهن توازي مستقيمين من خلال علاقات الزوايا المعطاة.
- استعمل الميل لتحليل المستقيم وكتابة معادلته.
- أجد البعد بين نقطة ومستقيم، والبعد بين مستقيمين متوازيين.

لماذا؟

هندسة:

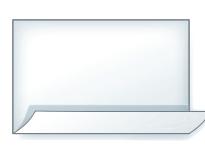
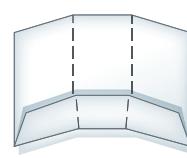
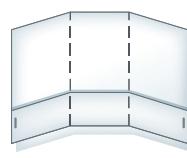
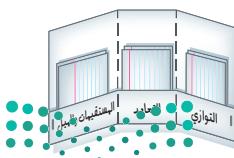
في تصاميم المباني يعتمد المهندسون على خصائص هندسية مختلفة منها التوازي والتعامد.

المطويات

منظم أفكار

التوازي والتعامد: أعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات بين المستقيمات، مبتدئاً بورقة A4 واحدة وست بطاقات.

- اطو الورقة طولياً مرتين كما في الشكل.
- اطو جانب الورقة الأطول بعرض 4 cm لعمل جيب كما في الشكل.
- افتح الورقة وثبت الحواف عند الجانبين؛ لتكون ثلاثة جيوب.
- اكتب عنواناً لكل جيب كما هو موضح. وضع بطاقتين في كل جيب.





التهيئة للفصل 2

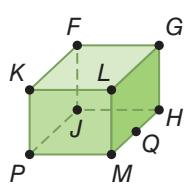
تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي . انظر إلى المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

اختبار سريع

مثال 1



استعمل الشكل المجاور .

(a) كم مستوى يظهر في الشكل؟ اذكرها.

ستة مستويات هي:

$FGL, JHM, FKP, GLM, FGH, KLM$.

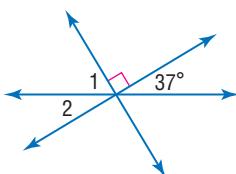
(b) سُمّ ثلث نقاط تقع على استقامة واحدة.

النقاط M, Q, H تقع على استقامة واحدة.

(c) هل تقع النقاط F, K, J في المستوى نفسه؟ وضح إجابتك.

نعم. النقاط F, K, J تقع جميعها في المستوى $FKPJ$.

مثال 2



أوجد $m\angle 1$.

$$\text{اجمع } m\angle 1 + 37^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

بسط

$$m\angle 1 = 53^\circ$$

مثال 3

أوجد قيمة x في المعادلة (7) .
 $a + 8 = b(x - 7)$
 إذا كان $a = 12, b = 10$

المعادلة المعطاة $a + 8 = b(x - 7)$

$$a = 12, b = 10 \quad 12 + 8 = 10(x - 7)$$

بسط

$$20 = 10x - 70$$

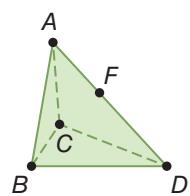
اجمع 70 للطرفين

$$90 = 10x$$

اقسم الطرفين على 10

$$x = 9$$

استعمل الشكل المجاور .



(1) كم مستوى يظهر في الشكل؟ اذكرها.

(2) سُمّ ثلث نقاط تقع على استقامة واحدة.

(3) هل تقع النقاط B, C, D في المستوى نفسه؟ وضح إجابتك .

(4) **أجهزة:** يوضع جهاز مساحة الأرض على حامل ثلاثي القوائم . هل تقع الرؤوس السفلية للقوائم الثلاثة في المستوى نفسه؟

أوجد قياس كلٌ من الزوايا الآتية:

$$\angle 1 \quad (5)$$

$$\angle 2 \quad (6)$$

$$\angle 3 \quad (7)$$

$$\angle 4 \quad (8)$$

أوجد قيمة x لقيم a, b المعطاة في كل معادلة مما يأتي:

$$a + 8 = -4(x - b), a = 8, b = 3 \quad (9)$$

$$b = 3x + 4a, a = -9, b = 12 \quad (10)$$

$$\frac{a+2}{b+13} = 5x, a = 18, b = -1 \quad (11)$$

(12) **عارض:** يقدم معرض هدية بسعر تشجيعي قدره 15 ريالاً عند شراء بطاقة دخول . إذا دفع أحمد وأخوه 95 ريالاً، فاكتتب معادلة تمثل ما دفعه أحمد وأخوه، ثم حلّها لإيجاد ثمن بطاقة الدخول الواحدة .



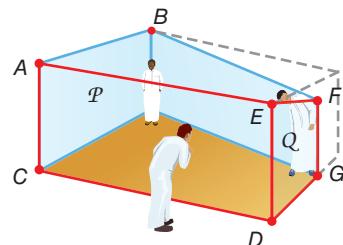


المستقيمان والقاطع Lines and Transeversal

2-1

لماذا؟

تُظهر عُرفة الخداع البصري أن الشخص الواقف في الزاوية اليمنى أكبر من الشخص الواقف في الزاوية اليسرى. وفي المنظر الأمامي، يبدو الحائطان الأمامي والخلفي متوازيين في حين أنهما ليسا كذلك.



ويبدو السقف والأرضية أفقين، ولكنهما في الحقيقة ليسا أفقين.

العلاقات بين المستقيمات والمستويات: استعملت مستقيمات متوازية ومتقاطعة ومتخالفة بالإضافة إلى مستويات متقاطعة وأخرى متوازية؛ لتصميم غرفة الخداع كما يتضح في الرسم السابق.

أضف إلى مطويتك

تستعمل رؤوس الأسهم لتدل على توازي مستقيمين.

مفاهيم أساسية

التوازي والتخالف

المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان لا يتقاطعان أبداً ويقعان في المستوى نفسه.

مثال: $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{LM}$

المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان لا يتقاطعان، ولا يقعان في المستوى نفسه.

مثال: المستقيمان m, ℓ , متخالفان.

المستويان المتوازيان هما مستويان غير متقاطعين.

مثال: المستويان B, A , متوازيان.

تقرأ $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{LM}$: المستقيم JK يوازي المستقيم LM

إذا كانت القطع المستقيمة أو أنصاف المستقيمات أجزاءً من مستقيمات متوازية أو متخالفة، فإنها تكون متوازية أو متخالفة أيضاً.

مثال 1 من واقع الحياة تحديد علاقات التوازي والتخالف

حدّد كلاً مما يأتي مستعملاً قطعة الجبن في الشكل المجاور :

(a) جميع القطع المستقيمة التي توازي \overline{JP}

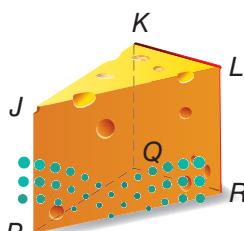
$\overline{KQ}, \overline{LR}$

(b) جميع القطع المستقيمة التي تخالف \overline{KL} .

$\overline{JP}, \overline{PQ}, \overline{PR}$

(c) مستوى يوازي المستوى PQR .

المستوى JKL هو المستوى الوحيد الموازي للمستوى PQR .



فيما سبق:

استعملت علاقات الزوايا والقطع المستقيمة لأبرهن نظريات.

(الدروس من 1-8 إلى 5-1)

والآن:

- أترى العلاقات بين مستقيمين أو مستويين.
- أسمى أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما.

المفردات

المستقيمان المتوازيان

parallel lines

المستقيمان المتخالفان

skew lines

المستويان المتوازيان

parallel planes

القاطع

transversal

الزوايا الداخلية

interior angles

الزوايا الخارجية

exterior angles

الزوايايات المتناوبتان

consecutive angles

الزوايايات المتبادلتان

داخلياً

alternate interior angles

الزوايايات المتبادلتان

خارجياً

alternate exterior angles

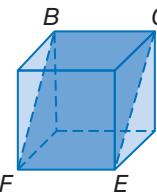
الزوايايات المتناظرتان

corresponding angles

تنبيه!

التوأمي والتخالف

في تمرين تحقق من
 $\overleftrightarrow{FE} : 1A$ لا
 \overleftrightarrow{BC} يخالف بل يوازيه،
وذلك لأنهما لا يتقاطعان
ويقعان في المستوى
 $.BCF$.



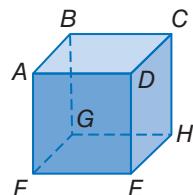
تحقق من فهمك

حدد كلاً مما يأتي مستعملاً الشكل المجاور:

(1A) جميع القطع المستقيمة التي تخالف \overrightarrow{BC} .

(1B) قطعة مستقيمة توازي \overrightarrow{EH} .

(1C) جميع المستويات التي توازي المستوى DCH .



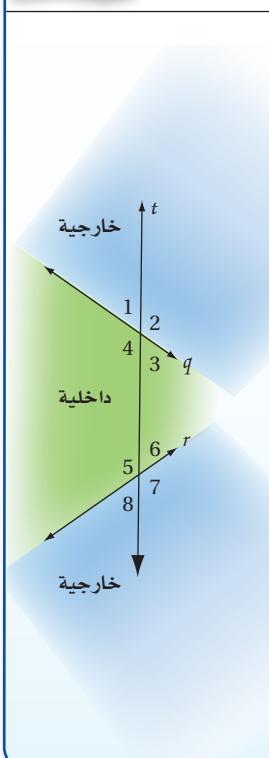
علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع: القاطع هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في المستوى نفسه وفي نقاط مختلفة. ففي الشكل أدناه، المستقيم t قاطع للمستقيمين r, q . لاحظ أن المستقيم t يشكل ثمانى زوايا مع المستقيمين r, q . وأزواج محددة من هذه الزوايا لها أسماء خاصة.

مفاهيم أساسية

علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع

اضف إلى

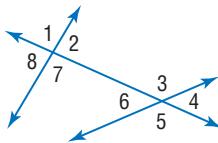
مطابقتك



تصنيف علاقات أزواج الزوايا

مثال 2

مستعملاً الشكل المجاور، صنّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخلياً، أو متبادلتين خارجياً، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



(b) $\angle 6$ و $\angle 7$

متحالفتان

$\angle 1$ و $\angle 5$ (a)

متبادلتين خارجياً

(d) $\angle 2$ و $\angle 6$

متبادلتين داخلياً

$\angle 2$ و $\angle 4$ (c)

متناظرتان

تحقق من فهمك



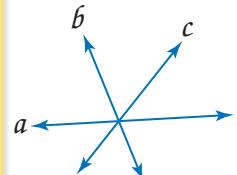
Ministry of Education

الدرس 1-2 المستقيمان والقاطع

٨٧٢ - ١٤٤٤

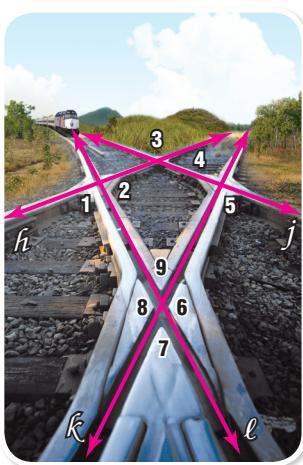
القاطع

في الشكل أدناه، المستقيم c ليس قاطعاً للمستقيمين a, b لأن المستقيم c يقطع المستقيمين a, b في نقطة واحدة فقط.



مثال 3

تحديد القاطع وتصنيف أزواج الزوايا



استعمل صورة تقاطع سكك القطار المجاورة؛ لتحديد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنف الأزواج إلى زاويتين متبادلتين داخليّاً، أو متبادلتين خارجيّاً، أو متاظترتين، أو متحالفتين.

(a) $\angle 1$ و $\angle 3$

القاطع الذي يصل بين $\angle 1$ و $\angle 3$ هو المستقيم h . وهما زاويتان متبادلتان خارجيّاً.

(b) $\angle 5$ و $\angle 6$

القاطع الذي يصل بين $\angle 5$ و $\angle 6$ هو المستقيم k . وهما زاويتان متحالفتان.

(c) $\angle 2$ و $\angle 6$

القاطع الذي يصل بين $\angle 2$ و $\angle 6$ هو المستقيم l . وهما زاويتان متاظترتان.

تحقق من فهمك

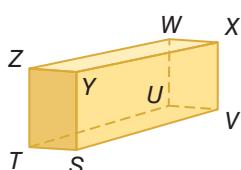
$\angle 2$ و $\angle 9$ (3D)

$\angle 7$ و $\angle 5$ (3C)

$\angle 8$ و $\angle 2$ (3B)

$\angle 5$ و $\angle 3$ (3A)

تأكد



حدد كلاً مما يأتي مستعملاً متوازي المستطيلات في الشكل المجاور:

(1) جمجم القطع المستقيمة التي توازي \overline{SV} .

(2) مستوى يوازي المستوى ZWX .

(3) قطعة مستقيمة تخالف \overline{TS} وتحتوي على النقطة W .

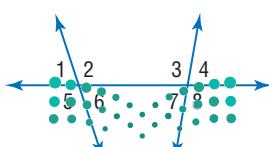
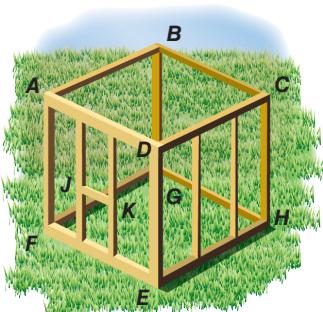
(4) إنشاءات: استعمل الشكل المجاور لتحديد كلاً مما يأتي:

(a) ثلاثة أزواج من المستويات المتوازية.

(b) ثلاث قطع مستقيمة توازي \overline{DE} .

(c) قطعتين مستقيمتين توازيان \overline{FE} .

(d) زوجين من القطع المستقيمة المتخالفة.



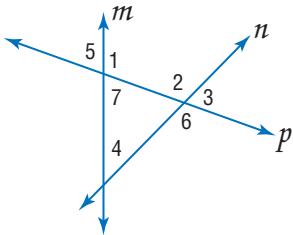
مستعملاً الشكل المجاور، صنف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليّاً، أو متبادلتين خارجيّاً، أو متاظترتين، أو متحالفتين.

(6) $\angle 1$ و $\angle 8$ (5)

(7) $\angle 6$ و $\angle 7$ (7)

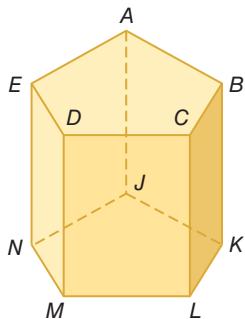
المثال 1

المثال 2

المثال 3

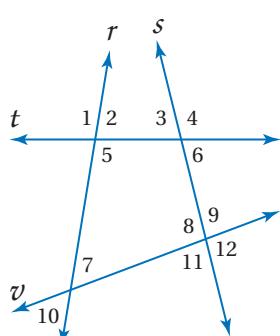
استعمل الشكل المجاور لتحديد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخلية، أو متبادلتين خارجية، أو متناظرتين، أو متحالفتين:

- (10) $\angle 5$ و $\angle 6$ (9) $\angle 2$ و $\angle 4$
 (11) $\angle 7$ و $\angle 2$ (12) $\angle 4$ و $\angle 7$

تدريب و حل المسائل**المثال 1**

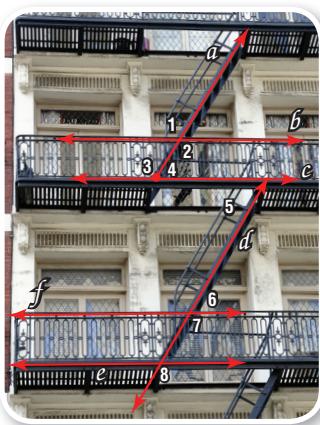
حدد كلاً مما يأتي مستعملاً الشكل المجاور:

- (13) جميع القطع المستقيمة التي توازي \overline{DM} .
 (14) مستوى يوازي المستوى ACD .
 (15) قطعة مستقيمة تخالف \overline{BC} .
 (16) مستوى يتقاطع مع المستوى EDM .
 (17) جميع القطع المستقيمة التي تخالف \overline{AE} .
 (18) قطعة مستقيمة توازي \overline{EN} .
 (19) قطعة مستقيمة توازي \overline{AB} وتمر بالنقطة J .
 (20) قطعة مستقيمة تخالف \overline{CL} وتمر بالنقطة E .

المثال 2

مستعملاً الشكل المجاور، صنف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخلية، أو متبادلتين خارجية، أو متناظرتين، أو متحالفتين.

- (21) $\angle 4$ و $\angle 9$ (22) $\angle 5$ و $\angle 7$
 (23) $\angle 3$ و $\angle 5$ (24) $\angle 10$ و $\angle 11$
 (25) $\angle 1$ و $\angle 6$ (26) $\angle 2$ و $\angle 8$
 (27) $\angle 3$ و $\angle 10$ (28) $\angle 9$ و $\angle 12$
 (29) $\angle 4$ و $\angle 11$ (30) $\angle 7$ و $\angle 11$



سلم طوارئ: استعمل صورة سلم الطوارئ المجاورة؛ لتحديد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخلية، أو متبادلتين خارجية، أو متناظرتين، أو متحالفتين:

- (31) $\angle 1$ و $\angle 3$ (32) $\angle 2$ و $\angle 4$
 (33) $\angle 4$ و $\angle 5$ (34) $\angle 5$ و $\angle 6$
 (35) $\angle 2$ و $\angle 3$ (36) $\angle 7$ و $\angle 8$

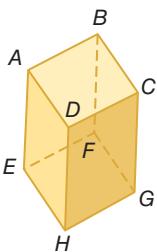
المثال 3**الربط مع الحياة**

لا يسمح بتقاطع خطوط التوصيل بين أبراج الكهرباء، لتجنب حدوث تماس يؤدي إلى انقطاع التيار الكهربائي أو إشعال الحرائق.

كهرباء: استعمل الصورة المجاورة في فقرة الربط مع الحياة والمعلومات أدناها للإجابة عما يأتي:

- (a) ماذا يجب أن تكون عليه العلاقة بين خطوط التوصيل الكهربائي p و m ? و q ?
 (b) ما العلاقة بين ذراع الحمل q و خطوط التوصيل الكهربائي p و m ?





استعمل الشكل المجاور لتصف العلاقة بين كل زوج من القطع المستقيمة الآتية بكتابة:
متوازيتان، أو متخالفتان، أو متقطعتان:

$$\overline{CG} \text{ و } \overline{AB} \quad (39)$$

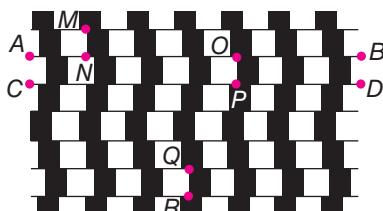
$$\overline{BC} \text{ و } \overline{FG} \quad (38)$$

$$\overline{BF} \text{ و } \overline{DH} \quad (41)$$

$$\overline{HG} \text{ و } \overline{DH} \quad (40)$$

$$\overline{AD} \text{ و } \overline{CD} \quad (43)$$

$$\overline{BC} \text{ و } \overline{EF} \quad (42)$$

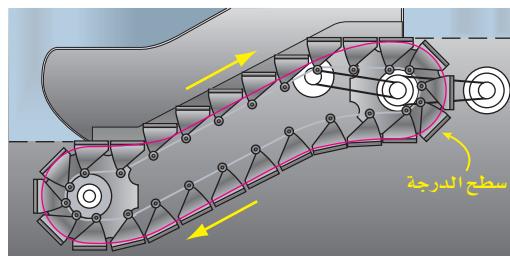


(44) خداع بصري: صمم نموذج الخداع البصري المجاور
باستعمال مربعات متطابقة ومستقيمات فقط.

(a) ما العلاقة بين \overline{AB} و \overline{CD} ? فسر تبريرك.

(b) ما العلاقة بين \overline{MN} و \overline{QR} ? وما العلاقة بين القطعين
المستقيمين \overline{AB} و \overline{CD} والقطعة المستقيمة \overline{OP} ؟

(45) سلم كهربائي: يتكون السلم الكهربائي من درجات مثبتة على مسار متصل بمحرك، حيث تُطوى درجات
أعلى السلم وأسفله؛ ليتكون سطح مستوٍ عند الدخول والخروج كما في الشكل التالي.



(a) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الصاعدة؟

(b) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الثلاث أعلى السلم؟

(c) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الصاعدة وأسطح الدرجات الهابطة في مسار السلم؟



الربط مع الحياة

السلام الكهربائية أكثر
فعالية من المصاعد في
الارتفاعات القصيرة، وذلك
بسبب قدرتها الاستيعابية
الكبيرة، إذ يمكن لبعض
السلالم الكهربائية نقل
شخص خلال ساعة
واحدة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(46) مسألة مفتوحة: يحوي المستوى P المستقيمين المتوازيين a, b . ويقطع المستقيم c المستوى P عند النقطة J . إذا كان المستقيمان c, a مخالفين، والمستقيمان c, b غير مخالفين، فارسم شكلًا يمثل هذا الوصف.

(47) تحد: افترض أن النقاط A, B, C تقع في المستوى P ، وأن النقاط D, E, F تقع في المستوى Q . وأن المستقيم m يحوي نقطتين D, F ولا يقطع المستوى P . وأن المستقيم n يحوي نقطتين E, A .

(a) ارسم شكلًا يمثل هذا الوصف.

(b) ما العلاقة بين المستويين P و Q ؟

(c) ما العلاقة بين المستقيمين m و n ؟

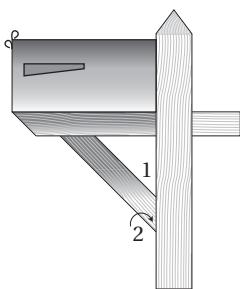
تبرير: المستويان X و Y متوازيان، والمستوى Z يقطع المستوى X . والمستقيم \overleftrightarrow{AB} يقع في المستوى X ،
والمستقيم \overleftrightarrow{CD} يقع في المستوى Y ، والمستقيم \overleftrightarrow{EF} يقع في المستوى Z . حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي
صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً. وضح إجابتك:



$$\overleftrightarrow{EF} \text{ يخالف } \overleftrightarrow{AB} \quad (49) \qquad \overleftrightarrow{EF} \text{ يقطع } \overleftrightarrow{AB} \quad (49) \qquad \overleftrightarrow{CD} \text{ يخالف } \overleftrightarrow{AB} \quad (48)$$

(50) اكتب: وضح لماذا لا يكون المستويان مخالفين أبداً.

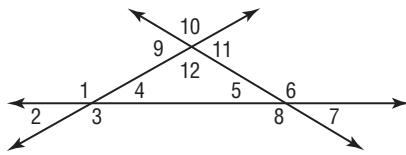
تدريب على اختبار



(52) يمثل الشكل المجاور صندوق بريد.
أيٌّ مما يأتي يصف $\angle 1$ و $\angle 2$ ؟

- A زاويتان متبادلتان خارجيًّا
- B زاويتان متبادلتان داخليًّا
- C زاويتان متحالفتان
- D زاويتان متناظرتان

(51) أي مما يأتي يمثل زاويتين متبادلتين خارجيًّا؟



- C $\angle 10$ و $\angle 2$
- D $\angle 9$ و $\angle 5$
- A $\angle 5$ و $\angle 1$
- B $\angle 6$ و $\angle 2$

مراجعة تراكمية

أوجد قياسات الزوايا المرقمة في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-8)

$$m\angle 19 = (100 + 20x)^\circ, \quad (55)$$

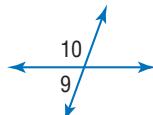
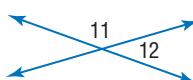
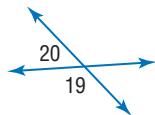
$$m\angle 20 = (20x)^\circ$$

$$m\angle 11 = (4x)^\circ, \quad (54)$$

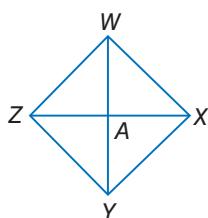
$$m\angle 12 = (2x - 6)^\circ$$

$$m\angle 9 = (2x - 4)^\circ, \quad (53)$$

$$m\angle 10 = (2x + 4)^\circ$$



(56) **برهان:** أكمل البرهان الآتي: (الدرس 1-7)



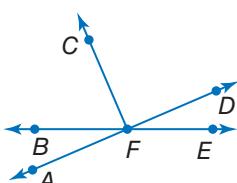
المعطيات: $\overline{WY} \cong \overline{ZX}$. نقطة متصف A .

المطلوب: $\overline{WA} \cong \overline{ZA}$

(57) استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارتين الآتىين، واذكر القانون الذي استعملته، وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". (الدرس 1-4)

A إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما ليستا متجاورتين على مستقيم.

B إذا تجاورت زاويتان على مستقيم، فإنهما غير متطابقتين.



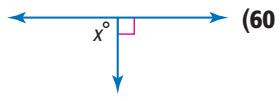
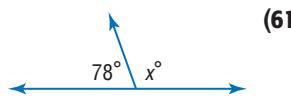
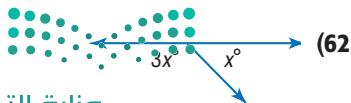
جبر: في الشكل المجاور: $\overline{FC} \perp \overline{AD}$. (مهارة سابقة)

(58) إذا كان $12a + 45 = 180$ ، فأوجد قيمة a .

(59) إذا كان $8x - 6 = 14x + 8$ ، فأوجد قيمة x .

استعد للدرس

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:



الزوايا والمستقيمات المتوازية

Angles and Parallel Lines

2-2



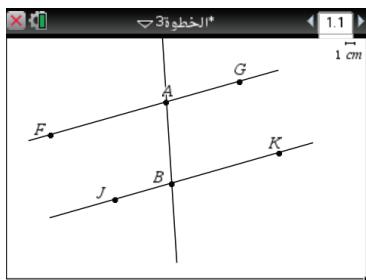
يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لاستكشاف قياسات الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

المستقيمان المتوازيان والقاطع

نشاط

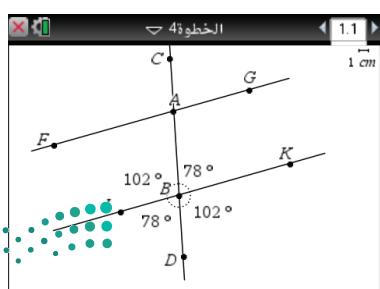
الخطوة 3: ارسم قاطعاً

- ارسم النقطة A على \overleftrightarrow{FG} ، والنقطة B على \overleftrightarrow{JK} ، وذلك بالضغط على **4: النقاط والمستقيما**، ثم حدد كلاً من **menu** على **on** واختر **4: النقاط والمستقيما**، ثم حدد كلاً من **menu** **ctrl** **menu** **on** ثم اختيار **2: التسمية**، وسم كلاً منها.
- صل بين النقطتين A, B لرسم القاطع \overleftrightarrow{AB} ، بالضغط على **4: النقاط والمستقيما**، واختر منها **menu** **ctrl** **menu** **on** ثم اضغط على **4: مستقيم** ثم اختر **2: التسمية** واختر منها **menu** **ctrl** **menu** **on** ثم اضغط على **4: مستقيم** ثم اضغط على **2: نقطة على المستقيم**.



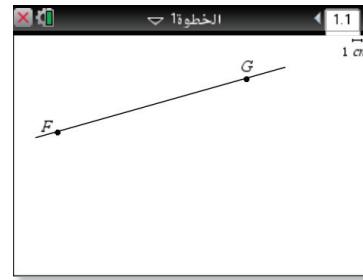
الخطوة 4: قس كل زاوية

- ارسم نقطتين على AB وسمّهما C, D بالضغط على **menu** **2: نقطة على المستقيم** ثم اضغط على **menu** **ctrl** **menu** **on** واختر **2: التسمية** وسم كلاً منها بالضغط على **menu** **ctrl** **menu** **on** ثم اختر **2: التسمية** وسمّهما بـ C, D.
- لقياس الزوايا الشمانى الثالثي الناتجة عن المستقيمات الثلاثة، اضغط **menu** **6: القياس**، ثم اختر **الزاوية** واختر منها **menu** **7: الإنشاء الهندسى**، واختر منها **2: مستقيم موازي** ثم الضغط على **menu** **ctrl** **menu** **on** واختر **2: مستقيم موازي** فيفتح مستقيم مواز على **FG** والمستقيم **JK**، فيتحقق **m∠JBD = m∠B**، وليكن 78° .
- كرر ذلك مع باقى الزوايا لإيجاد قياساتها.



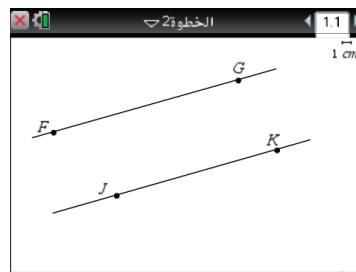
الخطوة 1: ارسم مستقيماً

- ارسم مستقيماً وسمّ النقطتين G, F عليه، بالضغط على المفاتيح **menu** **on** **menu** **ctrl** **menu** **on** ثم اختر **4: النقاط والمستقيما** واختر منها **2: التسمية** ثم ارسمه، ثم اختر نقطة عليه بالضغط على **menu** **ctrl** **menu** **on** ومنها اختر **2: نقطة على المستقيم**.
- سمّ كل من النقطتين بالضغط على النقطة، ثم على **menu** **ctrl** **menu** **on** واختر **2: التسمية** وتسمية النقطتين بالحروف FG



الخطوة 2: ارسم مستقيماً موازياً

- حدّد نقطة لا تقع على \overleftrightarrow{FG} وسمّها J بالضغط على **menu** **ctrl** **menu** **on** واختر **1: نقطة في المستوى**، واختر **4: النقاط والمستقيما** واختر منها **1: نقطة في المستوى**، وحدد النقطة وسمّها بالضغط على **menu** **ctrl** **menu** **on** واختر **2: التسمية** وتسمية النقطة بالحرف J.
- ارسم مستقيماً يمر في J ويوازي FG بالضغط على **menu** **ctrl** **menu** **on** واختر **7: الإنشاء الهندسى**، واختر منها **2: مستقيم موازي** ثم الضغط على **menu** **ctrl** **menu** **on** واختر **2: مستقيم موازي** فيفتح مستقيم مواز على **FG** والمستقيم **JK**.
- اختر نقطة على المستقيم **JK** واختر **menu** **ctrl** **menu** **on** واختر **2: التسمية** وسمّها بالضغط على المفاتيح **menu** **ctrl** **menu** **on** واختر منها **2: التسمية** وسمّها K.



حل النتائج:

1) سجل القياسات من الخطوة 4 في جدول يشبه الجدول المجاور. أي الزوايا لها القياس نفسه؟

$\angle JBD$	$\angle KBD$	$\angle ABK$	$\angle JBA$	$\angle FAB$	$\angle GAB$	$\angle CAG$	$\angle FAC$	الزوايا
								القياس الأول

2) اسحب النقطة C أو D لتحرك القاطع \overleftrightarrow{AB} ، بحيث يقطع المستقيمين المتوازيين بزاوية مختلفة.
أضف صفاً بعنوان القياس الثاني إلى جدولك، ثم سجل القياسات الجديدة.
كرر هذه الخطوات، بإضافة صفوف أخرى عنوانها: القياس الثالث، القياس الرابع ، ...

3) باستعمال الزوايا المدونة في الجدول، عِّن أزواج الزوايا التي لها الأسماء الخاصة الآتية، وصف العلاقة بين قياساتها، ثم اكتب تخميناً على صورة (إذا... فإن...) حول قياس كل زوج من الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

- (a) متناظرتان (b) متبادلتان داخلياً (c) متبادلتان خارجياً (d) متحالفتان

4) اسحب النقطة C أو D ، بحيث يكون قياس أيٌّ من الزوايا 90°

(a) ماذا تلاحظ حول قياسات الزوايا الأخرى؟

(b) كون تخميناً حول القاطع الذي يكون عمودياً على أحد المستقيمين المتوازيين.



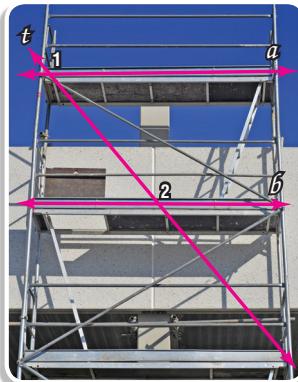


الزوايا والمستقيمات المتوازية

Angles and Parallel Lines

2-2

لماذا؟



تستعمل طريقة السقالات كثيراً في أعمال البناء، وتتكون من أذرع معدنية موصولة بطريقة هندسية توفر مساحات عمل أفقية عند ارتفاعات مختلفة وبطريقة آمنة. فالقطاع t المبين في الصورة يوفر دعامة لمساحتى العمل المتوازيتين.

المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا: في الصورة المجاورة: المستقيم t قاطع للمستقيمين b ، a ؛ إذن $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 1 \cong \angle 2$. وبما أن b متوازيان، لذا فإن هناك علاقة خاصة بين $\angle 1 \cong \angle 2$.

فيما سبق:

درست تسمية أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

(الدرس 2-1)

والآن:

- استعمل نظريات المستقيمين المتوازيين لتحديد العلاقات بين أزواج محددة من الزوايا.
- استعمل الجبر لأجد قياسات الزوايا.

ملمة الزاويتين المتناظرتين

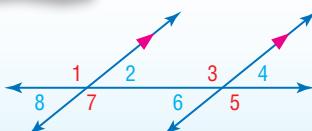
ملمة 2.1

إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.

أمثلة: $\angle 1 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 4$, $\angle 5 \cong \angle 7$, $\angle 6 \cong \angle 8$

اضف إلى

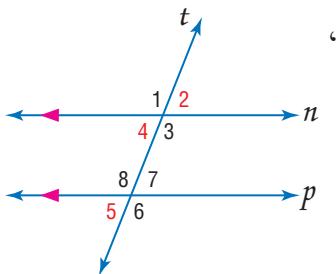
مطويتك



استعمال مسلمة الزاويتين المتناظرتين

مثال 1

في الشكل المجاور: $m\angle 5 = 72^\circ$. أوجد قياس كلٌّ من الزاويتين الآتىتين، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.



$\angle 4$ (a)

مسلمة الزاويتين المتناظرتين

$\angle 4 \cong \angle 5$

تعريف تطابق الزوايا

$m\angle 4 = m\angle 5$

بالتعمير

$m\angle 4 = 72^\circ$

$\angle 2$ (b)

نظريه الزاويتين المتقابلتين بالرأس

$\angle 2 \cong \angle 4$

مسلمة الزاويتين المتناظرتين

$\angle 4 \cong \angle 5$

خاصية التعدي للتطابق

$\angle 2 \cong \angle 5$

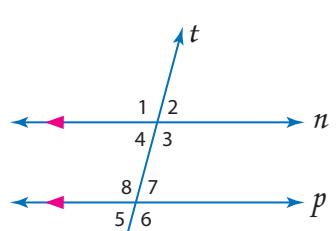
تعريف تطابق الزوايا

$m\angle 2 = m\angle 5$

بالتعمير

$m\angle 2 = 72^\circ$

تحقق من فهمك



في الشكل المجاور: $m\angle 8 = 105^\circ$. أوجد قياس كلٌّ من الزوايا الآتىة، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

$\angle 3$ (1C)

$\angle 2$ (1B)

$\angle 1$ (1A)

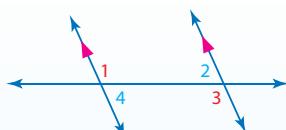
في المثال 1 ، الزاویتان المتبادلتان خارجیاً $\angle 5$, $\angle 2$ متطابقتان ، ويقود هذا المثال إلى النظريات الآتية حول العلاقة بين أزواج أخرى من الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

نظريات

أضف إلى

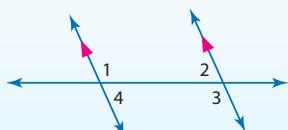
مطويتك

المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا



2.1 نظرية الزاويتين المترادفتين داخلياً: إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين مترادفتين داخلياً متطابقتان.

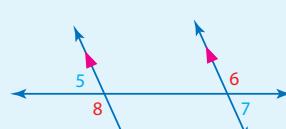
$$\angle 2 \cong \angle 4 \text{ و } \angle 3 \cong \angle 1$$



2.2 نظرية الزاويتين المترادفتين المتكاملتين: إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين مترادفتين متكاملتان.

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$$



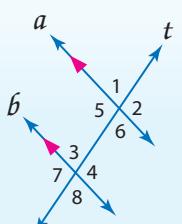
2.3 نظرية الزاويتين المترادفتين خارجياً: إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين مترادفتين خارجياً متطابقتان.

$$\angle 6 \cong \angle 5 \text{ و } \angle 7 \cong \angle 8$$

ستبرهن النظريتين 2.2 و 2.3 في السؤالين 28 و 33 على الترتيب

بما أن المسلمات تقبل دون برهان ، فيمكنك استعمال مسلمة الزاويتين المتناظرتين لإثبات كلٌ من النظريات السابقة.

برهان نظرية الزاويتين المترادفتين داخلياً



المعطيات: $a \parallel b$

قطاع للمستقيمين t . a, b

$$\angle 4 \cong \angle 5, \angle 3 \cong \angle 6$$

برهان حر:

لدينا من المعطيات $a \parallel b$ ، والمستقيم t قاطع لهما. ومن مسلمة الزاويتين المتناظرتين $\angle 4 \cong \angle 2$ و $\angle 6 \cong \angle 8$. وكذلك $\angle 2 \cong \angle 3$ و $\angle 5 \cong \angle 7$. لأن الزاويتين المترادفتين بالرأس متطابقتان؛ لذا فإن $\angle 5 \cong \angle 4$ و $\angle 6 \cong \angle 3$. بحسب خاصية التعدي للتطابق.



مثال 2 من واقع الحياة استعمال نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا



تخطيط المدن: شارع A وشارع B متوازيان ويقطعهما شارع C.

إذا كان $m\angle 1 = 118^\circ$ ، فأوجد $m\angle 2$ ، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

نظرية الزاويتين المترادفتين داخلياً

$$\angle 2 \cong \angle 1$$

تعريف تطابق الزوايا

$$m\angle 2 = m\angle 1$$

بالتعميير

$$m\angle 2 = 118^\circ$$

الربط مع الحياة

عند تخطيط الأحياء الجديدة في بعض المدن، يُشترط ألا يقل قياس زوايا تقاطعات شوارعها عن 60° .

تحقق من فهمك

تخطيط المدن: استعمل الشكل أعلاه للإجابة عن السؤالين الآتيين، واذكر المسلمات أو النظريات التي

استعملتها :



$$(2A) \text{ إذا كان } m\angle 1 = 100^\circ, m\angle 4 = ?$$

$$(2B) \text{ إذا كان } m\angle 3 = 70^\circ, m\angle 2 = ?$$

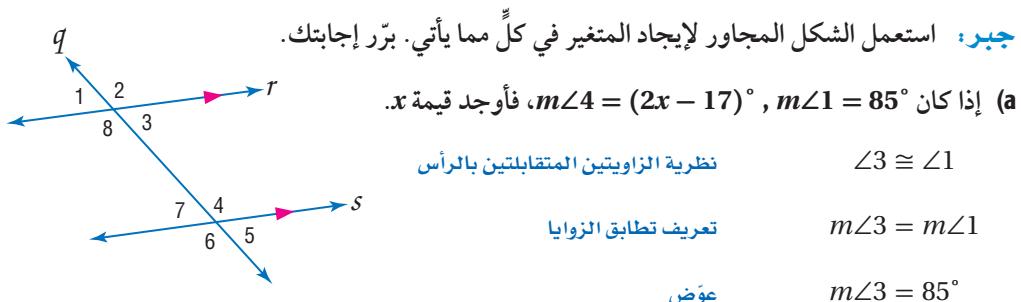
زيارة التصاميم

Ministry of Education

2022 - 1444

الجبر وقياسات الزوايا: يمكنك استعمال العلاقات الخاصة بين الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما لإيجاد القيم المجهولة.

مثال 3 إيجاد قيم المتغيرات



بما أن المستقيمين r, s متوازيان، فإن الزاويتين $\angle 3, \angle 4$ متكاملتان بحسب نظرية الزاويتين المترافقتين.

$$\text{تعريف الزاويتين المتكاملتين} \quad m\angle 3 + m\angle 4 = 180$$

$$\text{عَوْض} \quad 85 + 2x - 17 = 180$$

$$\text{بسط} \quad 2x + 68 = 180$$

$$\text{اطرح } 68 \text{ من كلا الطرفين} \quad 2x = 112$$

$$\text{اقسم كلا الطرفين على } 2 \quad x = 56$$

(b) إذا كان y , $m\angle 3 = (4y + 30)^\circ$, $m\angle 7 = (7y + 6)^\circ$, فأوجد قيمة y .

نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

$$\angle 3 \cong \angle 7$$

$$\text{تعريف تطابق الزوايا} \quad m\angle 3 = m\angle 7$$

$$\text{عَوْض} \quad 4y + 30 = 7y + 6$$

$$\text{اطرح } 4y \text{ من كلا الطرفين} \quad 30 = 3y + 6$$

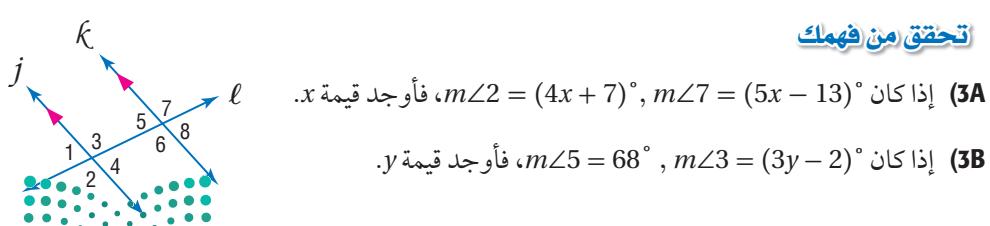
$$\text{اطرح } 6 \text{ من كلا الطرفين} \quad 24 = 3y$$

$$\text{اقسم كلا الطرفين على } 3 \quad 8 = y$$

إرشادات للدراسة

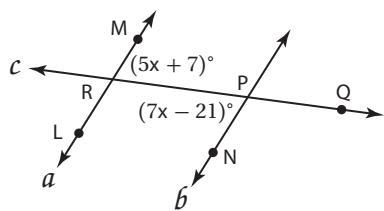
تطبيق المسلمين والنظريات

طبق مسلمات ونظريات هذا الدرس على المستقيمات المتوازية التي يقطعها قاطع فقط؛ لذا لا تفترض توازي مستقيمين إلا إذا ورد ذلك في النص، أو وجدت أسمهُم على المستقيمات تشير إلى توازيها.



تحقق من فهمك

مثال 4 من الاختبار



مسألة مفتوحة: إذا كان $a \parallel b$ فأوجد $m\angle MRQ$. وبيّن خطوات الحل.

اقرأ سؤال الاختبار

تعلم من الشكل أن $m\angle MRQ = (5x+7)^\circ$, $m\angle RPN = (7x-21)^\circ$, والمطلوب أن تجد x .

حل سؤال الاختبار

$\angle MRQ$, $\angle RPN$ متبادلتان داخلية. وبما أن المستقيمين a , b متوازيان، إذن يجب أن تكون الزاويتان المتبادلتان داخلية متطابقتين؛ لذا $\angle MRQ \cong \angle RPN$. وبحسب تعريف التطابق يكون $m\angle MRQ = m\angle RPN$. عوض بقياسات الزوايا المعطاة في هذه المعادلة وحلها لإيجاد قيمة x .

زاويتان متبادلتان داخلية

$$m\angle MRQ = m\angle RPN$$

عوض

$$5x + 7 = 7x - 21$$

اطرح $5x$ من كلا الطرفين

$$7 = 2x - 21$$

اجمع 21 إلى كلا الطرفين

$$28 = 2x$$

اقسم كلا الطرفين على 2

$$14 = x$$

الآن، استعمل قيمة x لإيجاد $m\angle MRQ$

عوض

$$m\angle MRQ = (5x + 7)^\circ$$

$$x = 14$$

$$= (5(14) + 7)^\circ$$

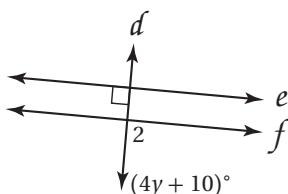
بسط

$$= 77^\circ$$

تحقق: تحقق من إجابتك باستعمال قيمة x لتجد $m\angle RPN$.

$$\begin{aligned} m\angle RPN &= (7x - 21)^\circ \\ &= (7(14) - 21)^\circ \\ &= 77^\circ \end{aligned}$$

✓ بما أن $a \parallel b$ فإن $a \parallel b \Rightarrow \angle MRQ \cong \angle RPN$, فإن $m\angle MRQ = m\angle RPN$ ، و



تحقق من فهمك

(4) إذا كان $e \parallel f$ ، فأوجد قيمة y مبيّناً خطوات الحل.

إرشادات للاختبار

تحديد المطلوب

أعد قراءة سؤال الاختبار بدقة لتحديد المطلوب.

ففي المثال 4: يقع بعض الطلاب في خطأ شائع هو التوقف بعد إيجاد قيمة x ، والقول إن إجابة هذا السؤال هي 14.

تنتج علاقة خاصة عندما يكون القاطع لمستقيمين متوازيين عمودياً عليهما.

نظريّة القاطع العمودي

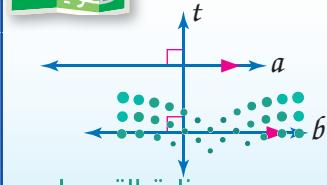
أضف إلى مطويتك

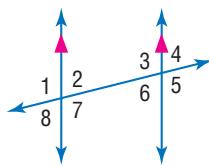
إذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستقيمين متوازيين في مستوى ، فإنه يكون عمودياً على المستقيم الآخر.

مثال: إذا كان $a \parallel b$, $a \parallel t$, $t \perp a$, $t \perp b$ ، فإن $t \perp b$.

قراءة الرياضيات

العمودي تذكر أن الرمز $t \perp b$ يقرأ على النحو الآتي : المستقيم b عمودي على المستقيم t .



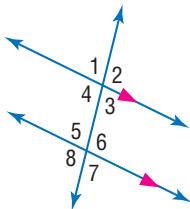


في الشكل المجاور: $m\angle 1 = 94^\circ$. أوجد قياس كل من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:

$\angle 4$ (3)

$\angle 5$ (2)

$\angle 3$ (1)



في الشكل المجاور: $m\angle 4 = 101^\circ$. أوجد قياس كل من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:

$\angle 5$ (6)

$\angle 7$ (5)

$\angle 6$ (4)



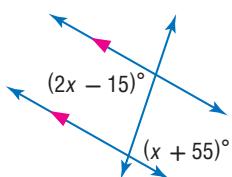
(7) طرق: حاجز الحماية في الشكل المجاور يوازي سطح الطريق، والدعامات الرأسية يوازي بعضها بعضًا. أوجد قياسات الزوايا 4, 3, 2.

المثال 1

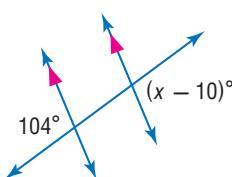
المثال 2

المثال 3

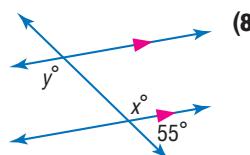
المثال 4



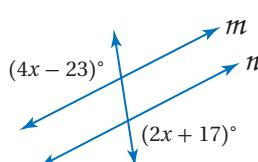
(10)



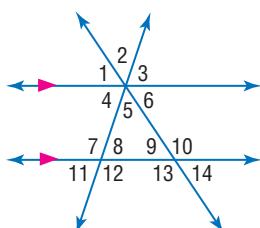
(9)



(8)



(11) إجابة قصيرة: إذا كان $m \parallel n$, فأوجد قيمة x .
بِّين خطوات حلك.



في الشكل المجاور: $m\angle 14 = 22^\circ$, $m\angle 11 = 18^\circ$, أوجد قياس كل من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها :

$\angle 2$ (14)

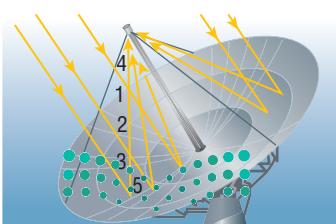
$\angle 3$ (13)

$\angle 4$ (12)

$\angle 1$ (17)

$\angle 5$ (16)

$\angle 10$ (15)



طاقة شمسية: يجمع الطبق الشمسي الطاقة بتوجيهه أشعة الشمس نحو مستقبل يقع في بؤرة الطبق. مفترضًا أن أشعة الشمس متوازية، حدد العلاقة بين أزواج الزوايا الآتية. بِّين خطوات حلك:

$\angle 2$ و $\angle 1$ (19)

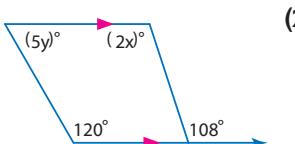
$\angle 3$ و $\angle 1$ (18)

$\angle 4$ و $\angle 3$ (21)

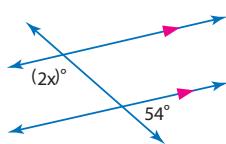
$\angle 4$ و $\angle 5$ (20)

المثال 3

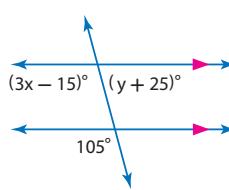
أوجد قيمة كل متغير في الأشكال الآتية. بّرّ إجابتك:



(24)

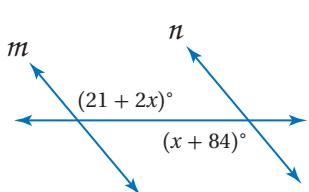


(23)

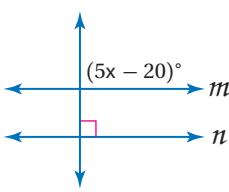


(22)

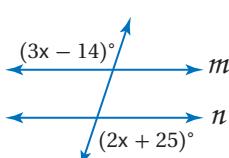
إذا كان $n \parallel m$ ، فأوجد قيمة x في كلٌ مما يأتي، وحدّد المسلمة أو النظرية التي استعملتها :



(27)



(26)



(25)

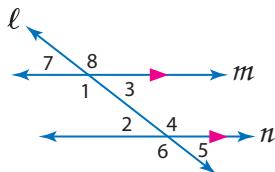
المثال 4

برهان: أكمل برهان النظرية 2.2.

المعطيات: $m \parallel n$, $m \parallel l$, $l \parallel n$.

المطلوب: $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ متكمالتان، $\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ متكمالتان.

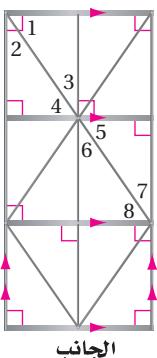
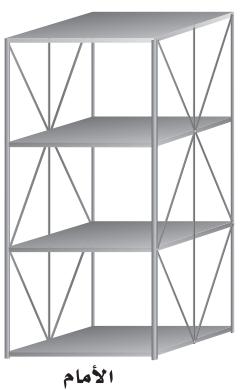
البرهان:



المبررات

العبارات

(a) مُعطى	?	(a)
(b)	?	(b)
نظرية الزاويتين المتكمالتين.	?	(c)
(d)	?	(d)
تعريف تطابق الزوايا.	?	(e)
(f)	?	(f)



تخزين: عند تركيب الرفوف، تُضاف دعامات جانبية متقاطعة.

حدّد العلاقة بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي. بّرّ إجابتك:

$\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 2 \cong \angle 3$ (30) $\angle 1 \cong \angle 5$ و (29)

$\angle 6 \cong \angle 3$ (31) $\angle 6 \cong \angle 8$ (32)

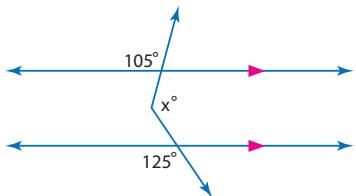
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لنظرية الزاويتين المتبدلتين خارجيًا. (نظرية 2.3).

(34) **برهان:** أثبت أنه إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستقيمين متوازيين في مستوى، فإنه يكون عموديًّا على الآخر. (نظرية 2.4).

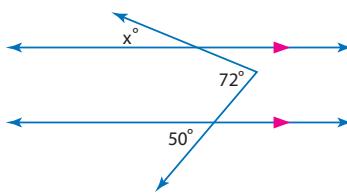


أوجد قيمة x في كلٍ من الشكلين الآتيين: (إرشاد: ارسم مستقيماً مساعداً)

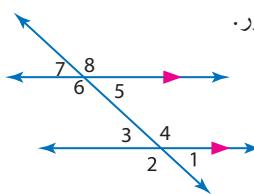
(36)



(35)



(37) **احتمالات:** افترض أنك اختبرت عشوائياً زوجاً من الزوايا في الشكل المجاور.



(a) ما عدد الطرق الممكنة لاختيار زوج الزوايا؟ بّرّ إجابتك.

(b) صِف العلاقات الممكنة بين زاويتي كل زوج. بّرّ إجابتك.

(c) أوجد احتمال اختيار زوج من الزوايا المتطابقة. بّرّ إجابتك.

مراجعة المفردات

الاحتمال

تذكر أن الاحتمال هو نسبة عدد نواتج الحادثة إلى العدد الكلي للنواتج.

(38) **تمثيلات متعددة:** سُبّح في هذه المسألة العلاقة بين الزوايا الخارجية الواقعة في الجهة نفسها.

(a) **هندسياً:** ارسم خمسة أزواج من المستقيمات المتوازية m و n و t و a و b ، $\angle x$ و $\angle y$ يقطع كلاً منها قاطع t ، ثم قسِّ جميع الزوايا الناتجة. (يمكنك استخدام الآلة البيانية في هذا التمرين)

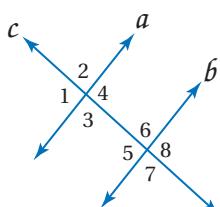
(b) **جدولياً:** دُوّن بياناتك في جدول.

(c) **لخطياً:** ضع تخميناً حول العلاقة بين الزاويتين الخارجيتين الواقعتين في جهة واحدة من القاطع.

(d) **منطقياً:** ما نوع التبرير الذي استعملته لوضع تخمينك؟ بّرّ إجابتك.

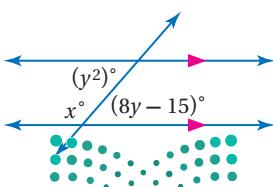
(e) **برهان:** برهن تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا



(39) **اكتب:** إذا كان المستقيم a يوازي المستقيم b ، و $\angle 2 \cong \angle 1$.
فصِف العلاقة بين المستقيمين b و c . وبرّ إجابتك.

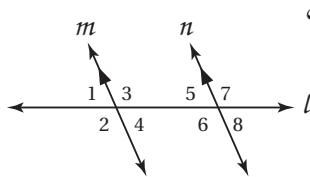
(40) **اكتب:** حدد أوجه الشبه والاختلاف بين نظرية الزاويتين المتباولتين داخلياً، ونظرية الزاويتين المترافقتين.



(41) **تحد:** أوجد جميع قيم y في الشكل المجاور.

(42) **تبرير:** ما أقل عدد من قياسات الزوايا التي يجب معرفتها حتى يكون بمقدورك تحديد قياسات جميع الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع؟ وضح إجابتك.

تدريب على اختبار

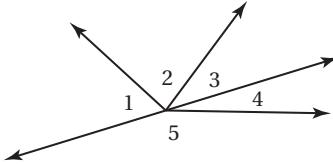


(44) إجابة قصيرة: إذا كان $m \parallel n$ حدد أي العبارات الآتية صحيحة، وأيها خاطئة؟ وبرر إجابتك.

- (1) $\angle 3, \angle 6$ متبادلتان داخلية.
 (2) $\angle 4, \angle 6$ متحالفتان.
 (3) $\angle 1, \angle 7$ متبادلتان خارجية.

(43) افترض أن $\angle 5, \angle 4$ متجاورتان على مستقيم، إذا كان $m\angle 1 = (2x)^\circ, m\angle 2 = (3x - 20)^\circ, m\angle 3 = (x - 4)^\circ$

فما قيمة $m\angle 3$ ؟



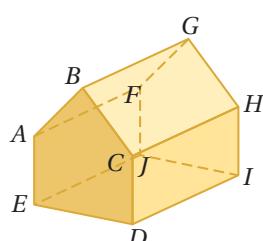
26° A

28° B

30° C

32° D

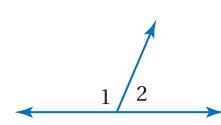
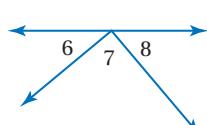
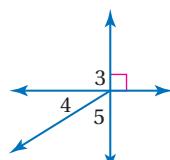
مراجعة تراكمية



(50) إذا كان $m\angle 4 = 32^\circ$ فإذا كان $\angle 6, \angle 8$ متمامتين،
 $m\angle 5, m\angle 3$ فأوجد .

(49) إذا كانت $\angle 6, \angle 8$ متمامتين،
 $m\angle 6, m\angle 7, m\angle 8 = 47^\circ$ ، فأوجد .

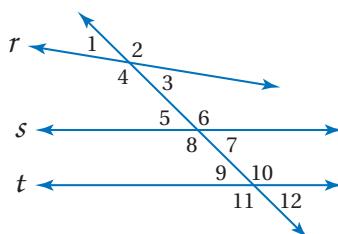
(48) إذا كانت $\angle 1, \angle 2$ متجاورتين على مستقيم، و $m\angle 1, m\angle 2 = 67^\circ$ ، فأوجد .



(51) قطارات: وضع مهندس خططاً لشبكة سكك حديدية تصل بين المدن A, B, C, D, E, F ، فرسم قطعة مستقيمة بين كل مدينتين على الخريطة، ولاحظ أن أي ثلاثة مدن منها لا تقع على استقامة واحدة. ما عدد القطع المستقيمة التي رسمها المهندس؟ (الدرس 1-5)

استعد للدرس اللاحق

حدد العلاقة بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي :



$\angle 1, \angle 12$ (52)

$\angle 7, \angle 10$ (53)

$\angle 4, \angle 8$ (54)

$\angle 2, \angle 11$ (55)





إثبات توازي مستقيمين

Proving Lines Parallel

2-3

لماذا؟



عندما تنظر إلى سكة القطار، تجد أن البعد بين خطّيها ثابت دائمًا حتى عند المنحنيات والمنعطفات. فقد صُممت السكك بدقة، بحيث يكون خطّها متوازيين عند جميع النقاط ليسير عليها القطار بأمان.

فيما سبق:

درست استعمال خصائص المستقيمات المتوازية لتحديد الزوايا المتطابقة.

(الدرس 2-2)

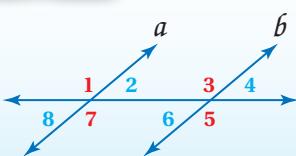
والآن:

- أميز المستقيمات المتوازية بناءً على علاقات بين أزواج من الزوايا الناتجة عن مستقيم قاطع.
- أبرهن توازي مستقيمين باستعمال العلاقات بين أزواج الزوايا.

مسلمة 2.2 عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

مسلمة 2.2

إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان متناظرتان متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.



أمثلة، إذا كانت: $\angle 1 \cong \angle 5$ أو $\angle 2 \cong \angle 6$ أو $\angle 3 \cong \angle 7$ أو $\angle 4 \cong \angle 8$ فإن $a \parallel b$.

يمكنك استعمال عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين لرسم مستقيمين متوازيين.

رسم مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم ويمر ب نقطة لا تقع عليه

إنشاءات هندسية

الخطوة 3: ارسم \overleftrightarrow{CD} .
بما أن $\angle ECD \cong \angle CAB$ من الإنشاء، وهما متناظرتان .
 $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ فإن

الخطوة 2: استعمل فرجاراً لنقل $\angle CAB$ ، بحيث تكون النقطة

رأس الزاوية الجديدة، وذلك من خلال الخطوط الآتية:

• ضع رأس الفرجار عند النقطة A ، وارسم قوسين يقطعان

\overleftrightarrow{AB} ، في النقطتين M, N

• بفتحة الفرجار نفسها، ارسم قوساً مركزه C يقطع \overleftrightarrow{AC} في

النقطة

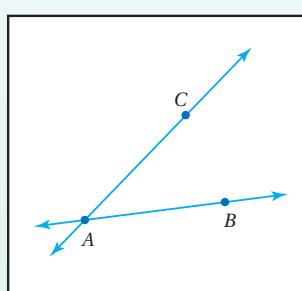
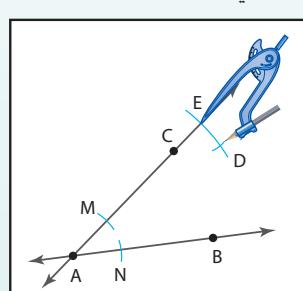
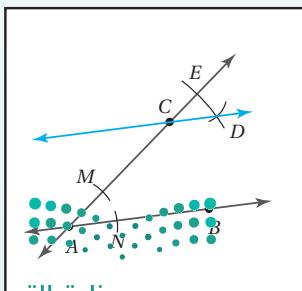
• ارجع للنقطة M وافتح الفرجار بنفس طول \overline{MN} .

• بفتحة الفرجار نفسها، ارسم قوساً مركزه E ، ويقطع القوس

السابق في D كما في الشكل.

الخطوة 1: استعمل مسطرة

لرسم \overleftrightarrow{AB} ، وعين نقطة C لا تقع على \overleftrightarrow{AB} ، وارسم \overleftrightarrow{CA} .



مسلمات إقليدس

أدرك مؤسس الهندسة الحديثة إقليدس أن عدداً قليلاً من المسلمات ضروري لبرهنة النظريات في 2.3. المسلمات هي واحدة من مسلمات إقليدس الخمس الأساسية، وكذلك المسلمات 1.1 و 1.10 والنظرية التي عدها مسلمة.

مسلمات التوازي

إذا عُلمَ مستقيمٌ ونقطةٌ لا تقعُ علىِ الأقلِ مستقيمٌ واحدٌ يمرُّ بالنقطة C ويوازي \overrightarrow{AB} . والمسلمة الآتية تؤكد أن هذا المستقيمَ وحيداً.

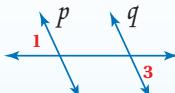
أضف إلى مطويتك



يترجع عن المستقيمين المتوازيين وقاطع لهما أزواج من الروابيا المتطابقة. ويمكن أن تحدد أزواج الزوايا هذه ما إذا كان المستقيمين متوازيين أم لا.

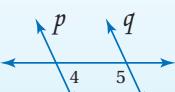
نظريات

أضف إلى مطويتك



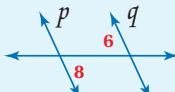
إذا كانت $p \parallel q$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

2.5 عكس نظرية الزاويتين المترادفتين خارجياً: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان مترادفتان خارجياً متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.



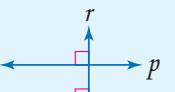
إذا كان $p \parallel q$ ، فإن $m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ$

2.6 عكس نظرية الزاويتين المترادفتين: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى ونتج عن التقاطع زاويتان مترادفتان متكاملتان، فإن المستقيمين متوازيان.



إذا كانت $p \parallel q$ ، فإن $\angle 6 \cong \angle 8$

2.7 عكس نظرية الزاويتين المترادفتين داخلياً: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان مترادفتان داخلياً متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.



إذا كان $p \parallel q$ و $r \perp p$ ، فإن $r \perp q$

2.8 عكس نظرية القاطع العمودي: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وكان عمودياً على كل منهما، فإن المستقيمين متوازيان.

ستبرهن النظريات 2.5، 2.6، 2.7، 2.8 في المسائل 5، 14، 17، 18

مثال 1

تعين المستقيمات المتوازية

هل يمكن إثبات أن أيّاً من مستقيمات الشكل متوازية، اعتماداً على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإذا كان أيّ منها متوازياً، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرر إجابتك.

$$\angle 1 \cong \angle 6 \text{ (a)}$$

$\angle 1, \angle 6$ مترادفتان خارجياً بالنسبة للمستقيمين ℓ, n .

وبما أن $\angle 6 \cong \angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن $\ell \parallel n$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المترادفتين خارجياً.

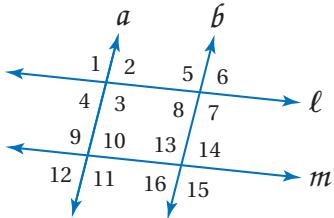
$$\angle 2 \cong \angle 3 \text{ (b)}$$

$\angle 2, \angle 3$ مترادفتان داخلياً بالنسبة للمستقيمين ℓ, m .

وبما أن $\angle 3 \cong \angle 2$ ، فإن $\ell \parallel m$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المترادفتين داخلياً.



تحقق من فهمك



$$\angle 3 \cong \angle 11 \quad (1B)$$

$$\angle 2 \cong \angle 8 \quad (1A)$$

$$\angle 1 \cong \angle 15 \quad (1D)$$

$$\angle 12 \cong \angle 14 \quad (1C)$$

$$\angle 8 \cong \angle 6 \quad (1F)$$

$$m\angle 8 + m\angle 13 = 180^\circ \quad (1E)$$

إثبات توازي مستقيمين: يمكن استعمال العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما لإثبات أن المستقيمين متوازيان.

مثال 2 من واقع الحياة [إثبات توازي مستقيمين]



سلام: كل درجة من درجات السلالم في الشكل المجاور عمودية على دعامتيه الرئيسيتين، هل يمكن إثبات أن الدعامتين الرئيسيتين متوازيتان، وأن جميع الدرجات متوازية؟ وضح ذلك إن كان صحيحاً، وإلا فاذكر السبب.
بما أن الدعامتين الرئيسيتين عموديتان على كل درجة فهما متوازيتان بحسب عكس نظرية القاطع العمودي. وبما أن أي درجتين في السلالم عموديتان على كل من الدعامتين الرئيسيتين فهما متوازيتان أيضاً.

إرشادات للدراسة

إثبات توازي مستقيمين

عندما يقطع قاطع

مستقيمين متوازيين،

إما أن تكون أزواج

الزوايا الناتجة

متطابقة أو متكاملة.

وإذا نتج عن مستقيمين

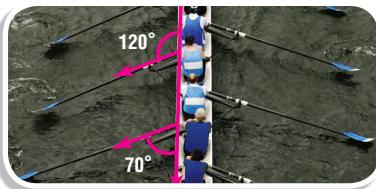
وقاطع لهما زوايا لا

تحقق هذا الشرط،

فلا يمكن أن يكون

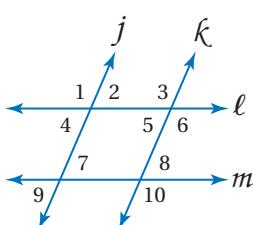
المستقيمان متوازيين.

تحقق من فهمك



تجديف: حتى يتحرك قارب التجديف في مسار مستقيم، يجب أن تكون مجاديف كل جانب متوازية. هل يمكن أن تبرهن أن مجاديف الجانب الأيسر في الصورة المجاورة متوازية؟ وضح ذلك إن كان صحيحاً، وإلا فاذكر السبب.

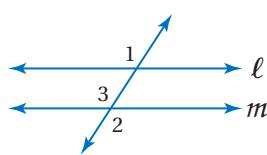
تأكد



هل يمكن إثبات أن أيّاً من مستقيمات الشكل متوازية، اعتماداً على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيّها متوازياً، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرر إجابتك.

$$\angle 2 \cong \angle 5 \quad (2) \qquad \angle 1 \cong \angle 3 \quad (1)$$

$$m\angle 6 + m\angle 8 = 180^\circ \quad (4) \qquad \angle 3 \cong \angle 10 \quad (3)$$



5 برهان: أكمل برهان النظرية 2.5.

المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: $l \parallel m$

البرهان:

المبررات	العبارات
(a) مُعطى	$\angle 1 \cong \angle 2 \quad (a)$
(b) ؟	$\angle 2 \cong \angle 3 \quad (b)$
(c) خاصية التعدي للتطابق	$\angle 1 \cong \angle 3 \quad (c)$
(d) ؟	$l \parallel m \quad (d)$

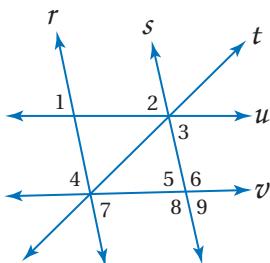




6) **كراسي:** هل يمكن إثبات أن مسند الظهر ومسند القدمين

لكرسي الاسترخاء في الشكل المجاور متوازيان؟
وضح ذلك إذا كان صحيحاً، وإلا فاذكر السبب.

تدريب وحل المسائل



هل يمكن إثبات أن أيّاً من مستقيمات الشكل متوازية، اعتماداً على المعطيات في كلٍ مما يأتي؟ وإذا كان أيّها متوازياً، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.

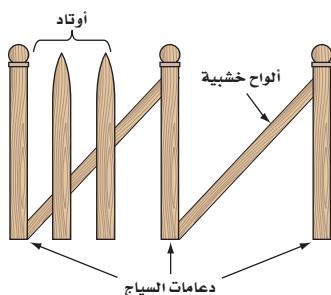
$$\angle 2 \cong \angle 9 \quad (8)$$

$$\angle 1 \cong \angle 2 \quad (7)$$

$$m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ \quad (10) \qquad m\angle 7 + m\angle 8 = 180^\circ \quad (9)$$

$$\angle 4 \cong \angle 5 \quad (12)$$

$$\angle 3 \cong \angle 7 \quad (11)$$



13) **حدائق:** لبناء سياج حول حديقة المنزل، ثبّت سعود دعامات السياج، ووضع أواحأ خشبية تميل بزاوية تميل بزاوية مع كلٍ من دعامتَي السياج. وعند تثبيته أوتاد السياج، حرص على أن تكون الزوايا بين الأوارج الخشبية والأوتاد متساوية القياس. لماذا يجعل هذا الأوتاد متوازية؟

المثال 1

المثال 2

14) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين للنظرية 2.6.

برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لكلٍ مما يأتي:

16) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 2$

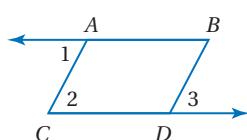
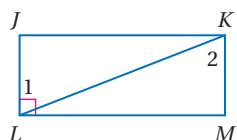
$$\overline{LJ} \perp \overline{ML}$$

15) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 3$

$$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

المطلوب: $\overline{KM} \perp \overline{ML}$

المطلوب: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

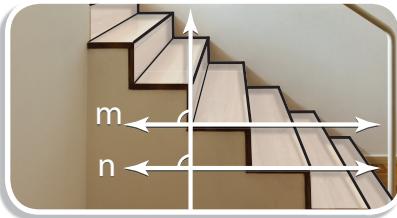


برهان: اكتب برهاناً حرّاً لكلٍ من النظريتين الآتيتين:

18) **النظرية 2.8**

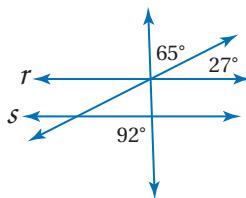


17) **النظرية 2.7**

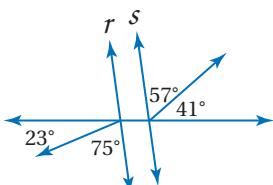


(19) درج: ما العلاقة بين حواف أسطح الدرجات في الشكل المجاور؟ ببر إجابتك.

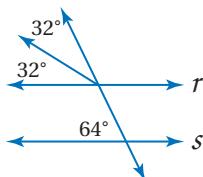
حدّد ما إذا كان المستقيمان t ، s متوازيين أم لا في كلٍ مما يأتي. ببر إجابتك.



(22)



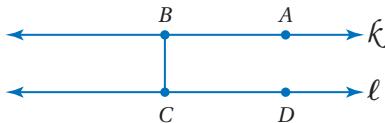
(21)



(20)

(23) تمثيلات متعددة: سوف تستكشف في هذه المسألة أقصر مسافة بين مستقيمين متوازيين.

(a) هندسيًا: ارسم ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية χ و y ، t و s ، r و k ، وارسم أقصر قطعة مستقيمة \overline{BC} بين كل مستقيمين متوازيين، وعيّن النقطتين A ، D كما في الشكل أدناه.

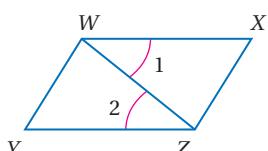


(b) جدولياً: قس $\angle ABC$ و $\angle BCD$ في كل زوج، ثم أكمل الجدول.

$m\angle BCD$	$m\angle ABC$	زوج المستقيمات المتوازية
		ℓ و k
		t و s
		y و χ

(c) لفظيًا: ضع تخميناً حول الزاوية بين أقصر قطعة مستقيمة وكلٍ من المستقيمين المتوازيين.

مسائل مهارات التفكير العليا



(24) اكتشف الخطأ: يحاول كلٌ من سامي ومنصور تحديد المستقيمات المتوازية في الشكل المجاور. فقال سامي: بما أن $\angle 1 \cong \angle 2$ ، إذن $\overline{WY} \parallel \overline{XZ}$. أما منصور فلم يوافقه وقال: بما أن $\angle 2 \cong \angle 1$ ، إذن $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$. أيٌ منها على صواب؟ ووضح إجابتك.

(25) تبرير: هل تبقى النظرية 2.8 صحيحة إذا كان المستقيمان لا يقعان في المستوى نفسه؟ ارسم شكلًا يبرر إجابتك.

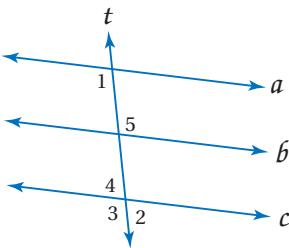
(26) مسألة مفتوحة: ارسم المثلث ABC .

(a) أنشئ مستقيمًا يوازي \overline{BC} ويمر بالنقطة A .

(b) استعمل القياس؛ لتحقق من أن المستقيم الذي رسمته يوازي \overline{BC} .

(c) أثبت صحة الإنشاء رياضيًّا.





(27) تحدٌ: استعمل الشكل المجاور.

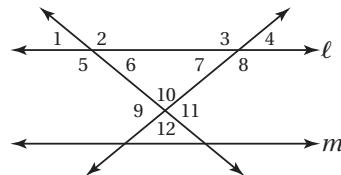
(a) إذا كان: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$, فبرهن أن $a \parallel c$.

(b) إذا كان: $a \parallel c$ و $m\angle 1 + m\angle 3 = 180^\circ$,

فبرهن أن $t \perp c$.

(28) اكتب: لخص الطائق الخمس التي استُعملت في هذا الدرس لإثبات توازي مستقيمين.

تدريب على اختبار



(30) استعمل الشكل المجاور

لتحديد أن صحة أي

مما يأتي ليست مؤكدة:

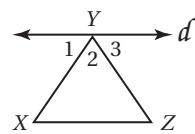
$\angle 4 \cong \angle 7$ A

$\angle 4 \cong \angle 8$ و $\angle 8 \cong \angle 7$ B

$\ell \parallel m$ C

$\angle 5 \cong \angle 6$ و $\angle 5 \cong \angle 7$ D

(29) أي الحقائق الآتية كافية لإثبات أن المستقيم d يوازي \overline{XZ} ؟



$\angle 1 \cong \angle 3$ A

$\angle 3 \cong \angle Z$ B

$\angle 1 \cong \angle Z$ C

$\angle 2 \cong \angle X$ D

مراجعة تراكمية

أعط مثلاً مضاداً لتبين خطأ كل تخمين في السؤالين الآتيين: (الدرس 1-1)

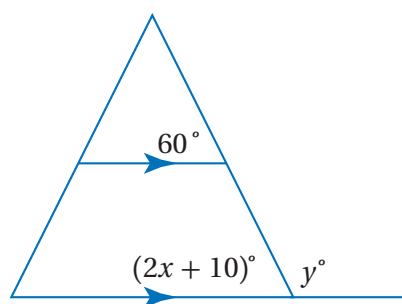
(31) المُعطيات: $\angle 1, \angle 2$, متتامتان.

ال تخمين: $\angle 1, \angle 2$ تكونان زاوية قائمة.

(32) المُعطيات: W, X, Y, Z أربع نقاط.

ال تخمين: النقاط W, X, Y, Z لا تقع على استقامة واحدة.

احسب قيمة y , x على الشكل التالي: (الدرس 2-2)



استعد للدرس اللاحق

بسط كلاماً من العبارات الآتية:

$$\frac{-11 - 4}{12 - (-9)} \quad (34)$$

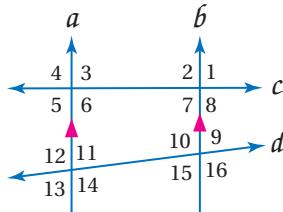
$$\frac{6 - 5}{4 - 2} \quad (33)$$

$$\frac{16 - 12}{15 - 11} \quad (35)$$



اختبار منتصف الفصل

في الشكل المجاور: $m\angle 4 = 104^\circ$, $m\angle 14 = 118^\circ$.



أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية،
واذكر المسلمات أو النظريات التي
استعملتها: (الدرس 2-2)

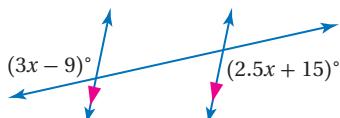
$$\angle 9 \quad (10)$$

$$\angle 2 \quad (9)$$

$$\angle 7 \quad (12)$$

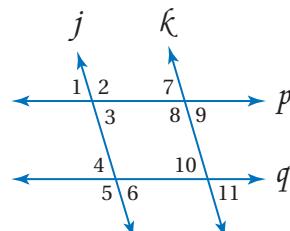
$$\angle 10 \quad (11)$$

(13) أوجد قيمة x في الشكل الآتي: (الدرس 2-2)



(14) نجارة: صنع عامر طاولة خشبية لحديقته. فقصَّ طرف أحد رجليها بزاوية 40° , بأي زاوية قصَّ الطرف الآخر بحيث كان سطح الطاولة موازِياً للأرض؟ وُضِحَ إجابتك. (الدرس 2-2)

هل يمكن إثبات أن أيّاً من مستقيمات الشكل الآتي متوازية اعتماداً على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإن كانت متوازية ، فاذكر المسلمات أو النظرية التي تبرّر إجابتك. (الدرس 2-3)

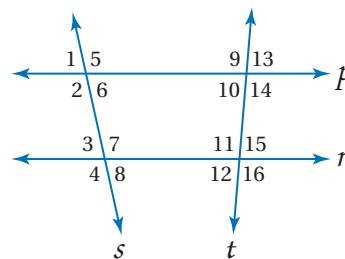


$$\angle 4 \cong \angle 10 \quad (15)$$

$$\angle 9 \cong \angle 6 \quad (16)$$

$$\angle 7 \cong \angle 11 \quad (17)$$

استعمل الشكل أدناه لتحديد القاطع الذي يصل كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليتَيْ أو خارجيَّيْ أو متناقضتين أو متحالفتين: (الدرس 1-2)



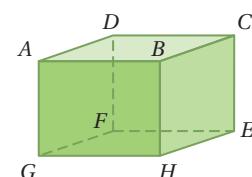
$$\angle 14 \text{ و } \angle 1 \quad (2)$$

$$\angle 3 \text{ و } \angle 6 \quad (1)$$

$$\angle 7 \text{ و } \angle 5 \quad (4)$$

$$\angle 11 \text{ و } \angle 10 \quad (3)$$

حدد كلاً مما يأتي مستعملاً الشكل المجاور: (الدرس 1-2)

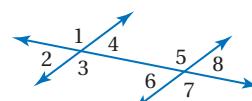


(5) جميع القطع المستقيمة التي توازي \overline{HE} .

(6) قطعة مستقيمة تحالف \overline{GH} ، وتحوي النقطة D .

(7) مستوى يوازي المستوى $.ABC$

(8) اختيار من متعدد: أيٌ مما يأتي يصف $\angle 8$, $\angle 4$ ؟ (الدرس 1-2)



C متبادلتان داخليتَيْ

A متناظرتان

D متحالفتان

B متبادلتان خارجيَّيْ





مِيلُ الْمَسْتَقِيمِ

Slope of Line

2-4

لِمَادِنَا؟

تُسْتَعْمَلُ لَوَحَاتٌ مَرْوُرِيَّةٌ لِتَنْبِهِ السَّائِقَيْنَ إِلَى حَالَةِ الطَّرِيقِ. فَاللَّوْحَةُ الْمُجَاوِّرَةُ تُشَيرُ إِلَى اِنْحِدَارِ الطَّرِيقِ بِنَسْبَةِ 6% ، وَهَذَا يَعْنِي أَنَّ الطَّرِيقَ تَرْفَعُ أَوْ تَهْبَطُ بِمَقْدَارِ 6 رَأْسِيًّا لِكُلِّ 100 m أَفْقِيًّا.

فِيمَا سَبَقَ:

دَرْسُ بِرْهَنَةِ تَوَازِيِّيِّيْنِ بِاسْتَعْمَالِ عَلَاقَاتِ الزَّوَالِيَا.

(الدرس 3-2)

وَالآن:

- أَجْدِ مِيلَ الْمَسْتَقِيمِ.
- أَسْتَعْمَلُ الْمِيلَ لِتَحْدِيدِ الْمَسْتَقِيمَاتِ الْمُتَوَازِيَّةِ وَالْمَسْتَقِيمَاتِ الْمُتَعَامِدَةِ.

المفردات:

الميل

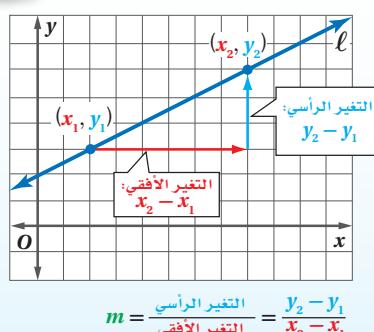
slope

مَعْدِلُ التَّغْيِيرِ

rate of change

أضف إلى
مِطْوِيَّاتِكَ

مَفْهُومُ أَسَاسِيٍّ مِيلُ الْمَسْتَقِيمِ



فِي الْمَسْتَوِيِّ الْإِحْدَادِيِّ، مِيلُ الْمَسْتَقِيمِ هُو نَسْبَةُ التَّغْيِيرِ فِي الْإِحْدَادِيِّ y إِلَى التَّغْيِيرِ فِي الْإِحْدَادِيِّ x بَيْنَ أَيْ نَقْطَتَيْنِ عَلَيْهِ.

وَيُعْطِيُ الْمِيلُ m لِمَسْتَقِيمٍ يَحْوِيْنِ نَقْطَتَيْنِ إِحْدَادِيَّاهُمَا (x_1, y_1) وَ (x_2, y_2) بِالصِّيَغَةِ:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ حيث } x_1 \neq x_2$$

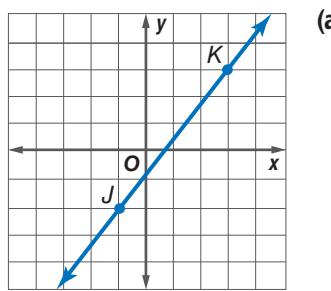
مَثَلٌ 1 إِيجادُ مِيلِ الْمَسْتَقِيمِ

أَجْدِ مِيلَ كُلِّ مَسْتَقِيمٍ فِيمَا يَأْتِي:

عُوْضُ عن $(-1, -2)$ ، (x_1, y_1) بِـ . وَعُوْضُ عن $(3, 3)$ ، (x_2, y_2) بِـ .

صيغة الميل

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3 - (-2)}{3 - (-1)} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$



$$(x_1, y_1) = (-2, 3), (x_2, y_2) = (1, -3)$$

صيغة الميل

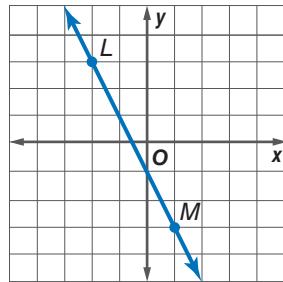
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

عوض

$$= \frac{-3 - 3}{1 - (-2)}$$

بسط

$$= -2$$



(b)

$$(x_1, y_1) = (-4, -3), (x_2, y_2) = (3, -3)$$

صيغة الميل

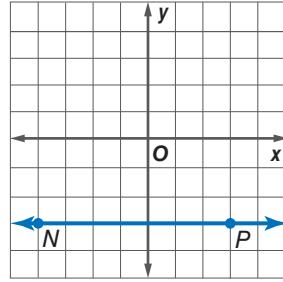
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

عوض

$$= \frac{-3 - (-3)}{3 - (-4)}$$

بسط

$$= \frac{0}{7} = 0$$



(c)

$$(x_1, y_1) = (2, 1), (x_2, y_2) = (2, -4)$$

صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

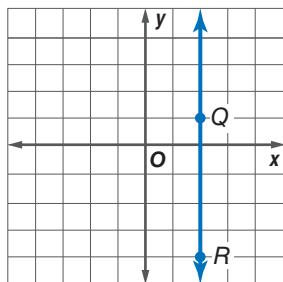
عوض

$$= \frac{-4 - 1}{2 - 2}$$

بسط

$$= \frac{-5}{0}$$

ميل هذا المستقيم غير معروف.



(d)

إرشادات للدراسة

القسمة على 0

ميل المستقيمات في المثال

1d غير معروف؛ لأنّه لا

يوجد عدد تضريبي في 0

يُعطي -5. وبما أنّ هذا

صحيح لأي عدد، فإن

أي عدد مقسوم على 0

يمثل كمية غير معرفة.

ومن ذلك يكون ميل

أي مستقيم رأسي غير

معروف.

تحقق من فهمك

. 1A) المستقيم الذي يحتوي على (8, -3), (-6, -2), (-3, -5)

. 1C) المستقيم الذي يحتوي على (-3, 3), (4, 3)

يوضح المثال 1 أربع حالات مختلفة للميل وهي :

ملخص المفهوم

أضف إلى

حالات الميل

مطابق

الميل غير معروف	الميل يساوي صفرًا	الميل سالب	الميل موجب



يمكن تفسير الميل على أنه **معدل التغير** في الكمية y بالنسبة إلى الكمية x , ويمكن استعمال **معدل الميل** أيضاً لتعيين إحداثي أي نقطة على المستقيم.

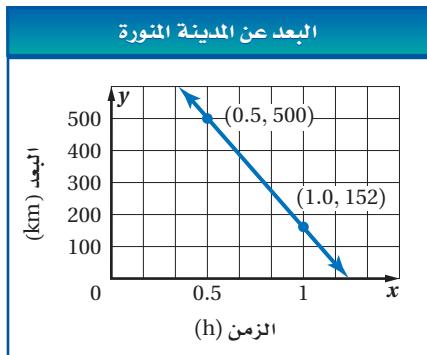
مثال 2 من واقع الحياة



الربط مع الحياة

المسارات الجوية

توجد خرائط جوية تضبط المسارات الطائرات وارتفاعاتها وتتضمن عدم تصدامها.



عِين النقطتين $(1, 152)$ ، $(0.5, 500)$ في المستوى الإحداثي، ثم ارسم مستقيماً يمر بهما.

المطلوب هو إيجاد البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h

خطط: أُوجد ميل المستقيم في الشكل المجاور، واستعمله مُعَدّل تغيير المسافة بالكميلتر بالنسبة للزمن بالساعة لإيجاد بعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h

حل: استعمل صيغة الميل لإيجاد ميل المستقيم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(152 - 500)}{(1.0 - 0.5)} \text{ km/h} = \frac{-348 \text{ km}}{0.5 \text{ h}} = \frac{-696 \text{ km}}{1 \text{ h}}$$

تحلق الطائرة بسرعة 696 km/h

وإليسا تشير إلى تناقص المسافة مع مرور الزمن.

استعمل ميل المستقيم وإحدى النقطتين عليه؛ لتجد بعد y عندما يكون الزمن $x = 0.75$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$-696 = \frac{y_2 - 500}{0.75 - 0.5}$$

بسط

$$-696 = \frac{y_2 - 500}{0.25}$$

اضرب كلا الطرفين في 0.25

$$-174 = y_2 - 500$$

اجمع 500 إلى كل طرف

$$326 = y_2$$

إذن كان بعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h يساوي 326 km

تحقق يمكننا من الشكل تقدير بعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h بأكثر من 300 km قليلاً. وبما أن 326 قرينة من هذا التقدير فإن الإجابة معقولة. ✓

تحقق من فهمك

2) مبيعات: كانت مبيعات مصنع معلبات غذائية 20 مليون علبة عام 2016 ، و 200 مليون علبة عام 2021 ، إذا حافظ المصنع على المعدل نفسه من الزيادة، فكم تكون مبيعاته من العلب عام 2024 ؟

زيارة التعلم

Ministry of Education

الدرس 4-2 ميل المستقيم

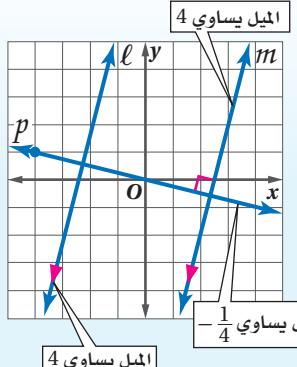
مسلمات

أضف إلى
مطويتك

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

2.4

ميلا المستقيمين المتوازيين: يكون للمستقيمين غير الرأسين الميل نفسه إذا و فقط إذا كانوا متوازيين. و جميع المستقيمات الرأسية متوازية.



2.5

ميلا المستقيمين المتعامدين: يكون المستقيمان غير الرأسين متعامدين إذا و فقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1 و المستقيمات الأفقيه والرأسية متعامده.

مثال: المستقيمان المتوازيان m , ℓ , لهما الميل نفسه ويساوي 4
الميل يساوي على المستقيم p , أو $p \perp m$.
ناتج ضرب الميلين هو $-1 = 4 \cdot -\frac{1}{4}$

مثال 3 تحديد علاقات المستقيمات

حدد ما إذا كان \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD} متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك إذا كانت $A(1, 1)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 2)$, $D(6, 1)$.

ومثل كل مستقيم بيانياً لتحقق من إجابتك.

الخطوة 1: أوجد ميل كل مستقيم.

$$\begin{aligned} \text{ميل } \overleftrightarrow{AB} &= \frac{-5 - 1}{-1 - 1} = \frac{-6}{-2} = 3 \\ \text{ميل } \overleftrightarrow{CD} &= \frac{1 - 2}{6 - 3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

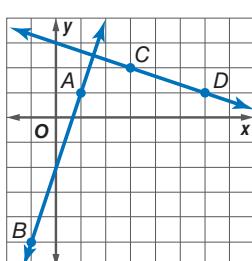
الخطوة 2: حدد العلاقة إن وجدت بين المستقيمين.

بما أن ميلي المستقيمين غير متساوين فهما غير متوازيين. ولتحدد ما إذا كانوا متعامدين أم لا،
أوجد ناتج ضرب ميليهما.

$$\text{ناتج ضرب ميلي } \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD} = 3 \left(-\frac{1}{3} \right) = -1$$

بما أن حاصل ضرب ميلي \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD} يساوي -1 إذن هما متعامدان.

تحقق: من تمثيل المستقيمين بيانياً يبدو أنهما يشكلان زاوية قائمة عند نقطة تقاطعهما. ✓



إرشادات للدراسة

ميلا المستقيمين المتعامدين

إذا كان ميل المستقيم ℓ يساوي $\frac{a}{b}$: فإن ميل المستقيم العمودي على ℓ هو معكوس مقلوب ميله، أي $-\frac{b}{a}$ ؛ لأن $\frac{a}{b} \left(-\frac{b}{a} \right) = -1$

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كان \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD} متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي،
ومثل كل مستقيم بيانياً لتحقق من إجابتك.

$$A(14, 13), B(-11, 0), C(-3, 7), D(-4, -5) \quad (3A)$$

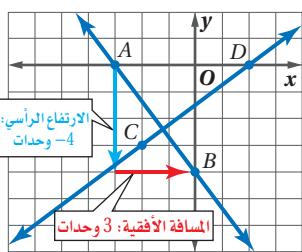
$$A(3, 6), B(-9, 2), C(5, 4), D(2, 3) \quad (3B)$$



مثال 4

استعمال الميل لتمثيل المستقيم بيانياً

مثل بيانياً المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(-3, 0)$ ويعامد \overleftrightarrow{CD} ، حيث $C(-2, -3), D(2, 0)$



لإيجاد ميل \overleftrightarrow{CD} عوض عن $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-3)}{2 - (-2)} = \frac{3}{4}$

إذن ميل المستقيم العمودي على \overleftrightarrow{CD} والمار بالنقطة A

$$\cdot \frac{3}{4} \left(-\frac{4}{3} \right) = -1 \text{ ، لأن } -\frac{4}{3} \text{ يساوى } -\frac{3}{4}.$$

لتمثيل المستقيم بيانياً، ابدأ من النقطة A ، وتحرك 4 وحدات إلى أسفل، ثم 3 وحدات نحو اليمين، وسمّ النقطة B ، ثم ارسم \overleftrightarrow{AB} .

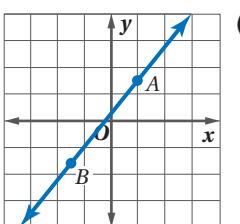
تحقق من فهمك

4) مثل بيانياً المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(0, 1)$ ويعامد \overleftrightarrow{QR} ، حيث $Q(-6, -2), R(0, -6)$.

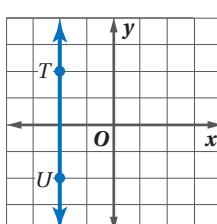
تأكد

أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

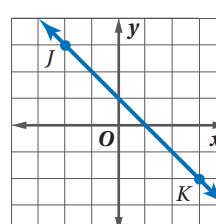
المثال 1



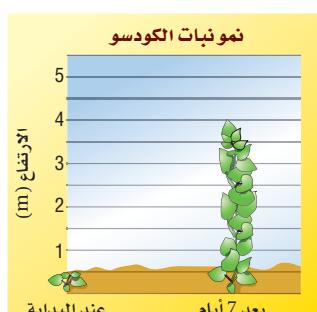
(3)



(2)



(1)



4) علم النبات: الكودسو (Kudzu) هو نبات متسلق سريع النمو.

قيس ارتفاع نبتة عند يوم البداية فكان 0.5 m ، وبعد سبعة أيام أصبح ارتفاعها 4 m

- (a) مثل بيانياً المستقيم الذي يمثل ارتفاع النبتة مع مرور الزمن.
- (b) ما ميل هذا المستقيم؟ وماذا يُمثل؟
- (c) افترض أن هذه النبتة استمرت في النمو وفق هذا المعدل، فكم يكون ارتفاعها بعد 15 يوماً؟

المثال 2

حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{WX}, \overleftrightarrow{YZ}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍ مما يأتي، ومثل كل مستقيم بيانياً لتحقق من إجابتك.

المثال 3

$$W(1, 3), X(-2, -5), Y(-6, -2), Z(8, 3) \quad (6)$$

$$W(2, 4), X(4, 5), Y(4, 1), Z(8, -7) \quad (5)$$

$$W(1, -3), X(0, 2), Y(-2, 0), Z(8, 2) \quad (8)$$

$$W(-7, 6), X(-6, 9), Y(6, 3), Z(3, -6) \quad (7)$$

المثال 4

مثل بيانياً المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍ مما يأتي:

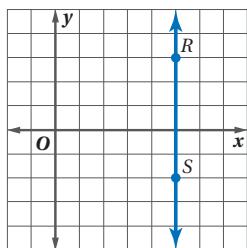
(9) يمر بالنقطة $A(3, -4)$ ، ويوازي \overleftrightarrow{BC} ، حيث $B(2, 4), C(5, 6)$

(10) ميله يساوي 3 ، ويمر بالنقطة $A(-1, 4)$

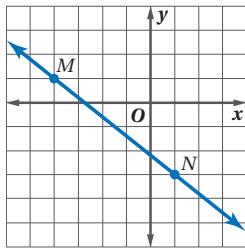
(11) يمر بالنقطة $P(7, 3)$ ، ويعادل \overleftrightarrow{LM} ، حيث $L(-2, -3), M(-1, 5)$



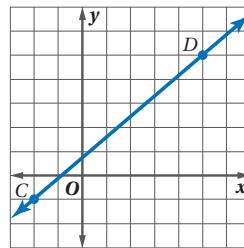
المثال 1 أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:



(14)



(13)



(12)

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بال نقطتين المحددتين في كلٍ مما يأتي :

$$E(5, -1), F(2, -4) \quad (16)$$

$$C(3, 1), D(-2, 1) \quad (15)$$

$$J(7, -3), K(-8, -3) \quad (18)$$

$$G(-4, 3), H(-4, 7) \quad (17)$$

$$R(2, -6), S(-6, 5) \quad (20)$$

$$P(-3, -5), Q(-3, -1) \quad (19)$$

المثال 2 حواسيب: في عام 1435هـ كان ثمن حاسوب محمول 3000 ريال ، وأصبح 1800 ريال في عام 1439هـ .

(a) ارسم مستقيماً يمثل توقعاً لسعر الحاسوب للسنوات من 1435هـ إلى 1439هـ .

(b) كم ينخفض ثمن الحاسوب في كل سنة؟

(c) إذا استمر انخفاض السعر بالمعدل نفسه، فكم يكون ثمن الحاسوب عام 1442هـ؟

حدّد ما إذا كان \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD} متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍ مما يأتي، ومثل كل مستقيم بيانياً لتحقق من إجابتك.

المثال 3

$$A(-6, -9), B(8, 19), C(0, -4) D(2, 0) \quad (23)$$

$$A(1, 5), B(4, 4), C(9, -10), D(-5, -5) \quad (22)$$

$$A(8, -2), B(4, -1), C(3, 11), D(-2, -9) \quad (25)$$

$$A(4, 2), B(-3, 1), C(6, 0), D(-10, 8) \quad (24)$$

$$A(4, -2), B(-2, -8), C(4, 6), D(8, 5) \quad (27)$$

$$A(8, 4), B(4, 3), C(4, -9), D(2, -1) \quad (26)$$

مثل بيانياً المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍ مما يأتي :

(28) يمر بالنقطة (5, -2)، ويوازي \overleftrightarrow{BC} ، حيث $B(1, 3), C(4, 5)$.

(29) ميله يساوي -2 ، ويمر بالنقطة (-4, -4).

(30) يمر بالنقطة (4, -4) ويوازي \overleftrightarrow{YZ} ، حيث $Y(5, 2), Z(-3, -5)$.

(31) يمر بالنقطة (-6, -5) ويعادل \overleftrightarrow{FG} ، حيث $F(-2, -9), G(1, -5)$.

المثال 4

سكنان: في عام 1427هـ كان عدد سكان إحدى المدن 416121 نسمة ، وفي عام 1439هـ بلغ عدد سكانها 521273 نسمة.



(a) ما المعدل التقريري لتغيير عدد سكان هذه المدينة من عام 1427هـ إلى 1439هـ؟

(b) إذا استمر ارتفاع عدد السكان بالمعدل نفسه، فكم نسمةً تتوقع أن يبلغ عدد سكان هذه المدينة عام 1447هـ؟

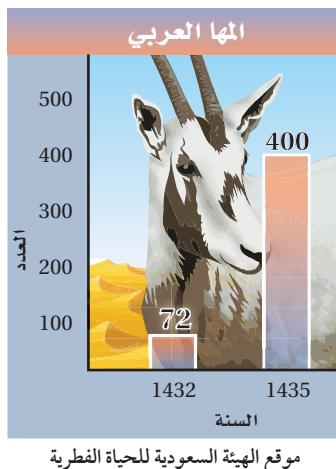
حدد أي المستقيمين في السؤالين الآتيين له أكبر ميل:

(34) المستقيم 1: $(2, 2)$, $(0, -4)$ و $(2, 0)$

المستقيم 2: $(4, 5)$, $(-4, 0)$ و $(5, 0)$

(33) المستقيم 1: $(6, 1)$, $(0, 5)$ و $(0, -4)$

المستقيم 2: $(-8, -5)$, $(4, 10)$ و $(10, 4)$



(35) محمية طبيعية: تؤوي محمية طبيعية حيواناً

مهدياً بالانقراض هو: المها العربي. ويوضح الشكل المجاور عدد المها العربي في المحمية عامي 1432 هـ و 1435 هـ.

(a) أوجد معدل التغير لعدد حيوانات المها العربي في المحمية.

(b) مثل بيانياً المستقيم الذي يمثل الزيادة في العدد.

(c) إذا استمر النمو وفق هذا المعدل، فكم يكون عدد حيوانات المها العربي عام 1447 هـ؟



الربط مع الحياة

تبذل المملكة جهوداً حثيثة للحفاظ على البيئة بعناصرها المختلفة، حيث أسست الهيئة السعودية للحياة الفطرية.

أوجد قيمة x أو y اعتماداً على المعطيات في كلٍ مما يأتي، ثم مثل المستقيم بيانياً:

(36) مستقيم يمر بالنقطتين $(-6, x)$, $(-1, 4)$, وميله يساوي $\frac{5}{2}$

(37) مستقيم يمر بالنقطتين $(-4, 9)$, $(3, 4)$, ويوaziي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(y, -8)$, $(1, 4)$.

(38) مستقيم يمر بالنقطتين $(y, 1)$, $(-3, 3)$, ويوaziي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(9, y)$, $(-6, 5)$.

(39) مدارس: في عام 1434 هـ كان عدد طلاب مدرسة الفتح 1125 طالباً . وفي عام 1440 هـ ازداد عدد الطلاب حتى بلغ 1425 طالباً . وعندما أُنشئت مدرسة الأندلس عام 1435 هـ كان عدد طلابها 1275 طالباً .
إذا ازداد عدد طلاب مدرسة الأندلس بنفس معدل زيادة عدد طلاب مدرسة الفتح، فكم يصبح عدد طلاب مدرسة الأندلس عام 1440 هـ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(40) اكتشف الخطأ: حسب كلٍ من خالد وطارق ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $Q(3, 5)$, $R(-2, 2)$. هل إجابة أيٌّ منها صحيحة؟ وضّح تبريرك.

طارق

$$m = \frac{5-2}{3-(-2)} \\ = \frac{3}{5}$$

خالد

$$m = \frac{5-2}{-2-3} \\ = -\frac{3}{5}$$

(41) تبرير: في المربع $ABCD$ إذا كان $A(2, -4)$, $C(10, 4)$

(a) أوجد الرأسين الآخرين D , B للمربع.

(b) أثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

(c) أثبت أن قياس كل زاوية من زوايا المربع يساوي 90°





(42) اكتب: يميل برج بيزا في إيطاليا عن الخط الرأسي بزاوية 5.5° .
صف ميل كل من برج المملكة وبرج بيزا.

(43) تحد: تعلمت في هذا الدرس أن $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. اكتب برهانًا جبرياً لتبيّن أنه يمكن أيضًا حساب الميل باستعمال المعادلة $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

تدريب على اختبار

(45) أي القيم الآتية تمثل ميل المستقيم المار بال نقطتين $(2, 4), (0, -2)$

$\frac{1}{3}$ **C**

3 **D**

$-\frac{1}{3}$ **A**

-3 **B**

(44) أي المعادلات الآتية تمثل مستقيماً يعادل المستقيم الذي

معادله $y = \frac{3}{4}x + 8$

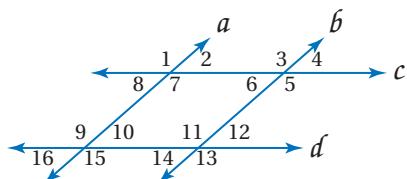
$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ **C**

$y = -\frac{4}{3}x - 6$ **A**

$y = -\frac{3}{4}x - 5$ **D**

$y = \frac{4}{3}x + 5$ **B**

مراجعة تراكمية



في الشكل المجاور: $d \parallel a, c \parallel b$, $a \parallel b, c \parallel d$. أوجد قياس كل من الزوايا الآتية : (الدرس 2-2)

$\angle 1$ **(47)**

$\angle 5$ **(46)**

$\angle 10$ **(49)**

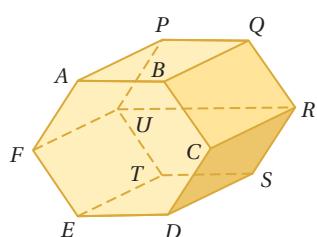
$\angle 8$ **(48)**

حدد كلاً مما يأتي مستعملاً الشكل المجاور . (الدرس 2-1)

(50) جميع القطع المستقيمة التي توازي \overline{TU} .

(51) جميع المستويات التي تقاطع مع المستوى BCR .

(52) جميع القطع المستقيمة التي تخالف \overline{DE} .



معتمداً على المعطيات، حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا في كلاً مما يأتي. فسر تبريرك. (الدرس 1-4)

(53) المعطيات: $\angle B, \angle C$ متقابلان بالرأس.

النتيجة: $\angle B \cong \angle C$

(54) المعطيات: $\angle W \cong \angle Y$.

النتيجة: $\angle W, \angle Y$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

استعد للدرس اللاحق



$4y - 3x = 5$ **(57)**

$4x + 2y = 6$ **(56)**

$3x + y = 5$ **(55)**



صيغ معادلة المستقيم

Equations of Line

2-5

فيما سبق:

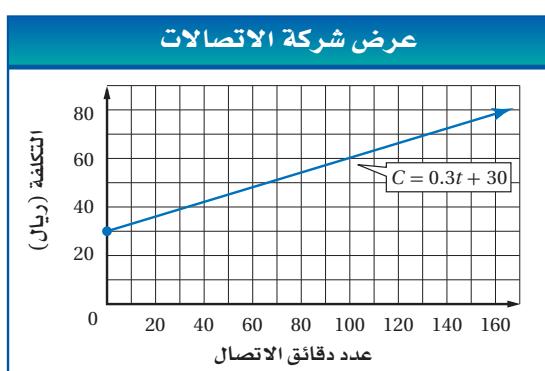
درست إيجاد ميل
المستقيم.
(الدرس 2-4)

والآن:

- أكتب معادلة مستقيم إذا عرفت معلومات حول تمثيله البياني.
- أحل مسألة بكتابة معادلة مستقيم.

المفردات:

- | | |
|---|---|
| صيغة الميل والمقطع
slope-intercept form | صيغة الميل ونقطة
slope-point form |
|---|---|



كتابة معادلة المستقيم: تذكر أنه يمكن كتابة معادلة المستقيم بصيغ مختلفة، ولكنها متكافئة.

مفهوم أساسى

معادلة المستقيم غير الرأسى

صيغة الميل والمقطع لمعادلة المستقيم هي $y = mx + b$ ، حيث m ميل المستقيم، و b مقطع المحور y .

صيغة الميل ونقطة لمعادلة المستقيم هي $y - y_1 = m(x - x_1)$ ، حيث (x_1, y_1) إحداثياً أي نقطة على المستقيم، m ميل المستقيم.

نقطة على المستقيم $(3, 5)$

$$y - 5 = -2(x - 3)$$

الميل

إذا علمت الميل ومقطع المحور y أو نقطة على المستقيم، فإنه يمكنك استعمال هاتين الصيغتين للكتابة معادلة المستقيم.

معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع

مثال 1

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله 3، ومقطع المحور y له -2 ، ثم مثله بيانياً.

صيغة الميل والمقطع

$$y = mx + b$$

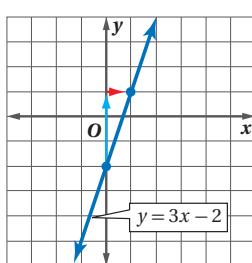
$$m = 3, b = -2$$

$$y = 3x + (-2)$$

بسط

$$y = 3x - 2$$

على المستوى الإحداثي، عين نقطة مقطع المحور y عند -2 ، واستعمل قيمة الميل $\frac{3}{1} = 3$ لتحديد نقطة أخرى، وذلك بالانتقال 3 وحدات أعلى مقطع المحور y ، ثم واحدة إلى يمينه. ارسم المستقيم الذي يمر بهاتين النقطتين.



تحقق من فهمك

- 1) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$ ، ومقطع المحور y له 8، ثم مثله بيانياً.

زيارة التعلم

التعويض بإحداثيات

سابقة

عند التعويض بإحداثيات

استعمل الأقواس

لتجنب الوقوع في أخطاء

الإشارات.

مثال ٢ معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{3}{4}$ ، ويمر بالنقطة (5, -2) ، ثم مثله بيانياً.

صيغة الميل ونقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = -\frac{3}{4}, (x_1, y_1) = (-2, 5)$$

$$y - 5 = -\frac{3}{4}[x - (-2)]$$

بسط

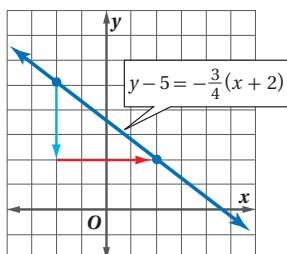
$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 2)$$

عَيّن النقطة (5, -2) في المستوى الإحداثي.

واستعمل قيمة الميل $\frac{3}{4}$ لتحديد نقطة أخرى؛ وذلك بالانتقال

٣ وحدات أسفل النقطة (5, -2) ، ثم ٤ وحدات إلى يمينها.

ارسم المستقيم المار بهاتين النقطتين.



(٢) اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله ٤ ،

ويمر بالنقطة (-6, -3) ، ثم مثله بيانياً.

عندما لا يُعطى ميل المستقيم، استعمل أي نقطتين عليه لحساب ميله، ثم استعمل صيغة الميل ونقطة، أو الميل والمقطع لتكتب معادله.

مثال ٣ معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بكل زوج نقاط فيما يأتي:

$$(0, 3), (-2, -1) \quad (a)$$

الخطوة ١: أوجد ميل المستقيم المار بنقطتين.

استعمل صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 3}{-2 - 0} = \frac{-4}{-2} = 2$$

الخطوة ٢: اكتب معادلة المستقيم.

صيغة الميل والمقطع

$$y = mx + b$$

$$b = 3, m = 2$$

$$y = 2x + 3$$

$$(-7, 4), (9, -4) \quad (b)$$

استعمل صيغة الميل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 4}{9 - (-7)} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

صيغة الميل ونقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

الخطوة ٢:

$$m = -\frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (-7, 4)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-7)]$$

بسط

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 7)$$

بالتوزيع

$$y - 4 = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

اجمع ٤ لكلا الطرفين

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

في المثال ٣b، يمكنك تعويض إحداثيٍّ إحدى النقطتين في صيغة الميل والمقطع لإيجاد مقطع المحور y ، ثم كتابة المعادلة.

$$y = mx + b$$

$$4 = -\frac{1}{2}(-7) + b$$

$$4 = \frac{7}{2} + b$$

$$4 - \frac{7}{2} = b$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



مثال 4

معادلة المستقيم الأفقي

. اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بال نقطتين $(5, 6)$, $(-2, 6)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 6}{5 - (-2)} = \frac{0}{7} = 0 \quad \text{الخطوة 1:}$$

صيغة الميل ونقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{الخطوة 2:}$$

$$m = 0, (x_1, y_1) = (-2, 6)$$

$$y - 6 = 0 [x - (-2)]$$

بسط

$$y - 6 = 0$$

اجمع 6 لكلا الطرفين

$$y = 6$$

تحقق من فهتمك

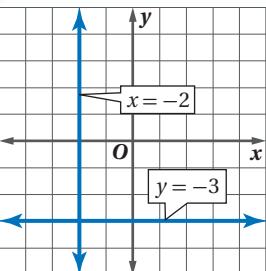
. 4) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بال نقطتين $(5, 0)$, $(3, 0)$.

تحتوي معادلات المستقيمات الأفقي أو الرأسية متغيراً واحداً فقط.

اضف إلى

مطبوعاتك

مقدمة
معادلات المستقيمات الأفقي أو الرأسية
مطبوعات



معادلة المستقيم الأفقي هي $y = b$ ، حيث b مقطع المحور y له.

مثال: $y = -3$

معادلة المستقيم الرأسية هي $x = a$ ، حيث a مقطع المحور x له.

مثال: $x = -2$

المستقيمات المتوازية غير الرأسية لها الميل نفسه. ويكون المستقيمان غير الرأسين متعامدين إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -1 . والمستقيم الرأسى والمستقيم الأفقي دائمًا متعامدان.

مثال 5

معادلات المستقيمات المتوازية أو المتعامدة

. اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم العمودي على $-3x + 2 = y$ ، والمار بالنقطة $(4, 0)$.

ميل المستقيم $-3x + 2 = y$ يساوي -3 ، لذا فإن ميل المستقيم العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$.

صيغة الميل والمقطع

$$y = mx + b$$

$$m = \frac{1}{3}, (x, y) = (4, 0)$$

$$0 = \frac{1}{3}(4) + b$$

بسط

$$0 = \frac{4}{3} + b$$

اطرح $\frac{4}{3}$ من كلا الطرفين

$$-\frac{4}{3} = b$$

لذا فمعادلة المستقيم العمودي هي $y = \frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$ ، أو $y = \frac{1}{3}x + \left(-\frac{4}{3}\right)$

تحقق من فهتمك



. 5) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يوازي $\frac{3}{4}x + 3 = y$ ويمر بالنقطة $(-3, 6)$.

وزارة التعليم

2022 - 1444

خطي:

كلمة منسوبة إلى خط، وتتضمن معنى الاستقامة. وسميت المعادلات الخطية بهذا الاسم؛ لأن تمثيلها البياني خط مستقيم.

مثال 6 من واقع الحياة كتابة معادلة خطية

هواتف: يقارن علي بين عرضين مقدمين من شركة اتصالات. يدفع بموجب العرض X مبلغ 20 ريالاً شهرياً بالإضافة إلى 0.35 ريال عن كل دقيقة اتصال. أما العرض Y فتفاصيله موضحة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. أي العرضين أفضل لعلي؟

العرض X : 20 ريالاً شهرياً زائد 0.35 ريال عن كل دقيقة اتصال.

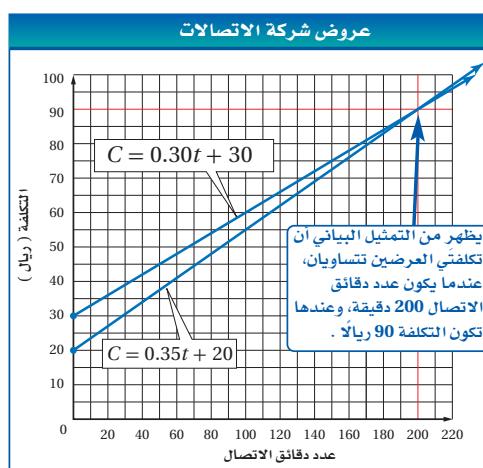
العرض Y : 30 ريالاً شهرياً زائد 0.30 ريال عن كل دقيقة اتصال.

قارن بين العرضين لتحديد متى تكون التكلفة الشهرية لأحدهما أقل من التكلفة الشهرية للأخر.

خطط: اكتب معادلة تمثل التكلفة الشهرية C لكل من العرضين لعدد t من دقائق الاتصال، ثم مثل المعادلين بيانياً وقارن.

حل: معدلاً التزايد أو ميل معادلتي التكلفة الشهرية هما 0.35 للعرض X، و 0.30 للعرض Y، وعندما يكون عدد دقائق الاتصال صفراء، تكون التكلفة الشهرية هي الرسوم فقط، لذا فإن مقطع المحور y هو 20 للعرض X، و 30 للعرض Y.

العرض Y	العرض X
$C = mt + b$	$C = mt + b$
$C = 0.30t + 30$	$C = 0.35t + 20$
صيغة الميل والمقطع بالتعييض عن m و b	



ويظهر أيضاً من التمثيل البياني أنه إذا كان عدد دقائق الاتصال أقل من 200 دقيقة في الشهر ، فإن تكلفة العرض X أقل، بينما تكون تكلفة العرض Y أقل إذا كان عدد دقائق الاتصال أكثر من 200 دقيقة في الشهر.

تحقق: تتحقق من تقديرك. إذا كان عدد دقائق الاتصال يساوي 200 دقيقة ، فإن تكلفة العرض X هي $\checkmark 0.35(200) + 20 = 90$ ، وتكلفة العرض Y هي

تحقق من فهمك

6) وضع نادي عرضين مختلفين لرواده.

العرض X: رسوم اشتراك شهريه مقدارها 75 ريالاً زائد 20 ريالاً عن كل زيارة للنادي.

العرض Y: 35 ريالاً عن كل زيارة للنادي من دون رسوم اشتراك.

فأي العرضين أفضل؟

إرشادات حل المسألة

التمثيل البياني

في المثال 6 ، مع أن الرسوم الشهرية في العرض X أقل، إلا أن سعر دقيقة الاتصال الواحدة أعلى. وهذا يجعل المقارنة بين العرضين صعبة. إلا أن التمثيل البياني يسهل المقارنة بين موقفين خطيين في كثير من الأحيان.

المثال 1 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع المحور y له في كلٌّ مما يأتي، ثم مثّله بيانياً:

$$m = -\frac{3}{2}, b = 5 \quad (3)$$

$$m = \frac{1}{2}, b = -1 \quad (2)$$

$$m = 4, b = -3 \quad (1)$$

المثال 2 اكتب بصيغة الميل ونقطة يمر بها في كلٌّ مما يأتي، ثم مثّله بيانياً:

$$m = -4.25, (-4, 6) \quad (6)$$

$$m = \frac{1}{4}, (-2, -3) \quad (5)$$

$$m = 5, (3, -2) \quad (4)$$

المثالان 3, 4 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أُعطيت نقطتان يمر بهما في كلٌّ مما يأتي:

$$(6, 5), (-1, -4) \quad (9)$$

$$(4, 3), (1, -6) \quad (8)$$

$$(0, -1), (4, 4) \quad (7)$$

المثال 5 (10) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم العمودي على $y = -2x + 6$ ، والمار بالنقطة (3, 2).

المثال 6 (11) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (5, -1) ، ويوازي المستقيم الذي معادلته

$$y = 4x - 5$$



السؤال 12 **عروض:** يقارن سلمان بين عرضين مقدمين من نادٍ رياضي. يدفع بموجب العرض الأول اشتراكاً شهرياً قدره 100 ريال، بالإضافة إلى 10 ريالات عن كل زيارة. ويدفع بموجب العرض الثاني اشتراكاً شهرياً قدره 150 ريالاً، ويسمح له بعشرين زيارات شهرياً.

(a) اكتب معادلة تمثل التكلفة الشهرية لكُلّ من العرضين.

(b) مثل كلتا المعادلتين بيانياً.

(c) إذا كان سلمان يريد الذهاب إلى النادي 7 مراتٍ شهرياً، فهل يشترك في العرض الأول أم الثاني؟ فسر إجابتك.

تدريب وحل المسائل

المثال 1 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع المحور y له في كلٌّ مما يأتي، ثم مثّله بيانياً:

$$m = 9, b = 2 \quad (15)$$

$$m = -7, b = -4 \quad (14)$$

$$m = -5, b = -2 \quad (13)$$

$$m = \frac{5}{11}, (0, -3) \quad (18)$$

$$m = -\frac{3}{4}, (0, 4) \quad (17)$$

$$m = 12, b = \frac{4}{5} \quad (16)$$

المثال 2 اكتب بصيغة الميل ونقطة يمر بها في كلٌّ مما يأتي، ثم مثّله بيانياً:

$$m = -7, (1, 9) \quad (21)$$

$$m = 4, (-4, 8) \quad (20)$$

$$m = 2, (3, 11) \quad (19)$$

$$m = -2.4, (14, -12) \quad (24)$$

$$m = -\frac{4}{5}, (-3, -6) \quad (23)$$

$$m = \frac{5}{7}, (-2, -5) \quad (22)$$

المثالان 3, 4 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أُعطيت نقطتان يمر بهما في كلٌّ مما يأتي:

$$(2, -1), (2, 6) \quad (26)$$

$$(-1, -4), (3, -4) \quad (25)$$

$$(0, 5), (3, 3) \quad (28)$$

$$(-3, -2), (-3, 4) \quad (27)$$

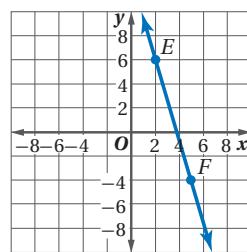
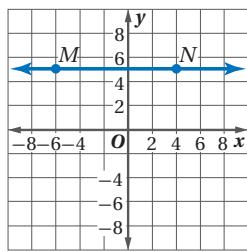
$$(2, 4), (-4, -11) \quad (30)$$

$$(-12, -6), (8, 9) \quad (29)$$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الممثل بيانياً، أو المعطى وصفه في كلٌ مما يأتي:

$$\overleftrightarrow{MN} \quad (32)$$

$$\overleftrightarrow{EF} \quad (31)$$



(34) يحوي النقطتين $(-4, -5), (-8, -13)$

(33) يحوي النقطتين $(-1, -2), (3, 4)$

(35) مقطع المحور x يساوي 3، ومقطع المحور y يساوي -2

(36) مقطع المحور x يساوي $\frac{1}{2}$ ، ومقطع المحور y يساوي 4

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يحقق المعطيات في كلٌ مما يأتي :

(37) يمر بالنقطة $(-4, -7)$ ، ويعامد المستقيم $y = \frac{1}{2}x + 9$.

(38) يمر بالنقطة $(10, -1)$ ، ويوازي المستقيم $y = 7$.

(39) يمر بالنقطة $(6, 2)$ ، ويوازي المستقيم $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

(40) يمر بالنقطة $(-2, 2)$ ، ويعامد المستقيم $y = -5x - 8$.

(41) **جمعية خيرية**: نظمت جمعية خيرية حفلاً لتكريم مجموعة من حفظة القرآن الكريم، فاستأجرت قاعة لتقيم فيها الحفل. إذا كانت أجرة القاعة 1500 ريال بالإضافة إلى 15.5 ريالاً عن كل شخص يحضر الحفل.

(a) اكتب معادلة تمثل تكلفة استئجار القاعة y إذا حضر x شخصاً.

(b) مثل المعادلة بيانياً.

(c) إذا حضر الحفل 285 شخصاً، فكم تكون تكلفة استئجار القاعة؟

(d) إذا رصدت الجمعية 6000 ريال لاستئجار القاعة، فما عدد الأشخاص الذين يمكن أن يحضوروا الحفل؟

(42) **توفير**: يوفر عبد الله نقوداً ليشتري مذيعاً مرتبطاً بالأقمار الاصطناعية، ويدفع رسوم الاشتراك السنوي بخدمة الأقمار الاصطناعية. فبدأ توفير 200 ريال أهدى إليه في عيد الأضحى ، وبعد ذلك كان يضيف 40 ريالاً كل أسبوع .

(a) اكتب معادلة تمثل ما وفره عبد الله y بعد x أسبوعاً.

(b) مثل المعادلة بيانياً.

(c) متى يوفر 500 ريال؟

(d) إذا بدأ التوفير منذ أسبوعين، وكان ثمن المذيع 700 ريال ، ورسم الاشتراك السنوي بخدمة الأقمار الاصطناعية 420 ريالاً ، فمتى يوفر مبلغاً يكفي لذلك؟ فسر إجابتك.

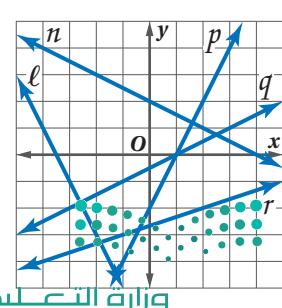
المثال 5

المثال 6



الربط مع الحياة

تصل إشارات بث إذاعة FM إلى $(48 - 64)$ km تقريرياً. أما إشارات البث الإذاعي بواسطة الأقمار الاصطناعية فتصل إلى أكثر من 35200 km



استعمل الشكل المجاور لتسمى أي مستقيم يحقق الوصف في كلٌ مما يأتي:

(43) يوازي المستقيم $y = 2x - 3$.

(44) يعamide المستقيم $y = \frac{1}{2}x + 7$.

(45) يتقطع مع المستقيم $y = \frac{1}{2}x - 5$ ، ولكنه لا يعamide.

حدّد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كلٌ ممّا يأتي:

$$y = -\frac{1}{2}x - 12, y = 2x + 7 \quad (47)$$

$$y = 2x + 4, y = 2x - 10 \quad (46)$$

$$y - 3 = 6(x + 2), y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 4) \quad (49) \quad y - 4 = 3(x + 5), y + 3 = -\frac{1}{3}(x + 1) \quad (48)$$

- (50) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (2, 4) ويباذي المستقيم
 $y - 2 = 3(x + 7)$

- (51) اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (8, 12) – ويعادل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (2, 7), (–3, 2).

- (52) **صناعة الفخار:** نظمت جمعية حرف يدوية دورة في صناعة الفخار، وكان رسم الاشتراك 150 ريالاً، بحيث يعطي اللوازم والمواد وكيساً واحداً من طين الصالصال. وكل كيس إضافي يكلف 40 ريالاً. اكتب معادلة تمثل تكلفة الاشتراك وعدد x من الأكياس المستعملة.



الربط مع الحياة

بعد تشكيل الآنية من
الصلصال، يتم إدخالها في
أفران خاصة عند درجة حرارة
500°C.

- تمثيلات متعددة:** طلب مدير قصر أفراح من بسام أن ينظم وقوف السيارات في أثناء حفل. وقدّم له عرضين للأجر؛ أحدهما أن يدفع له 4 ريالات عن كل سيارة، والآخر أن يعطيه أجرًا مقداره 150 ريالاً بالإضافة إلى ريالين عن كل سيارة.

(a) **جدولياً:** أنشئ جدولًا يبيّن ما يتضاهه بسام عن 20، 50، 100 سيارة في كلا العرضين.

(b) **عديديًا:** اكتب معادلة تمثل ما يكسبه بسام من كل عرض.

(c) **بيانياً:** مثل بيانياً كلاً من معادلتي العرضين.

(d) **تحليلياً:** أي العرضين أكثر كسباً لسام، إذا كان عدد السيارات 35 سيارة؟ وأيهما أكثر كسباً لسام، إذا كان عدد السيارات 80 سيارة؟ وضح إجابتك.

(e) **لفظياً:** اكتب عبارة تصف العرض الأكثر كسباً لسام تبعاً لعدد السيارات.

(f) **منطقياً:** إذا كان عدد السيارات 75 سيارة، فأي العرضين أكثر كسباً لسام؟ ووضح تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا

- (54) **تحدد:** أوجد قيمة n ، بحيث يمر المستقيم العمودي على المستقيم $8 - 2y + 4 = 6x + 8$ – بالنقطتين $(n, -4), (2, -8)$.

- (55) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت النقاط (8, 6), (2, 5), (2, 2), (–2, 2) – تقع على استقامة واحدة. ببرر إجابتك.

- (56) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلات زوجين مختلفين من المستقيمات المتعامدة التي تقاطع في النقطة $(-3, -7)$.

- (57) **اكتشف الخطأ:** كتب كل من راكان وفيصل معادلة مستقيم ميله 5 – ، ويمر بالنقطة (4, –2)، أيهما إجابته صحيحة؟ ووضح تبريرك.

فيصل

$$\begin{aligned} y - 4 &= -5(x - (-2)) \\ y - 4 &= -5(x + 2) \\ y - 4 &= -5x - 10 \\ y &= -5x - 6 \end{aligned}$$

راكان

$$\begin{aligned} y - 4 &= -5(x - (-2)) \\ y - 4 &= -5(x + 2) \end{aligned}$$

- (58) **أكتب:** أيهما أسهل كتابة: معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة، أم بصيغة الميل والمقطع؟

Ministry of Education

2022 - 1444

تدريب على اختبار

(60) أيٌ مما يأتي هي معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, 1)$ ، ويعاكس المستقيم $y = \frac{1}{3}x + 5$ ؟

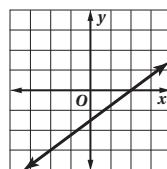
$y = 3x + 7$ **A**

$y = \frac{1}{3}x + 7$ **B**

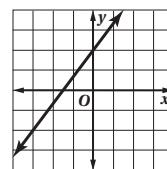
$y = -3x - 5$ **C**

$y = -\frac{1}{3}x - 5$ **D**

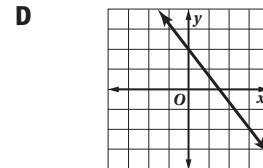
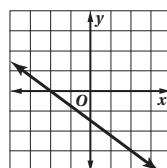
(59) أيٌ مما يأتي هو التمثيل البياني للمستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, -3)$ ؟



C



A



B

مراجعة تراكمية

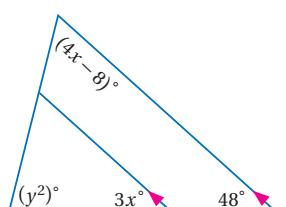
أوجد ميل المستقيم الذي يمر بال نقطتين A , B في كلٍ مما يأتي : (الدرس 2-4)

$A(2, 5), B(5, 1)$ (63)

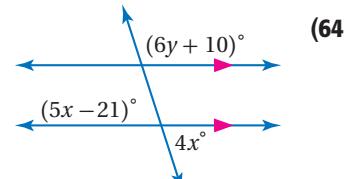
$A(0, 2), B(-3, -4)$ (62)

$A(4, 3), B(5, -2)$ (61)

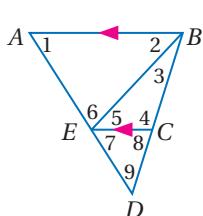
أوجد قيمة y , x في كلٍ من الشكلين الآتيين : (الدرس 2-2)



(65)



(64)



في الشكل المجاور: $m\angle 1 = 58^\circ$, $m\angle 2 = 47^\circ$, $m\angle 3 = 26^\circ$. أوجد قياس كلٌ من الزوايا الآتية: (الدرس 2-2)

$\angle 6$ (68)

$\angle 5$ (67)

$\angle 7$ (66)

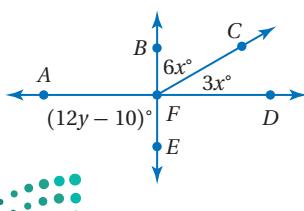
$\angle 9$ (71)

$\angle 8$ (70)

$\angle 4$ (69)

استعد للدرس اللاحق

(72) إذا كان \overline{BE} , \overline{AD} متعامدين، فأوجد قيمة كلٍ من y , x ,



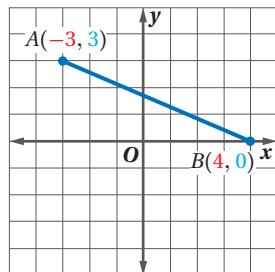
2-5 معادلة العمود المنصف

Equations of Perpendicular Bisectors

يمكنك تطبيق ما تعلمته عن الميل ومعادلة المستقيم لإيجاد معادلة العمود المنصف لقطعة مستقيمة.

نشاط

أوجد معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة \overline{AB} إذا كان طرفاها هما النقطتين $A(-3, 3)$, $B(4, 0)$ ، ثم مثله بيانياً.



الخطوة 1: منصف القطعة المستقيمة يمر بنقطة منتصفها.

استعمل صيغة نقطة المنتصف لتجد نقطة منتصف \overline{AB} .

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = M\left(\frac{-3 + 4}{2}, \frac{3 + 0}{2}\right) \\ = M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

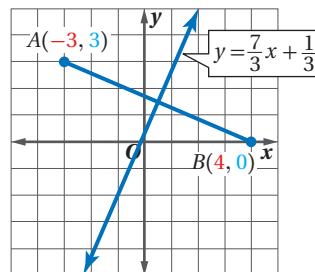
الخطوة 2: يكون العمود المنصف عمودياً على القطعة المستقيمة، ويمر بنقطة منتصفها.
ولتجد ميل العمود المنصف أوجد أولاً ميل \overline{AB} .

$$\begin{array}{ll} \text{صيغة الميل} & m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ x_1 = -3, x_2 = 4, y_1 = 3, y_2 = 0 & = \frac{0 - 3}{4 - (-3)} \\ & = -\frac{3}{7} \\ & \text{بسط} \end{array}$$

الخطوة 3: استعمل صيغة الميل ونقطة لكتابة معادلة المستقيم.
ميل العمود المنصف يساوي $\frac{7}{3}$ ، لأن $-1 - \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{7}{3}$

$$\begin{array}{ll} \text{صيغة الميل ونقطة} & y - y_1 = m(x - x_1) \\ m = \frac{7}{3}, (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) & y - \frac{3}{2} = \frac{7}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ \text{خاصية التوزيع} & y - \frac{3}{2} = \frac{7}{3}x - \frac{7}{6} \\ \text{اجمع } \frac{3}{2} \text{ لكلا الطرفين} & y = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3} \end{array}$$

الخطوة 4: للتحقق: مثل المستقيم $y = \frac{7}{3}x + 3$



تمارين:

أوجد معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة \overline{PQ} ، ومثله بيانياً في كلٌ مما يأتي:

$P(-3, 9), Q(-1, 5)$ (2)

$P(5, 2), Q(7, 4)$ (1)

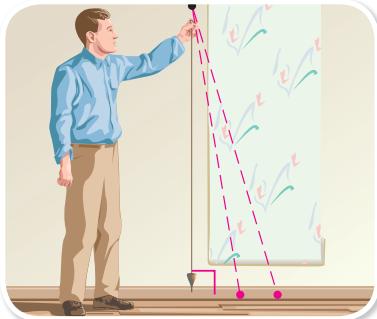
$P(0, 1.6), Q(0.5, 2.1)$ (4)

$P(-2, 1), Q(0, -3)$ (3)



2-6 الأعمدة والمسافة

Perpendiculars and Distance



لماذا؟

الخط الشاقولي عبارة عن خط مربوط في أحد طرفيه ثقل معدني يسمى الشاقول، وعندما يُعلق الخط من طرفه الآخر يتارجح الشاقول تأرجحاً حرّاً، ثم يسكن بحيث يكون تحت نقطة التعليق مباشرة.

يُستعمل الخط الشاقولي؛ لإنشاء خط رأسي عند البناء أو عند لصق ورق الجدران.

البعد بين نقطة ومستقيم: يمثل طول الخط الشاقولي أقصر مسافة بين نقطة التعليق ومستوى الأرض أفالله. فالمسافة العمودية بين نقطة ومستقيم هي أقصر مسافة في جميع الحالات، وهي تمثل **البعد بين النقطة والمستقيم**.

فيما سبق:

درست كتابة معادلة مستقيم عُرفت معلومات حول تمثيله البياني.

(الدرس 2-5)

والآن:

- أجد البعد بين نقطة ومستقيم.
- أجد البعد بين مستقيمين متوازيين.

المفردات:

المسافة العمودية

perpendicular distance

البعد بين نقطة ومستقيم

distance from a point to a line

المحل الهندسي

locus

متساوي البعد

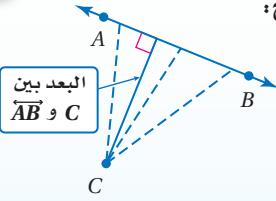
equidistant

أضف إلى
مطويتك

م
مفهوم أساسى

البعد بين نقطة ومستقيم

النحوذ:

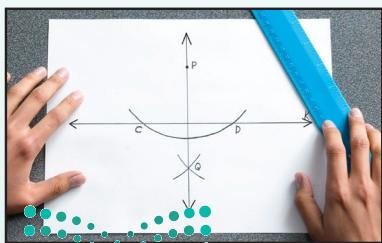


التعبير اللغطي: البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

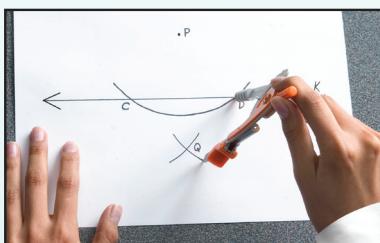
إن إنشاء مستقيم عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تقع عليه، يبين أنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويكون عمودياً على المستقيم.

إنشاء مسقدي عمودي على مسقدي من نقطة لا تقع عليه

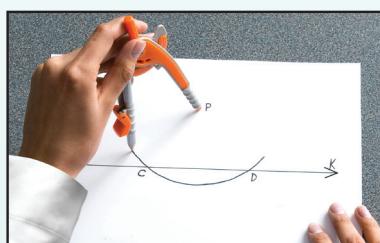
الخطوة 3: استعمل مسطرة لرسم \overleftrightarrow{PQ}



الخطوة 2: ضع الفرجار عند النقطة C ، وارسم قوساً تحت المستقيم ℓ باستعمال فتحة $\frac{1}{2}CD$ فرجار أكبر من D وباستعمال فتحة الفرجار نفسها، ارسم من D قوساً آخر يقطع القوس السابق. وسم نقطة التقاطع Q .



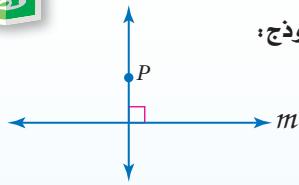
الخطوة 1: ضع الفرجار عند النقطة P . وارسم قوساً يقطع ℓ في موقعين مختلفين. سم نقطتي التقاطع C, D



تنص المسلمـة الآتـية عـلـى أـنـ المـسـتـقـيمـ العـمـودـيـ عـلـىـ مـسـتـقـيمـ مـعـلـومـ مـنـ نـقـطـةـ لـاـ تـقـعـ عـلـىـ هـوـ مـسـتـقـيمـ وـحـيدـ.

مسلمـةـ التـعـامـدـ

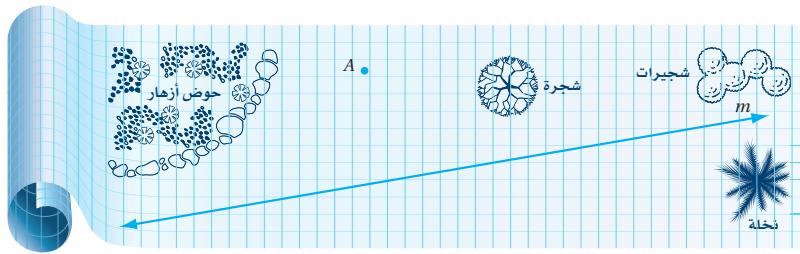
أضـفـ إـلـىـ
مـطـويـتـكـ



الـتـعـبـيرـ الـلـفـظـيـ: لـأـيـ مـسـتـقـيمـ وـنـقـطـةـ لـاـ تـقـعـ عـلـىـ يـوـجـدـ
مـسـتـقـيمـ وـاحـدـ فـقـطـ يـمـرـ بـالـنـقـطـةـ،
وـيـكـونـ عـمـودـيـاـ عـلـىـ مـسـتـقـيمـ الـمـعـلـومـ.

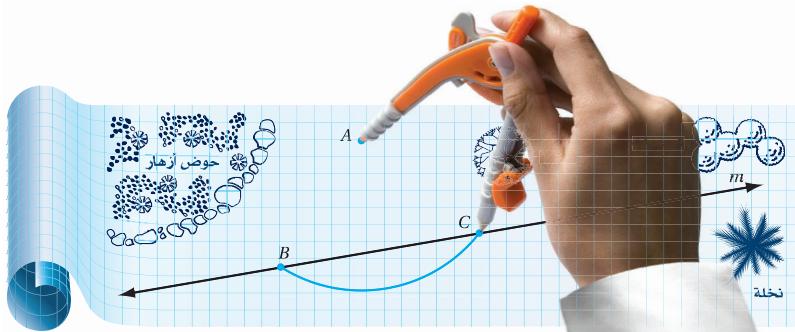
مـثـالـ 1ـ مـنـ وـاقـعـ الـحـيـاـةـ إـنـشـاءـ أـقـصـرـ قـطـعـةـ مـسـتـقـيمـ بـيـنـ نـقـطـةـ وـمـسـتـقـيمـ

هـنـدـسـةـ مـدـنـيـةـ: لـاحـظـ مـهـنـدـسـ مـدـنـيـ أـنـ جـزـءـاـ مـنـ سـاحـةـ حـدـيـقـةـ عـامـةـ تـجـمـعـ عـنـدـ الـمـيـاهـ. وـيـرـيدـ أـنـ يـضـعـ
أـبـوـبـ تـصـرـيفـ أـرـضـيـاـ مـنـ الـنـقـطـةـ Aـ وـسـطـ هـذـهـ الـمـنـطـقـةـ إـلـىـ خـطـ التـصـرـيفـ الرـئـيـسـ الـمـمـثـلـ بـالـمـسـتـقـيمـ mـ. أـنـشـأـ
الـقـطـعـةـ مـسـتـقـيمـةـ الـتـيـ يـمـثـلـ طـولـهـاـ أـقـصـرـ أـبـوـبـ يـرـبـطـ خـطـ التـصـرـيفـ الرـئـيـسـ بـالـنـقـطـةـ Aـ.

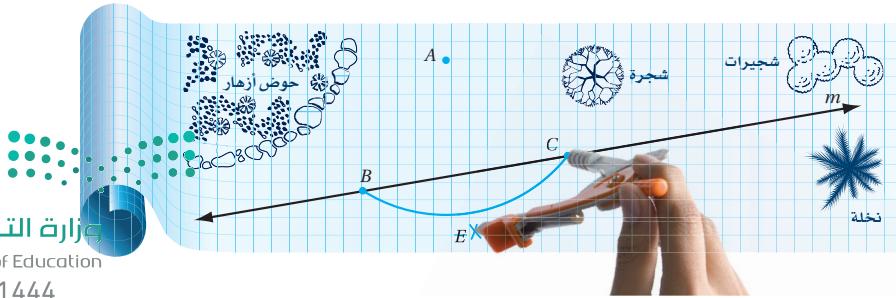


الـقـطـعـةـ مـسـتـقـيمـةـ الـتـيـ يـمـثـلـ طـولـهـاـ أـقـصـرـ أـبـوـبـ، هـيـ الـقـطـعـةـ مـسـتـقـيمـةـ عـمـودـيـةـ مـنـ الـنـقـطـةـ إـلـىـ الـمـسـتـقـيمـ.
لـإـنـشـاءـ الـقـطـعـةـ مـسـتـقـيمـةـ اـتـبـعـ الـخـطـوـاتـ الـتـالـيـةـ:

الـخـطـوةـ 1ـ: استـعملـ الفـرجـارـ لـتـعـيـنـ النـقـطـيـنـ Cـ Bـ عـلـىـ الـمـسـتـقـيمـ mـ، بـحـيثـ تـكـوـنـاـ عـلـىـ الـبـعـدـ نـفـسـهـ منـ
الـنـقـطـةـ Aـ، وـذـلـكـ بـوـضـعـ رـأـسـ الـفـرجـارـ عـنـدـ الـنـقـطـةـ Aـ وـرـسـمـ قـوـسـ يـقـطـعـ mـ فـيـ النـقـطـيـنـ Cـ Bـ



الـخـطـوةـ 2ـ: استـعملـ الفـرجـارـ لـتـعـيـنـ نـقـطـةـ أـخـرـىـ مـلـ Eـ لـاـ تـقـعـ عـلـىـ الـمـسـتـقـيمـ mـ، وـتـكـوـنـ عـلـىـ الـبـعـدـ نـفـسـهـ
مـنـ Cـ Bـ، وـذـلـكـ بـوـضـعـ رـأـسـ الـفـرجـارـ عـنـدـ النـقـطـةـ Cـ، وـرـسـمـ قـوـسـ أـكـبـرـ مـنـ BCـ $\frac{1}{2}$ ـ، وـرـسـمـ قـوـسـ آـخـرـ يـتـقـاطـعـ مـعـ الـقـوـسـ السـابـقـ عـنـدـ Eـ باـسـتـعـمالـ فـتحـةـ
الـفـرجـارـ نـفـسـهـاـ بـوـضـعـ رـأـسـ الـفـرجـارـ عـنـدـ Bـ



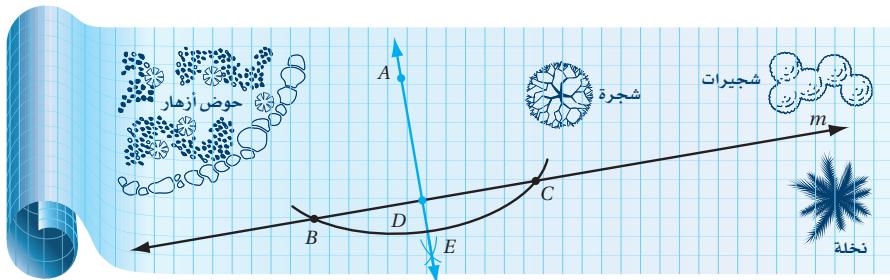
الـرـبـطـ مـعـ الـحـيـاـةـ

تقـسـمـ الـهـنـدـسـةـ الـمـدـنـيـةـ إـلـىـ
تـخـصـصـاتـ مـنـهـاـ: هـنـدـسـةـ
الـإـنـشـاءـاتـ، وـهـنـدـسـةـ الـطـرـقـ،
وـهـنـدـسـةـ الـخـرـسـانـةـ، وـهـنـدـسـةـ
الـمـسـاحـةـ، وـهـنـدـسـةـ الـتـرـبـةـ،
وـهـنـدـسـةـ الـمـيـاهـ.

إـرـشـادـاتـ لـلـدـرـاسـةـ

رـسـمـ أـقـصـرـ مـسـافـةـ
الـأـدـاءـ الـأـسـاسـيـةـ لـرـسـمـ
قطـعـةـ مـسـتـقـيمـةـ عـمـودـيـةـ
عـلـىـ مـسـتـقـيمـ مـنـ نـقـطـةـ
لـاـ تـقـعـ عـلـىـ هـوـ الـمـنـتـلـتـ
الـقـائـمـ الـزاـوـيـةـ كـمـاـ
يـمـكـنـكـ اـسـتـعـمالـ أـدـوـاتـ
مـلـ رـكـنـ وـرـقـةـ، وـلـكـنـ
إـنشـاءـ هـذـهـ الـقـطـعـةـ غـيـرـ
مـمـكـنـ إـلـاـ باـسـتـعـمالـ
فـرجـارـ وـمـسـطـرـةـ.

الخطوة 3: ارسم العمود \overrightarrow{AE} ، وارمز لنقطة تقاطع \overrightarrow{BC} مع \overrightarrow{AE} بالرمز D



يمثل AD طول أقصر أنبوب يحتاجه المهندس لربط النقطة A بخط التصريف الرئيس.

تحقق من فهمك

- 1) أنشئ القطعة المستقيمة التي يمثل طولها المسافة بين Q و $P\bar{R}$ وسمّها.
-

مثال 2 البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي

ال الهندسة الإحداثية: يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(4, -6)$ ، $(3, -5)$. أوجد بعد النقطة $P(2, 4)$ المستقيم ℓ .

الخطوة 1: أوجد معادلة المستقيم ℓ . ابدأ بإيجاد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4, -6)$ ، $(3, -5)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - (-5)}{4 - (3)} = \frac{-1}{1} = -1$$

استعمل ميل المستقيم ℓ ، والنقطة $(4, -6)$ الواقعه عليه لتجد مقطع المحور y له.

$$\text{صيغة الميل والمقطع: } y = mx + b$$

$$m = -1, (x, y) = (4, -6) \quad -6 = -1(4) + b \\ \text{بسط:} \quad -6 = -4 + b \\ \text{اجمع 4 لكلا الطرفين:} \quad -2 = b$$

معادلة المستقيم ℓ هي: $y = -x - 2$ ، أو $y = -x + (-2)$.

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم w العمودي على المستقيم ℓ والمار بالنقطة $P(2, 4)$.

بما أن ميل المستقيم ℓ يساوي -1 ، فإن ميل المستقيم w يساوي 1 .

$$\text{صيغة الميل والمقطع: } y = mx + b$$

$$m = 1, (x, y) = (2, 4) \quad 4 = 1(2) + b \\ \text{بسط:} \quad 4 = 2 + b \\ \text{اطرح 2 من كلا الطرفين:} \quad 2 = b$$

معادلة المستقيم w هي $y = x + 2$.

الخطوة 3: حل نظام المعادلات لتجد نقطة التقاطع.

$$\text{المستقيم: } \ell: y = -x - 2$$

$$\text{المستقيم: } w: y = x + 2$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

إرشادات للدراسة

المسافة بين نقطة x والمحور y لا حظ أن المسافة بين نقطة والمحور x يمكن إيجادها بتحديد الإحداثي الصادي للنقطة، أما المسافة بينها وبين المحور y فيمكن إيجادها بتحديد الإحداثي السيني لها.



أوجد قيمة x .

عُوض 0 بدل y في معادلة المستقيم w

$$0 = x + 2$$

اطرح 2 من كلا الطرفين

$$-2 = x$$

إذن نقطة التقاطع هي $(-2, 0)$

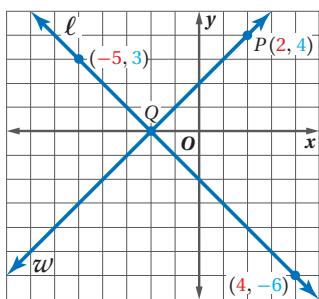
للتتحقق من نقطة التقاطع، ارسم المستقيمين w, ℓ في المستوى الإحداثي، وأوجد نقطة التقاطع بيانياً.

الخطوة 4: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين، لتجد المسافة بين $P(2, 4), Q(-2, 0)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned} x_2 = -2, x_1 = 2, y_2 = 0, y_1 = 4 &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (0 - 4)^2} \\ &= \sqrt{32} \\ &\text{بسط} \end{aligned}$$

البعد بين النقطة والمستقيم هو $\sqrt{32}$ أو 5.66 وحدات تقريرياً.



إرشادات للدراسة

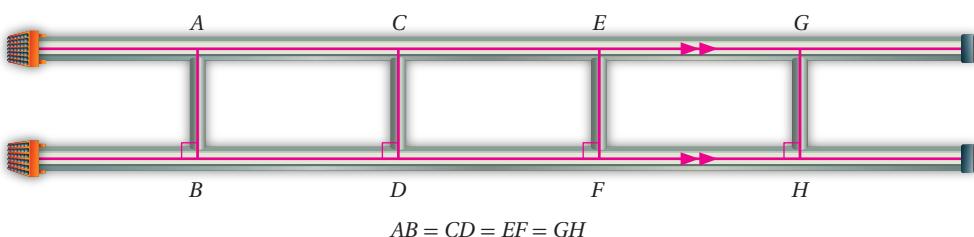
طريقة الحذف

عند حل نظام معادلات باستخدام طريقة الحذف، قد تحتاج إلى ضرب إحدى المعادلات في عدد لنتتمكن من الحذف عند جمع الحدود المتشابهة.

تحقق من فهمك

(2) المستقيم ℓ يمر بال نقطتين $(5, 4), (1, 2)$. أنشئ مستقيماً عمودياً على ℓ من النقطة $(7, P)$ ، ثم أوجد البعد بين P و ℓ .

البعد بين مستقيمين متوازيين: يُعرَّف المستقيمان المتوازيان على أنهما مستقيمان يقعان في المستوى نفسه ولا يتتقاطعان. وهناك تعريف آخر ينص على أنهما مستقيمان يقعان في المستوى نفسه، بحيث يكون البعد بينهما ثابتاً، وهذا يعني أن البعد بين أي نقطة على أحدهما والآخر ثابتة.



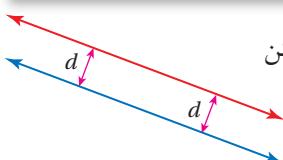
يقودنا ذلك إلى تعريف البعد بين مستقيمين متوازيين.

أضف إلى
مطويتك

البعد بين مستقيمين متوازيين

مفهوم أساسى

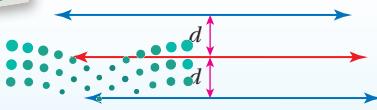
البعد بين مستقيمين متوازيين، هو المسافة العمودية بين أحد المستقيمين وأى نقطة على المستقيم الآخر.



الشكل الذي تمثله مجموعة النقاط التي تحقق شرطاً ما يسمى **محلّ هندسياً**. ويمكن وصف المستقيم الموازي لمستقيم معلوم بالمحل الهندسي لجميع النقاط المتساوية البعد عن المستقيم في المستوى نفسه.

أضف إلى
مطويتك

المستقيمان المتساوياً البعد عن مستقيم ثالث



إذا كان المستقيمان في المستوى متساوياً
البعد عن مستقيم ثالث فإنهما متوازيان.

إرشادات للدراسة

متساوي البعد

سوف تستعمل مفهوم متساوي البعد لتصف نقاطاً خاصة ومستقيمات مرتبطة بأضلاع المثلث وزواياه في الدرس 1-4.

زيارة التعلم

Ministry of Education

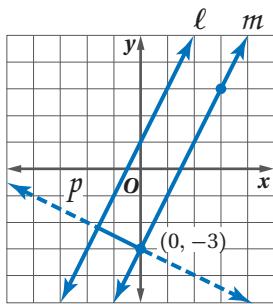
2022 - 1444

الدرس 6-2 الأعمدة والمسافة

ستبرهن نظرية 2.9 في السؤال 21

129

مثال 3 المسافة بين المستقيمين متوازيين



أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين ℓ, m اللذين معادلتهما $y = 2x + 1$ ، $y = 2x - 3$ على الترتيب.

يتعين عليك حل نظام من المعادلات لإيجاد نقطتي نهاية القطعة المستقيمة العمودية على كلٍ من ℓ, m .

ميل المستقيم ℓ يساوي ميل المستقيم m ويساوي 2.

ارسم المستقيم p على أن يمر ب نقطة مقطع المحور y للستقيم m وهي $(0, -3)$ ، ويكون عمودياً على كلا المستقيمين.

الخطوة 1: لاحظ أن ميل المستقيم p هو معكوس مقلوب العدد 2، ويساوي $-\frac{1}{2}$ ، وأن المستقيم p يمر بالنقطة $(0, -3)$ ، وهي مقطع المحور y للستقيم m . والآن: اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم p .

$$\begin{array}{ll} \text{صيغة الميل والمقطع} & y = mx + b \\ m = -\frac{1}{2}, b = -3 & y = -\frac{1}{2}x - 3 \end{array}$$

الخطوة 2: حدد نقطة تقاطع المستقيمين ℓ و p بحل نظام المعادلات الآتي:

$$\text{المستقيم } \ell: y = 2x + 1$$

$$\text{المستقيم } p: y = -\frac{1}{2}x - 3$$

$$\text{عُوض } 2x + 1 \text{ بدلاً من } y \text{ في معادلة المستقيم } p$$

$$2x + 1 = -\frac{1}{2}x - 3$$

$$2x + \frac{1}{2}x = -3 - 1 \quad \text{جمع الحدود المتشابهة في كل طرف}$$

$$\frac{5}{2}x = -4 \quad \text{بسط}$$

$$\text{اضرب كلا الطرفين في } \frac{2}{5}$$

$$x = -\frac{8}{5}$$

$$\text{عُوض } \frac{8}{5} \text{ بدلاً من } x \text{ في معادلة المستقيم } p$$

$$y = -\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{5}\right) - 3$$

$$= -\frac{11}{5} \quad \text{بسط}$$

$$\text{نقطة التقاطع هي } (-1.6, -2.2) \text{ أو } \left(-\frac{8}{5}, -\frac{11}{5}\right).$$

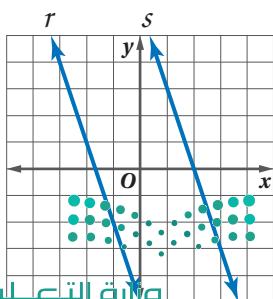
الخطوة 3: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لتتجدد المسافة بين النقطتين $(-3, 0)$ و $(0, -3)$.

$$\text{صيغة المسافة بين نقطتين} \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$x_2 = -1.6, x_1 = 0, y_2 = -2.2, y_1 = -3 \quad = \sqrt{(-1.6 - 0)^2 + [-2.2 - (-3)]^2}$$

$$\approx 1.8 \quad \text{بسط}$$

البعد بين المستقيمين 1.8 وحدة تقريرياً.



تحقق من فهـمك

(3A) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين r, s اللذين

$$\text{معادلتهما } y = -3x - 5, y = -3x + 6 \text{ على الترتيب.}$$

على الترتيب.

(3B) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين a, b اللذين معادلتهما $x + 3y = 6$ ، $x + 3y = -14$ على الترتيب.

إرشادات للدراسة

طريقة التعويض

عند حل نظام مكون من معادلتين خططيتين، باستعمال التعويض، عُوض قيمة أحد متغيرات المعادلة الأولى في المعادلة الثانية لتحصل على معادلة في متغير واحد.

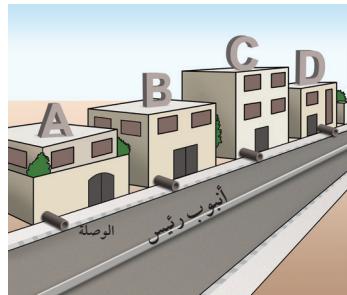
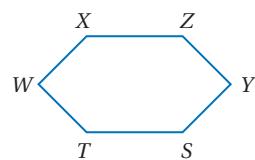
المثال 1

أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثل البعد في كلٍّ مما يأتي:

(2) البعد بين C و \overleftrightarrow{AB}



(1) البعد بين Y و \overleftrightarrow{TS}



(3) **أنابيب**: تزود مؤسسة المياه المنازل بالمياه من خلال أنابيب تربطها بالأنبوب الرئيس في الشارع. في الشكل المجاور: ارسم القطعة المستقيمة التي تمثل أقصر أنبوب توصيل بين الوصلة في المنزل A والأنبوب الرئيس في الشارع.

المثال 2

هندسة إحداثية: أوجد البعد بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍّ مما يأتي:

(4) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(0, 3)$ ، $(4, 3)$ ، وإحداثياً النقطة P هما $(3, 10)$.

(5) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-4, 1)$ ، $(9, -6)$ ، وإحداثياً النقطة P هما $(1, 4)$.

(6) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-2, 9)$ ، $(4, 18)$ ، وإحداثياً النقطة P هما $(5, -9)$.

أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي :

$$y = 7 \quad (8)$$

$$y = -3$$

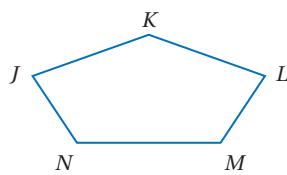
$$y = -2x + 4 \quad (7)$$

$$y = -2x + 14$$

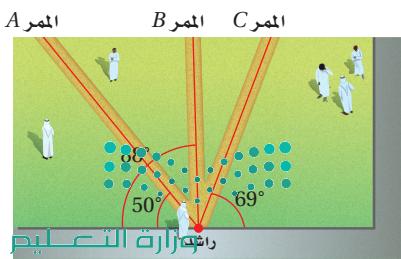
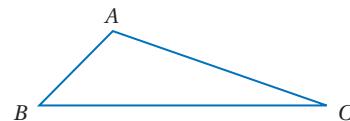
المثال 3

أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثل البعد في كلٍّ مما يأتي:

(10) البعد بين K و \overleftrightarrow{LM}



(9) البعد بين A و \overrightarrow{BC}



(11) **مدرسة**: يعبر راشد الساحة الأمامية لمدرسته، حيث يوجد ثلاثة ممرات ممكناً مبينة في الشكل المجاور. أي الممرات الثلاثة هو الأقصر؟ وضح تبريرك.

المثال 2

هندسة إحداثية: أوجد البعد بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍ مما يأتي :

(12) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(4, -3), (7, 0)$. وإحداثياً النقطة P هما $(3, 4)$.

(13) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-2, 1), (4, -1)$. وإحداثياً النقطة P هما $(5, 7)$.

(14) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-8, 1), (3, -1)$. وإحداثياً النقطة P هما $(4, -2)$.

أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي :

$$y = \frac{1}{3}x - 3 \quad (17)$$

$$x = 3 \quad (16)$$

$$y = -2 \quad (15)$$

$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

$$x = 7$$

$$y = 4$$

$$y = -\frac{5}{4}x + 3.5 \quad (20)$$

$$3x + y = 3 \quad (19)$$

$$y = 15 \quad (18)$$

$$4y + 10.6 = -5x$$

$$y + 17 = -3x$$

$$y = -4$$

(21 برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين للنظرية 2.9 .

أوجد البعد بين المستقيم و النقطة في كلٍ مما يأتي :

$$x = 4, (-2, 5) \quad (24)$$

$$y = \frac{1}{6}x + 6, (-6, 5) \quad (23)$$

$$y = -3, (5, 2) \quad (22)$$



(25 ملصقات: يعلق شاكر ملصقين على حائط غرفته كما هو مبين في الشكل. كيف يمكن له أن يستعمل البعد بين مستقيمين؛ ليتأكد أن حافَي الملصقين متوازيتان؟

إنشاءات هندسية: يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-3, -4), (2, 1)$. والنقطة $(P, -2)$ تقع على المستقيم ℓ . تتبع الخطوات أدناه وأجب عما يأتي :

الخطوة 3:

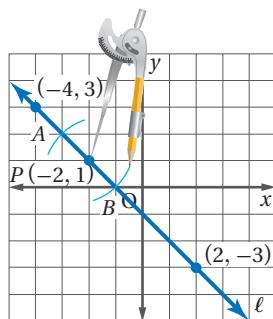
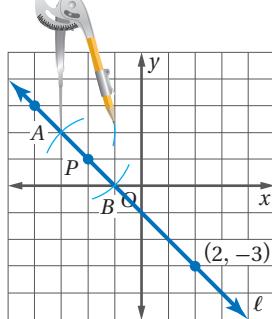
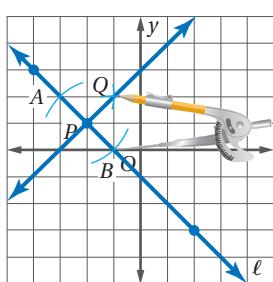
باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع الفرجار عند النقطة B ، وارسم قوساً يقطع القوس السابق، سُمّن نقطة التقاطع Q . ثم ارسم \overleftrightarrow{PQ} .

الخطوة 2:

افتتح الفرجار فتحة أكبر من AP . وضعه عند النقطة A ، وارسم قوساً أعلى المستقيم ℓ .

الخطوة 1:

ارسم المستقيم ℓ وعين النقطة P عليه، ثم ضع الفرجار عند النقطة P . وباستعمال فتحة الفرجار نفسها، ارسم قوسين عن يسار ويمين النقطة P . سُمّن نقطتي التقاطع A و B .



(26) ضع تخميناً للعلاقة بين المستقيمين ℓ و \overrightarrow{PQ} . أثبت تخمينك باستعمال ميلي المستقيمين.

(27) كرر النشاط أعلاه باستعمال مستقيم آخر ونقطة عليه.

(28) **هندسة إحداثية:** ميل \overline{AB} يساوي 2 ، ونقطة متصفها $M(3, 2)$. ونقطة متصف قطعة مستقيمة أخرى عمودية على \overline{AB} هي $P(-1, 4)$ ، ولها نقطة الطرف B نفسها.

(a) مثل القطعتين المستقيمتين بيانياً.

(b) أوجد إحداثيات A و B .

(29) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستكشف مساحات مثلثات مكونة من نقاط على مستقيمين متوازيين.



(a) هندسيًا: ارسم مستقيمين متوازيين، وسمّهما كما في الشكل المجاور.

(b) لفظيًا: أين تضع النقطة C على المستقيم m ، حتى يكون للمثلث ABC أكبر مساحة؟ وضح تبريرك.

(c) تحليليًا: إذا كان $AB = 11 \text{ cm}$ ، فما القيمة العظمى لمساحة $\triangle ABC$ ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(30) **اكتشف الخطأ:** رسم ماجد القطعتين المستقيمتين \overline{AB} ، \overline{CD} أدناه باستعمال حافة مستقيمة، ويدعي أنه إذا مدّ هاتين القطعتين المستقيمتين فإنهما لن تتقاطعا أبداً. خالفة زيد الرأي وقال: إنهمما تتقاطعان. أيٌّ منها على صواب؟ بُرر إجابتك.



(31) **اكتب:** صُفْ طريقة يمكن استعمالها لرسم مستقيم يبعد بعد نفسه عن المستقيمين المتوازيين \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD} .



(32) **تحدد:** افترض أن مستقيماً عمودياً على مستقيمين متوازيين ويقطعهما في النقطتين $(a, 4)$, $(0, 6)$. إذا كانت المسافة بين المستقيمين المتوازيين $\sqrt{5}$ وحدات، فأوجد قيمة a ومعادلتي المستقيمين المتوازيين.

(33) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحياناً، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبداً. وضح تبريرك. يمكن إيجاد البُعد بين مستقيم ومستوى.

(34) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا محدبًا غير منتظم باستعمال مسطرة.

(a) أنشئ قطعة مستقيمة تمثل البُعد بين أحد الرؤوس وضلع غير مجاور له.



(b) استعمل القياس لتحقق من أن القطعة المستقيمة التي رسمتها عمودية على الضلع الذي اختزله.

(35) تحدّ: أعد كتابة النظرية 2.9 بدلالة مستويين متساويني البعد عن مستوى ثالث، وارسم مثلاً على ذلك.

(36) اكتب: لخُص الخطوط الضرورية لإيجاد البعد بين مستقيمين متوازيين إذا علمت معادلاتها.

تدريب على اختبار

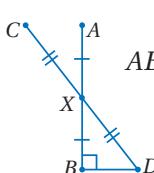
(38) متزه المدينة مربع الشكل، ومساحته 81000 ft^2 . أي مما يأتي هو الأقرب إلى طول ضلعه؟

300 ft C
400 ft D

100 ft A
200 ft B

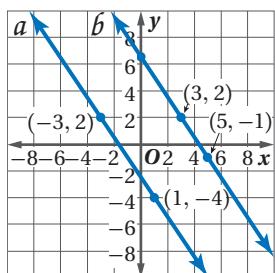
(37) إذا كانت \overline{AB} و \overline{BD} متعامدين و \overline{CD} تنصف إحداهما الأخرى عند النقطة X، $AB = 16$ ، $CD = 20$ ، فما طول \overline{BD} ؟

10 C
18 D
6 A
8 B



مراجعة تراكمية

(39) استعمل الشكل المجاور؛ لتحديد ما إذا كان $a \parallel b$ إذا كان $a \parallel b$.
بّر إجابتك. (الدرس 2-4)



اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كلٌ مما يأتي : (الدرس 2-5)

$$m = \frac{1}{4}, (3, -1) \quad (40)$$

$$m = 0, (-2, 6) \quad (41)$$

$$m = -2, (-6, -7) \quad (42)$$

(43) حاسوب: في عام 1436 هـ كانت نسبة مستخدمي شبكة الإنترنت في المملكة 56% تقريباً، وبعد ستين ارتفعت النسبة لتصبح 65% تقريباً، إذا استمر معدل التغير هذا، فما السنة التي تكون فيها نسبة المشتركين 80% تقريباً. (الدرس 2-4)

استعد للدرس اللاحق

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي :

$$Q(-12, 2), T(-9, 6) \quad (46)$$

$$R(-2, 3), S(3, 15) \quad (45)$$

$$O(-12, 0), P(-8, 3) \quad (44)$$



دليل الدراسة والمراجعة

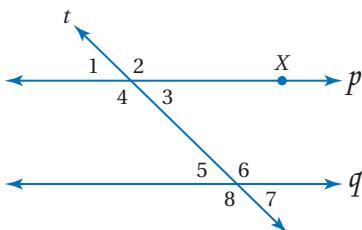
ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القاطع (ص. 87)	المستقيمان المتداخلان (ص. 86)
الزوايا الداخلية (ص. 87)	المستويان المتوازيان (ص. 86)
الزوايا الخارجية (ص. 87)	المستقيمان المتوازيان (ص. 86)
الميل (ص. 109)	الزاویتان المتبادلتان
معدل التغير (ص. 110)	خارجیاً (ص. 87)
صيغة الميل ونقطة (ص. 117)	الزاویتان المتبادلتان
صيغة الميل والمقطع (ص. 117)	داخلياً (ص. 87)
متساوى البعد (ص. 129)	الزاویتان المتبادلتان (ص. 87)
المحل الهندسي (ص. 129)	الزاویتان المتناظرتان (ص. 87)

اخبر مفرداتك

بین ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:



(1) إذا كان $\angle 5 \cong \angle 1$ ، فإن p و q مستقيمان متخالفان.

(2) الزاویتان 4 ، 6 متبادلتان داخلياً.

(3) الزاویتان 1 ، 7 متبادلتان خارجيأً .

(4) إذا كان p و q متوازيين فإن الزاویتين 3 ، 6 متطابقتان.

(5) بعد النقطة X عن المستقيم q هو طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة X إلى المستقيم q .

(6) يُسمى المستقيم t قاطعاً للمستقيمين p و q .

(7) إذا كان $q \parallel p$ ، فإن $\angle 2$ و $\angle 8$ متكاملتان.

(8) الزاویتان 4 ، 8 متناظرتان.



القاطع: (الدرس 2-1, 2-2)

- عندما يقطع قاطع مستقيمين، ينتج عن التقاطع أزواج من الزوايا المتبادلة خارجيأً أو المتبادلة داخلياً، أو المترافق أو المتناظرة.

إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن:

- كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.
- كل زاويتين متبادلتين داخلياً متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- كل زاويتين متبادلتين خارجيأً متطابقتان.

إثبات توازي مستقيمين: (الدرس 2-3)

- إذا قطع قاطع مستقيمين في نفس المستوى ونتج عن التقاطع أي مما يأتي، فإن المستقيمين متوازيان:

- زاویتان متناظرتان متطابقتان.
- زاویتان متبادلتان خارجيأً متطابقتان.
- زاویتان متبادلتان داخلياً متطابقتان.
- زاویتان متحالفتان متكاملتان.

- إذا كان المستقيمان عموديين على المستقيم نفسه في المستوى فإنهما متوازيان.

الميل: (الدرس 2-4, 2-5)

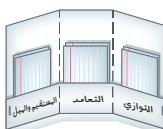
- الميل m لمستقيم يمر بالنقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) يعطى بالصيغة $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ حيث $x_2 \neq x_1$.

البعد: (الدرس 2-6)

- البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه، هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

- البعد بين مستقيمين متوازيين، هو المسافة العمودية بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

الطلوب منظم أفكار



تأكد من أن المفاهيم الأساسية

مدونة في مطويتك.

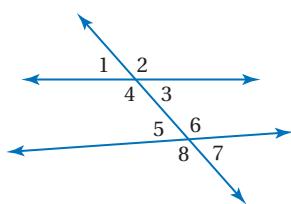
مراجعة ال دروس

2-1

المستقيمان والقاطع (ص: 91-86)

مثال 1

صنف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخلية، أو متبادلتين خارجية، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملاً الشكل أدناه.

 $\angle 2, \angle 6$ (b)

متناظرتان

 $\angle 3, \angle 6$ (a)

متحالفتان

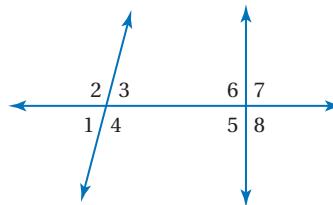
 $\angle 3, \angle 5$ (d)

متبادلتين داخلية

 $\angle 1, \angle 7$ (c)

متبادلتين خارجية

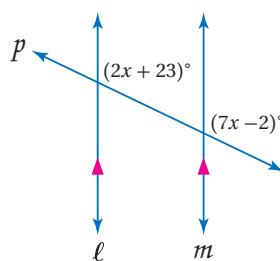
صنف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخلية، أو متبادلتين خارجية، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملاً الشكل أدناه.

 $\angle 4, \angle 6$ (10) $\angle 1, \angle 5$ (9) $\angle 4, \angle 5$ (12) $\angle 2, \angle 8$ (11)

(13) **جسور المشاة:** بُني جسر لعبور المشاة فوق شارع، صنف المستقيمين اللذين يمثلان الجسر والشارع.

مثال 2

جبر: أوجد قيمة x في الشكل الآتي. وضح تبريرك.



مسلمة الزاويتين المتناظرتين

$$7x - 2 = 2x + 23$$

جمع الحدود المتشابهة

$$7x - 2x = 23 + 2$$

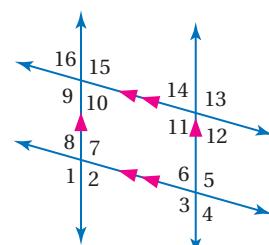
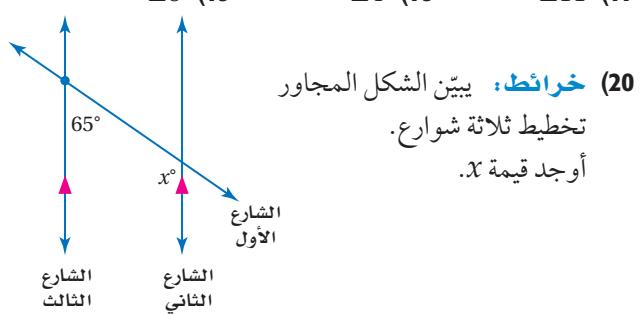
بسط

$$5x = 25$$

اقسم كلا الطرفين على 5

$$x = 5$$

في الشكل أدناه: $m\angle 1 = 123^\circ$ ، أوجد قياس كلّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:

 $\angle 16$ (16) $\angle 14$ (15) $\angle 5$ (14) $\angle 6$ (19) $\angle 4$ (18) $\angle 11$ (17)

(20) **خرائط:** بيّن الشكل المجاور تخطيط ثلاثة شوارع. أوجد قيمة x .

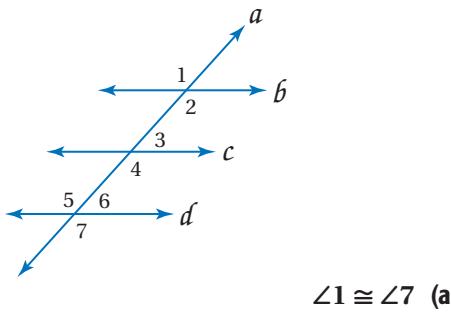


2-3

إثبات توازي مستقيمين (ص: 102-107)

مثال 3

هل يمكن إثبات أن أيّاً من مستقيمات الشكل متوازية اعتماداً على المعطيات في كلٍ مما يأتي؟ وإذا كان أيّها متوازياً، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



$$\angle 1 \cong \angle 7 \text{ (a)}$$

و $\angle 7 \cong \angle 1$ متبادلتان خارجيّاً بالنسبة لل المستقيمين b و d . بما أن $\angle 1 \cong \angle 7$ ، فإن $b \parallel d$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيّاً.

$$\angle 4 \cong \angle 5 \text{ (b)}$$

و $\angle 4 \cong \angle 5$ متبادلتان داخليّاً بالنسبة لل المستقيمين c و d . بما أن $\angle 4 \cong \angle 5$ ، فإن $c \parallel d$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليّاً.

هل يمكن إثبات أن أيّاً من مستقيمات الشكل متوازية، اعتماداً على المعطيات في كلٍ مما يأتي؟ وإذا كان أيّها متوازياً، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.

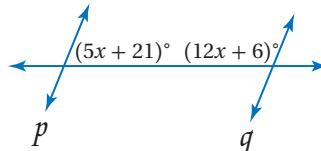
$$\angle 7 \cong \angle 10 \text{ (21)}$$

$$\angle 2 \cong \angle 10 \text{ (22)}$$

$$\angle 1 \cong \angle 3 \text{ (23)}$$

$$\angle 3 \cong \angle 11 \text{ (24)}$$

(25) أوجد قيمة x ، بحيث يكون $p \parallel q$ ، وحدد المسلمة أو النظرية التي استعملتها.

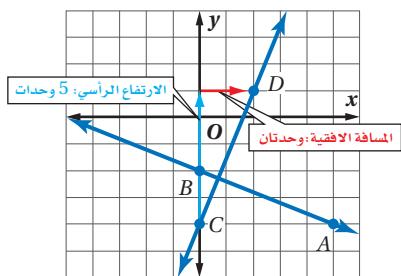


(26) هندسة الواقع: إذا كان $m\angle BAD = 45^\circ$ ، فأوجد $m\angle ADC$ الذي يقياس . $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



مثال 4

مثل بيانياً المستقيم الذي يمر بالنقطة $(4, -4)$ ، $C(0, -4)$ ، والعمودي على \overleftrightarrow{AB} ، حيث $A(5, -4)$, $B(0, -2)$



$$\text{ميل } \overleftrightarrow{AB} \text{ يساوي } -\frac{2}{5} = \frac{-2 - (-4)}{0 - 5}$$

بما أن ميل \overleftrightarrow{AB} يساوي $-\frac{2}{5}$ ، فإن ميل المستقيم العمودي على \overleftrightarrow{AB} يساوي $\frac{5}{2}$.

لتمثيل المستقيم بيانياً، ابدأ من النقطة C ، ثم حرك 5 وحدات إلى أعلى ووحدتين إلى اليمين، وسم النقطة D . قم برسم CD :

حدد ما إذا كان \overrightarrow{XY} و \overrightarrow{AB} متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في

كلٍ مما يأتي، ومثل كل مستقيم بيانياً لتحقّق من إجابتك.

$$A(5, 3), B(8, 0), X(-7, 2), Y(1, 10) \text{ (27)}$$

$$A(-3, 9), B(0, 7), X(4, 13), Y(-5, 7) \text{ (28)}$$

$$A(8, 1), B(-2, 7), X(-6, 2), Y(-1, -1) \text{ (29)}$$

ارسم المستقيم الذي يحقق الشرط في كلٍ مما يأتي:

$$A(2, 5), B(9, 2), \text{ يمر بالنقطة } (-3, 4) \text{ ويواري } \overrightarrow{AB} \text{، حيث (2)} \text{ (30)}$$

$$P(4, -6), Q(6, -1) \text{، يمر بالنقطة } (1, 3) \text{ ويعامد } \overrightarrow{PQ} \text{، حيث (31)}$$

(32) طائرات: تحلق الطائرتان A و B في مسارات مستقيمين وعلى الارتفاع نفسه. رصد قمر اصطناعي موقعين للطائرة A عند النقطتين $(23, 17)$ ، $(5, 11)$ ، ورصد موقعين للطائرة B عند النقطتين $(17, 9)$ ، $(3, 15)$. هل مسارات الطائرتين متوازيان، أم متعامدان، أم غير ذلك؟

دليل الدراسة والمراجعة

صيغ معادلة المستقيم (ص. 124-117)

2-5

مثال 5

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 5), (6, 3)$.

الخطوة 1: أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين.

$$\text{صيغة الميل} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{6 - 2} \\ = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم.

$$\begin{array}{ll} \text{صيغة الميل ونقطة} & y - y_1 = m(x - x_1) \\ m = -\frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (2, 5) & y - 5 = -\frac{1}{2}[x - 2] \\ \text{بسط} & y - 5 = -\frac{1}{2}x + 1 \\ \text{اجمع 5 لكلا الطرفين} & y = -\frac{1}{2}x + 6 \end{array}$$

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كل مما يأتي:

$$m = -\frac{3}{4}, (8, -1) \quad (34) \quad m = 2, (4, -9) \quad (33)$$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع محور y له فيما يأتي:

$$m = \frac{1}{2}, b = 4 \quad (36) \quad m = 5, b = -3 \quad (35)$$

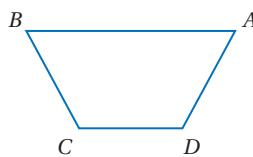
اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أعطيت نقطتان يمر بهما فيما يأتي:

$$(-7, 2), (5, 8) \quad (38) \quad (-3, 12), (15, 0) \quad (37)$$

(39) فيزياء: تسير مركبة بسرعة 30 m/s ، وبدأت تباطأً بمعدل ثابت، وبعد ثانتين أصبحت سرعتها 16 m/s ، اكتب معادلة تمثل سرعة المركبة v بعد t ثانية. ثم استعمل المعادلة لتحديد الزمن الذي تستغرقه حتى توقف.

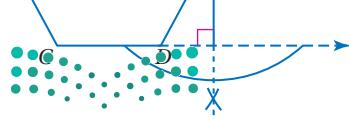
مثال 6

ارسم القطعة المستقيمة التي تمثل البعد بين A و \overleftrightarrow{CD} .



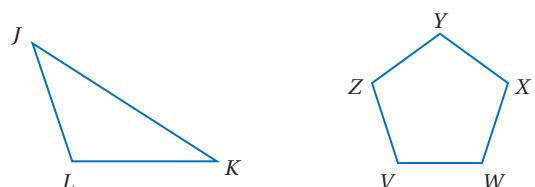
البعد بين المستقيم ونقطة لا تقع عليه، هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

مد \overleftrightarrow{CD} ، وارسم القطعة المستقيمة العمودية على \overleftrightarrow{CD} من A .



أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثل البعد في كل مما يأتي :

$$(41) \text{ البعد بين } X \text{ و } \overleftrightarrow{JK} \quad (40) \text{ البعد بين } L \text{ و } W$$

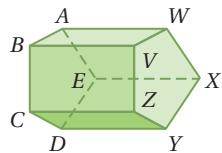


(42) قياس: علق خالد صفين من الصور على حائط غرفته، فقام أولاً بتشييت مسامير لوحات الصف العلوي على استقامة واحدة، ثم علق الخيط الشاقولي على كل مسامير وقاس مسافات متساوية أسفل كل مسامير وضع مسامير اللوحة في الصف الثاني. لماذا يدل هذا العمل على أن صفي الصور سيكونان متوازيين؟

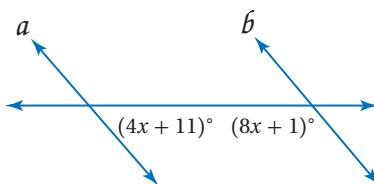
اختبار الفصل

2

- (17) اختبار من متعدد: أي القطع المستقيمة تخالف \overline{CD} ؟

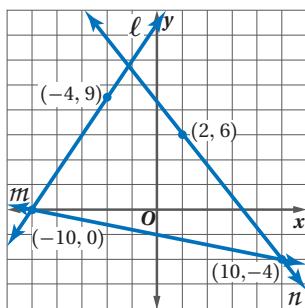
 \overline{DE} (C) \overline{VZ} (D) \overline{ZY} (A) \overline{AB} (B)

- (18) أوجد قيمة x التي تجعل $b \parallel a$. وحدّد المسلمّة أو النّظرية التي استعملتها.



- هندسة إحداثية:** أوجد البعدين النقطة P والمستقيم ℓ في كل مما يأتي:
- (19) يمر المستقيم ℓ بال نقطتين $(3, -5)$, $(-4, 2)$. وإحداثيا النقطة P هما $(1, 2)$.
- (20) يمر المستقيم ℓ بال نقطتين $(2, 3)$, $(6, 5)$. وإحداثيا النقطة P هما $(2, 6)$.

استعمل الشكل أدناه لتجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:



- (21) المستقيم ℓ .

- (22) مستقيم يوازي m .

- (23) مستقيم يعادل n .

- (24) **أعمال:** يعمل محمود مندوب مبيعات، ويتقاضى 12 ريالاً عن كل ساعة عمل زائد عمولة مقدار 15% من قيمة مبيعاته. اكتب معادلة تمثل ما يتلقاه في أحد الأسابيع إذا كانت قيمة مبيعاته 2000 ريال.
- وزارة التعليم**

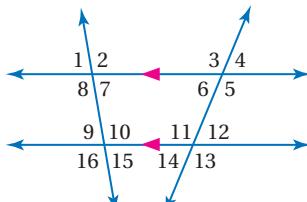
صنف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليات، أو متبادلتين خارجيات، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملاً الشكل أدناه.

 $\angle 6, \angle 3$ (1) $\angle 4, \angle 7$ (2) $\angle 5, \angle 4$ (3)

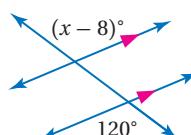
أوجد ميل المستقيم الذي يمر بال نقطتين A, B في كل مما يأتي:

 $A(0, 6), B(4, 0)$ (5) $A(8, 1), B(8, -6)$ (4) $A(5, 4), B(8, 1)$ (7) $A(6, 3), B(-6, 3)$ (6)

في الشكل أدناه: $m\angle 8 = 96^\circ$ و $m\angle 12 = 42^\circ$. أوجد قياس كل من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

 $\angle 9$ (8) $\angle 11$ (9) $\angle 6$ (10)

(11) أوجد قيمة x في الشكل الآتي :



- (12) **ناد رياضي:** يقارن مشاري بين عرضين مقدمين من ناد رياضي. يدفع في العرض الأول 200 ريال شهرياً. ويدفع في العرض الثاني 140 ريالاً شهرياً بالإضافة إلى رسوم اشتراك لأول مرة مقدارها 180 ريالاً.

(a) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم تمثّل التكفة y للاشتراك في كل من العرضين بعدد x من الأشهر. ثم مثلهما بياناً.

(b) هل المستقيمان الممثلان بيانياً في الفرع a متوازيان؟ ووضح السبب.

(c) أي العرضين هو الأفضل؟ ووضح إجابتك.

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم في كل من الحالات الآتية:

(13) يمر بالنقطة $(-8, 1)$ ، ويعامد $y = 2x - 17$

(14) يمر بالنقطة $(0, 7)$ ، ويواري $y = 4x - 19$

أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي:

$y = -2x + 1$ (16) $y = x - 11$ (15)

$y = -2x + 16$ $y = x - 7$

الإِعْدَاد لِلَاختِبارات

رسم مستقيمات مساعدة لحل بعض المسائل الهندسية

من المحموم أن تواجه في الاختبارات بعض الأسئلة التي تحتاج فيها إلى إضافة مستقيمات مساعدة لتطبيق بعض النظريات وال المسلمات عليها والوصول لحلها.

استراتيجيات الحل

الخطوة 1

- اقرأ المسألة ونفحص الشكل بإمعان.
- حاول ربط الشكل بأشكال مرتبطة بنظريات أو مسلمات.

الخطوة 2

- فرر الجزء الناقص من الشكل؛ ليكون مشابهًا لشكل له خصائص معينة.
- أضف الجزء الناقص (رسم مستقيم، إكمال زاوية...).

الخطوة 3

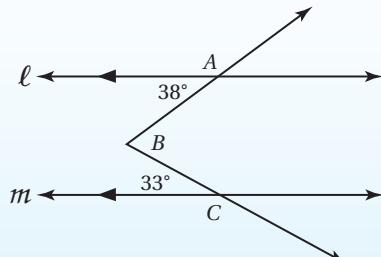
- طبق النظريات وال المسلمات على الشكل بعد التعديل.
- استنتاج المطلوب.



مثال

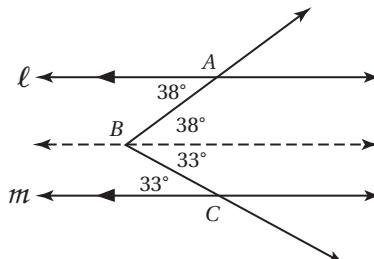
اقرأ المسألة جيداً، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلها.

في الشكل أدناه: قطعت $\angle ABC$ بالمستقيمين المتوازيين ℓ و m . ما قياس $\angle ABC$ ؟
اكتب إجابتك بالدرجات.



ارسم مستقيماً ثالثاً مساعداً يوازي المستقيمين ℓ و m مارأ بالنقطة B . وأوجد قياسات الزوايا باستعمال الزوايا المتبادلة داخلية:

حل المسألة

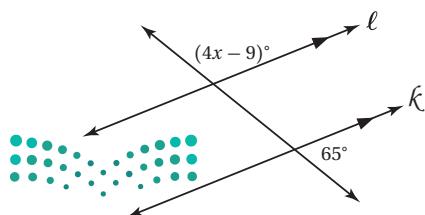


$$m\angle ABC = 38^\circ + 33^\circ = 71^\circ$$

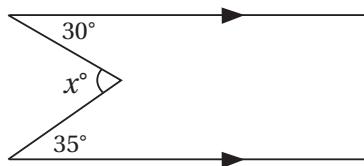
تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة:

(2) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



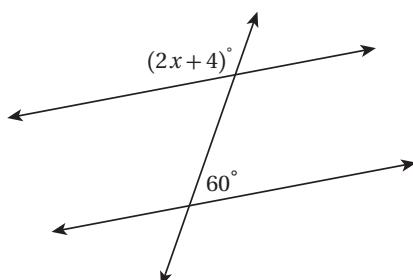
(1) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



اختبار تراكمي

للفصلين 2، 1

أسئلة الاختيار من متعدد

(5) ما قيمة x على الشكل أدناه؟

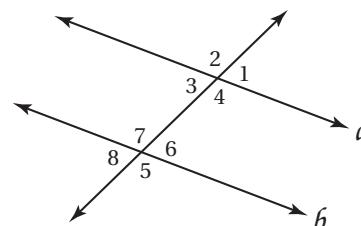
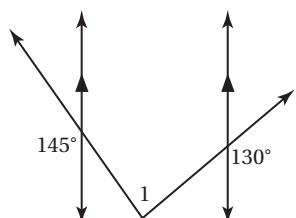
58 C

60 D

120 A

116 B

اقرأ كل سؤال فيما يأتي ، ثم اكتب رمز الإجابة الصائبة:

(1) في الشكل أدناه: إذا كان $b \parallel a$ ، فائي مما يأتي صحته ليست مؤكدة؟ $\angle 2 \cong \angle 5$ C $\angle 8 \cong \angle 2$ D $\angle 1 \cong \angle 3$ A $\angle 4 \cong \angle 7$ B(6) ما قياس $\angle 1$ في الشكل أدناه؟

95 C

100 D

85 A

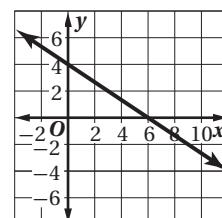
90 B

(2) أي مما يأتي مثال مضاد للعبارة أدناه؟

مجموع أي عددين فردية عدد فردي

 $6 + 2 = 8$ C $4 + 9 = 13$ D $3 + 3 = 6$ A $5 + 4 = 9$ B

(3) ما ميل المستقيم الممثل بيانياً أدناه؟

 $-\frac{2}{5}$ C $-\frac{1}{6}$ D $-\frac{2}{3}$ A $-\frac{1}{2}$ B(4) يمر المستقيم y بال نقطتين (1, 4) و (-5, -5).أوجد البعد بين المستقيم y وال نقطة $F(-4, 0)$.

4.0 وحدات C

4.2 وحدات D

3.3 وحدات A

3.6 وحدات B

إرشادات للاختبار

السؤال 6: يمكن أن يساعدك الرسم على حل المسألة؛ لذا ارسم مستقيماً ثالثاً موازياً يمر برأس الزاوية 1 ، ثم استعمل خصائص المستقيمات المتوازية والقاطع لحل المسألة.

أسئلة ذات إجابات قصيرة

- (11) اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة:
”إذا كان الشكل مربعاً، فإنه متوازي أضلاع“.

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة:

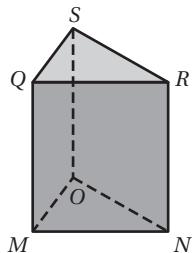
- (8) إذا علم مستقيماً ونقطة لا تقع عليه، فكم مستقيماً يمر بتلك النقطة ويواري المستقيم المعلوم؟

- (9) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بال نقطتين $(4, 3), (-2, -5)$.

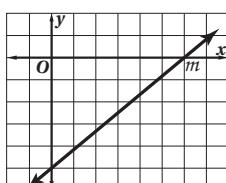
أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبيناً خطوات الحل.

- (12) استعمل الشكل أدناه لتحدد كلاً مما يأتي:



- (a) جميع القطع المستقيمة التي توازي \overline{MQ}
(b) جميع المستويات المتقاطعة مع المستوى SRN
(c) قطعة مستقيمة تخالف \overline{ON}

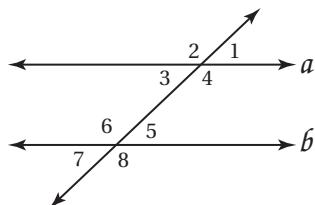


- (13) استعمل التمثيل البياني المجاور للإجابة عن كلٍ من الأسئلة الآتية:
(a) ما معادلة المستقيم $?m$?
(b) ما ميل المستقيم الذي يوازي المستقيم $?m$?
(c) ما ميل مستقيم عمودي على المستقيم $?m$?

- (10) أكمل البرهان الآتي :

$$m\angle 1 + m\angle 8 = 180^\circ \quad \text{المعطيات:}$$

$a \parallel b$ المطلوب:



البرهان:

المبررات	العبارات
(1) مُعطى	$m\angle 1 + m\angle 8 = 180^\circ$ (1)
(2) ?	$m\angle 1 = 180^\circ - m\angle 8$ (2)
(3) ?	$m\angle 5 + m\angle 8 = 180^\circ$ (3)
(4) خاصية الطرح للمساواة	$m\angle 5 = 180^\circ - m\angle 8$ (4)
(5) خاصية التعدي للمساواة أو (خاصية التعييض)	_____ (5)
(6) عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين	_____ (6)

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	...
2-5	2-1	1-3	2-3	2-4	2-6	2-5	2-2	2-2	2-6	2-4	1-1	2-2	فعد إلى ...

المثلثات المتطابقة

Congruent Triangles

فيما سبق:

درست القطع المستقيمة والزوايا والعلاقات بين قياساتها.

والآن:

- أطبق العلاقات الخاصة بالزوايا الداخلية والزوايا الخارجية للمثلثات.
- أحدد العناصر المتتظرة في مثلثات متطابقة، وأبرهن على تطابق المثلثات.
- أتعرف على خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

لماذا؟

لياقة: تستعمل المثلثات لتنمية إنشاءات ومعدات كثيرة، من بينها أجهزة اللياقة البدنية مثل هياكل الدراجات.



منظم أفكار

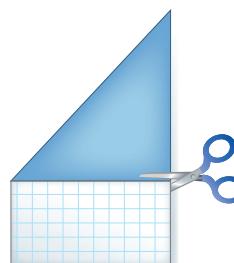
المطويات

المثلثات المتطابقة : اعمل المطوية التالية لتنظيم ملاحظاتك حول المثلثات المتطابقة. ابدأ بثلاث أوراق رسم بياني وورقة مقواة من الحجم نفسه.

- 2** ثبتت الحافة، بحيث تتشكل الأوراق دفترًا، واتكتب عنوان الفصل في الصفحة الأولى، ورقم كل درس وعنوانه في باقي الصفحات.



- 1** وضع أوراق الرسم البياني فوق الورقة المقواة، ثم اقطع الأوراق لتشكل مثلثاً، كما في الشكل، ثم قص الورق الزائد.



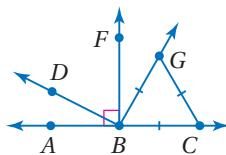


التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

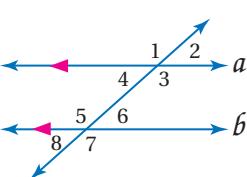
مراجعة سريعة



مثال 1

صنف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادة أو منفرجة، ثم صنف $\triangle GBC$ بحسب أضلاعه.

- (a) تقع النقطة G خارج الزاوية القائمة $\angle ABF$ ؛ لذا تكون $\angle ABG$ زاوية منفرجة.
 (b) تقع النقطة D داخل الزاوية القائمة $\angle FBA$ ؛ لذا تكون $\angle DBA$ زاوية حادة. بما أن أطوال أضلاع المثلث جميعها متطابقة، إذن هو متطابق الأضلاع.



مثال 2

في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 4 = 42^\circ$

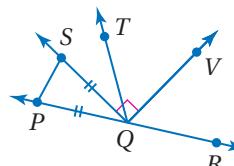
$\angle 7$ و $\angle 1$ زاويتان متبادلتان خارجيّاً؛ لذا فهما زاويتان متطابقتان. $\angle 1$ و $\angle 4$ تشكلان زاوية مستقيمة؛ لذا فهما زاويتان متكاملتان. يتبع مما سبق أن $\angle 7$ و $\angle 4$ متكاملتان؛ إذن: $42^\circ - 42^\circ = 180^\circ$ ، أي $m\angle 7 = 138^\circ$.

مثال 3

أوجد المسافة بين النقطتين $J(5, 2)$, $K(11, -7)$

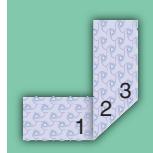
$$\begin{aligned} JK &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{صيغة المسافة} \\ &\text{بين نقطتين} \\ &= \sqrt{(11 - 5)^2 + [(-7) - 2]^2} && \text{عوْض} \\ &= \sqrt{6^2 + (-9)^2} && \text{اطرح} \\ &= \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} && \text{بسط} \end{aligned}$$

اختبار سريع



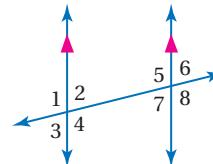
صنف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادة أو منفرجة، ثم صنف $\triangle SQP$ بحسب أضلاعه.

- (1) $\angle TQV$ (2) $\angle VQS$ (3) $\angle PQV$



(4) تصاميم ورقية: اطُل قطعة مستطيلة من الورق كما في الشكل المجاور، بحيث تتشكل زاوية قائمة من جهة الطي، ثم صنف كلاً من الزوايا المرقمة إلى قائمة أو منفرجة أو حادة.

جبر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغير المطلوب في كلٌ من السؤالين الآتيين. ووضح إجابتك:



- (5) أوجد قيمة x إذا علمت أن: $m\angle 3 = (x - 12)^\circ$, $m\angle 6 = 72^\circ$, وأن $72^\circ = 2y + 32^\circ$.
 (6) أوجد قيمة y ، إذا علمت أن $2y + 32^\circ = 180^\circ$ ، وأن $2y + 32^\circ = 3(y - 3)^\circ$.

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٌ مما يأتي:

- (7) $R(8, 0), S(-9, 6)$ (8) $X(-2, 5), Y(1, 11)$

(9) **خرائط:** قسمت مني خريطة المملكة برسم خطوط رأسية وأفقية، بحيث تمثل الوحدة عليها 35 كيلومترًا. إذا كان موقع المدينة التي تسكنها منى على الخريطة عند النقطة $(0, 0)$ ، وكانت مدينة نجران تقع تقريبًا عند النقطة $(5, 2.2)$ ، فاحسب المسافة بين المدينتين إلى أقرب كيلومتر تقريبًا.





تصنيف المثلثات

Classifying triangles

3-1

فيما سبق:

درست قياس الزوايا
وتصنيفها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- استعمل تطبيق المثلثات
- وفقاً لأضلاعها أو زواياها
- في إيجاد قيمة مجهولة.

المفردات:

المثلث الحاد الزاوي
acute triangle

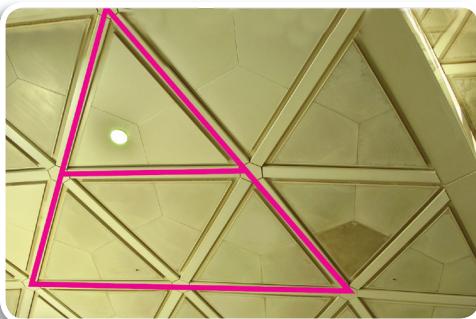
المثلث المنفرج الزاوي
obtuse triangle

المثلث القائم الزاوي
right triangle

المثلث المتطابق الأضلاع
equilateral triangle

المثلث المتطابق الضلعين
isosceles triangle

المثلث المختلف الأضلاع
scalene triangle



لماذا؟
يعد المثلث عنصراً زخرفياً مميزاً في العمارة التقليدية في المملكة العربية السعودية، كما يلاحظ ذلك في صالات المسافرين بمطار الملك خالد الدولي بمدينة الرياض.

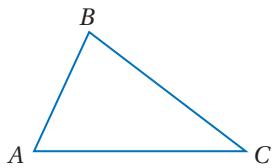
تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها: يكتب المثلث ABC على الصورة $\triangle ABC$ ، وتُسمى عناصره باستعمال

الأحرف A, B, C كما يلي:

• أضلاع $\triangle ABC$ هي: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$:

• الرؤوس هي: A, B, C :

• الزوايا هي: $\angle A$ أو $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle BAC$ أو $\angle BCA$ أو $\angle ABC$.



وتصنّف المثلثات بطريقتين: وفقاً لزواياها أو أضلاعها. وتحتوي جميع المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، وستعمل الزاوية الثالثة لتصنيف المثلث.

مطويتك

اضف إلى

تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها

مفهوم أساسى

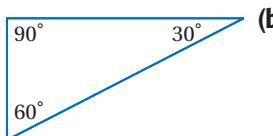
مثلث قائم الزاوية إحدى الزوايا قائمة	مثلث منفرج الزاوية إحدى الزوايا منفرجة	مثلث حاد الزايا 3 زوايا حادة
--	--	--

يمكن تصنّيف أي مثلث وفقاً لزواياه إلى أحد التصنيفات السابقة، بمعرفة قياسات زواياه.

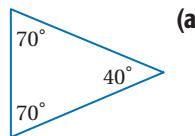
تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها

مثال 1

صنّف كلاً من المثلثين الآتيين وفقاً لزواياه:



قياس إحدى زوايا هذا المثلث 90° ، بما أن إحدى زواياه قائمة، فإنه مثلث قائم زاوية.



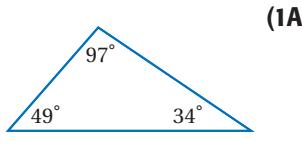
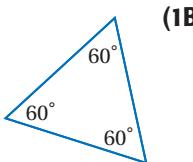
زوايا المثلث الثلاث حادة؛ لذا المثلث حاد زوايا.

مراجعة المفردات

- الزاوية الحادة : زاوية يقل قياسها عن 90°
الزاوية القائمة : زاوية قياسها 90°
الزاوية المنفرجة : زاوية قياسها أكبر من 90°

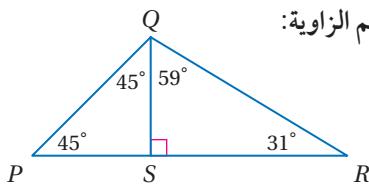
تحقق من فهمك

صنف كلاً من المثلثين الآتيين وفقاً لزواياه:



تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً لزواياها

مثال 2



صنف $\triangle PQR$ إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

تقع النقطة S داخل $\angle PQR$ ، وحسب مسلمة جمع قياسات الزوايا

$$m\angle PQR = m\angle PQS + m\angle SQR$$

$$m\angle PQR = 45^\circ + 59^\circ = 104^\circ$$

وبما أن إحدى زوايا $\triangle PQR$ منفرجة، فإنه منفرج الزاوية.

تحقق من فهمك

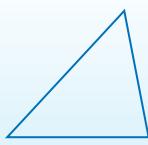
- (2) استعمل الشكل أعلاه لتصنيف $\triangle PQS$ إلى: حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها : يمكن كذلك تصنيف المثلثات بحسب عدد الأضلاع المتطابقة فيها. وللدلالة على تطابق ضلعين في مثلث، يوضع عدد متساوٍ من الشرطات الصغيرة على الضلعين المتطابقين.

مفهوم أساسى

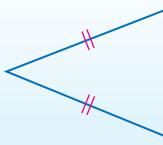
تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

مثلث مختلف الأضلاع



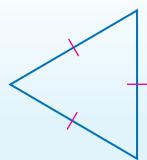
لا توجد أضلاع متطابقة

مثلث متطابق الأضلاع



ضلعين على الأقل متطابقان

مثلث متطابق الأضلاع

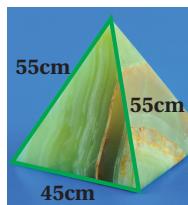


3 أضلاع متطابقة

إن المثلث المتطابق الأضلاع حالة خاصة من المثلث المتطابق الضلعين.

مثال 3 من واقع الحياة

تحقق من فهمك



فن العمارة : صنف المثلث في الشكل المجاور وفقاً لأضلاعه. في المثلث ضلعان قياس كلّ منهما 55 cm؛ أي أنه في المثلث ضلعين متطابقين. فيكون المثلث متطابق الضلعين.



الربط مع الحياة

في العديد من السيارات، تُشَغَّل أصوات الخطر بالضغط على زر صغير قرب المقدمة. يكون شكل هذا الزر عادة مثلثاً أحمر أو برتقاليًّاً صغيراً كما في الشكل أعلاه.

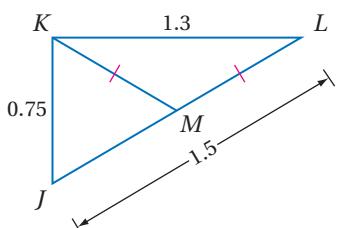
عندما يُشَغَّل هذا الزر تُضيء أصوات إشارات الانعطاف بطريقة تحذيرية، وبنمط خاص يسهل رؤية السيارة من قبل السائقين الآخرين.

- (3) **قيادة السيارة والسلامة :** صنف شكل زر ضوء الخطر في الهاشميمين الضفحة وفقاً لأضلاعه.

وزارة التعليم

مثال 4

تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً للأضلاعها



إذا كانت M نقطة متصرف \overline{JK} ، فصنف $\triangle JKM$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضح إجابتك.

من تعريف نقطة المتصرف $JM = ML$

مسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة

$$JM + ML = JL$$

عُوض

$$ML + ML = 1.5$$

بسط

$$2ML = 1.5$$

اقسم الطرفين على 2

$$ML = 0.75$$

$$JM = ML = 0.75$$

وبما أن $KM = ML = 0.75$ ، فإن $\overline{KM} \cong \overline{ML}$

وهكذا تكون قياسات أضلاع المثلث الثلاثة متساوية، أي أن الأضلاع الثلاثة متطابقة؛ لذا فإن المثلث متطابق الأضلاع.

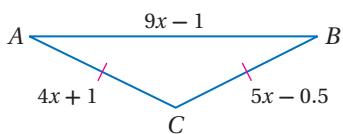
تحقق من فهنك

4) صنف $\triangle KML$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضح إجابتك.

يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والمتطابقة الضلعين؛ لإيجاد قيمة مجهولةٍ كما في المثال الآتي:

مثال 5

إيجاد قيمة مجهولة



جبر: أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الضلعين في الشكل المجاور.

الخطوة 1: أوجد قيمة x .

مُعطى

$$AC = CB$$

عُوض

$$4x + 1 = 5x - 0.5$$

اطرح $4x$ من الطرفين

$$1 = x - 0.5$$

اجمع 0.5 إلى الطرفين

$$1.5 = x$$

الخطوة 2: عُوض لإيجاد طول كل ضلع من أضلاع المثلث.

مُعطى

$$AC = 4x + 1$$

$$x = 1.5$$

$$= 4(1.5) + 1 = 7$$

مُعطى

$$CB = AC$$

$$AC = 7$$

$$= 7$$

مُعطى

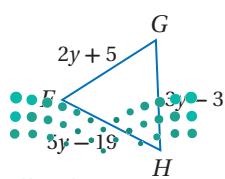
$$AB = 9x - 1$$

$$x = 1.5$$

$$= 9(1.5) - 1$$

بسط

$$= 12.5$$



تحقق من فهنك

5) أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع FGH .

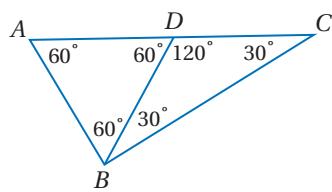
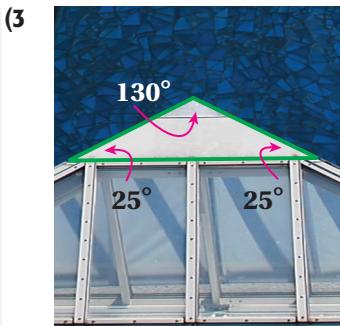
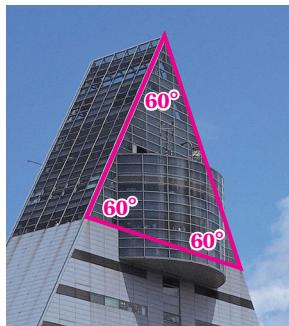
ارشادات للدراسة

تحقق

للحتحقق من الإجابة في المثال 5، اختبر ما إذا كانت $CB = AC$ عندما نعوض بـ 1.5 مكان x في العبارة $5x - 0.5$ التي تمثل CB .

$$\begin{aligned} CB &= 5x - 0.5 \\ &= 5(1.5) - 0.5 \\ &= 7 \checkmark \end{aligned}$$

المثال 1 فن العمارة: صنف كلاً من المثلثات الآتية وفقاً لزواياه.



صنف كلاً من المثلثات الآتية وفقاً لزواياه.

المثال 2

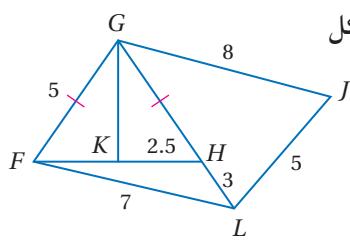
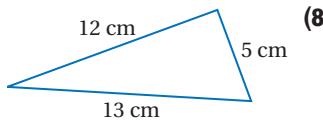
$$\triangle ABD \quad (4)$$

$$\triangle BDC \quad (5)$$

$$\triangle ABC \quad (6)$$

صنف كلاً من المثلثين الآتيين وفقاً لأضلاعه.

المثال 3



إذا كانت النقطة K هي منتصف \overline{FH} ، فصنف كلاً من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

المثال 4

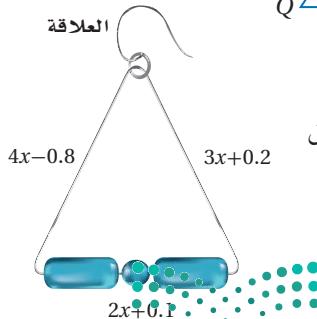
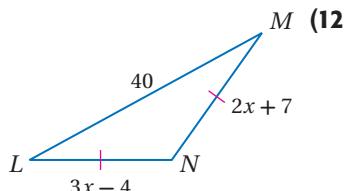
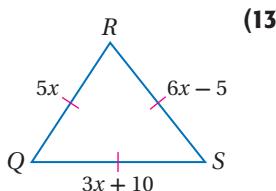
$$\triangle FGH \quad (9)$$

$$\triangle GJL \quad (10)$$

$$\triangle FHL \quad (11)$$

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كلاً من المثلثين الآتيين.

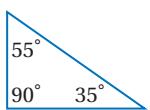
المثال 5



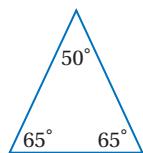
(14) مجهرات: افترض أن لديك سلكاً من الفولاذ غير قابل للصدأ، وتريد أن تشكّله لعمل قرطاً. إذا كان الجزء المثلث من القرط متطابق الضلعين، وأبعاده كما في الصورة، وطول جزء العلاقة 1.5 cm، فكم سنتمتراً من السلك تحتاج لعمل القرط؟ بُرّ إجابتك.

تدريب وحل المسائل

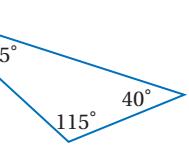
المثال 1 صنف كلاً من المثلثات الآتية وفقاً لزواياه:



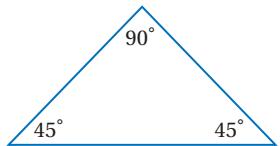
(17)



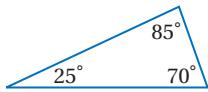
(16)



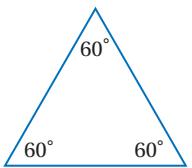
(15)



(20)

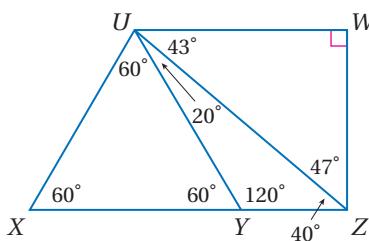
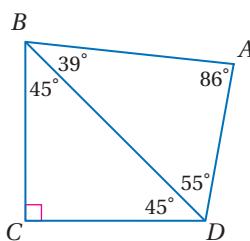


(19)



(18)

المثال 2 صنف كلاً من المثلثات الآتية وفقاً لزواياه:



$\triangle UYZ$ (21)

$\triangle BCD$ (22)

$\triangle ADB$ (23)

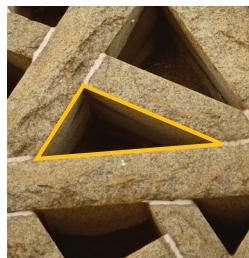
$\triangle UXZ$ (24)

$\triangle UWZ$ (25)

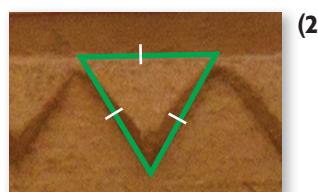
$\triangle UXY$ (26)

المثال 3

صنف كلاً من المثلثين الآتيين وفقاً لأضلاعه:



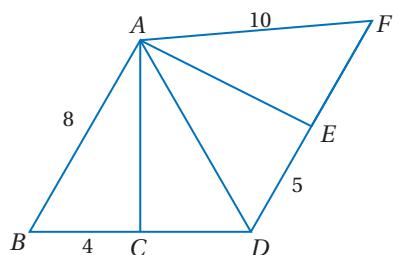
(28)



(27)

المثال 4

إذا كانت النقطة C هي متوسط \overline{BD} ، والنقطة E متوسط \overline{DF} ، فصنف كلاً من المثلثات الآتية وفقاً لأضلاعها:



$\triangle ADF$ (30)

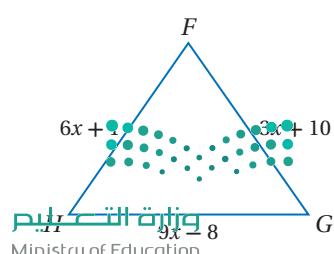
$\triangle ABC$ (29)

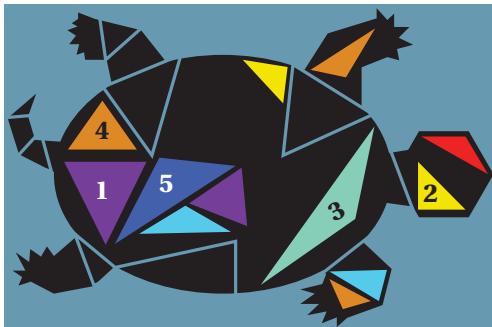
$\triangle ABD$ (32)

$\triangle ACD$ (31)

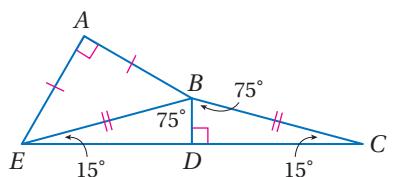
المثال 5

جبر: إذا علمت أن المثلث $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع، فأوجد قيمة x وطول كل ضلع من أضلاعه.





(34) فن تشكيلي: صنف كلاً من المثلثات المرقمة في الشكل وفق زواياه ثم وفق أضلاعه. استعمل المثلث القائم الزاوية لتصنيف الزوايا، والمسطرة لقياس الأضلاع.



صنف كلاً من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:

$\triangle BDC$ (37)

$\triangle EBC$ (36)

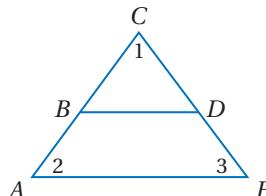
$\triangle ABE$ (35)

هندسة إحداثية: أوجد أطوال أضلاع $\triangle XYZ$ في كلٍ من السؤالين الآتيين، وصنفه وفق أضلاعه:

$$X(7, 6), Y(5, 1), Z(9, 1) \quad (39)$$

$$X(-5, 9), Y(2, 1), Z(-8, 3) \quad (38)$$

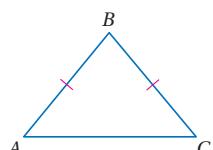
(40) برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين تبين فيه أن $\triangle BCD$ متطابق الزوايا، إذا كان $\triangle ACE$ متطابق الزوايا، وكانت $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.



جبر: أوجد قيمة x وأطوال أضلاع المثلث في كلٍ مما يأتي:

$$\text{. } FG = 3x - 10, GH = 2x + 5, HF = x + 20 \quad (41)$$

$$\text{. } \triangle RST \text{ متطابق الأضلاع على أربعة أمثل } x, \text{ ويزيد } ST \text{ سبعة على مثل } x, \text{ ويزيد } TR \text{ واحداً على خمسة أمثل } x. \quad (42)$$



(43) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين قياسَيِّ الزاويتين اللتين تقابلان ضلعين متطابقين في مثلث، ومجموع زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

(a) هندسياً: ارسم أربعة مثلثات متطابقة الضلعين، منها مثلث حاد الزوايا ومثلث قائم الزاوية، ومثلث منفرج الزاوية. وفي كلٍ من هذه المثلثات سُمِّي الرأسين المقابلين للضلعين المتطابقين C, A ، وسمِّي الرأس الثالث B . ثم قس زوايا كل مثلث، واكتبه على كل زاوية قياسها.

(b) جدولياً: رتب قياسات الزوايا في جدول. وضمنه عموداً تكتب فيه مجموع قياسات هذه الزوايا.

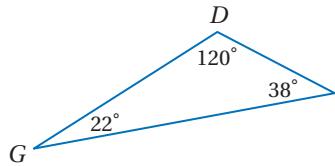
(c) لفظياً: خمن العلاقة بين قياسَيِّ الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين، ثم خمن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

(d) جبرياً: إذا كان قياس إحدى الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين هي **مُطبَّع متطابق** الضلعين هو x ، فاكتبه عبارتين جبريتين تمثلان قياسَيِّ الزاويتين الآخرين. وفسر إجابتك.

وزارة التعليم

Ministry of Education

2022 - 1444



(44) **اكتشف الخطأ:** تقول ليلى: إن $\triangle DFG$ منفرج الزاوية، لكن نوال لا تتفقها الرأي وتقول: إن عدد الزوايا الحادة في المثلث أكثر من عدد الزوايا الممفرجة؛ لذا فإن المثلث حاد الزوايا. أتى هما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

تبير: قرر ما إذا كانت الجملة في كلٍ مما يأتي صحيحة أحياناً أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبداً. ووضح إجابتك.

(45) المثلث المتطابق الزوايا هو مثلث قائم الزاوية أيضًا.

(46) المثلث المتطابق الأضلاع هو مثلث متطابق الضلعين أيضًا.

(47) **تحدد:** إذا كان طولاً ضلعين من أضلاع مثلث متطابق الأضلاع $5x + 5$ وحدات ، $5 - 7x$ وحدات، فما محطيه؟ فسر إجابتك.

(48) **اكتب:** فسر لماذا يُعد تصنيف المثلث المتطابق الزوايا أنه مثلث حاد متطابق الزوايا، تصنيفاً غير ضروري؟

تدريب على اختبار

(50) ما ميل المستقيم الذي معادلته $2x + y = 5$ ؟

-1 C

2 A

-2 D

$\frac{5}{2}$ B

(49) جبر: اشتري خالد معجماً من معرض الكتب بعد تخفيض نسبته 40%. إذا كان ثمنه قبل التخفيض 84.50 ريالاً، فكم ريالاً وفْر خالد؟

33.80 C 50.70 A

32.62 D 44.50 B

مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين في كلٍ مما يأتي: (الدرس 2-6)

$$y = x + 2, y = x - 4 \quad (52)$$

$$x = -2, x = 5 \quad (51)$$

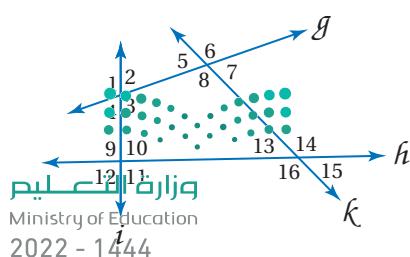
(53) **كرة قدم:** رسم مصطفى الخطين الجانبيَّين لتخطيط ملعب كرة قدم، ووضع علامات على أحدهما، بحيث كانت المسافة بين أي علامتين متتابعتين m, 9، ثم أنشأ عمدة عند هذه العلامات. فسر لماذا تكون هذه العمدة متوازية. (الدرس 2-3)

حدد الفرض والتبيّن في كل جملة شرطية فيما يأتي: (الدرس 1-3)

(54) إذا كان الرجل كهلاً، فإن عمره 40 سنة على الأقل.

(55) إذا كان $10 = 2x + 6$ ، فإن $x = 2$.

استعد للدرس اللاحق



صنف كل زوج من الزوايا مما يأتي إلى متبادلتين داخلياً أو متبادلتين خارجيًّا أو متناظرتين أو متحالفتين:

(56) $\angle 3$ و $\angle 5$

(57) $\angle 9$ و $\angle 4$

(58) $\angle 11$ و $\angle 13$

(59) $\angle 1$ و $\angle 11$

زوايا المثلثات

Angles of Triangles

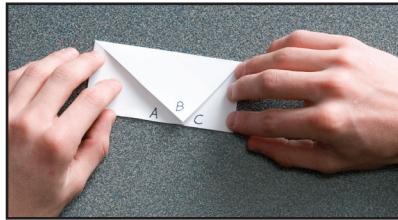
3-2



ستجد علاقات خاصة بين زوايا المثلث في هذا المعمل.

الخطوة 1: النشاط 1 الزوايا الداخلية للمثلث

الخطوة 1:



اطو الرأسين C , A حتى يلتقيا مع الرأس B .
أعد تسمية الرأسين C , A بعد الطيّ.



اطو الرأس B في كل مثلث، على أن يكون خط الطي موازيًا لـ AC . وأعد تسمية الرأس B على الورقة بعد طيّها.



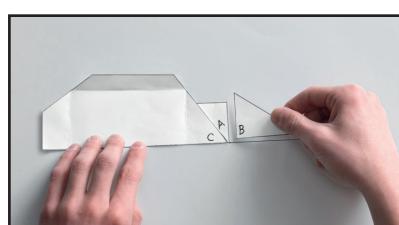
ارسم عدة مثلثات مختلفة ثم قصّها، وسمّ رؤوس كل مثلث A , B , C .

حلّ النتائج:

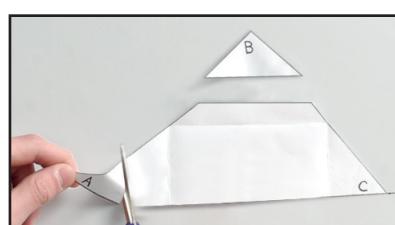
- (1) الزوايا A , B , C تُسمى زوايا داخلية في المثلث ABC . ما اسم الشكل الهندسي الناتج بعد التقاء الرؤوس A , B , C في الخطوة 3؟
- (2) حمّن مجموع قياسات الزوايا الداخلية في المثلث.

الخطوة 2: النشاط 2 الزوايا الخارجية للمثلث

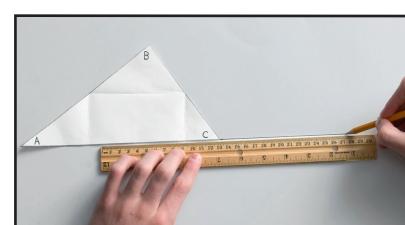
الخطوة 1:



ضع $\angle B$, $\angle A$ على أن تشکلا الزاوية المجاورة لـ $\angle C$ كما في الشكل.



افصل الزاويتين B , A في كل مثلث.

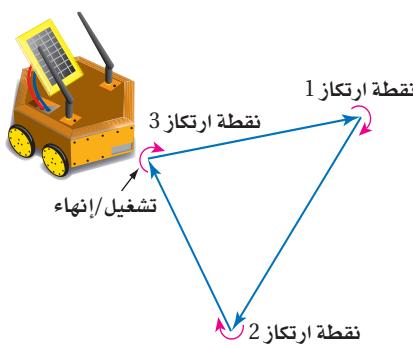


ابسط المثلثات التي استعملتها في النشاط 1، وضع كل مثلث على ورقة منفصلة. مدد AC كما في الشكل.

حلّ النتائج:

- (3) الزاوية المجاورة لـ C تُسمى زاوية خارجية للمثلث ABC . حمّن العلاقة بين الزاويتين B , A من جهة، والزاوية الخارجية عند C .
- (4) كرّر خطوات النشاط 2 بالنسبة للزاويتين الخارجيتين عند B , A في كل مثلث.
- (5) حمّن العلاقة بين قياس الزاوية الخارجية ومجموع قياسي الزاويتين الداخليةين عدا المجاورة لها.





زوايا المثلثات Angles of Triangles

3-2

فيما سبق:

درست تصنيف المثلثات وفقاً لقياسات أضلاعها وزواياها.

(الدرس 1)

والآن:

- أطبق نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية لل مثلث.

المفردات:

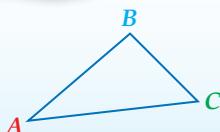
المستقيم المساعد
auxiliary line
الزاوية الخارجية
exterior angle
الزاويتان الداخلية
remote interior angles
البرهان التسلسلي
flow proof
النتيجة
corollary

نظريّة مجموّع قياسات زوايا المثلث

التعبير اللفظي: مجموّع قياسات زوايا المثلث يساوي 180°

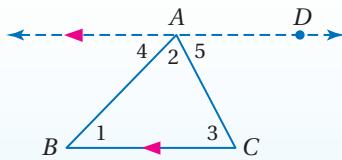
$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$$

مثال:



يتطلب برهان نظرية مجموّع قياسات زوايا المثلث استعمال مستقيم مساعد، **المستقيم المساعد** هو مستقيم إضافي (أو قطعة مستقيمة إضافية) يتم رسمه للمساعدة على تحليل العلاقات الهندسية، وكما تُبرر العبارات والاستنتاجات المستعملة في البرهان، فإن خصائص المساعد يجب تبريرها.

برهان نظرية مجموّع قياسات زوايا المثلث



المعطيات: $\triangle ABC$

$$\text{المطلوب: } m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$$

البرهان: من النقطة A ارسم المستقيم AD موازياً لـ \overleftrightarrow{BC} .

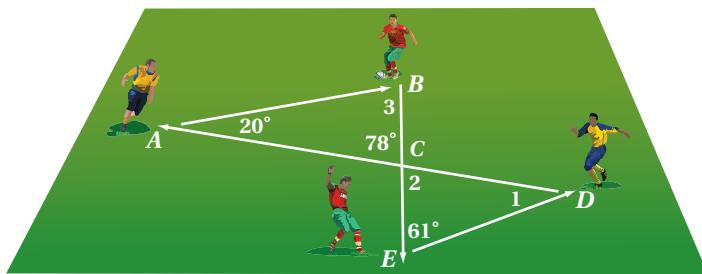
المبررات	العبارات
(1) مُعطى	$\triangle ABC$ (1)
(2) تعريف الزاويتين المجاورتين على مستقيم	$m\angle 4, m\angle 5$ (2)
(3) الزاويتان المجاورتان على مستقيم متكمالتان.	$m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ$ (3)
(4) تعريف الزاويتين المتكمالتين.	$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$ (4)
(5) مسلمة جمع قياسات الزوايا	$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$ (5)
(6) بالتعويض	$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$ (6)
(7) نظرية الزاويتين المتبدلتين داخلياً	$m\angle 4 \cong m\angle 1, m\angle 5 \cong m\angle 3$ (7)
(8) تعريف تطابق الزوايا	$m\angle 4 = m\angle 1, m\angle 5 = m\angle 3$ (8)
(9) بالتعويض	$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$ (9)



يمكن استعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث لإيجاد الزاوية الثالثة في المثلث إذا علم قياساً زاويته الأُخريين.

مثال 1 من واقع الحياة استعمال نظرية مجموع زوايا المثلث

كرة قدم: بيّن الشكل مسار الكرة في تدريب على تمريراتٍ نفذها أربعة لاعبين. أوجد قياسات الزوايا المرقمة.



المعطيات: في الشكل أعلاه، قياس الزوايتين C , 78° في المثلث ABC , 20° ،

قياس الزاوية E في المثلث CED يساوي 61° .

المطلوب: إيجاد قياسات الزوايا المرقمة.

خطط: أوجد $m\angle 3$ باستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث مستعملاً قياسياً الزوايتين **الأُخريين** في $\triangle ABC$. ثم استعمل نظرية الزوايتين المتقابلين بالرأس لإيجاد $m\angle 2$ ، وعندما يمكنك إيجاد $m\angle 1$ في $\triangle CDE$

نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180^\circ$$

حل:

عَوْض

$$m\angle 3 + 20^\circ + 78^\circ = 180^\circ$$

بَسْط

$$m\angle 3 + 98^\circ = 180^\circ$$

اطرح 98 من الطرفين

$$m\angle 3 = 82^\circ$$

$m\angle 2 = 78^\circ$ متطابقتان؛ لأنهما زوايتان متقابلتان بالرأس؛ لذا فإن $m\angle 2 = 78^\circ$

استعمل $m\angle 2$ و $m\angle 3$ في $\triangle CDE$ لإيجاد $m\angle 1$.

نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180^\circ$$

عَوْض

$$m\angle 1 + 78^\circ + 61^\circ = 180^\circ$$

بَسْط

$$m\angle 1 + 139^\circ = 180^\circ$$

اطرح 139 من الطرفين

$$m\angle 1 = 41^\circ$$

تحقق: يجب أن يكون مجموع قياسات زوايا كلٌّ من $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ مساوياً لـ 180°

✓ $\triangle ABC: m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82^\circ + 20^\circ + 78^\circ = 180^\circ$

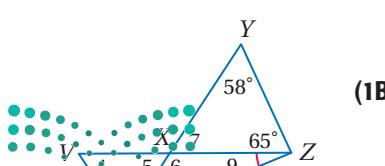
✓ $\triangle CDE: m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41^\circ + 78^\circ + 61^\circ = 180^\circ$

تحقق من فهمك

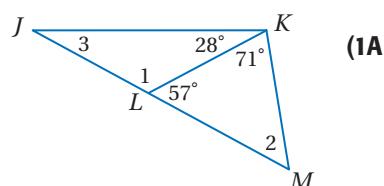
إرشادات للدراسة

تجزئة المسألة

تُجزأ المسائل المركبة إلى مسائل يمكن التعامل مع كل منها بسهولة؛ مما يساعد على حلها. فمثلاً في المثال 1: عليك أن تجد $m\angle 2$ قبل أن تحاول إيجاد $m\angle 1$.

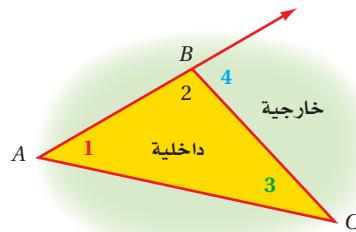


أوجد قياسات الزوايا المرقمة فيما يأتي:



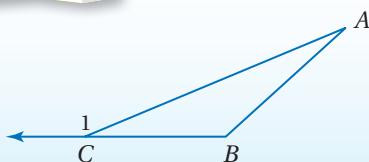
نظريّة الزاویة الخارجیة للمثلث: بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث، يمكن أن يكون للمثلث زوايا خارجية كل منها تتشكل من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع مجاور له. ولكل زاوية خارجية زاويتان داخليتان بعيدتان غير مجاورتين لها.

زاویة خارجیة لـ $\triangle ABC$ ، $\angle 4$
وزاويتها الداخلية البعیدتان
هما $\angle 1$ ، $\angle 3$.



نظريّة الزاویة الخارجیة

أضف إلى
مطويتك



قياس الزاویة الخارجیة في مثلث يساوى مجموع قیاسی
الزوايتيین الداخلیتین البعیدتین.

مثال: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

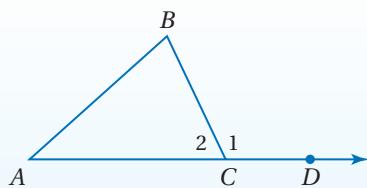
في البرهان التسلسلي تُستعمل عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبيّن التسلسل المنطقی لهذه العبارات.
ويُكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرر العبارة المكتوبة داخله، ويمكّنك برهنة نظرية الزاویة الخارجیة
باستعمال البرهان التسلسلي كما يأتي.

قراءة الرياضيات

البرهان بالخط

يُسمى البرهان التسلسلي
أحياناً البرهان بالخط
التسلسلي.

البرهان



المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

برهان تسلسلي:

$\angle 1, \angle 2$
تعريف الزاويتين المجاورتين على مستقيم

$\angle 1, \angle 2$
متكمالتان
الزوايتيان المجاورتين على مستقيم متكمالتان

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180$
تعريف الزاويتين المتكمالتين

معطي
 $m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180$
نظريّة مجموع زوايا المثلث

بالتقسيم

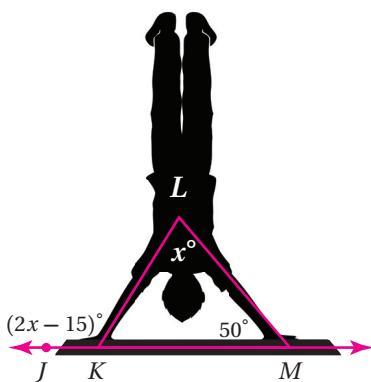
$m\angle A + m\angle B = m\angle 1$
بالطرح

إرشادات للدراسة

البرهان التسلسلي
يمكن أن يكتب البرهان
التسلسلي بصورة رأسية
أو أفقيّة.

يمكن إيجاد قياسات الزوايا المجهولة باستعمال نظرية الزاوية الخارجية.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال نظرية الزاوية الخارجية



اللياقة البدنية: أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضع الذي يظهر فيه المتدرب في الصورة.

نظرية الزاوية الخارجية

$$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$$

عَوْض

$$x + 50 = 2x - 15$$

اطرح x من الطرفين

$$50 = x - 15$$

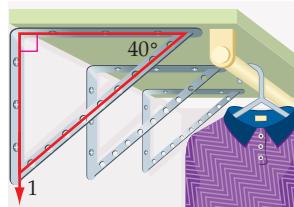
اجمع 15 إلى الطرفين

$$65 = x$$

$$\text{لذا فإن } \angle JKL = (2(65) - 15)^\circ = 115^\circ$$



الربط مع الحياة



(2) تنظيم خزانة الملابس: تبّت لطيفة جسور الرفوف على جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$ التي يصنعها الجسر مع جدار الخزانة؟

النتيجة هي نظرية يكون برهانها مبنياً على نظرية أخرى، ويمكن استعمال النتيجة كأي نظرية أخرى لتبرير خطوات برهان آخر، أو حلّ أسئلة ذات علاقة، وفيما يلي نتائج مباشرة لنظرية مجموع زوايا المثلث:

المدرب المتخصص
يعلم مدربو اللياقة البدنية
المدربين طرائق متنوعة
ويحفزونهم على أدائهم، ومن
المهم أن يحمل هؤلاء المدربون
شهادات تخصص في مجال
عملهم.

أضف إلى

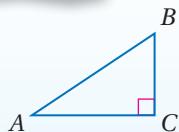
مطويتك

مجموع زوايا المثلث

نتائجنا

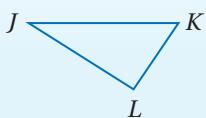
3.1 الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان.

مثال: إذا كانت $\angle C$ قائمة، فإن $\angle A$, $\angle B$ زاويتان متتامتان.



3.2 توجد زاوية قائمة واحدة، أو زاوية منفرجة واحدة على الأكثـر في أي مثلث.

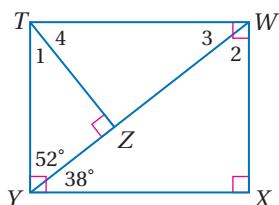
مثال: إذا كانت $\angle L$ قائمة، فإن $\angle K$, $\angle J$ زاويتان حادتان.



ستبرهن النتيجيـتين 3.2 ، 3.1 في السـؤالـين 23 ، 24

إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

مثال 3



أوجـد قـيـاسـ كلـ منـ الزـاوـيـاـ المـرـقـمـةـ فيـ الشـكـلـ المـجاـوـرـ.

زاويـتانـ حـادـتـانـ فيـ مـثـلـثـ قـائـمـ زـاوـيـةـ

$$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90^\circ$$

عـوـضـ

$$m\angle 1 + 52^\circ = 90^\circ$$

اطـرـحـ 52ـ مـنـ الـطـرـفـينـ

$$m\angle 1 = 38^\circ$$

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

عـنـدـمـاـ تـجـدـ قـيـاسـاتـ زـاوـيـاـ مـثـلـثـ تـأـكـدـ دـائـمـاـ أـنـ مـجمـوعـ هـذـهـ الـقـيـاسـاتـ يـسـاـوـيـ 180^\circـ

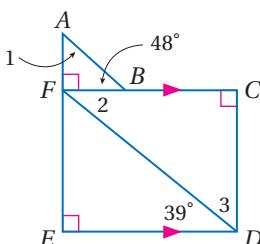
تحقق من فهمك

∠2 (3A)

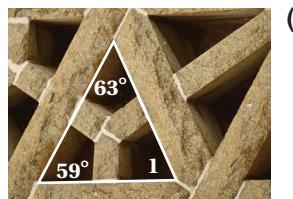
∠3 (3B)

∠4 (3C)

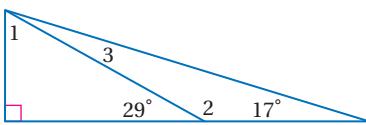
أوجد قياس كلٌ من الزوايا الممرّمة في كُلٍ من السؤالين الآتيين:



(2)



المثال 1



كراسي الشاطئ: تشكل دعامة المقعد مع بقية الهيكل مثلثاً كما هو موضح في الشكل المجاور. أوجد كلاً من القياسات الآتية:

$m\angle 4$ (4)

$m\angle 2$ (3)

$m\angle 3$ (6)

$m\angle 1$ (5)

معتمداً على الشكل المجاور، أوجد القياسات التالية:

المثال 3

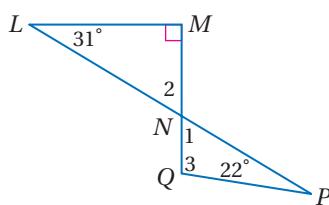
$m\angle 1$ (7)

$m\angle 3$ (8)

$m\angle 2$ (9)

تدريب وحل المسائل

أوجد قياس الزوايا الممرّمة في كُلٍ من السؤالين الآتيين:

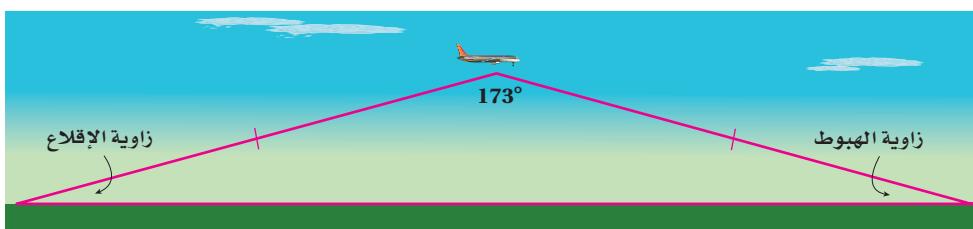


(11)



المثال 1

(12) طائرات: يمكن تمثيل خط الطيران في رحلة ما باستعمال ضلعٍ مماثلٍ مثلث كما في النموذج أدناه، علمًا بأن المسافة التي تقطعها الطائرة صعودًا تساوي المسافة التي تقطعها هبوطًا.



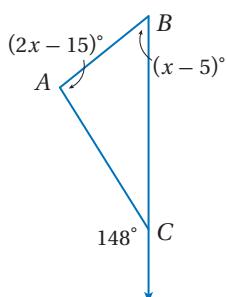
(a) صنف النموذج بحسب الأضلاع والزوايا.

(b) إذا كانت زاويتا الإقلاع والهبوط متطابقتين، فأوجد قياس كلٍ منهما.

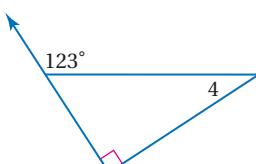
المثال 2

أوجد كلاً من القياسات الآتية:

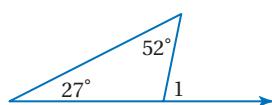
$m\angle ABC \text{ (15)}$



$m\angle 4 \text{ (14)}$



$m\angle 1 \text{ (13)}$

**المثال 3**

أوجد كلاً من القياسات الآتية:

$m\angle 2 \text{ (17)}$

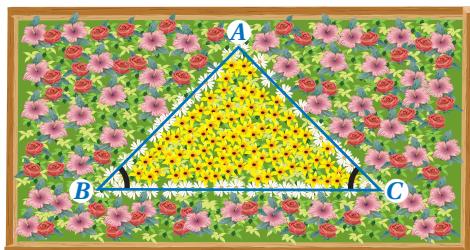
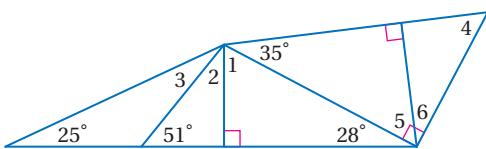
$m\angle 1 \text{ (16)}$

$m\angle 5 \text{ (19)}$

$m\angle 3 \text{ (18)}$

$m\angle 6 \text{ (21)}$

$m\angle 4 \text{ (20)}$



(22) بستنة: استَبَّثَ مهندس زراعي زهور أقحوان في حوض على شكل مثلث متطابق الضلعين. إذا رغب المهندس في أن يكون قياس $\angle A$ ثلاثة أمثال قياس كل من $\angle B$, $\angle C$ ، فما قياس كل زاوية في هذا المثلث؟

**الربط مع الحياة**

يصل طول ساق زهرة الأقحوان إلى 30in ، وتنقسم هذه النباتات إلى 13 صنفًا بحسب أشكال أزهارها.

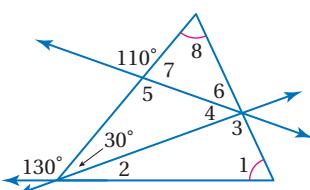
براهين: برهن كلاً مما يأتي مستعملاً طريقة البرهان المذكورة.

(24) النتيجة 3.2 باستعمال البرهان الحر

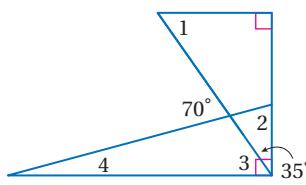
(23) النتيجة 3.1 باستعمال البرهان التسلسلي

أوجد قياس كلاً من الزوايا المرقمة فيما يأتي:

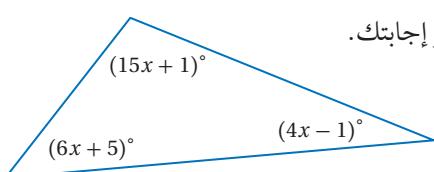
(26)



(25)



(27) جبر: صُنِّفَ المثلث في الشكل المجاور وفقاً لزواياه. وفسِّرْ إجابتك.



(28) قرر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خطأً، واذكر مثلاً مضاداً لها إذا كانت خطأً، ودعّم استنتاجك إذا كانت صحيحة:



"إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90 ، فإن المثلث حادٍ."



(29) **سيارات:** انظر إلى الصورة المجاورة:

(a) أوجد $m\angle 1, m\angle 2$.

(b) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 1$ ؟ فسر إجابتك.

(c) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 2$ ؟ فسر إجابتك.

برهان: برهن كلاً مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

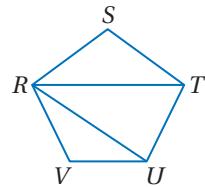
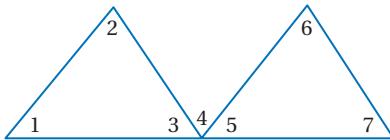
(31) برهان تسلسلي

المعطيات: $\angle 3 \cong \angle 5$.

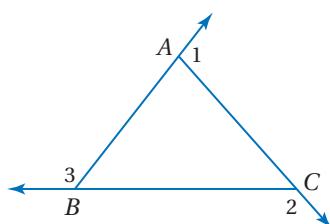
المطلوب:

$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$

$$m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV + m\angle V + m\angle VRS = 540^\circ$$



(32) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سستكتشف مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث.



(a) **هندسياً:** ارسم خمسة مثلثات مختلفة، ومدد الأضلاع وسم الزوايا كما في الشكل المجاورة، على أن يكون ضمن المثلثات التي رسمتها على الأقل مثلث منفرج الزاوية، وآخر قائم الزاوية، ومثلث حاد الزاوية.

(b) **جدولياً:** قيس الزوايا الخارجية لكل مثلث. وسجّل القياسات ومجملها لكل مثلثٍ في جدول.

(c) **لفظياً:** خمن مجموع الزوايا الخارجية للمثلث، واترك تخمينك.

(d) **جيبرياً:** عُرِّ عن التخمين الذي وصلت إليه في الجزء (c) جبرياً.

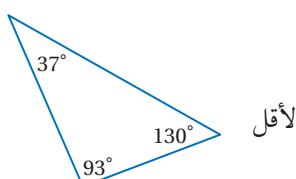
(e) **تحليلياً:** اكتب برهاناً حراً لإثبات التخمين الذي توصلت إليه.

تنبيه!

قياس الزوايا

عند استعمال المنقلة لقياس زاوية ما، أجعل خط التدريج 0 منطبقاً على أحد ضلعى الزاوية، ومركب المنقلة منطبقاً على دأب الزاوية.

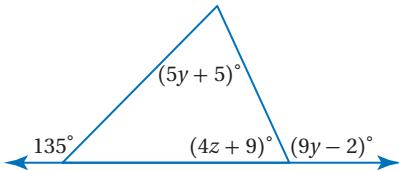
مسائل مهارات التفكير العليا



(33) **اكتشف الخطأ:** قام خالد بقياس زوايا المثلث وكتبها كما في الشكل. فقال عادل: إن هناك خطأً في هذه القياسات. وضح بطرقتين مختلفتين على الأقل كيف توصل عادل إلى هذه النتيجة.



(34) **اكتب:** فسر كيف يمكنك إيجاد القياسات المجهولة في الشكل المجاورة؟

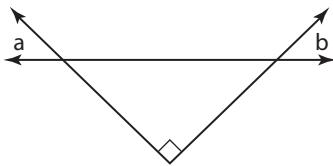


(35) **تحدد:** أوجد قيمة كل من z , y في الشكل المجاور.

(36) **تبرير:** إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة لـ $\angle A$ حادة، فهل $\triangle ABC$ حاد الزوايا أم قائم الزاوية أم منفرج الزواية أم أنه لا يمكن تحديد نوعه؟ ووضح إجابتك.

تدريب على اختبار

(38) أي العبارات التالية تصف العلاقة الصحيحة بين الزوایتين a , b في الشكل أدناه؟



$$a + b = 90^\circ \quad \text{C}$$

$$a + b < 90^\circ \quad \text{A}$$

$$a + b = 45^\circ \quad \text{D}$$

$$a + b > 90^\circ \quad \text{B}$$

(37) جبر: أي المعادلات الآتية تكافئ المعادلة

$$? 7x - 3(2 - 5x) = 8x$$

$$2x - 6 = 8 \quad \text{A}$$

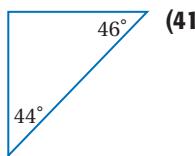
$$22x - 6 = 8x \quad \text{B}$$

$$-8x - 6 = 8x \quad \text{C}$$

$$22x + 6 = 8x \quad \text{D}$$

مراجعة تراكمية

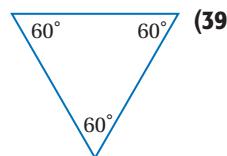
صنف كلاً من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزواية أو قائم الزاوية: (الدرس 2-6)



(41)



(40)



(39)

هندسة إحداثية: أوجد المسافة بين النقطة P والمستقيم ℓ في كل من السؤالين الآتيين. (الدرس 6-2)

(42) المستقيم ℓ يمر بال نقطتين $(1, 3)$, $(-2, 0)$, وإحداثياً النقطة P هما $(-4, 4)$.

(43) المستقيم ℓ يمر بال نقطتين $(3, 0)$, $(-3, 0)$, وإحداثياً النقطة P هما $(4, 3)$.

استعد للدرس اللاحق

أكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

$$\overline{AB} \cong \overline{AB} \quad (44)$$

(45) إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$, فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

(46) إذا كانت $\angle 3 \cong \angle 2$, $\angle 2 \cong \angle 4$, فإن $\angle 3 \cong \angle 4$.





المثلثات المتطابقة

Congruent triangles

3-3



لماذا؟

تقوم عدّة مصانع بصناعة مسجّلات سيارات بواجهات متّحدة يصعب نزعها لحمايتها من السرقة، علمًا بأنّ شكل هذه الواجهات وأبعادها تطابق شكل المكان الذي ثبت فيه وأبعاده تمامًا؛ وذلك لتشييدها في لوحة أجهزة السيارة بدقة.

التطابق والعناصر المتناظرة: إذا كان لشكليْن هندسيْن الشكل نفسه والقياسات نفسها فإنّهما متطابقان.

فيما سبق:

درست الزوايا المتطابقة واستعمالاتها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أُسّي العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة وأستعملها.
- أثبتت تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق.

المفردات

التطابق
Congruent

المضلعات المتطابقة
Congruent Polygons

العناصر المتناظرة
Corresponding Parts

غير متطابقة	متطابقة
 <p>الشكلان 5، 4 لهما الشكل نفسه، لكنهما مختلفان في القياسات.</p>	 <p>الأشكال 3، 2، 1 لها الشكل نفسه والقياسات نفسها، على الرغم من أنها في أوضاع مختلفة.</p>

في أيّ مضلعين متطابقين تتطابق العناصر المتناظرة، والعناصر المتناظرة تتضمن الزوايا والأضلاع.

اضف إلى مطويتك
مفهوم أساسى

تعريف المضلعات المتطابقة

التعابير اللغطي: يتتطابق مضلعاً إذا و فقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

مثال: الزوايا المتناظرة

$$\angle C \cong \angle K \quad \angle B \cong \angle J \quad \angle A \cong \angle H$$

الأضلاع المتناظرة

$$\overline{CA} \cong \overline{KH} \quad \overline{BC} \cong \overline{JK} \quad \overline{AB} \cong \overline{HJ}$$

عبارة التطابق

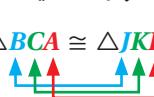
$$\triangle ABC \cong \triangle HJK$$

هناك عبارات تطابق أخرى للمثلثين أعلاه، وعبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تظهر الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه.

عبارة غير صحيحة

$$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$$

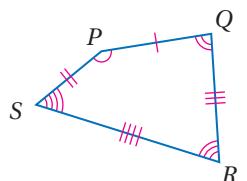

عبارة صحيحة

$$\triangle BCA \cong \triangle JKH$$


تعرف العناصر المتناظرة المتطابقة

مثال 1

بيان أن المثلثين المجاورين متطابقان، بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق.

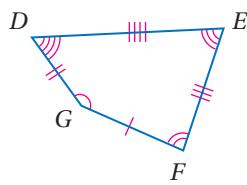


$$\angle P \cong \angle G, \angle Q \cong \angle F,$$

$$\angle R \cong \angle E, \angle S \cong \angle D$$

$$\overline{PQ} \cong \overline{GF}, \overline{QR} \cong \overline{FE},$$

$$\overline{RS} \cong \overline{ED}, \overline{SP} \cong \overline{DG}$$



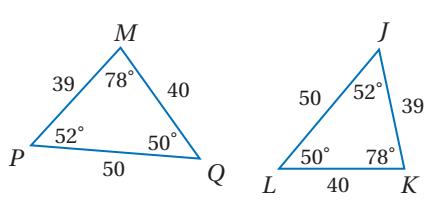
وبما أن جميع العناصر المتناظرة للمثلثين متطابقة، فإن المثلث $PQRS \cong GFED$.



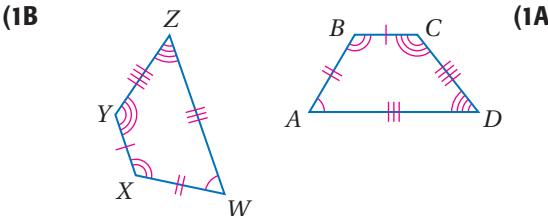
جوهان كارل فردرريك

جاوس (1777 م - 1855 م)

قدم جاوس رمز التطابق ليبيّن أن طرفي المعادلة متساويان حتى ولو كانوا مختلفين شكلاً. وقد حقق إنجازات عديدة في الرياضيات والفيزياء تتضمن برهاناً للنظرية الأساسية في الجبر.



(1B)



(1A)

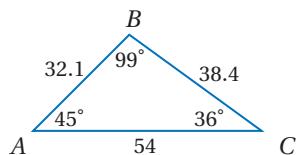
تحقق من فهمك

أداة الرابط “إذا وفقط إذا” التي وردت في تعريف المثلثات المتطابقات تعني أن كلاً من العبارة الشرطية وعكسها صحيحتان، لذا إذا كان المثلثان متطابقين، فإن عناصرهما المتناظرة متطابقة. وإذا كانت العناصر المتناظرة متطابقة فإن المثلثين متطابقان.

تعيين العناصر المتناظرة المتطابقة

مثال 2

في الشكل المجاور إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ، فأوجد قيمة كل من x, y



العناصر المتناظرة متطابقة

$$\angle F \cong \angle B$$

تعريف التطابق

$$m\angle F = m\angle B$$

عوض

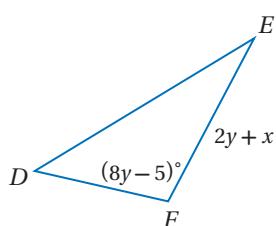
$$8y - 5 = 99$$

اجمع 5 إلى الطرفين

$$8y = 104$$

اقسم الطرفين على 8

$$y = 13$$



العناصر المتناظرة متطابقة

$$\overline{FE} \cong \overline{BC}$$

تعريف التطابق

$$FE = BC$$

عوض

$$2y + x = 38.4$$

عوض

$$2(13) + x = 38.4$$

بسط

$$26 + x = 38.4$$

اطرح 26 من الطرفين

$$x = 12.4$$

تحقق من فهمك

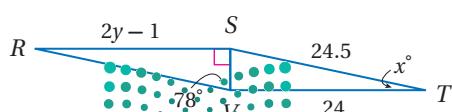
ارشادات للدراسة

استعمال عبارة التطابق

يمكنك استعمال عبارة التطابق لمساعدتك على معرفة الأضلاع المتناظرة.

$$\triangle ABC \cong \triangle DFE$$

$$\overline{BC} \cong \overline{FE}$$



(2) في الشكل المجاور إذا كان $\triangle RSV \cong \triangle TVS$

فأوجد قيمة كل من x, y .

إثبات تطابق المثلثات إن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 2-3 تقود إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

نظريّة الزاويّة الثالثة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإن الزاويّة الثالثة في المثلث الأوّل تتطابق الزاويّة الثالثة في المثلث الثاني.

إذا كانت: $\angle C \cong \angle K$, $\angle B \cong \angle J$ ، مثال: $\angle A \cong \angle L$. فإن: $m\angle A \cong m\angle L$.

ستبرهن هذه النظرية في السؤال 17

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال نظرية الزاويّة الثالثة

تنظيم الحفلات: قرر منظمو حفلة مدرسيّة أن يطروا مناديل الطعام على صورة جيب مثلثي حتى يتمكّنوا من وضع هدية بسيطة فيه.

إذا كانت: $m\angle SRT = m\angle NPQ = 40^\circ$.

بما أن $\angle NPQ \cong \angle RST$ ، ولأن جميع الزوايا القائمة متطابقة ($\angle QNP \cong \angle SRT$)، فإن $\angle NQP \cong \angle RTS$ بحسب نظرية الزاويّة الثالثة؛ إذن $m\angle QNP = m\angle RTS$.

الزاوياتان الحاديتان في المثلث القائم الزاوي متتامتان

الزاوياتان الحاديتان في المثلث القائم الزاوي متتامتان $m\angle QNP + m\angle NPQ = 90^\circ$

عوض $m\angle QNP + 40^\circ = 90^\circ$

اطرح 40° من الطرفين $m\angle QNP = 50^\circ$

وبالتعويض فإن: $m\angle SRT = m\angle QNP = 50^\circ$.

الربط مع الحياة

استعمال بعض المهارات الأساسية عند طي مناديل المائدة يُضفي لمسة من الجمال والأناقة على أي حفلة. وكثير من هذه الطيات تأخذ شكل المثلث.

(3) في الشكل أعلاه، إذا كانت $\angle WNX \cong \angle WRX$ ، وكان \overline{WX} منصفاً لـ $\angle NXR$ ، وكان $m\angle WNX = 88^\circ$, $m\angle NWR = 49^\circ$. وفسّر إجابتك.



مثال 4 إثبات تطابق مثلثين

اكتُب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$, $\angle D \cong \angle G$, $\angle DFE \cong \angle GFE$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle GEF$

البرهان:

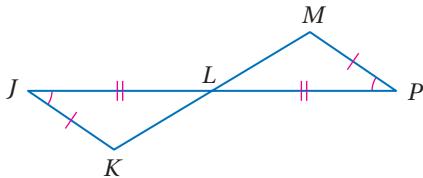
المبررات	العبارات
(1) معطيات	$\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$ (1)
(2) خاصية الانعكاس للتطابق	$\overline{EF} \cong \overline{EF}$ (2)
(3) معطيات	$\angle D \cong \angle G$, $\angle DFE \cong \angle GFE$ (3)
(4) نظرية الزاويّة الثالثة	$\angle DEF \cong \angle GEF$ (4)
(5) تعريف المضلعات المتطابقة	$\triangle DEF \cong \triangle GEF$ (5)

إرشادات للدراسة

خاصية الانعكاس

عندما يشتر� مثلثان في ضلع، استعمل خاصية الانعكاس للتطابق؛ لتثبت أن الضلع المشترك يتطابق نفسه.

تحقق من فهمك



(4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle J \cong \angle P$, $\overline{JK} \cong \overline{PM}$

\overline{KM} تنصف \overline{LJ} , $\overline{JL} \cong \overline{PL}$

المطلوب: $\triangle JKL \cong \triangle PLM$

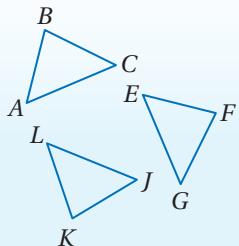
علاقة تطابق المثلثات علاقة انعكاس وتماثل وتعدّد كما في تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

خصائص تطابق المثلثات

النظرية 3.4

أضف إلى

مطويتك



خاصية الانعكاس للتطابق

$$\triangle ABC \cong \triangle ABC$$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كان $\triangle EFG \cong \triangle ABC$, $\triangle ABC \cong \triangle EFG$, فإن

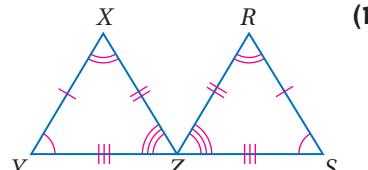
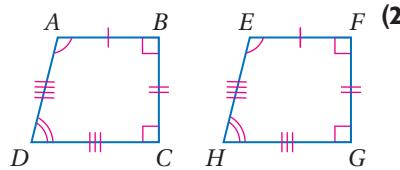
خاصية التعدي للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle JKL$, $\triangle ABC \cong \triangle EFG$, $\triangle EFG \cong \triangle JKL$, فإن

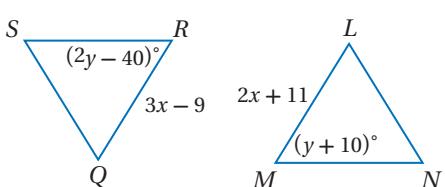
ستبرهن عناصر هذه النظرية في الأسئلة 18, 20, 21

تأكد

في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق:



في الشكلين المجاورين، إذا كان $\triangle LMN \cong \triangle QRS$ فأوجد:



(3) قيمة x .

(4) قيمة y .

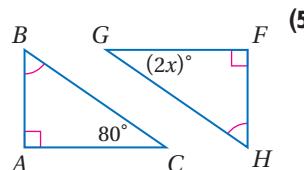
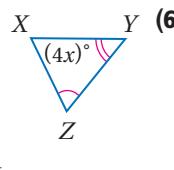
في كل من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة x ، وفسّر إجابتك.

المثال 1

المثال 2

المثال 3

المثال 4



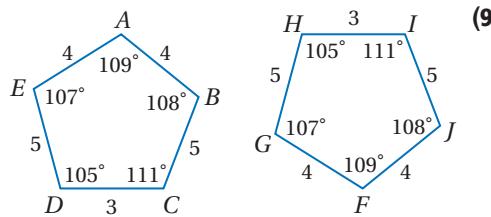
(7) برهان: اكتب برهانًا حرجًا.

المعطيات: $\angle WZX \cong \angle YXZ$, $\angle XZW \cong \angle XZY$, $\overline{WX} \cong \overline{YX}$, $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$

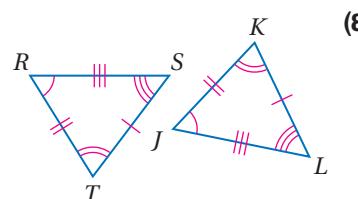
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

تدريب وحل المسائل

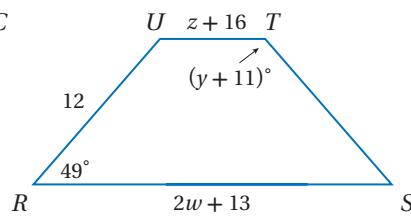
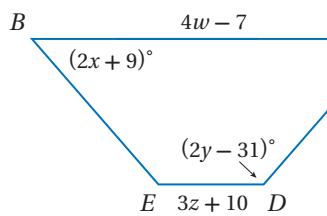
المثال 1 في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق.



إذا كان المضلع $RSTU \cong BCDE$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:



المثال 2



w (13)

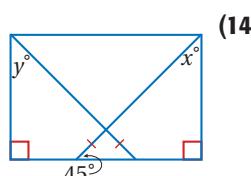
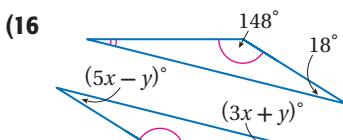
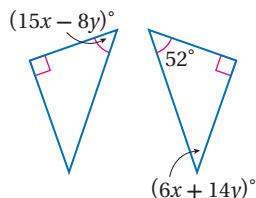
z (12)

y (11)

x (10)

أوجد قيمة كل من x, y في الأسئلة الآتية:

المثال 3



المثال 4 (17) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين للنظرية 3.3.

المثال 4

(18) **برهان:** رتب العبارات المستعملة في برهان العبارة الآتية ترتيباً صحيحاً. وقدّم تبريراً لكل عبارة.

"تطابق المثلثات علاقة تماثل". (النظرية 3.4)



المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

البرهان:

$\triangle XYZ \cong \triangle RST$

$\triangle RST \cong \triangle XYZ$

$\angle R \cong \angle X, \angle S \cong \angle Y,$
 $\angle T \cong \angle Z,$
 $\overline{RS} \cong \overline{XY}, \overline{ST} \cong \overline{YZ},$
 $\overline{RT} \cong \overline{XZ}$

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S,$
 $\angle Z \cong \angle T,$
 $\overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{YZ} \cong \overline{ST},$
 $\overline{XZ} \cong \overline{RT}$

?

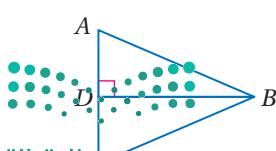
?

?

(19) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين:

المعطيات: $\angle B$ تنصّف \overline{BD} .
 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $\angle A \cong \angle C$



برهان: اكتب برهاناً من النوع المذكور لكل جزء من النظرية 3.4.

(20) تطابق المثلثات علاقة تعددٍ. (برهان حرّ)

(21) تطابق المثلثات علاقة انعكاس. (برهان تسلسلي)

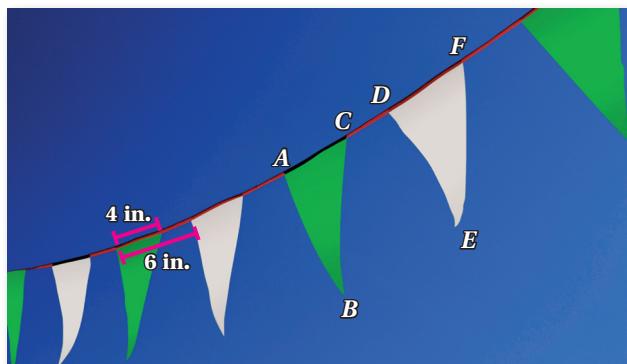
جبر: ارسم شكلاً يمثل المثلثين المتطابقين في كلٌ من السؤالين الآتيين وسمّه، ثم أوجد قيمة y :

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF, AB = 7, BC = 25, AC = 11 + x, DF = 3x - 13, DE = 2y - 5 \quad (22)$$

$$\triangle LMN \cong \triangle RST, m\angle L = 49^\circ, m\angle M = (10y)^\circ, m\angle S = 70^\circ, m\angle T = (4x + 9)^\circ \quad (23)$$

(24) **رایات:** في مهرجان رياضي، كان سعيد مسؤولاً عن إحاطة منطقة مساحتها 100 ft^2 مخصصة لجلوس المعلقين والإعلاميين، فاستعمل حبلًا وثبت عليه رایات على شكل مثلثات متطابقة، كل منها متطابق الضلعين.

إرشاد: $1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$.



(a) اكتب سبعة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة في الصورة.

(b) إذا كانت المنطقة التي حوطها سعيد بحبل الرایات مربعة الشكل، فكم سيكون طول الحبل؟

(c) ما عدد الرایات المثبتة بالحبل؟

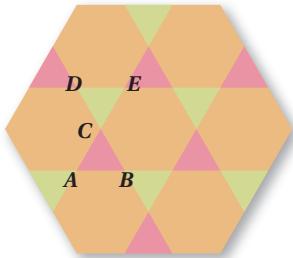
(25) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين مساحات المضلوعات المتطابقة:

(a) **لفظياً:** اكتب عبارة شرطية تمثل العلاقة بين مساحتَي مثلثين متطابقين.

(b) **لفظياً:** اكتب عكس عبارتك الشرطية. وهل العبارة العكسية صحيحة أم خطأ؟ وضح تبريرك.

(c) **هندسياً:** ارسم - إنْ أمكن - مستطيلين لهما المساحة نفسها، ولكنَّهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكِن فوضح السبب.





(26) **أنماط:** صُمم النمط المجاور باستعمال مضلعات متقطمة.

(a) ما المضلعين المتقطمان اللذان استعملما في التصميم؟

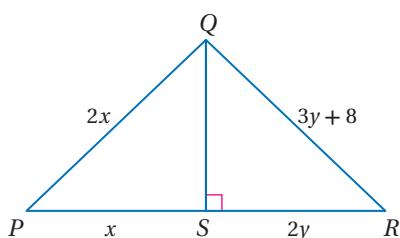
(b) سِّم زوجاً من المثلثات المتطابقة.

(c) سِّم زوجاً من الزوايا المتطابقة.

(d) إذا كان $CB = 2$ in، فكم يكون AE ? وضح إجابتك.

(e) ما قياس $\angle EDC$? ووضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

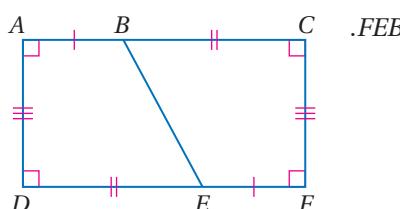


(27) **تحدد:** إذا كان $\triangle PQS \cong \triangle RQS$. فأوجد قيمة كل من x, y .

تبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأ. وإذا كانت خطأ، فأعطي مثلاً مضاداً. أما إذا كانت صحيحة، فوضح إجابتك.

(28) إذا تطابق زوجان من الزوايا المتناظرة لمثلثين، وتطابقت الأزواج الثلاثة من أضلاعهما المتناظرة، فإن المثلثين متطابقان.

(29) إذا كانت أزواج الزوايا المتناظرة الثلاثة لمثلثين متطابقة، فإن المثلثين متطابقان.



(30) **تحدد:** اكتب برهاناً حراً لإثبات أن المضلعين $ABED \cong FEBC$.

(31) **اكتب:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحياناً أو ليست صحيحة أبداً. ووضح إجابتك.

"المثلثان المتطابقان الأضلاع يكونان متطابقين"

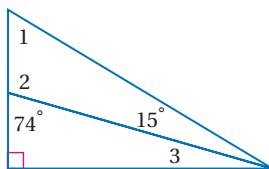
تدريب على اختبار

(32) إذا علمت أن: $\triangle HIJ \cong \triangle ABC$ ، ورؤوس $\triangle ABC$ هي: $\{A(-1, 2), B(0, 3), C(2, -2)\}$



- | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| $x - 2$
$x - 14$ | C
D | $x + 14$
$x + 2$ | A
B |
|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|

- | | |
|-------------|----------|
| $\sqrt{2}$ | C |
| 25 | D |
| $\sqrt{29}$ | B |



في الشكل المجاور أوجد كلاً من القياسات الآتية: (الدرس 3-2)

$$m\angle 2 \quad (34)$$

$$m\angle 1 \quad (35)$$

$$m\angle 3 \quad (36)$$

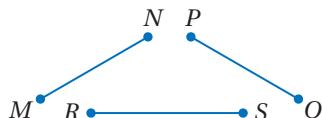
- (37) **هندسة إحداثية:** أوجد أطوال أضلاع $\triangle JKL$ الذي رؤوسه هي $J(-7, 10), K(15, 0), L(-2, -1)$ وصنفه وفقاً لأطوال أضلاعه. (الدرس 3-1)

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائماً أو أحياناً أو ليست صحيحة أبداً: (الدرس 8-1)

(38) تكون الزاويتان المجاورتان على خط مستقيم متكمالتين.

(39) إذا كانت الزاويتان متكمالتين فإن إدراهما تكون منفرجة.

استعد للدرس اللاحق



(40) انقل البرهان الآتي وأكمله:

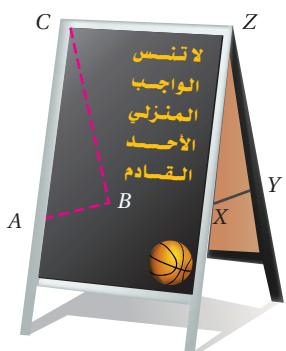
$$\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$$

$$\overline{MN} \cong \overline{RS}$$

البرهان:

المبررات	العبارات
(a) معطيات _____ (b) _____ (c)	_____ (a) $MN = PQ, PQ = RS$ (b) _____ (c)
(d) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة	$\overline{MN} \cong \overline{RS}$ (d)





إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS Proving Triangles Congruent-SSS, SAS

3-4

فيما سبق:

درست إثبات تطابق المثلثات
باستعمال تعريف التطابق.

(الدرس 3-3)

والآن:

- استعمل المسلمنة SSS.
- لاختبار تطابق المثلثات.
- استعمل المسلمنة SAS.
- لاختبار تطابق المثلثات.

المفردات:

الزاوية المحصورة
Included Angle

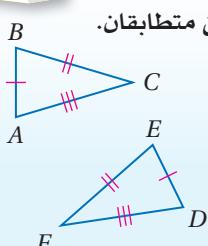
تُعد السبورة المزدوجة التي على شكل الحرف A طريقة مناسبة لعرض المعلومات، لأنها تُطوى عند التخزين فقط، ولكن لأنها تكون ثابتة تماماً عند وضع الذراعين الجانبيين في موقعهما. وعندما يكون للذراعين الطول نفسه، ويتم تثبيتها على أبعاد متساوية من القمة على الجانبين، فإن السبورة المفتوحة تشکل مثلثين متطابقين هما $\triangle ABC$, $\triangle XYZ$.

مسلمنة التطابق بثلاثة أضلاع SSS : في هذا الدرس ستكتشف أنه ليس من الضروري أن تبين تطابق الأضلاع المتناظرة وتطابق الروايا المتناظرة في مثلثين لتثبت أنهما متطابقان.

تبين السبورة المزدوجة أنه إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متساوية، فإن المثلثين متطابقان. وهذا ما تنص عليه المسلمنة الآتية:

مسلمنة 3.1 التطابق بثلاثة أضلاع (SSS)

أضف إلى
مطويتك



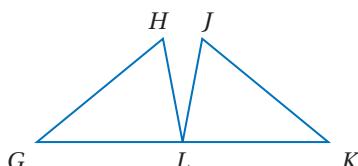
إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المتناظرة لها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال إذا كان
 $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
 $\overline{BC} \cong \overline{EF}$,
 $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

فإن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

استعمال المسلمنة SSS لإثبات تطابق مثلثين

مثال 1

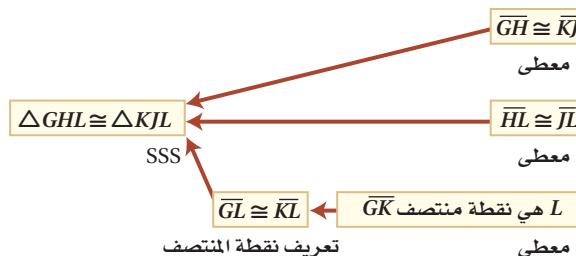


اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات: $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$, $\overline{HL} \cong \overline{JL}$, L نقطة منتصف \overline{GK} .

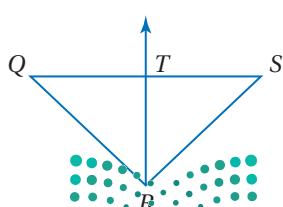
المطلوب: إثبات أن $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

البرهان:



إرشادات للدراسة

منصف قطعة مستقيمة
عبارة عن قطعة أو
مستقيم أو مستوى يقطع
القطعة عند منتصفها.



تحقق من فهمي

1) اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات: $\triangle QRS$ متطابق الصاعدين، فيه، $\overline{QR} \cong \overline{SR}$

T تنصّف \overline{QS} عند النقطة R

المطلوب: إثبات أن $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

- إجابة مطولة:** إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(1, 1), B(0, 3), C(2, 5)$. ورؤوس المثلث EFG هي: $E(1, -1), F(2, -5), G(4, -4)$.

(a) مثل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.

(b) استعمل هذا التمثيل؛ لتتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسّر إجابتك.

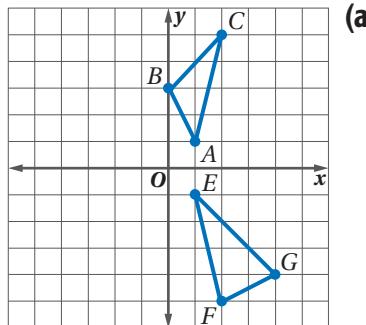
(c) اكتب برهاناً منطقياً باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء b.

اقرأ سؤال الاختبار:

في هذه المسألة يُطلب إليك عمل ثلاثة أشياء؛ إذ يتعين عليك في الجزء a أن ترسم كلاً من $\triangle ABC$, $\triangle EFG$ في مستوى إحداثي واحد. وفي الجزء b أن تضع تخميناً يبين ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ أم لا، اعتماداً على الرسم. وأخيراً عليك في الجزء c أن تثبت صحة تخمينك.

حل سؤال الاختبار:

- (b) يتضح من الرسم أن المثلثين مختلفان في الشكل؛ لذا يمكن أن نخمن أنهما ليسا متطابقين.



(c) استعمل صيغة المسافة لبيان أن أطوال بعض الأضلاع المتناظرة غير متساوية.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \end{aligned} \quad \begin{aligned} EF &= \sqrt{(2-1)^2 + [-5-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} \\ &= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \end{aligned} \quad \begin{aligned} FG &= \sqrt{(4-2)^2 + [-4-(-5)]^2} \\ &= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} \\ &= \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \end{aligned} \quad \begin{aligned} EG &= \sqrt{(4-1)^2 + [-4-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \end{aligned}$$

وبما أن $AB = FG, AC = EF$, في حين أن $BC \neq EG$, فإن شروط مسلمة التطابق SSS غير متحققة؛ إذن $\triangle ABC \not\cong \triangle EFG$.

قراءة الرياضيات

الرموز

تقرأ العبارة

$\triangle ABC \not\cong \triangle EFG$

المثلث ABC لا يتطابق

مع المثلث EFG.

تحقق من فهتماك

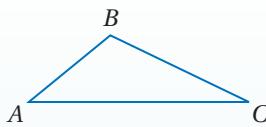
- (2) إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي $J(2, 5), K(1, 1), L(5, 2)$. ورؤوس المثلث NPQ هي $N(-3, 0), P(-7, 1), Q(-4, 4)$.

(A) مثل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.

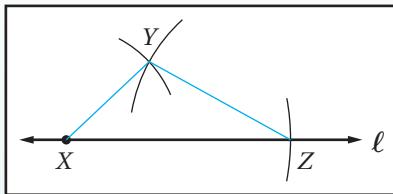
(B) استعمل هذا التمثيل؛ لتتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسّر إجابتك.

(C) اكتب برهاناً منطقياً باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء B.

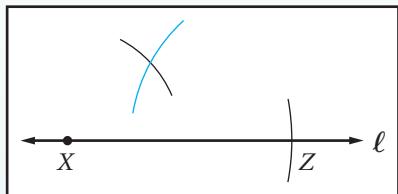
إنشاء مثلث يطابق مثلثاً مرسوماً باستعمال المسلمة (SSS)



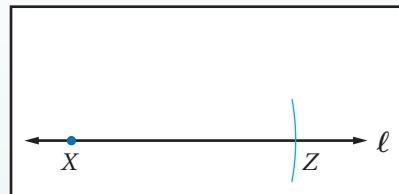
ارسم مثلثاً وسّمه $\triangle ABC$, ثم استعمل المسلمة SSS لتشي $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



الخطوة 3 سُمّ نقطة تقاطع القوسين Y . وارسم \overline{XY} , \overline{ZY} لتشكل $\triangle XYZ$.



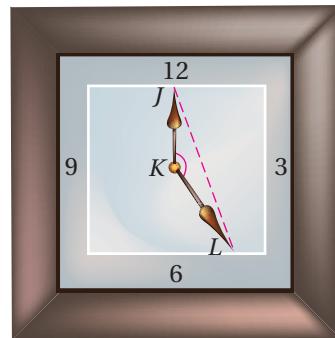
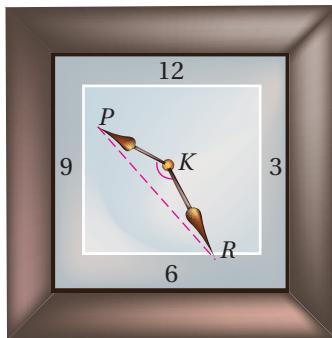
الخطوة 2 أنشئ قوساً طول نصف قطره AB , ومركزه X , وقوساً آخر طول نصف قطره BC , ومركزه Z (مستعملاً الفرجار كما في الخطوة 1).



- الخطوة 1** عين النقطة X على المستقيم ℓ . ثم أنشئ $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$ على ℓ كما يأتي:
- ركز رأس الفرجار في النقطة A , وافتحه حتى يصل القلم إلى النقطة C .
 - باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ركز رأس الفرجار في X , وارسم قوساً يقطع المستقيم ℓ وسُمّ نقطة التقاطع Z .

مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما SAS: تُسمى الزاوية الممتكونة من ضلعين متباورين

لمضلع زاوية محصورة تألف الزاوية المحصورة والممتكونة من عقربي الساعة في كلا الوضعين الموضعين أدناه، ولاحظ أنه كلما شكل العقربان زاوية لها القياس نفسه، فستكون المسافتان بين طرفي العقربين JL , PR متساويتين.



$$\triangle PKR \cong \triangle JKL$$

أي مثلثان يتكونان من زوجين من الأضلاع المتساوية في الطول وزوايتين محصورتين متساويتين في القياس يكونان متطابقين. وهذا يوضح المسلمة الآتية:

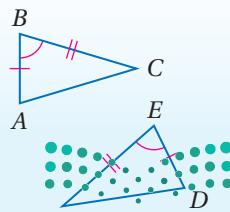
مسلمة 3.2

مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS)

التعبير اللغطي: إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثان متطابقان.

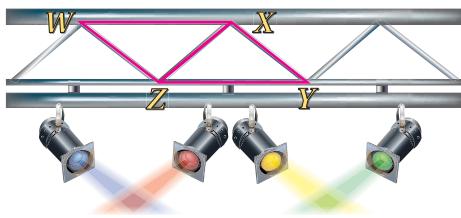
إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
 $\angle B \cong \angle E$,
 $\overline{BC} \cong \overline{EF}$,

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF .$$



مثال 3 من واقع الحياة

استعمال SAS لإثبات تطابق المثلثات



إضاءة: تبدو دعامات السقالة حاملة المصايبع الظاهرة في الصورة وكأنها مكونة من مثلثات متطابقة. فإذا كان $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$, فاكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$.

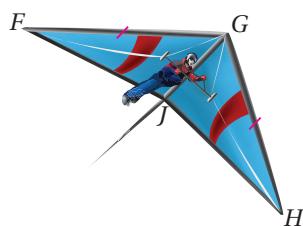
البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\overline{WX} \cong \overline{ZY}$ (1)
(2) معطى	$\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ (2)
(3) نظرية الزوايا الداخلية المترادفة	$\angle WXZ \cong \angle XZY$ (3)
(4) خاصية الانعكاس للتطابق	$\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$ (4)
SAS (5)	$\triangle WXZ \cong \triangle YZX$ (5)



الربط مع الحياة

فنيو الإضاءة: في صناعة الصور المتحركة، يقوم فنيو الإضاءة بتحديد موقع المصايبع التي يتطلبها الفيلم. ويقوم هؤلاء الفنيون بالتأكد من أن الزوايا التي يشكلها الضوء في مواضعها الصحيحة.



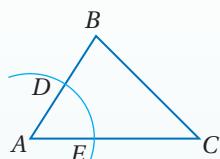
تحقق من فهمك

3 طيران شراعي: في الصورة المجاورة يبدو جناحا الطائرة الشراعية أنهما مثلثان متطابقان. فإذا كانت $\overline{FG} \cong \overline{GH}$, $\overline{FG} \parallel \overline{GH}$, $\angle FGH \cong \angle JGH$ ، فأثبت أن $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$.

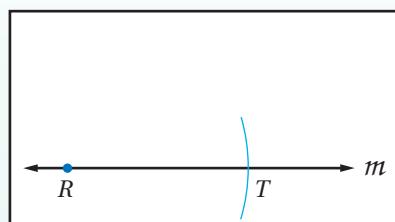
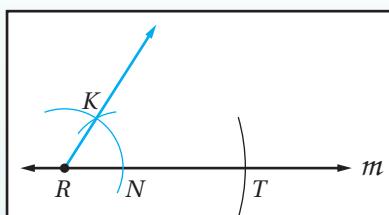
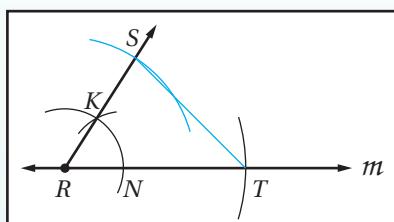
يمكنك أيضاً أن تنشئ مثلثات متطابقة إذا عُلم طولاً ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

إنشاء هندسي

إنشاء مثلث يتطابق مثلثاً مرسوماً باستعمال مسلمة التطابق "ضلاعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS)"



رسم مثلثاً وسمّه $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسلمة SAS لتنشئ $\triangle RST$ الذي يتطابق $\triangle ABC$.



الخطوة 3: أنشئ $\overline{RS} \cong \overline{AB}$, ثم $\triangle RST$ لتشكل $\triangle ABC$.

الخطوة 2: أنشئ $\angle R \cong \angle A$, باستعمال

ضلاعاً للزاوية، وال نقطة R رأساً لها كما يأتي:

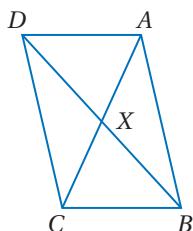
- ضع رأس الفرجار على النقطة A ، وارسم قوساً يقطع ضلعي $\angle A$. سُمّ نقطتي التقاطع D, E .
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع رأس الفرجار عند R وارسم قوساً يبدأ فوق المستقيم m وينقطعه، سُمّ نقطة التقاطع N .
- ضع رأس الفرجار عند E وعَدَلْ الفتاحة حتى يصل رأس القلم إلى D .

- دون تغيير فتحة الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة N ، وارسم قوساً يقطع القوس الذي رسمته سابقاً في النقطة K , ثم ارسم \overline{RK} .



مثال 4

استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة SAS في البراهين

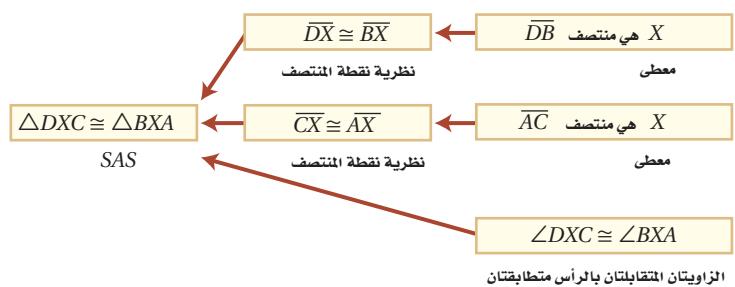


اكتب برهانًا تسلسليًّا لما يلي.

المعطيات: X متصف \overline{DB}
و X متصف \overline{AC}

المطلوب: $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

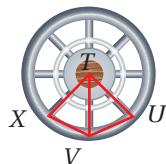
البرهان:



إرشادات للدراسة

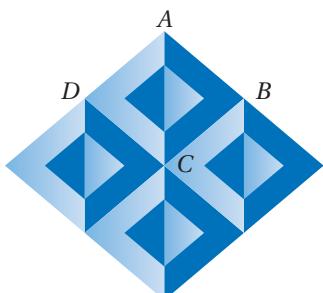
البراهين التسلسلية
يمكن كتابة البراهين
التسلسلية إما رأسياً وإما
أفقياً.

تحقق من فهمك



- (4) قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء. إذا كان:
 $\triangle XTV \cong \triangle UTV$ و $\angle XTV \cong \angle UTV$ و $\overline{TU} \cong \overline{TX}$

تأكد



المثال 1

- (1) **خداع بصري:** في الشكل المقابل المربع $ABCD$ يتطابق المربعات الثلاثة الأخرى التي تشكل النمط.

(a) ما عدد المثلثات المختلفة القياس التي استعملت لعمل هذا النمط؟

(b) استعمل مسلمة التطابق SSS لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

المثال 2

- (2) **إجابة مطولة:** إحداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي:
 $A(-3, -5)$, $B(-1, -1)$, $C(-1, -5)$. ورؤوس $\triangle XYZ$ هي

$X(5, -5)$, $Y(3, -1)$, $Z(3, -5)$

(a) مثل كل المثلثين في مستوى إحداثي واحد.

(b) استعمل هذا التمثيل لتتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسّر إجابتك.

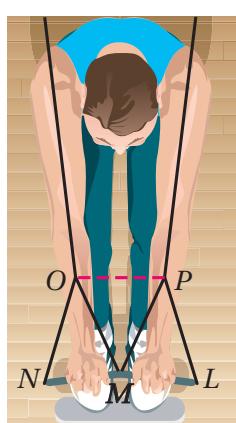
(c) اكتب برهانًا منطقياً باستعمال الهندسة الإحداثية يدعم تخمينك في الفرع b.

المثال 3

- (3) **رياضة:** في الشكل المجاور، إذا كان:

$\triangle MOP \cong \triangle NOM$ متطابق الأضلاع، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle LMP \cong \triangle NMO$.

المثال 3

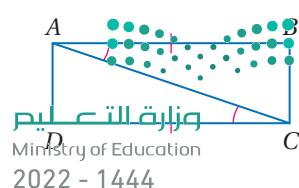


- (4) اكتب برهانًا ذات عمودين.

المعطيات: $\overline{BA} \cong \overline{DC}$, $\angle BAC \cong \angle DCA$

المطلوب: $\overline{BC} \cong \overline{DA}$

المثال 4



تدريب و حل المسائل

المثال 1

برهان: اكتب برهاناً من النوع المذكور في كلٍ من السؤالين الآتيين:

(6) برهان ذو عمودين

(5) برهان حرّ

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\overline{CA} \cong \overline{CE}$

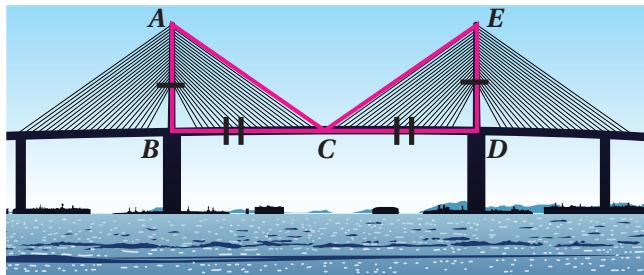
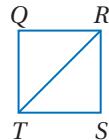
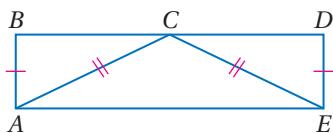
تنصّف \overline{AC}

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$

المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{SR}$, $\overline{ST} \cong \overline{QT}$

تنصّف \overline{QT}

المطلوب: $\triangle QRT \cong \triangle SRT$



جسر: جسر الرياض المعلق طوله

763 m، وهو مثبت بجبار معدنيّة معلقة بدعامتين خرسانيتين. كما هو مبين بالشكل، بحيث يلتقي الحبلان المعدنيان العلويان في النقطة C عند منتصف المسافة بين الدعامتين، فإذا كانت $AB = ED$: فأثبت أن المثلثين المبيّنَين في الشكل المجاور متطابقان.

حدّد ما إذا كان $\triangle MNO \cong \triangle QRS$ في كلٍ من السؤالين الآتيين، ووضح إجابتك:

المثال 2

$$M(2, 5), N(5, 2), O(1, 1), Q(-4, 4), R(-7, 1), S(-3, 0) \quad (8)$$

$$M(0, -1), N(-1, -4), O(-4, -3), Q(3, -3), R(4, -4), S(3, 3) \quad (9)$$

برهان: اكتب برهاناً من النوع المحدد في كلٍ من السؤالين الآتيين:

(11) برهان حرّ

(10) برهان ذو عمودين

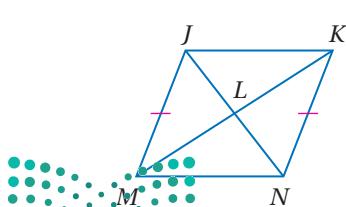
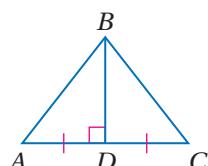
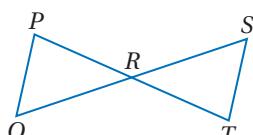
المعطيات: R نقطة المنتصف لـ كلٌ من

\overline{QS} , \overline{PT}

المطلوب: $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$

المعطيات: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, \overline{AC} تنصّف \overline{BD}

المطلوب: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



برهان: اكتب برهاناً تسلسليًّا

المعطيات: L ; $\overline{JM} \cong \overline{NK}$ ، N نقطة المنتصف لـ كلٌ من \overline{JN} , \overline{KM}

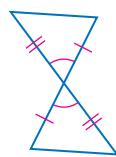
المطلوب: $\angle MJL \cong \angle KNL$

المثال 4

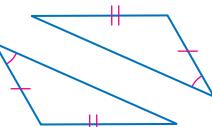
إرشادات للدراسة

تطابق ضلعين وزاوية غير محسوبة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان.

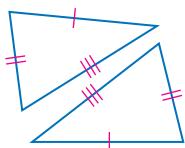
حدّد ما إذا كان المثلثان في كلٍ من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا. وضح إجابتك.



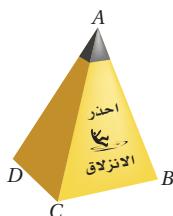
(15)



(14)



(13)

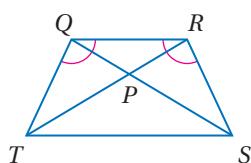


(16) إشارة تحذيرية: استعمل الشكل المجاور.

(a) ما اسم المجسم الذي تمثله إشارة التحذير.

(b) إذا كان $\triangle ACB \cong \triangle ACD$, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{CB} \cong \overline{CD}$, فأثبت أنّ

(c) لماذا يبدو المثلثان غير متطابقين في الشكل؟

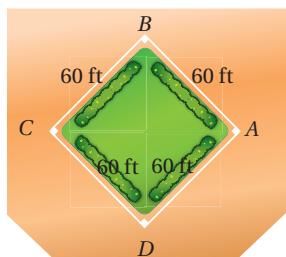


(17) برهان: اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات: $\triangle TPQ \cong \triangle SPR$

$\angle TQR \cong \angle SRQ$

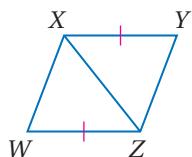
المطلوب: $\triangle TQR \cong \triangle SRQ$



(18) في الشكل المجاور ABCD مزرعة مربعة الشكل، ويريد أخوان فصلها باستعمال سياج على أحد القطرين.

(a) اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أنّ $BD = AC$.

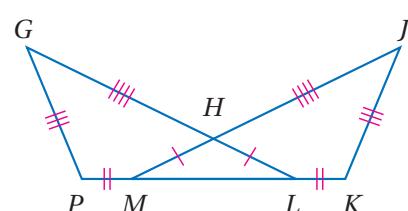
(b) اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أنّ $\angle BDC \cong \angle BDA$.



(19) برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{YX} \cong \overline{WZ}$, $\overline{YX} \parallel \overline{WZ}$

المطلوب: $\triangle YXZ \cong \triangle WZX$



(20) برهان: اكتب برهاناً حراً.

المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{HM}$, $\overline{PM} \cong \overline{KL}$,

$\overline{PG} \cong \overline{KJ}$, $\overline{GH} \cong \overline{JH}$

المطلوب: $\angle G \cong \angle J$

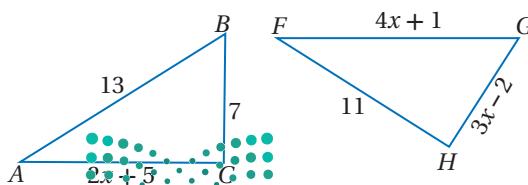
إرشادات للدراسة

الأشكال

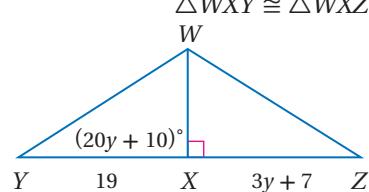
عند كتابة البراهين أو حل المسائل التي تتضمن مثلثات متطابقة، من المفيد أن ترسم شكلاً خاصاً بك، وتعين عليه الأضلاع والزوايا المتطابقة التي تجدها.

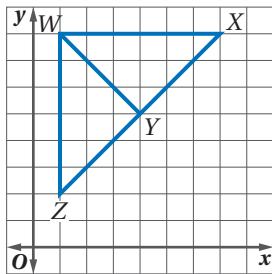
جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كلٍ من السؤالين الآتيين، وفسّر إجابتك:

$\triangle ABC \cong \triangle FGH$ (22)



$\triangle WXY \cong \triangle WXZ$ (21)

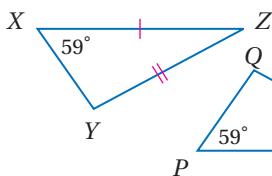




(23) تحدٌ: في الشكل المجاور:

- (a) صُف طرفيتين يمكنك استعمالهما لإثبات أن $\triangle WYZ \cong \triangle WXY$.
علمًا بأنه لا يُسمح باستعمال المسطرة أو المقلدة. وأي طريقة تعتقد أنها فعالة أكثر؟ وضح إجابتك.

(b) أثبت أن $\triangle WYZ \cong \triangle WXY$ ووضح إجابتك.



(24) اكتشف الخطأ: قال أحمد: إن $\triangle PRQ \cong \triangle XYZ$ بحسب SAS.

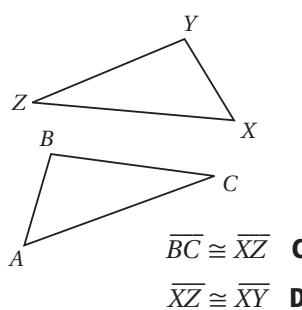
- فاعترض خالد وقال: لا توجد معلومات كافية لإثبات أن المثلثين متطابقان. أيهما كانت إجابة صحيحة؟
وضح إجابتك.

(25) اكتب: إذا كان زوجان من الأضلاع المتناظرة لمثلثين قائمي الزاوية متطابقين، فهل المثلثان متطابقان؟ وضح إجابتك.

تدريب على اختبار

(27) إذا كان $7 - 2a + b = -1$ ، فما قيمة a إذا علمت أن $b = -7$ ؟

- 1 **A**
- 2 **B**
- 3 **C**
- 4 **D**



(26) في الشكلين المجاورين، $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ و $\angle C \cong \angle Z$. ما المعلومة الإضافية التي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ؟

- C** $\overline{BC} \cong \overline{XZ}$ **A** $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$ **B** $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$ **D** $\overline{AB} \cong \overline{XY}$

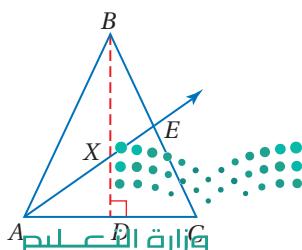
مراجعة تراكمية

في الشكلين المجاورين، إذا علمت أن متوازي الأضلاع $LMNP \cong QRST$ متوازي الأضلاع، فأوجد: (الدرس 3-3)

(28) قيمة x . .

(30) اكتب العكس والمعكوس والإيجابي للعبارة: "الزوايا التي يتقاطع بها مستقييم متكمالتان". وحدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالاً مضاداً. (الدرس 1-3)

استعد للدرس اللاحق



إذا علمت أن \overline{BD} ، \overline{AE} ينصفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما، فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يأتي:

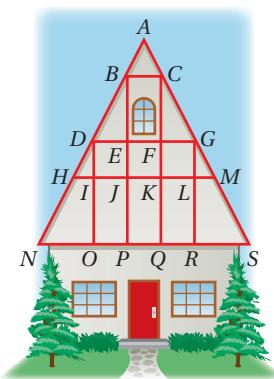
(32) زاوية تطابق $\angle ABD$

(31) قطعة مستقيمة تطابق \overline{EC}

(34) قطعة مستقيمة تطابق \overline{AD}

(33) زاوية تطابق $\angle BDC$

اختبار منتصف الفصل

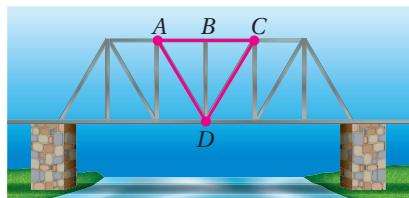


- (12) **فن العمارة:** يبيّن الشكل المجاور
بيتاً واجهته على شكل الحرف A، وتظهر عليه نقاط مختلفة. افترض أن القطع المستقيمة والزوايا التي تبدو أنها متطابقة هي متطابقة فعلاً. اكتب المثلثات المتطابقة.
- (الدرس 3-3)

- (13) **اختيار من متعدد:** إذا كان $\triangle CBX \cong \triangle SML$ ، فأي عبارة ممّا يأتي صحيحة؟ (الدرس 3-3)

- $\angle X \cong \angle S$ C $\overline{CB} \cong \overline{ML}$ A
 $\angle XCB \cong \angle LSM$ D $\overline{XC} \cong \overline{ML}$ B

- (14) **جسور:** يُظهر الجسر في الشكل أدناه أن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ، وأن نقطة متصف \overline{AC} . ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ ؟ (الدرس 3-4)



- حدّد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ في كلٌّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-4)

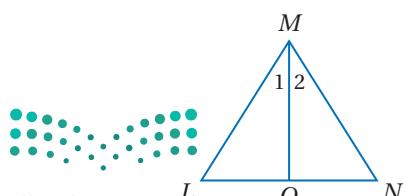
P(3, -5), Q(11, 0), R(1, 6), X(5, 1), Y(13, 6), Z(3, 12) (15)

P(-3, -3), Q(-5, 1), R(-2, 6), X(2, -6), Y(3, 3), Z(5, -1) (16)

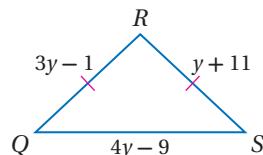
- (17) اكتب برهاناً ذا عمودين. (الدرس 3-4)

المعطيات: $\triangle LMN$ متطابق للضلعين.
 $\angle LMN = \angle MO$ ، $\overline{LM} \cong \overline{NM}$ تنصف $\angle MN$ فيه،

المطلوب: $\triangle MLO \cong \triangle MNO$



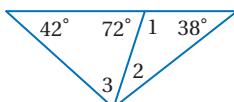
- (1) **هندسة إحداثية:** صنّف $\triangle ABC$ الذي رؤوسه $A(-2, -1)$, $B(-1, 3)$, $C(2, 0)$ إلى مختلف الأضلاع أو متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين. (الدرس 3-1)



- (2) **اختيار من متعدد:** أيٌ مما يأتي يمثل أطوال أضلاع المثلث المتطابق الضلعين QRS ؟ (الدرس 3-1)

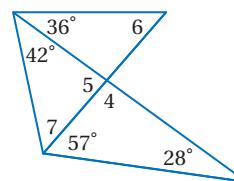
- 17, 17, 15 A
 15, 15, 16 B
 14, 15, 14 C
 14, 14, 16 D

أوجد كلاً من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 3-2)



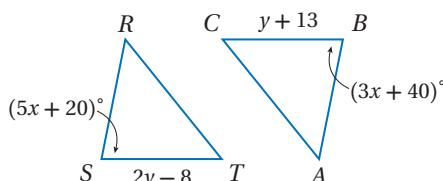
- $m\angle 1$ (3)
 $m\angle 2$ (4)
 $m\angle 3$ (5)

أوجد كلاً من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 3-2)



- $m\angle 4$ (6)
 $m\angle 5$ (7)
 $m\angle 6$ (8)
 $m\angle 7$ (9)

في الشكلين أدناه، إذا علمت أن $\triangle RST \cong \triangle ABC$ فأوجد: (الدرس 3-3)



- (10) قيمة x .
 . y قيمة (11)



إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS

Proving Triangles Congruent-ASA, AAS

3-5

تمارين



تضمن مسابقات التجديف شخصين أو أكثر يجلسون ووجوههم نحو مؤخرة القارب، ولكلّ منهم مجداف. ويطلب السباق عادة مسطحًا من الماء طوله 1500 متر على الأقل، ويمكن استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة. مثل طول مضمار سباق الزوارق.

فيما سبق:

درست إثبات تطابق مثلثين
باستعمال SSS, SAS .

(الدرس 4)

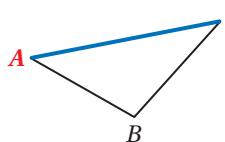
والآن:

- أستعمل المسألة ASA
- لاختبار التطابق.
- أستعمل النظرية AAS
- لاختبار التطابق.

المفردات:

الضلع المحصور
Included Side

مسلمة التطابق بزوايتين وضلع محصور بينهما ASA: الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين لمضلع يسمى الضلع المحصور، ففي $\triangle ABC$ المجاور، \overline{AC} هو الضلع المحصور بين $\angle C$ ، $\angle A$.



مسلمة 3.3

التطابق بزوايتين وضلع محصور بينهما (ASA)

أضف إلى
مطويتك

إذا طابقت زوايتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle D$,

$$\overline{AB} \cong \overline{DE},$$

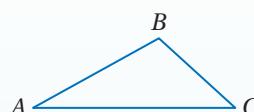
$\angle B \cong \angle E$,

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ فإنـ}.$$

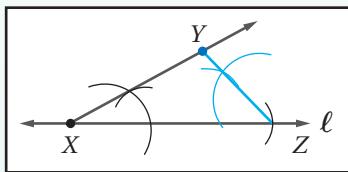
إنشاء هندسي

إنشاء مثلث يتطابق مثلثاً مرسوماً باستعمال مسلمة التطابق بزوايتين وضلع محصور بينهما (ASA)

ارسم مثلثاً وسمّه $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسلمة لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$ ASA .



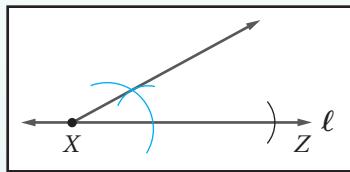
الخطوة 3:



أنشئ زاوية مطابقة لـ $\angle C$ عند النقطة Z باستعمال \overline{XZ} ضلـعاً للزاوية، وـ نقطة تقاطع الضلعين الجديدين للزوايتين Y .

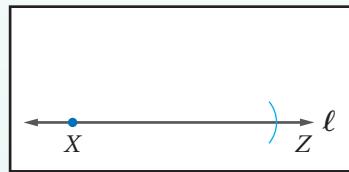
وزارة التعليم

الخطوة 2:



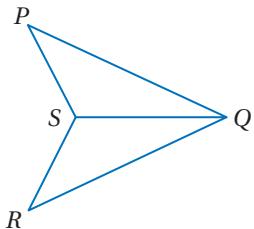
أنشئ زاوية مطابقة لـ $\angle A$ عند النقطة X باستعمال \overline{XZ} ضلـعاً للزاوية.

الخطوة 1:



ارسم مستقيميـاً ℓ ، واختر عليه النقطة X . وأنشئ \overline{XZ} على أن تكون $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

مثال 1 استعمال ASA لإثبات تطابق مثلثين



اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\angle PQR$ تنصّف \overline{QS}

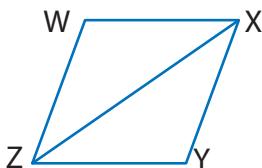
$\angle PSQ \cong \angle RSQ$

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

البرهان:

العبارات	العبارات
(1) معطيات	$\angle PSQ \cong \angle RSQ, \angle PQR \cong \angle QRS$ (1)
(2) تعريف منصف الزاوية	$\angle PQS \cong \angle RQS$ (2)
(3) خاصية الانعكاس للتطابق	$\overline{QS} \cong \overline{QS}$ (3)
ASA (4)	$\triangle PQS \cong \triangle RQS$ (4)

تحقق من فهمك



1) اكتب برهاناً حراً.

المعطيات: $\angle YXW$ تنصّف \overline{ZX} , $\angle WZY$ تنصّف \overline{ZX}

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

نظرية التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما AAS: تطابق زاويتين وضلع غير محصور يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان. وتُعد علاقة التطابق هذه نظرية؛ لأنّه يمكن إثبات صحتها باستعمال نظرية الزاوية الثالثة.

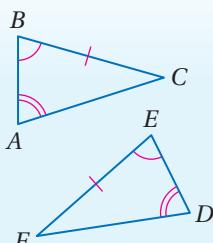
اضف إلى

مطويتك

نظرية 3.5

التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)

إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين.



مثال إذا كانت

$\angle B \cong \angle E$,

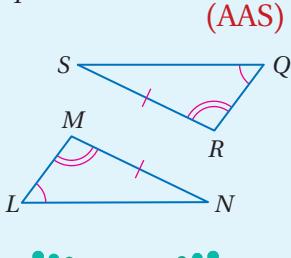
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ فإنَّ

ارشادات للدراسة

SSA تطابق ضلعين
زوايا غير محصورة
بينهما :

بالرغم من أن تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان، لكن تطابق زاويتين وضلع سواءً أكان محصوراً بينهما أو غير محصور بينهما كافٍ لإثبات تطابق مثلثين.



نظرية التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)

المعطيات: $\angle L \cong \angle Q, \angle M \cong \angle R, \overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

برهان

البرهان:

$\angle N \cong \angle S$ معطى

$\angle M \cong \angle R$ معطى

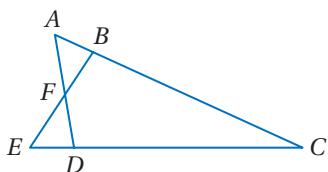
$\overline{MN} \cong \overline{RS}$ معطى

نظرية الزاوية الثالثة

ASA

مثال 2

استعمال AAS لإثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا حًراً.

المعطيات: $\angle DAC \cong \angle BEC$, $\overline{DC} \cong \overline{BC}$

$$\overline{DC} \cong \overline{BC}$$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان: بما أن: $\angle C \cong \angle C$, $\angle DAC \cong \angle BEC$, $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ بحسب خاصية الانعكاس، إذن $\triangle ACD \cong \triangle ECB$ بحسب النظرية AAS.

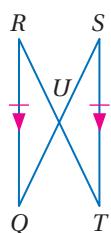
تحقق من فهمك



(2) اكتب برهانًا تسلسليًّا:

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$, $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$



يمكنك استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة.

مثال 3 من واقع الحياة

مسافات: أراد أكرم أن يحسب المسافة بين النقطتين B , C , فقام بتعيين نقطة أخرى D ليستعملها نقطة مرجعية، بحيث تكون العلاقات بين القطع المستقيمة كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن طول DE يساوي 8 ft , فاحسب المسافة بين النقطتين B , C .



إرشادات للدراسة

زاوية-زاوية-زاوية

3 $\angle B$, $\angle E$

متطابقتان بحسب

نظرية الزاوية الثالثة.

إن تطابق الزوايا

الثلاث المتناظرة غير

كافٍ لإثبات تطابق
مثلثين.

لتحديد طول CB , يجب أولاً أن ثبت أن المثلثين اللذين أنشأهما أكرم متطابقان.

- بما أن CD عمودية على كلٍ من \overline{DE} , \overline{CB} كما هو مبين في الشكل، وجميع الزوايا القوائم متطابقة.

$$\angle BCA \cong \angle EDA$$

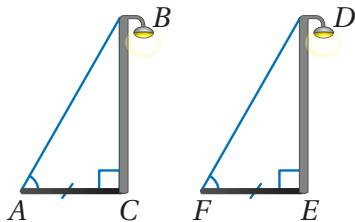
$$\overline{AC} \cong \overline{AD}$$

• $\angle BAC$, $\angle EAD$ زاويتان متقابلتان بالرأس إذن هما متطابقتان، وبحسب ASA يتوج أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$

وبما أن $\overline{DE} \cong \overline{CB}$ فإن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ لأن العناصر المتناظرة متطابقة وبما أن طول DE يساوي 8 ft



فإن طول CB يساوي 8 ft أيضًا، وهي المسافة بين النقطتين B , C .



تحقق من فهمك

(3) استعمل الشكل المجاور الذي يمثل عمودي كهرباء وظليهما
لكتابة برهان حرج يبيّن أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

تعلمت طرائق عديدة لإثبات تطابق المثلثات.

اضف الى
مطبيتك

AAS
ASA
SAS
SSS

يتطابق مثلثان إذا طبقيت زاويتان وضلعين غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

يتطابق مثلثان إذا طبقيت زاويتان والضلعين المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

يتطابق المثلثان إذا طبقي ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة.

تأكد

برهان: برهن كلاً مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

(2) برهان حرج

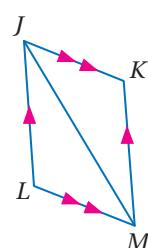
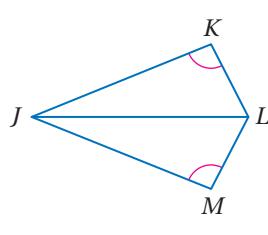
المعطيات: $\angle K \cong \angle M$,

المعطيات: $\overline{JK} \parallel \overline{LM}$, $\overline{JL} \parallel \overline{KM}$

$\angle KLM$ تنصف $\angle JKL$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JML \cong \triangle MJK$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JKL \cong \triangle JML$



المثال 3

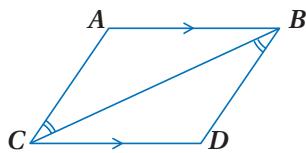
(3) بناء جسور: يحتاج مساح إلى إيجاد المسافة بين النقطتين A, B المبيتين في الشكل المجاور لبناء جسر فوق النهر. فوضع وتدا عند A ، ووضع زميله وتدا عند B في الجهة المقابلة، ثم عين المساح النقطة C في جهة A ، بحيث كانت $\overline{CA} \perp \overline{AB}$. ووضع وتدا رابعاً عند E ، التي هي نقطة متتصف \overline{CA} . وأخيراً وضع وتدا عند النقطة D ، بحيث كان $\overline{CD} \perp \overline{CA}$ ، والنقطات D, E, B تقع على مستقيم واحد.

(a) وضح كيف يمكن أن يستعمل المساح المثلثين المتكونين لإيجاد المسافة بين النقطتين A, B .

(b) إذا كان: $AC = 160\text{ m}$, $DC = 60\text{ m}$, $DE = 100\text{ m}$

فأوجد المسافة بين النقطتين A, B . ووضح إجابتك.





المثال 1 برهان: على الشكل المقابل:

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \quad (4)$$

$$\angle CBD \cong \angle BCA$$

$$\triangle CAB \cong \triangle BDC$$

المثال 2 برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين.

$$\overline{WY}$$
 نقطة متصف (5)

$$\overline{XW} \parallel \overline{UY}$$

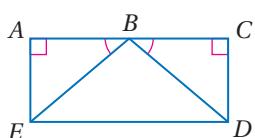
$$\triangle UVY \cong \triangle XWV$$

المثال 3 برهان: اكتب برهاناً تسلسلياً.

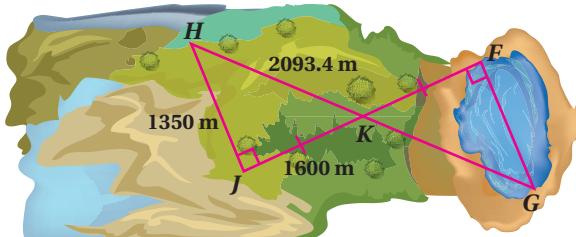
المعطيات: $\angle A, \angle C$ زاويتان قائمتان.

$$\angle ABE \cong \angle CBD, \overline{AE} \cong \overline{CD}$$

$$\overline{BE} \cong \overline{BD}$$



المثال 4 سباق زوارق: يرغب المشرفون في إقامة سباق تجديف في بحيرة، لكنهم غير متأكدين مما إذا كان طول البحيرة كافياً لإجراء السباق أم لا، ولقياس طول البحيرة حددوا رؤوس المثلثين المبينين في الشكل أدناه، ووجدوا أطوال أضلاع $\triangle HJK$ ، استعمل المعلومات الواردة في فقرة لماذا للإجابة عن الفقرتين a, b



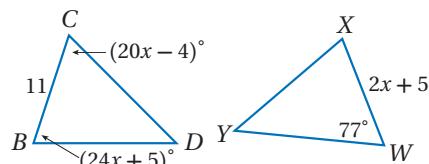
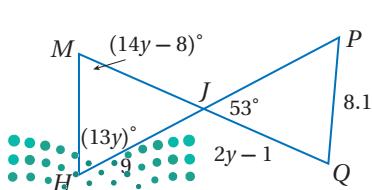
(a) وضح كيف يستعمل المشرفون على السباق المثلثين المتكونين لتقدير المسافة FG عبر البحيرة.

(b) هل طول البحيرة كافٍ لإجراء سباق الزوارق باستعمال القياسات المعطاة؟ وضح إجابتك.

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

$$\triangle MHJ \cong \triangle PQJ \quad (9)$$

$$\triangle BCD \cong \triangle WXY \quad (8)$$



برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين

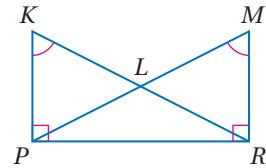
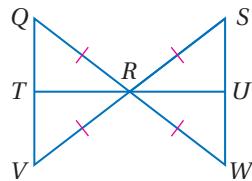
(11) المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$

المطلوب: $\overline{QT} \cong \overline{WU}$

(10) المعطيات: $\angle K \cong \angle M, \overline{KP} \perp \overline{PR}$

$\overline{MR} \perp \overline{PR}$

المطلوب: $\angle KPL \cong \angle MRL$



الربط مع الحياة

(12) **درجات هوائية:** يشكل أنبوب مقعد الدراجة مثلثاً مع كلّ من دعامتى السلسلة والمقدع. إذا كانت كل دعامة مقعد تشكّل زاوية قياسها 68° مع دعامة السلسلة المقابلة لها، وكل دعامة سلسلة تشكّل زاوية قياسها 44° مع أنبوب المقعد، فيبيّن أن دعامتى المقعد لهما الطول نفسه.



يعتمد حجم الدراجة الهوائية على طول أنبوب المقعد فيها. ويترافق هذا الطول في الدرّاجات الهوائية للشباب ما بين 12 in إلى 26 in .
وتعتبر ملائمة للراكب إذا استطاع أن يركب الدراجة بسهولة وهو واقف على الأرض.

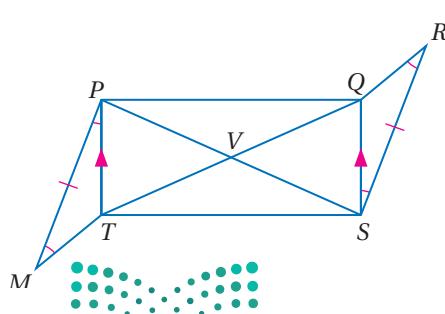
مسائل مهارات التفكير العليا

(13) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثين يمكن إثبات تطابقهما باستعمال مسلمة ASA، وسّمهما.

(14) **اكتشف الخطأ:** يقول عمر إنه لا يمكن إثبات تطابق مثلثين بتطابق ثلاث زوايا AAA، بينما يقول حسن إنه بإمكانه إثبات هذا التطابق، أيّهما كانت إجابتكم صحيحة؟ وضح إجابتك.

(15) **تبrier:** أوجد مثالاً مضاداً يوضح لماذا لا تستعمل حالة تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما SSA ؛ لإثبات تطابق مثلثين.

(16) **تحدي:** باستعمال المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، اكتب برهاناً تسلسلياً لإثبات أن $\triangle PVQ \cong \triangle SVT$.



(17) **اكتشف:** لخّص الطرائق الواردة في الدورس من 3-3 إلى 5-3؛ لإثبات تطابق المثلثات في جدول موضحاً متى تُستعمل كل طريقة.

تدريب على اختبار

(19) ما قيمة $\sqrt{121 + 104}$ ؟

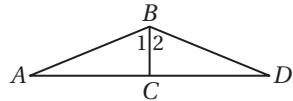
15 (A)

21 (B)

125 (C)

225 (D)

(18) في الشكل أدناه،
 $. \overline{BC} \perp \overline{AD}, \angle 1 \cong \angle 2$



أي نظرية أو مسلمة مما يأتي يمكن استعمالها لإثبات أن
 $? \triangle ABC \cong \triangle DBC$

SAS (C)

SSS (D)

AAS (A)

ASA (B)

مراجعة تراكمية

(20) إذا علمت أن: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ألم لا. ووضح إجابتك. (الدرس 4)

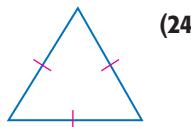
(21) جبر: إذا كان: $5 - 5x = 7$ ، فارسم شكلًا يمثل المثلثين المتطابقين، وسممه. ثم أوجد قيمة كل من x ، y . (الدرس 3-3)

(22) أكمل جدول الصواب المجاور (الدرس 1-2)

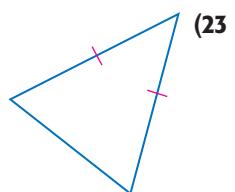
p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
F	T		
T	T		
F	F		
T	F		

استعد للدرس اللاحق

صنف كلاً من المثلثين الآتيين وفقاً لأضلاعه:



(24)



(23)

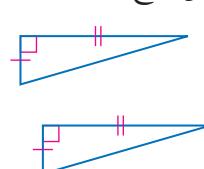
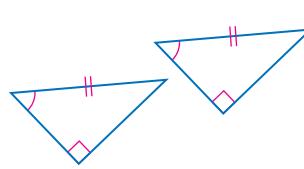
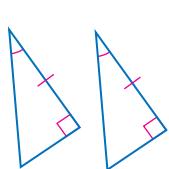


تطابق المثلثات القائمة Congruence in Right Triangles

3-5

في الدرسين 3-4 تعلمت نظريات و المسلمات تثبت تطابق المثلثات، فكيف تطبق هذه النظريات وال المسلمات على المثلثات القائمة؟

ادرس كل زوج من المثلثات القائمة الآتية:



حلٌ:

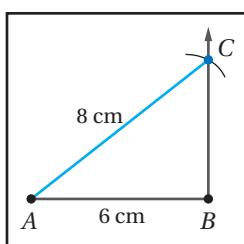
- (1) هل يتطابق كل زوج من المثلثات؟ إن كان ذلك صحيحًا، فأي نظرية تطابق أو مسلمة استعملت؟
- (2) أعد كتابة قواعد التطابق في التمرين 1 باستعمال الساق (L)، أو الوتر (H) ليحل محل الضلع (S). واحذف لكل زاوية قائمة؛ لأن كل مثلث قائم الزاوية يحوي زاوية قائمة. وجميع الزوايا القوائم متطابقة.
- (3) **خمن:** إذا علمت أن ضلعي الزاوية القائمة المتاظرين في المثلثات القائمة متطابقان، فما المعلومات الأخرى الضرورية حتى تؤكّد تطابق المثلثات؟ وضح إجابتك.

في الدرس 3 درست أن الحالة SSA ليست كافية لتحديد تطابق مثلثين، فهل يمكن استعمالها لبرهنة تطابق مثلثين قائمين؟

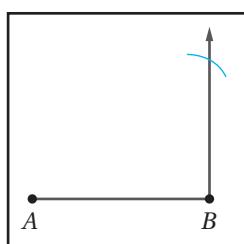
SSA والمثلثات القائمة

نشاط

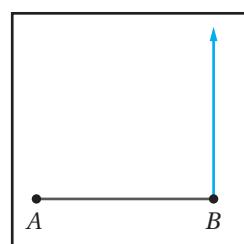
الخطوة 4:



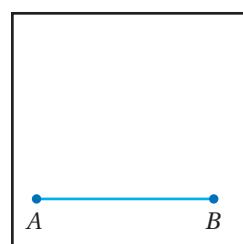
الخطوة 3:



الخطوة 2:



الخطوة 1:



رسم نقطة التقاطع C ، ثم ارسم $\triangle ABC$ لإكمال \overline{AC} .

افتح الفرجار فتحة تساوي 8 cm وركزه عند النقطة A ، ثم ارسم قوساً يقطع نصف المستقيم.

استعمل المنقلة لرسم نصف مستقيم من B عمودي على \overline{AB} .

رسم \overline{AB} على أن يكون $AB = 6\text{ cm}$

حلٌ:

- (4) هل يؤدي النموذج إلى رسم مثلث وحيد؟
- (5) هل يمكنك استعمال طولي الوتر والضلوع لتبيّن تطابق مثلثين قائمين؟
- (6) خمن حالة SSA الخاصة بالمثلثات القائمة الزاوية.

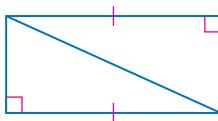


النشاط السابق يبيّن أربع طرائق لإثبات تطابق المثلثات القائمة وهي:

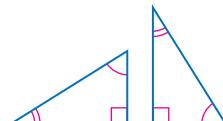
نظريات و المسلمات	تطابق المثلثات القائمة	مطبوعات	أضف إلى
	نظرية 3.6: تطابق الساقين LL إذا طابق ساقان في مثلث قائم نظيريهما في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.		
	نظرية 3.7: تطابق وتر وزاوية حادة HA إذا طابق وتر وزاوية حادة في مثلث قائم الوتر والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.		 اختصارات رياضية <i>L</i> هي اختصار لـ <i>leg</i> أو ساق، و <i>H</i> اختصار لـ <i>Hypotenuse</i> أو وتر، <i>A</i> اختصار لـ <i>Angle</i> أو زاوية.
	نظرية 3.8: تطابق ساق وزاوية حادة LA إذا طابق ساق وزاوية حادة في مثلث قائم الساق المناظرة والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.		
	نظرية 3.9: تطابق وتر وساق HL إذا طابق وتر وساق في مثلث قائم وترًا وساقاً في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.		

تمارين:

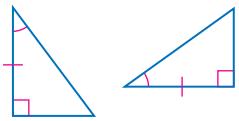
حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات الآتية متطابقين أم لا، وإذا كانت الإجابة “نعم”， فاذكر المulsame أو النظرية التي استعملتها:



(9)



(8)



(7)

برهان: اكتب برهانًا لكٌلٌ مما يأتي:

(10) النظرية 3.7

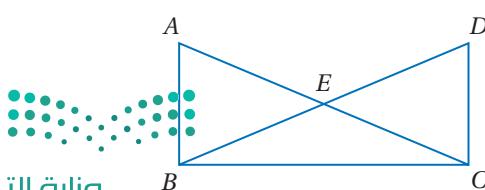
(11) النظرية 3.8 (إرشاد: توجد حالتان مكتantan)

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 13.

(13) المعطيات: $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$

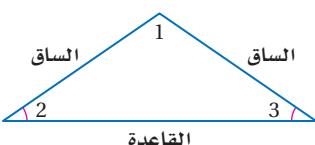
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$





المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع Isosceles and Equilateral Triangles



لماذا؟
للعبة القطار السريع في مدينة الألعاب دعائم مثلثية بين المسارات لقويتها وثبيتها، والدعائم المثلثية الظاهرة في الصورة عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين.

خصائص المثلث المتطابق الضلعين: تذكر أن المثلثات المتطابقة الضلعين لها ضلعان متطابقان على الأقل، وأن لعناصرها أسماءً خاصة.

حيث يُسمى الضلعان المتطابقان **الساقين**، والزاوية التي ضلعاها الساقان تُسمى **زاوية الرأس**. ويُسمى ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس القاعدة. والزاويتان المكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتي القاعدة**.

في الشكل المجاور، $\angle 1$ هي زاوية الرأس، $\angle 2$ هي زاوية القاعدة، $\angle 3$ هي زاويتا القاعدة.

فيما سبق:

درست المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

(الدرس 3-1)

والآن:

- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المفردات:

ساقا المثلث المتطابق

الضلعين

legs of an isosceles triangle

زاوية الرأس

vertex angle

زاويتا القاعدة

base angles

نظريات

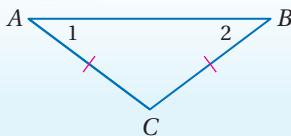
المثلث المتطابق الضلعين

أضف إلى
مطويتك

3.10 نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.

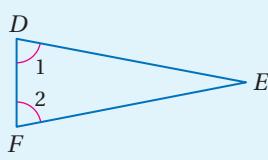
مثال: إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.



3.11 عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.

مثال: إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ ، فإن $\overline{FE} \cong \overline{DE}$.



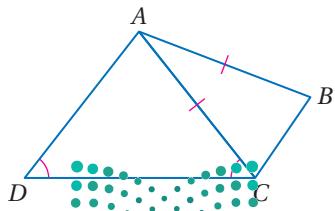
ستبرهن النظرية 3.11 في السؤال 24

مثال 1

القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة

(a) سمّ زاويتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

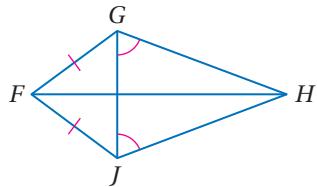
$\angle ACB$ تقابل $\angle B$ ، \overline{AB} تقابل \overline{AC} ؛
 $\angle ACB \cong \angle B$.
لذا فإن $\angle B$.



(b) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

\overline{AD} تقابل \overline{AC} ، $\angle ACD$ تقابل $\angle D$ ، لذا فإن $\overline{AD} \cong \overline{AC}$

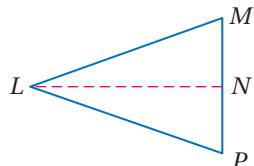
تحقق من فهمك



- (1A) سُمّ زاويتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما في الشكل.
 (1B) سُمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

لإثبات نظرية المثلث المتطابق الضلعين، ارسم مستقيماً مساعداً، ثم استعمل المثلثين الناتجين.

البرهان نظرية المثلث المتطابق الضلعين



المعطيات: في $\triangle LMP$ ، $\overline{LM} \cong \overline{LP}$ ،

المطلوب: إثبات أن: $\angle M \cong \angle P$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.	(1) افترض أن N نقطة منتصف \overline{MP} .
(2) كل نقطتين تحددان مستقيماً.	(2) ارسم قطعة مساعدة \overline{LN} .
(3) نظرية نقطة المنتصف.	$\overline{PN} \cong \overline{NM}$ (3)
(4) خاصية الانعكاس في التطابق.	$\overline{LN} \cong \overline{LN}$ (4)
(5) معطى.	$\overline{LM} \cong \overline{LP}$ (5)
(6) مسلمة التطابق بثلاثة أضلاع.	$\triangle LMN \cong \triangle LPN$ (6)
(7) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة.	$\angle M \cong \angle P$ (7)

خصائص المثلث المتطابق الأضلاع: نظرية المثلث المتطابق الضلعين تقود إلى نتائج حول زوايا المثلث المتطابق الأضلاع.

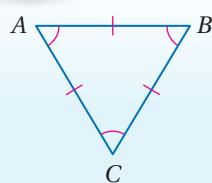
مراجعة المفردات

المثلث المتطابق الأضلاع:
هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.

أضف إلى مطويتك

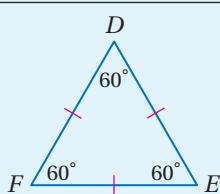
المثلث المتطابق الأضلاع

نتيجتان



3.3 يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

مثال: إذا كان $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ ، $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ إذا وفقط إذا كان



3.4 قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع 60° .

مثال: إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$ ،

. $m\angle E = m\angle F = m\angle D = 60^\circ$ فإن

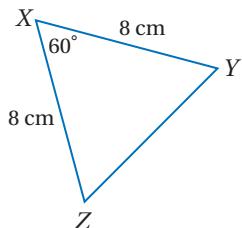
ستبرهن النتيجتين 3.3، 3.4 هي السؤالين 22، 23

مثال 2

إيجاد القياسات المجهولة

أوجد كل قياس من القياسات الآتية:

$$m\angle Y \text{ (a)}$$



بما أن $XY = XZ$, $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$, وباستعمال نظرية المثلث المتطابق الضلعين، تكون زاويتا القاعدة Y , Z متطابقتين؛ لذا فإن $m\angle Y = m\angle Z$. استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث لإيجاد $m\angle Y$.

نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180^\circ$$

$$m\angle X = 60^\circ, m\angle Z = m\angle Y$$

$$60^\circ + m\angle Y + m\angle Y = 180^\circ$$

بسط

$$60^\circ + 2(m\angle Y) = 180^\circ$$

اطرح 60 من كل طرف

$$2(m\angle Y) = 120^\circ$$

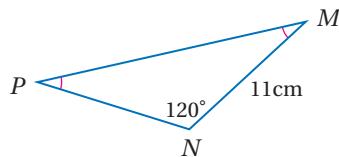
اقسم كل طرف على 2

$$m\angle Y = 60^\circ$$

$$YZ \text{ (b)}$$

الثلاث 60° ; لذا فالمثلث متطابق الزوايا. وهو متطابق الأضلاع أيضًا، لذا فإن $XY = XZ = ZY = 8 \text{ cm}$. وبما أن

$$YZ = 8 \text{ cm}, XY = 8 \text{ cm}$$



$$PN \text{ (2B)}$$

$$m\angle M \text{ (2A)}$$

تحقق من فهمك

يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والجبر لتجد القيم المجهولة.

إيجاد القيم المجهولة

مثال 3

جبر: أوجد قيمة كل متغير في الشكل المجاور.

بما أن $m\angle A = m\angle B$; أي أن $\angle A \cong \angle B$ فإن $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ باستعمال عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين؛ وبذلك فإن أضلاع المثلث متطابقة. وقياس كل زاوية فيه تساوي 60° , لذا فإن $30^\circ + 2x = 60^\circ$, $x = 30^\circ$.

وبما أن المثلث متطابق الأضلاع، إذن جميع الأضلاع متطابقة.

تعريف تطابق القطع المستقيمة

$$AB = BC$$

وعَضَ

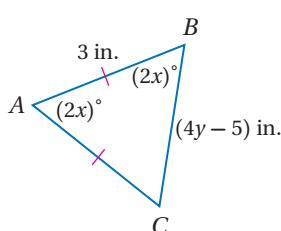
$$3 = 4y - 5$$

اجمع 5 إلى كل من الطرفين

$$8 = 4y$$

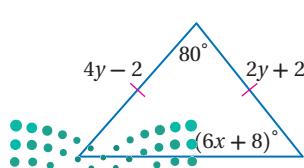
اقسم كل طرف على 4

$$2 = y$$



تحقق من فهمك

(3) أوجد قيمة كل من المتغيرين في الشكل المجاور.

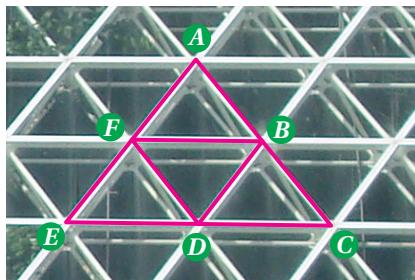


إرشادات للدراسة

المثلثات المتطابقة الضلعين

كما اكتشفت في المثال 2، أي مثلث متطابق الضلعين فيه زاوية قياسها 60° يكون مثليًا متطابق الأضلاع.

مثال 4 من واقع الحياة



بناء: في الصورة المجاورة، $\triangle ACE$ مثلث متطابق الأضلاع. نقطة متصرف F ، \overline{AE} ، \overline{EC} ، B نقطة متصرف \overline{CA} . برهن أن $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

المعطيات: $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، F نقطة متصرف \overline{AE} ، D نقطة متصرف \overline{CA} ، B نقطة متصرف \overline{EC} .

المطلوب: إثبات أن: $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

البرهان:



الربط مع الحياة

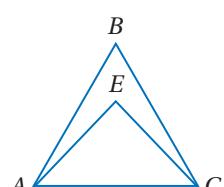
استعمل المهندس المعماري في هذا المبنى قضايا حديدية تم تثبيتها على شكل مثلثات لتزيد المبنى دعماً وقوةً مماثلاً في ذلك الجوانب الجمالية للبناء أيضاً.

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\triangle ACE$ متطابق الأضلاع.
(2) معطى	F نقطة متصرف \overline{AE} ، D نقطة متصرف \overline{CA} .
(3) المثلث المتطابق للأضلاع متطابق الزوايا	$\angle A \cong \angle C \cong \angle E$
(4) تعريف نقطة المتصرف	$AF = FE, ED = DC, CB = BA$
(5) تعريف المثلث المتطابق للأضلاع	$\overline{CA} \cong \overline{AE} \cong \overline{EC}$
(6) تعريف التطابق	$CA = AE = EC$
(7) خاصية الضرب	$\frac{1}{2} CA = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} BC$
(8) بالتعويض	$AF = FE = ED = DC = AB = BC$
(9) تعريف التطابق	$\overline{AF} \cong \overline{ED} \cong \overline{CB}, \overline{FE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BA}$
(10) مسلمة SAS	$\triangle AFB \cong \triangle EDF \cong \triangle CBD$
(11) العناصر المتناظرة متطابقة.	$\overline{DF} \cong \overline{FB} \cong \overline{BD}$
(12) تعريف المثلث المتطابق للأضلاع	$\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

تحقق من فهمك



(4) في الصورة أعلاه إذا علمت أن $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، فيه: $\overline{BC} \parallel \overline{EF}, \overline{FD} \parallel \overline{AB}$ ، F نقطة متصرف \overline{EC} ، فأثبت أن $\triangle FED \cong \triangle BDC$.



باستعمال الشكل المجاور أجب عن السؤالين الآتيين:

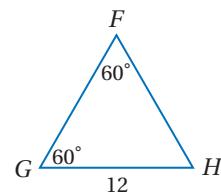
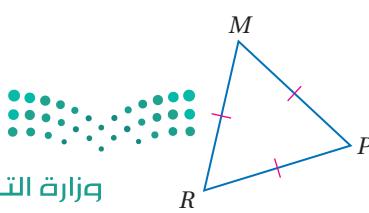
(1) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ ، فسم زاويتين متطابقتين.

(2) إذا كان $\angle EAC \cong \angle ECA$ ، فسم قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

أوجد كلاً من القياسين الآتيين:

$$m\angle MRP \quad (4)$$

$$FH \quad (3)$$



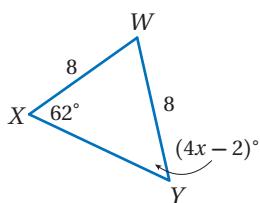
المثال 1

تأكد

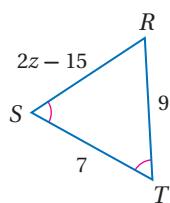
المثال 3

جبر: أوجد قيمة المتغير في كلٍ من السؤالين الآتيين:

(6)



(5)

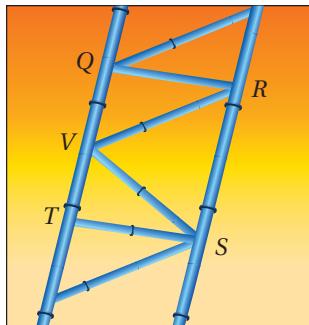


المثال 4

القاطرة السريعة: الشكل المجاور يظهر جزءاً من سكة القاطرة السريعة المبينة في فقرة "لماذا؟" مكونة من مثلثات.

(a) إذا كان $\overline{QR} \perp \overline{ST}$, \overline{QR} عموديًّاً على \overline{ST} , و $\triangle RVS \cong \triangle STV$ متطابقان، فأثبت أن $\overline{RS} \parallel \overline{QT}$.

(b) إذا كان $QR = 2\text{ m}$, $VR = 2.5\text{ m}$, فأوجد البعد بين المستقيمين \overleftrightarrow{QR} و \overleftrightarrow{ST} . بُرِّر إجابتك.



تدريب وحل المسائل

المثال 1

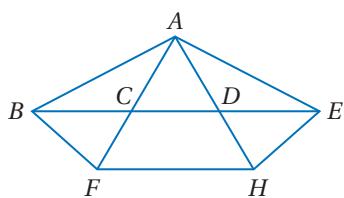
باستعمال الشكل المجاور أجب عن الأسئلة 8-11:

(8) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AE}$, فسم زاويتين متطابقتين.

(9) إذا كانت $\angle ABF \cong \angle AFB$, فسم قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

(10) إذا كانت $\overline{CA} \cong \overline{DA}$, فسم زاويتين متطابقتين.

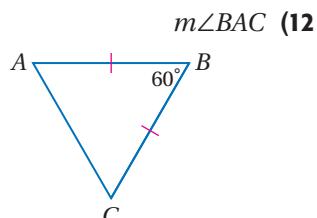
(11) إذا كانت $\angle DAE \cong \angle DEA$, فسم قطعتين مستقيمتين متطابقتين.



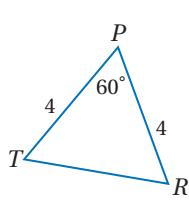
المثال 2

أوجد كلاً من القياسين الآتيين:

$m\angle BAC$ (12)



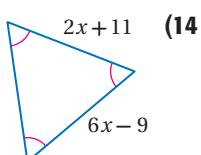
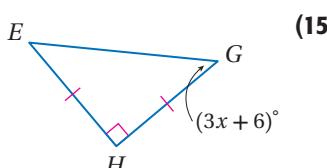
TR (13)



جبر: أوجد قيمة المتغير في كلٍ من السؤالين الآتيين:

المثال 3

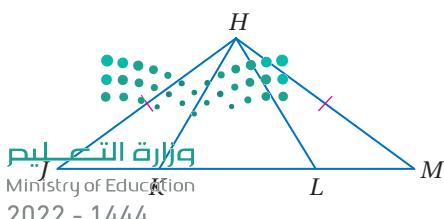
برهان: اكتب برهاناً حراً.

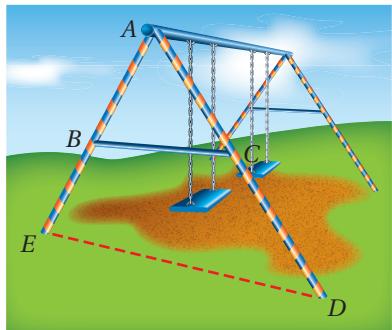


المثال 4

(16) المعطيات: $\triangle HJM \cong \triangle HKL$ متطابقان، $\triangle HJM$ متطابق الضلعين، $\triangle HKL$ متطابق الأضلاع.

المطلوب إثبات أن: $\angle JHK \cong \angle MHL$





(17) حدائق: اصطحب خالد أخاه الأصغر إلى حديقة الحي، فلاحظ أن دعامات الأرجوحة الموجودة في الحديقة تشكل مجموعتين من المثلثات، وأن $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ ولكن $\overline{BC} \not\cong \overline{AB}$.

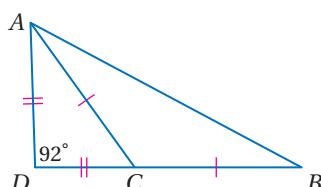


الربط مع الحياة

مهمة الوالدين اختيار الألعاب التي تناسب أعمار أطفالهم.

- (a) إذا قدر خالد أن $m\angle ABC = 50^\circ$ ، فما قيمة $m\angle BAC$ وفقاً لهذا التقدير؟ وضح إجابتك.
- (b) إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{BE}$ ، فيَّن أن $\triangle AED$ متطابق الضلعين.
- (c) إذا كان $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$ ، فيَّن أن $\triangle AED$ متطابق الأضلاع.

أوجِد كُلَّاً من القياسات الآتية:



$$m\angle CAD \quad (18)$$

$$m\angle ACD \quad (19)$$

$$m\angle ACB \quad (20)$$

$$m\angle ABC \quad (21)$$

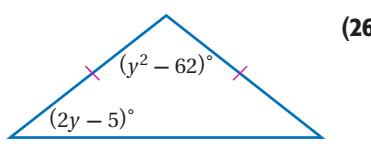
برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

(24) النظرية 3.11

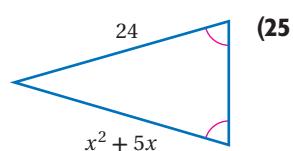
(23) النتيجة 3.4

(22) النتيجة 3.3

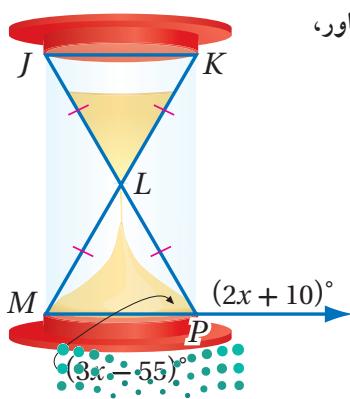
أوجِد قيمة المتغير في كُلَّ من السؤالين الآتيين:



(26)



(25)



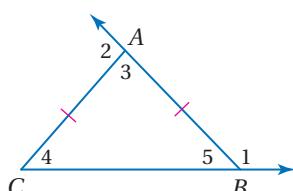
الساعات الرملية: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجِد كُلَّاً من القياسات الآتية:



الربط مع الحياة

دقة ساعة الرمل الزجاجية تعتمد على ثبات معدل تدفق الرمل الذي يعتمد على نسبة قطر الثقب إلى قطر حبات الرمل المستعملة.

(31) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، ستكشف القياسات الممكنة للزوايا الداخلية للمثلث المتطابق الضلعين، إذا علم قياس زاوية خارجية له.



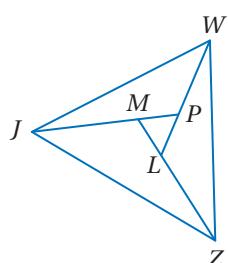
(a) هندسياً: استعمل المسطرة والمنقلة لرسم ثلاثة مثلثات مختلفة، كل منها متطابق الضلعين. وعند أحد ضلعي زاوية الرأس ومد القاعدة من إحدى جهتيها كما في الشكل المجاور.

(b) جدولياً: استعمل المنقلة لإيجاد $m\angle 1$ لكل مثلث وسجله في جدول. واستعمل $m\angle 1$ لحساب قياسات $\angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$ ، ثم أوجد $m\angle 2$ وسجله في جدول آخر واستعمله لحساب القياسات السابقة نفسها. رتب نتائجك في جدولين.

(c) لفظياً: وضح كيف استعملت $m\angle 1$ لإيجاد قياسات $\angle 5, \angle 4, \angle 3, \angle 2$. ثم وضح كيف استعملت $m\angle 2$ لإيجاد هذه القياسات نفسها.

(d) جبرياً: إذا كان $x = m\angle 1$ ، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كل من $\angle 5, \angle 3, \angle 4$ ، وبالمثل إذا كان $m\angle 2 = x$ ، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كل من الزوايا نفسها.

مسائل مهارات التفكير العليا



(32) تحد: في الشكل المجاور إذا كان $\triangle WJZ$ متطابق الأضلاع، $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$ ، فأثبت أن $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$.

تبrier: حدد ما إذا كانت كل من العبارتين الآتتين صحيحة أحياناً أو دائمًا أو غير صحيحة أبداً. ووضح إجابتك:

(33) إذا كان قياس زاوية رأس المثلث المتطابق الضلعين عدداً صحيحاً، فإن قياس كل من زاويتي القاعدة عدد صحيح.

(34) إذا كان قياس كل من زاويتي القاعدة عدداً صحيحاً، فإن قياس زاوية الرأس عدد فردي.

(35) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثاً متطابق الضلعين، فيه زاويا القاعدة منفرجتان إن أمكنك ذلك، وإلا فوضح السبب.

(36) اكتب: وضح كيف تستعمل قياس زاوية قاعدة المثلث المتطابق الضلعين لإيجاد قياس زاوية الرأس.

تدريب على اختبار

(38) إذا كان $-3 = x$ ، فإن قيمة $5 - 4x^2$ تساوي:

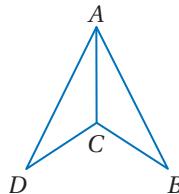
- 2 **A**
20 **B**
42 **C**
62 **D**

(37) في الشكل المجاور، $\overline{AE}, \overline{BD}$ تتصف كليًّا منها الأخرى في النقطة C .

أي المعلومات الإضافية الآتية تعد كافية لإثبات أن $\overline{DE} \cong \overline{DC}$ ؟

- $\angle ACB \cong \angle EDC$ **C**
 $\angle A \cong \angle B$ **D**
 $\angle A \cong \angle BCA$ **A**
 $\angle B \cong \angle D$ **B**





(39) إذا كان: $CB = 7 \text{ in}$, $DC = 7 \text{ in}$, $AD = 27 \text{ in}$, $AB = 27 \text{ in}$
فحدد ما إذا كان $\triangle ADC \cong \triangle ABC$. ([الدرس 3-4](#))

اذكر الخاصية التي تبرر كلاً من العبارات الآتية: ([الدرس 1-6](#))

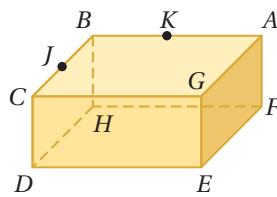
(40) إذا كان $xy + xz = a$, فإن $x(y + z) = a$

(41) إذا كان $n = 56$, $n - 17 = 39$.

(42) إذا كان $m\angle P + m\angle Q = m\angle R$, $m\angle R = 110^\circ$ وكانت $m\angle P + m\angle Q = 110^\circ$

(43) إذا كان $CV = 15$ فإن $CV = MD$, $MD = 15$

انظر إلى الشكل المجاور. ([مهارة سابقة](#))



(44) ما عدد المستويات الظاهرة في هذا الشكل؟

(45) سُمّي ثالث نقاطٍ تقع على استقامَةٍ واحدةٍ.

استعد للدرس اللاحق

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفيها كما يأتي:

$$A(2, 15), B(7, 9) \quad (46)$$

$$C(-4, 6), D(2, -12) \quad (47)$$

$$E(3, 2.5), F(7.5, 4) \quad (48)$$





المثلثات والبرهان الإحداثي

Triangles and Coordinate Proof

3-7



لماذا؟

نظام تحديد الموضع العالمي (GPS) يستقبل البث من الأقمار الصناعية، والتي يمكن بواسطتها تحديد موقع السيارة. ويمكن الاستفادة من هذه المعلومات بالإضافة إلى برمجيات أخرى لتوجيه حركة السيارة.

فيما سبق:

درست استعمال الهندسة الإحداثية لبرهان تطابق المثلثات.

(مهارة سابقة)

والآن:

- رسم مثلثات، وأحدد مواقعها لاستعمالها في البرهان الإحداثي.
- أكتب برهاناً إحداثياً.

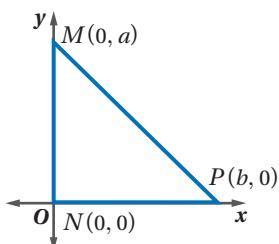
المفردات:

البرهان الإحداثي
coordinate proof

موقع المثلث وتسميته: كما هو الحال في نظام تحديد الموضع العالمي، فإن معرفة إحداثيات رؤوس شكل ما في مستوى إحداثي، يمكنك من اكتشاف خصائصه والتوصيل إلى استنتاجات خاصة به. ويستعمل **البرهان الإحداثي** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية. فالخطوة الأولى في البرهان الإحداثي هي تمثيل الشكل في المستوى الإحداثي.

تحديد موقع المثلث وتسميته

مثال 1



ارسم المثلث القائم MNP في المستوى الإحداثي، وسم رؤوسه على أن يكون طول \overline{MN} يساوي a وحدة، وطول \overline{NP} يساوي b وحدة.

- يُحدد طول الضلع الذي يقع على أحد المحورين بسهولة؛ لذا من الأفضل وضع ضلع القائمة على المحورين x, y .
- اجعل زاوية المثلث القائمة N على نقطة الأصل، فيكون ضلعا القائمة على المحورين هما x, y .
- ارسم المثلث في الربع الأول.
- ارسم M على المحور y ، وبما أن طول \overline{MN} يساوي a وحدة، فإن إحداثيها x يساوي صفرًا، وإحداثيها y يساوي a .
- ارسم P على المحور x ، وبما أن طول \overline{NP} يساوي b وحدة، فإن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي b .

تحقق من فهمك

- ارسم المثلث JKL المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثي وسم رؤوسه، على أن يكون طول قاعده JL يساوي a وحدة، ويكون ارتفاعه b وحدة، والرأس K يقع على المحور y .

إرشادات للدراسة

الارتفاع على القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين ينصف القاعدة.

رسم المثلثات في المستوى الإحداثي

مفهوم أساسى

أضف إلى
مطويتك

الخطوة 1: اجعل نقطة الأصل رأساً للمثلث.

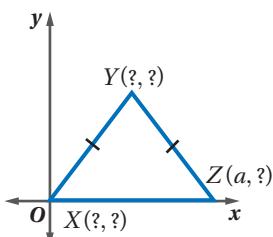
الخطوة 2: ارسم ضلعاً واحداً على الأقل من أضلاع المثلث على أحد المحورين.

الخطوة 3: ارسم المثلث في الربع الأول إن أمكن.

الخطوة 4: استعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.



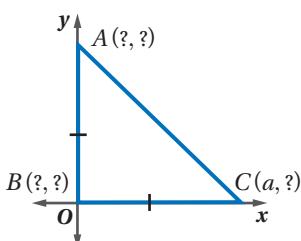
مثال 2



إيجاد الإحداثيات المجهولة في المثلث XYZ المتطابق الضلعين.

بما أن الرأس X يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0, 0)$ ، ولأن الرأس Z يقع على المحور x ، فإن الإحداثي y له يساوي صفرًا، فتكون إحداثيات الرأس Z هي $(a, 0)$ ، وبما أن $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فإن الإحداثي Y للنقطة Y يقع في منتصف المسافة بين $0, a$ ويكون $\frac{a}{2}$ ، أما الإحداثي y للنقطة Y فلا يمكننا إيجاده بدالة a ، وإذا افترضنا b ، فتكون إحداثيات النقطة Y هي $\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

تحقق من فهمك



(2) أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية.

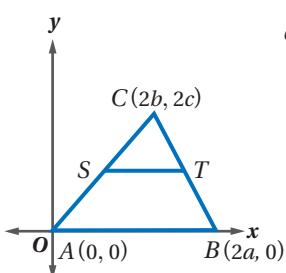
إرشادات للدراسة

الزاوية القائمة

تقاطع المحور x مع المحور y يشكل زاوية قائمة؛ ولذا يُعد هذا التقاطع المكان المناسب لموقع الزاوية القائمة.

كتابة البرهان الإحداثي بعد رسم المثلث في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثيات رؤوسه، يمكن استعمال البرهان الإحداثي؛ للتحقق من بعض الخصائص وبرهنة بعض النظريات.

مثال 3



اكتب برهاناً إحداثياً لإثبات أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.

اجعل أحد رؤوس المثلث عند نقطة الأصل وسُمّه A ، واستعمل إحداثيات من مضاعفات 2؛ لأن قانون نصف المنصف يتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2

المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه:

نقطة منتصف \overline{AC} S

نقطة منتصف \overline{BC} T

المطلوب: إثبات أن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$

البرهان:

باستعمال قانون نصف المنصف، فإن إحداثيات S هي: $\left(\frac{2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = (b, c)$

وكذلك إحداثيات T هي: $\left(\frac{2a+2b}{2}, \frac{0+2c}{2}\right) = (a+b, c)$

وبتطبيق قانون الميل، فإن ميل \overline{ST} هو: $\frac{c-c}{a+b-b} = 0$

وميل \overline{AB} هو: $\frac{0-0}{2a-0} = 0$

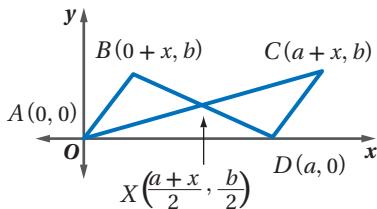
وبما أن ميل \overline{ST} يساوي ميل \overline{AB} ، فإن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$

إرشادات للدراسة

البرهان الإحداثي

تنطبق الإرشادات والطرائق المستعملة في هذا الدرس على كل المضلعات، ولا تقصر على المثلثات.





تحقق من فهمك

- (3) اكتب برهاناً إحداثياً لإثبات أن:
 $\triangle ABX \cong \triangle CDX$

يمكن استعمال طرائق البرهان الإحداثي لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة تصنيف المثلثات

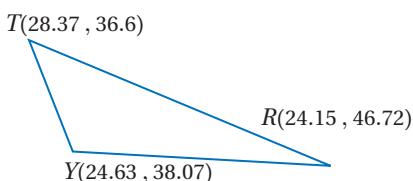
جغرافيا: إذا علمت أن الإحداثيات التقريرية لكُلّ من الرياض وينبع وتبوك هي:
 الرياض $28.37^{\circ}\text{N } 46.72^{\circ}\text{E}$, ينبع $24.15^{\circ}\text{N } 46.72^{\circ}\text{E}$, تبوك $24.63^{\circ}\text{N } 38.07^{\circ}\text{E}$.

فاكتب برهاناً إحداثياً يبيّن أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

إرشاد: يمكن التعبير عن إحداثي الرياض $24.15^{\circ}\text{N } 46.72^{\circ}\text{E}$ بالزوج المرتب $(24.15, 46.72)$ وكذلك بقية المدن.

الخطوة الأولى هي رسم شكل تقريري لهذا المثلث، وتعيين الموضع الثلاثة وإحداثياتها على الرسم، ولتكن R تمثل الرياض، و Y تمثل ينبع، و T تمثل تبوك.

إذا لم يتطابق أي ضلعين في $\triangle RYT$ ، فسيكون مختلف الأضلاع. استعمل قانون المسافة بين نقطتين والآلة الحاسبة لإيجاد أطوال أضلاع المثلث.



$$RY = \sqrt{(24.15 - 24.63)^2 + (46.72 - 38.07)^2} \approx 8.66$$

$$RT = \sqrt{(28.37 - 24.15)^2 + (36.6 - 46.72)^2} \approx 10.96$$

$$YT = \sqrt{(24.63 - 28.37)^2 + (38.07 - 36.6)^2} \approx 4.02$$

وبما أن أطوال أضلاع المثلث مختلف، إذن فهو مثلث مختلف الأضلاع؛ أي أن المثلث الذي رؤوسه هي الرياض وينبع وتبوك مختلف الأضلاع.

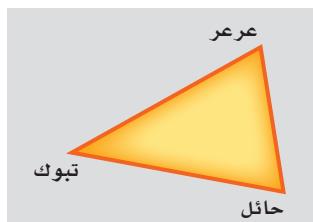
تحقق من فهمك

- (4) **جغرافيا:** يضم مجتمع كشفي ثلث فرق من ثلاث مدن تمثل مثلاً.

إذا كانت الإحداثيات التقريرية لموقع هذه المدن الثلاث هي:

تبوك $28.37^{\circ}\text{N } 36.6^{\circ}\text{E}$, ينبع $30.9^{\circ}\text{N } 41.13^{\circ}\text{E}$, حائل $27.43^{\circ}\text{N } 41.68^{\circ}\text{E}$

فاكتب برهاناً إحداثياً لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث متتطابق الضلعين تقريرياً.



الربط مع الحياة

يقع مثلث برمودا المبين في الخريطة في المحيط الأطلسي، وهو على شكل مثلث مختلف الأضلاع. وتقدير مساحته الحقيقية بـ 482344 ميلًا مربعًا.



تاريخ الرياضيات

محمد بن أحمد أبو الريحان البوروني
الخوارزمي،
 973ھ - 362ھ

برز في كثير من فروع المعرفة الإنسانية (الأدب، الجغرافية، الفلك، الرياضيات)، فقد حدد بدقة خطوط الطول وخطوط العرض، ووضع قاعدة حسابية لتسطيع الكرة: أي نقل الخطوط والحرافط من الكرة إلى سطح مسطح والعكس..

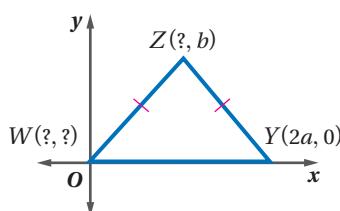


رسم كلّ من المثلثين الآتيين في المستوى الإحداثي، وحدّد إحداثيات رؤوسه.

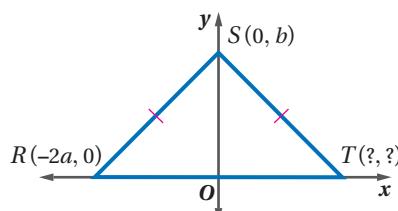
(1) $\triangle ABC$ قائم الزاوية، فيه \overline{AC} , \overline{AB} ضلعا القائمة، وطول \overline{AC} يساوي $2a$ وحدة، وطول \overline{AB} يساوي $2b$ وحدة.

(2) $\triangle FGH$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته \overline{FG} يساوي $2a$ وحدة.

أوجد الإحداثيات المجهولة في كلّ من المثلثين الآتيين:



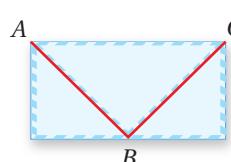
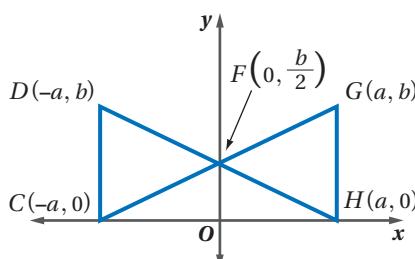
(4)



(3)

(5) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن $\triangle FGH \cong \triangle FDC$.

المثال 3



(6) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين، علماً بأن بُعد المظروف هما: 20 cm, 20 cm، والنقطة B في منتصف الحافة السفلية للمظروف.

المثال 4

تدريب وحل المسائل

رسم كل مثلثٍ من المثلثات الآتية في المستوى الإحداثي، وحدّد إحداثيات رؤوسه:

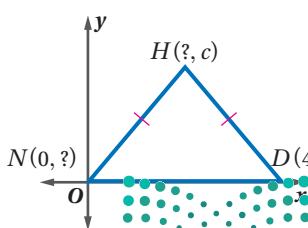
المثال 1

(7) $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته \overline{AB} يساوي a وحدة.

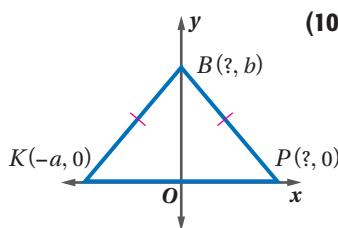
(8) $\triangle XYZ$ القائم الزاوية الذي وتره \overline{YZ} ، وطول الضلع \overline{XY} يساوي b وحدة، وطول \overline{XZ} ثلاثة أمثال طول \overline{XY} .

أوجد الإحداثيات المجهولة في كل مثلثٍ مما يأتي:

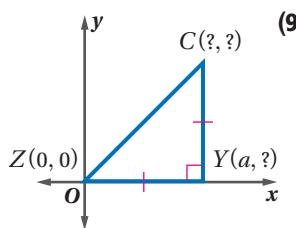
المثال 2



(11)



(10)



(9)

برهان: اكتب برهاناً إحداثياً لك كل عبارات الآتية:

(12) القطع المستقيمة الثلاث الواقلة بين نقاط متصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشکل مثلثاً متطابق الضلعين أيضاً.

(13) طول القطعة المستقيمة الواقلة بين متصفتي ضلعين في المثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث.

(14) **جغرافية:** إذا علمت أن الإحداثيات التقريرية لموقع مدن جازان ونجران وخميس مشيط هي: جازان $E 42.58^{\circ} N 16.9^{\circ}$ ، نجران $E 44.16^{\circ} N 17.5^{\circ}$ ، خميس مشيط $E 42.8^{\circ} N 18.3^{\circ}$ ، فيبين أن المثلث الذي رؤوسه هي هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

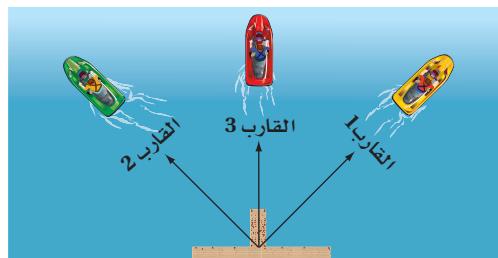
في $\triangle XYZ$ ، أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه، ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضح إجابتك.

$$X(0, 0), Y(1, h), Z(2h, 0) \quad (16)$$

$$X(0, 0), Y(2h, 2h), Z(4h, 0) \quad (15)$$

(17) **نزهة:** أقامت عائلتان خيمتين في متنزه كبير. إذا اعتبرنا أن موقع إدارة المتنزه تقع عند النقطة $(0, 0)$ ، وأن إحداثيات موقعي الخيمتين هما $(9, 25)$ ، $(12, 9)$. فاكتب برهاناً إحداثياً لإثبات أن الشكل المكون من موقع إدارة المتنزه والخيمتين هو مثلث قائم الزاوية.

(18) **رياضة مائية:** انطلقت ثلاثة قوارب مائية من الرصيف نفسه، فاتجه الأول نحو الشمال الشرقي، واتجه الثاني نحو الشمال الغربي، أما الثالث فاتجه نحو الشمال.



الربط مع الحياة

توقف القاربان (الأول والثاني) على بعد 300 m تقريباً من الرصيف، بينما توقف الثالث على بعد 212 m من الرصيف.

- (a) إذا اعتبرنا أن الرصيف يمثل النقطة $(0, 0)$ ، فمثل هذا الوضع بيانياً، وأوجد معادلة خط سير القارب الأول، ومعادلة خط سير القارب الثاني. وفسّر إجابتك.
- (b) اكتب برهاناً حرراً لإثبات أن الرصيف والقاربين (الأول والثاني) تشکل مثلثاً قائم الزاوية متطابق الضلعين.
- (c) أوجد إحداثيات موقع هذه القوارب الثلاثة، وفسّر إجابتك.
- (d) اكتب برهاناً إحداثياً لإثبات أن القوارب الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد تقريباً، وأن القارب الثالث يقع في منتصف المسافة بين القاربين الأول والثاني.

تستثمر المنطقة الشرقية وجدة إطاراتهما على الخليج العربي والبحر الأحمر في توجيه برامج رياضية بحرية متنوعة للسياح الذين يتواجدون على الواجهات البحرية من مختلف مناطق المملكة.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدد: إذا كانت إحداثيات النقطة J هي $(0, 0)$ ، والنقطة K هي $(2a, 2b)$ ، فأوجد إحداثيات النقطة L ، على أن يكون $\triangle JKL$ من النوع المحدد في كلٍ من الأسئلة الثلاثة الآتية:

(21) مثلث مختلف الأضلاع

(20) مثلث قائم الزاوية

(22) **مسألة مفتوحة:** في المستوى الإحداثي، ارسم مثلثاً قائم الزاوية متطابق الضلعين على أن تكون نقطة الأصل هي نقطة متصرف وتره، وحدد إحداثيات كل رأسٍ من رؤوسه.

(23) **تبرير:** إحداثيات رأسين في مثلث هما: $(0, 0)$, $(a, 0)$. إذا أعطى إحداثي الرأس الثالث بدلالة a ، وكان المثلث متطابقين، فحدد إحداثيات الرأس الثالث، ثم ارسم المثلث في المستوى الإحداثي.

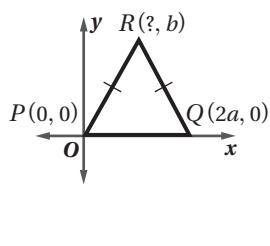
(24) **اكتب:** وضح فائدة اتباع كُل من الإرشادات الآتية؛ لرسم المثلث في المستوى الإحداثي عند كتابة البرهان الإحداثي:

(a) اجعل نقطة الأصل أحد رؤوس المثلث.

(b) ارسم ضلعاً واحداً على الأقل من أضلاع المثلث على المحور x أو المحور y .

(c) حاول أن يقع المثلث في الربع الأول ما أمكن ذلك.

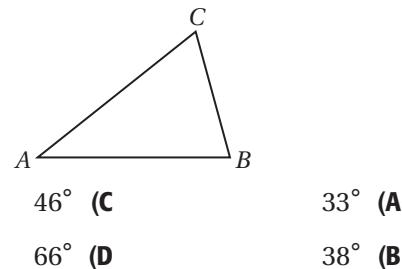
تدريب على اختبار



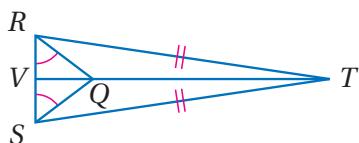
(26) ما إحداثيات النقطة R في المثلث المجاور؟

- $(4a, b)$ C $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ A
 $\left(\frac{a}{4}, b\right)$ D (a, b) B

(25) في الشكل أدناه إذا كان $m\angle B = 76^\circ$ ، وقياس $\angle A$ يساوي نصف قياس $\angle C$ ، فما هي قيمة $m\angle C$ ؟



مراجعة تراكمية



باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة 29-27. (الدرس 3-6)

(27) سُمّ زاويتين متطابقتين غير المشار إليها في الشكل.

(28) سُمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إليها في الشكل.

(29) سُمّ مثلثين متطابقين.

(30) ما ميل المستقيم المار بال نقطتين $(2, 6), (-2, -6)$. (الدرس 4-2)

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، وقرب الناتج إلى أقرب عشرٍ:

$$X(5, 4), Y(2, 1) \quad (31)$$

$$A(1, 5), B(-2, -3) \quad (32)$$

$$J(-2, 6), K(1, 4) \quad (33)$$



ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تصنيف المثلثات (الدرس 3-1)

- يمكن تصنيف المثلث بحسب نوع زواياه، فيكون حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية. وكذلك يمكن تسميته بحسب أضلاعه، فيكون مختلف الأضلاع أو متطابق الضلعين أو متطابق الأضلاع.

زوايا المثلث (الدرس 3-2)

- قياس الزاوية الخارجية للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليةين البعيدتين.

المثلثات المتطابقة (الدرس 3-3 إلى 3-5)

- SSS: يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة.
- SAS: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع الممحض بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- ASA: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع الممحض بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- AAS: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلعين غير ممحض بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة للأضلاع (الدرس 3-6)

- زاويتا القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، ويكون المثلث متطابق الأضلاع إذا تطابقت جميع زواياه.

المثلثات والبرهان الإحداثي (الدرس 3-7)

- يستعمل البرهان الإحداثي الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر؛ لإثبات صحة المفاهيم الهندسية.

منظم أفكار

الـ طويات

تأكد من أن المفاهيم الأساسية
مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسية:	
المثلث الحاد الزوايا (ص. 146)	النتيجة (ص. 157)
المثلث المنفرج الزاوية (ص. 146)	التطابق (ص. 162)
المثلث القائم الزاوية (ص. 146)	المضلعلات المتطابقة (ص. 162)
المثلث المتطابق الأضلاع (ص. 147)	العناصر المتناظرة (ص. 162)
المثلث المتطابق الضلعين (ص. 147)	الزاوية المحصورة (ص. 172)
المثلث المختلف الأضلاع (ص. 147)	الضلعل المحصور (ص. 179)
ساق المثلث المتطابق (ص. 188)	المستقيم المساعد (ص. 154)
زاوية الرأس (ص. 188)	الزاوية الخارجية (ص. 156)
زاويتا القاعدة (ص. 188)	الزاويتان الداخلية (ص. 156)
البرهان التسلسلي (ص. 196)	البعيدتين (ص. 156)

اختبار مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح صحيحة:

(1) المثلث المتطابق الزوايا هو مثال على المثلث الحاد الزوايا.

(2) المثلث الذي يحوي زاوية أكبر من 90° هو مثلث قائم الزاوية.

(3) المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا دائمًا.

(4) المثلث المختلف الأضلاع فيه ضلعان متطابقان على الأقل.

(5) الضلعل المحصور هو الضلع الذي يقع بين زاويتين متتاليتين في مضلعل.

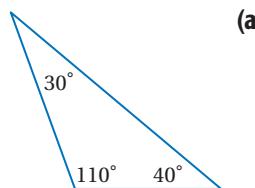
(6) البرهان التسلسلي يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لبرهنة المفاهيم الهندسية.

(7) قياس الزاوية الخارجية لمثلث يساوي مجموع قياسى الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

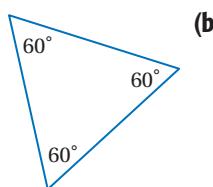
3-1 تصنیف المثلثات (ص: 146-152)

مثال 1

صنف كلاً من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

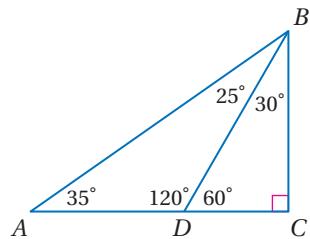


بما أن للمثلث زاوية منفرجة، فيكون مثلثاً منفرجاً منفرج الزاوية.



للمثلث ثلاث زوايا حادة جميعها متساوية؛ لذا فهو مثلث متطابق الزوايا.

صنف كلاً من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

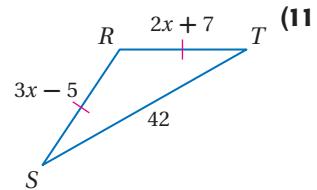


$$\triangle ADB \quad (8)$$

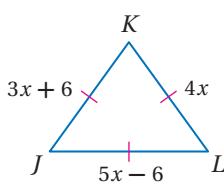
$$\triangle BCD \quad (9)$$

$$\triangle ABC \quad (10)$$

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات الآتية:



(11)



(12)

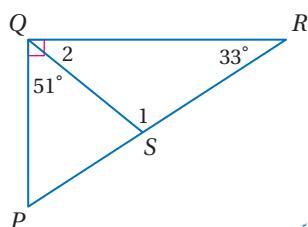
(13) خرائط: المسافة من الرياض إلى المدينة المنورة ومنها إلى مكة المكرمة ثم إلى الرياض تساوي 2092 km، والمسافة بين الرياض ومكة المكرمة تزيد 515 km على المسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة. والمسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة تقل 491 km عن المسافة بين الرياض والمدينة المنورة. أوجد المسافة بين كل مدینتين من هذه المدن، وصنف المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث.



دليل الدراسة والمراجعة

زوايا المثلثات (ص: 154-161)

3-2



مثال 2
أوجد قياس كلٌ من الزوايا المرَّقة في الشكل المجاور:

$$m\angle 2 + m\angle PQS = 90^\circ$$

عَوْض

$$m\angle 2 + 51^\circ = 90^\circ$$

اطرح 51 من الطرفين

$$m\angle 2 = 39^\circ$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$m\angle 1 + m\angle 2 + 33^\circ = 180^\circ$$

عَوْض

$$m\angle 1 + 39^\circ + 33^\circ = 180^\circ$$

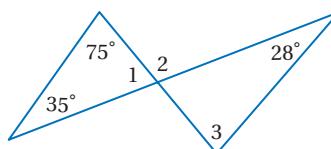
بسَط

$$m\angle 1 + 72^\circ = 180^\circ$$

اطرح 72 من الطرفين

$$m\angle 1 = 108^\circ$$

أوجد قياس كلٌ من الزوايا المرَّقة الآتية:

 $\angle 1$ (14) $\angle 2$ (15) $\angle 3$ (16)

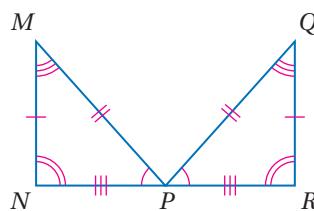
(17) **منازل:** حديقة منزلية على صورة مثلث متطابق الضلعين كما في الشكل أدناه. أوجد قيمة x .



3-3

المثلثات المتطابقة (ص: 162-169)

بين أن كل مضلعين مما يأتي متطابقان، وذلك بتحديد العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق:

**مثال 3**

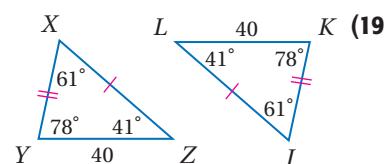
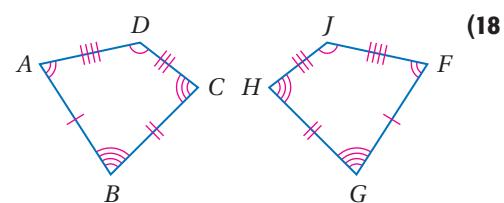
بين أن المثلثين الآتيين متطابقان، وذلك بتحديد العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق:

الزوايا: $\angle N \cong \angle R, \angle M \cong \angle Q, \angle MPN \cong \angle QPR$

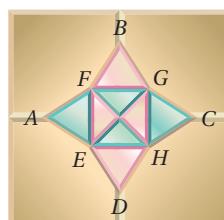
الأضلاع: $\overline{MN} \cong \overline{QR}, \overline{MP} \cong \overline{QP}, \overline{NP} \cong \overline{RP}$

جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة؛ لذا فإن

$$\triangle MNP \cong \triangle QRP$$

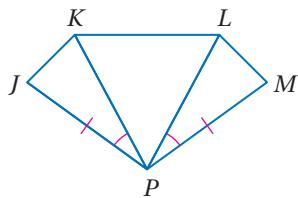


(20) **فسيفساء:** يُظهر الشكل المجاور جزءاً من تبليط فسيفسائي. سُمِّ 4 مثلثات تبدو متطابقة في الشكل.



3-4

إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS (ص: 170-177)



مثال 4

اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.

$$\overline{JP} \cong \overline{MP}$$

$$\angle JPK \cong \angle MPL$$

المطلوب: إثبات أن $\triangle JPK \cong \triangle MPL$.

المبررات	العبارات
(1) معطى	$\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.
(2) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع	$\overline{PK} \cong \overline{PL}$
(3) معطى	$\overline{JP} \cong \overline{MP}$
(4) معطى	$\angle JPK \cong \angle MPL$
SAS (5)	$\triangle JPK \cong \triangle MPL$

حدد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$, ووضح إجابتك.

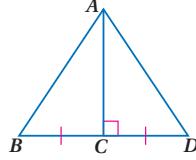
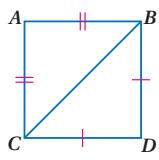
$$A(5, 2), B(1, 5), C(0, 0), X(-3, 3), Y(-7, 6), Z(-8, 1) \quad (21)$$

$$A(3, -1), B(3, 7), C(7, 7), X(-7, 0), Y(-7, 4), Z(1, 4) \quad (22)$$

حدد المسألة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل مثلثين فيما يأتي متطابقان، وإذا كان إثبات تطابقهما غير ممكن فاكتبه “غير ممكن”.

$$\triangle ABC, \triangle DBC \quad (24)$$

$$\triangle ABC, \triangle ADC \quad (23)$$



(25) متنزهات: يظهر الرسم المجاور متنزهًا على صورة خماسي فيه خمسة ممرات مُشّلة لها الطول نفسه، تؤدي إلى نقطة المركز. إذا كانت جميع الزوايا المركزية متساوية القياس، فأي مسلمة (نظيرية) تستعمل لإثبات $\triangle ABX \cong \triangle DCX$ ؟

إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS (ص: 179-185)

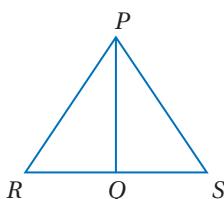
مثال 5

اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: $\angle RPS$ تنصف \overline{PQ}

$$\angle R \cong \angle S$$

المطلوب: إثبات أن $\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$.



البرهان التسلسلي:

$$\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$$

خاصية الانعكاس

$$\angle R \cong \angle S$$

معطى

$$\angle RPS \text{ تنصف } \overline{PQ}$$

معطى

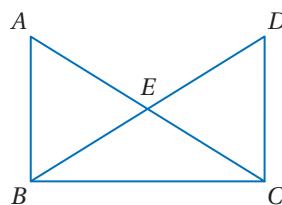
$$\angle RPQ \cong \angle SPQ$$

تعريف منصف الزاوية

$$\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$$

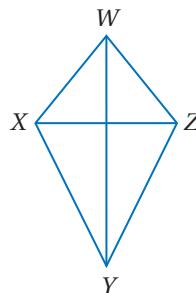
AAS

اكتب برهانًا ذا عمودين.



$$(26) \text{ المعطيات: } \overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABE \cong \triangle CDE$.



(27) الطائرة الورقية: يظهر الشكل المجاور طائرة عثمان الورقية. إذا علمت أن \overline{WY} تنصف كلاً من $\angle XWZ$, $\angle XYZ$. $\triangle WXY \cong \triangle WZY$

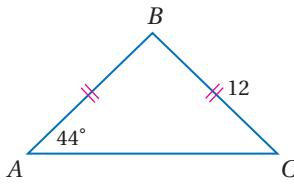
دليل الدراسة والمراجعة

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع (ص: 195-188)

3-6

مثال 6

أوجد كل قياس فيما يأتي:

 $m\angle B$ (a)

بما أن $AB = BC$ ، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ، وبتطبيق نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون زاويتا القاعدة A, C متطابقتين؛ إذن $m\angle A = m\angle C$. استعمل نظرية مجموع قياس زوايا المثلث لكتابه معادلة. ثم حلها لتتجدد .

نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle A = m\angle C = 44^\circ$$

بسط

اطرح 88 من الطرفين

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$$

$$m\angle B + 44 + 44 = 180$$

$$m\angle B + 88 = 180$$

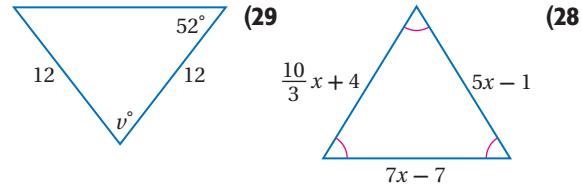
$$m\angle B = 92^\circ$$

AB (b)

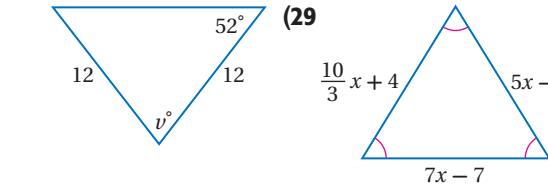
؛ إذن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين. وبما أن $BC = 12$ ، فإن $AB = 12$ أيضًا.

أوجد قيمة كلٌّ من المتغيرين فيما يأتي:

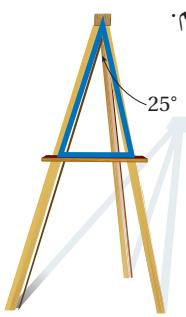
(29)



(28)



(30) **رسم:** يستعمل وليد حاملًا خشبيًّا للرسم. تشكل مثلثًا متطابق الضلعين مع الدعامتين الأماميَّتين كما في الشكل المجاور، ما قياس كلٌّ من زاويَي قاعدة المثلث؟

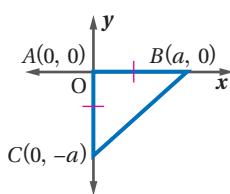


المثلثات والبرهان الإحدادي (ص: 201-196)

3-7

مثال 7

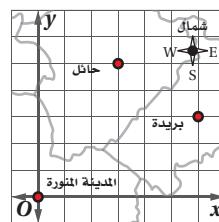
ارسم المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية وطول كلٌّ من ساقِي القائمة يساوي a وحدة على الربع الرابع في المستوى الإحداثي، وحدد إحداثيات رؤوسه.



- اجعل نقطة الأصل رأساً للزاوية القائمة في المثلث.
- اجعل أحد ضلعَي القائمة على المحور x ، والضلعين الآخرين على المحور y .

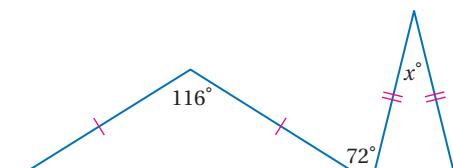
- بما أن النقطة B على المحور x ، إذن إحداثيتها y يساوي صفرًا، وإحداثيتها x يساوي a .

وبما أن C متوازي الضلعين، فإن C ستبعد عن نقطة الأصل a وحدة وإحداثيتها $(0, -a)$ ؛ لأنها تقع على **الغير السالب** من المحوَر y ، وذلك لكي يكون المثلث في الربع الرابع..

(31) ارسم $\triangle MNO$ القائم الزاوية في M ، طولاً ضلعيه $a, 2a$.

(32) **جغرافيا:** عَيْن شاكر المدينة المنورة وبريدة وحائل كما هو مبين على الخريطة المجاورة. اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

اختبار الفصل

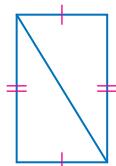
(10) اختيار من متعدد ما قيمة x° في الشكل أدناه؟

- 28 **C**
22 **D**

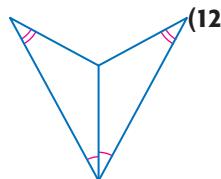
- 36 **A**
32 **B**

(11) إذا علمت أن: $T(-4, -2), J(0, 5), D(1, -1), S(-1, 3)$. فحدد ما إذا كان $\triangle TJD \cong \triangle SEK$ أم لا، ووضح إجابتك.

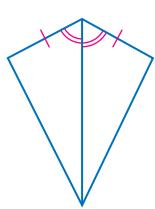
حدد النظرية أو المسلمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل زوج من المثلثات متطابق. واتكتب "غير ممكن" إذا نظرت إلى إثبات التطابق.



(13)



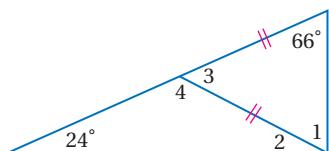
(12)



(15)

(14)

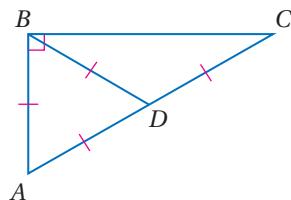
أوجد قياس كلٌّ من الزاويتين الآتيتين:

 $\angle 1$ (16) $\angle 2$ (17)

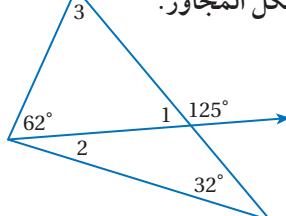
(18) برهان إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين وقائم الزاوية، وكانت M نقطة متصرف وتر \overline{AB} . فاتكتب برهاناً إحداثياً لإثبات أن \overline{CM} عمودية على \overline{AB} .



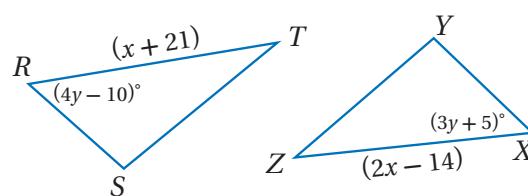
صنف كلاً من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

 $\triangle ABD$ (1) $\triangle ABC$ (2) $\triangle BDC$ (3)

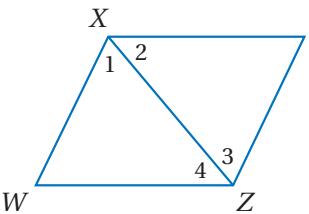
أوجد قياس كلٌّ من الزوايا المرقمة في الشكل المجاور:

 $\angle 1$ (4) $\angle 2$ (5) $\angle 3$ (6)

في المثلثين أدناه، إذا كان $\triangle RST \cong \triangle XYZ$ فأوجد:

(7) قيمة x .(8) قيمة y .

(9) برهان اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات: $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}, \overline{XW} \parallel \overline{YZ}$:المطلوب: إثبات أن $\triangle XWZ \cong \triangle ZYX$ 

الإعداد للاختبارات



الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة تتطلب منك أن تقدم حلاً لها متضمناً الطريقة والبريرات والتفسيرات التي استعملتها. وفي العادة يتم تصحيح هذه الأسئلة، وتحدد درجاتها باستعمال **سلالم التقدير**. وهذا مثال على تصحيح هذا النوع من الأسئلة.

سلالم التقدير		
الدرجة	المعايير	
2	الإجابة صحيحة مدعاة بتفسيرات كاملة توضح كل خطوة.	درجة كاملة
1	• الإجابة صحيحة، لكن التفسيرات ليست كاملة.	درجة جزئية
	• الإجابة غير صحيحة، لكن التفسيرات صحيحة.	
0	لم يقدّم أي إجابة، أو أن الإجابة ليس لها معنى.	لا يستحق درجة

استراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الخطوة 1

- اقرأ السؤال جيداً، كي تفهم الشيء الذي تحاول حله.
- حدد الحقائق ذات العلاقة.
 - ابحث عن الكلمات المفتاحية والمصطلحات الرياضية.

الخطوة 2

- ضع خطة وحل المسألة.
- فسّر تبريرك، أو اعرض الطريقة التي ستبعها لحل المسألة.
 - اكتب الحل كاملاً مبيناً الخطوات جميعها.
 - تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت بذلك.

مثال

اقرأ السؤال الآتي، وحدد المطلوب. ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال لحله. واكتب خطوات الحل.

ما محيط المثلث ABC متطابق الضلعين الذي قاعدته \overline{BC} ؟

اقرأ السؤال بعناية. تعلم من السؤال أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين قاعدته \overline{BC} ، والمطلوب أن تجد محيط هذا المثلث.
ضع خطة وحل السؤال.

صلعا المثلث المتطابق الضلعين متطابقان.
لذا $AB = AC$ أو $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. والآن حل المعادلة لتجد قيمة x .

$$AB = AC$$

$$2x + 4 = 3x - 1$$

$$2x - 3x = -1 - 4$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

ثم أوجد طول كل ضلع من أضلاع المثلث.

$$2(5) + 4 = 14 : \overline{AB}$$

$$3(5) - 1 = 14 : \overline{AC}$$

$$4(5 - 2) = 12 : \overline{BC}$$

وبما أن $14 + 14 + 12 = 40$ ، إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 40 وحدة.

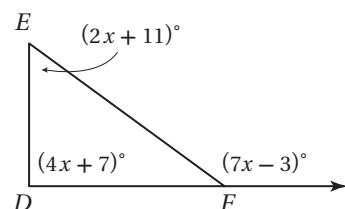
خطوات الحل والحسابات والتبريرات واضحة. وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة؛ إذن تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

- (3) يحتاج مزارع إلى إنشاء حظيرة مستطيلة الشكل لأنعامه، مساحتها 1000 m^2 ، ويريد أن يوفر المال عن طريق شراء أقل كمية ممكنة من السياج. إذا كانت أبعاد الحظيرة أعداداً صحيحة، فأوجد بعدي القطعة التي تتطلب أقل كمية من السياج.

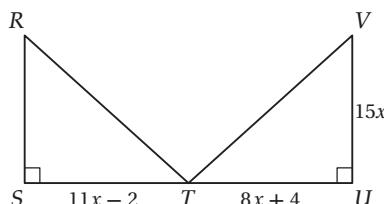
اقرأ كل سؤال فيما يأتي، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال. واتكتب خطوات الحل:

- (1) صنف $\triangle DEF$ بحسب زواياه.



- (2) اكتب معادلة المستقيم المار بال نقطتين: (-2, 4), (0, 0).

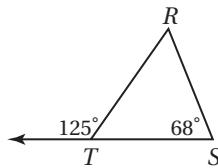
- (4) في الشكل أدناه، $\triangle RST \cong \triangle VUT$. ما مساحة $\triangle RST$ ؟



أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

- (4) ما قياس الزاوية R في الشكل أدناه؟



57° A

59° B

65° C

68° D

- (5) افترض أن قياس إحدى زاويتي القاعدة في مثلث متطابق الضلعين يساوي 44° ، فما قياس زاوية رأس المثلث؟

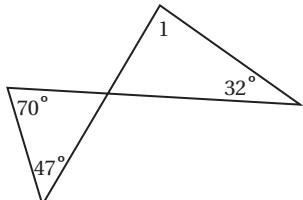
108° A

92° B

56° C

44° D

أوجد $m\angle 1$ (6)



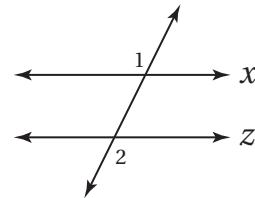
85° A

63° B

47° C

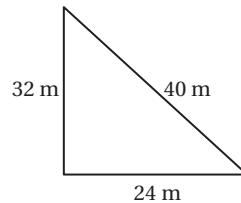
32° D

- (1) إذا كان $m\angle 1 = 110^\circ$ ، فما قيمة $m\angle 2$ التي يجعل المستقيمين x, z متوازيين؟



110° D 70° C 60° B 30° A

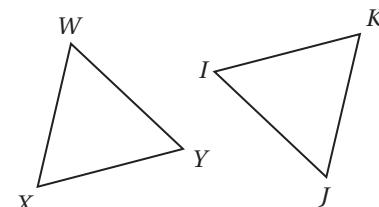
- (2) يصنف المثلث المرسوم أدناه بحسب أضلاعه بأنه:



A متطابق الأضلاع C قائم الزاوية

B مختلف الأضلاع D متطابق الضلعين

- (3) في المثلثين أدناه إذا كان: $\overline{WX} \cong \overline{JK}$, $\overline{YX} \cong \overline{IK}$, $\angle X \cong \angle K$:



فأُي العبارات الآتية تعبر عن تطابق هذين المثلثين؟

$\triangle WXY \cong \triangle KIJ$ A

$\triangle WXY \cong \triangle IKJ$ B

$\triangle WXY \cong \triangle JKI$ C

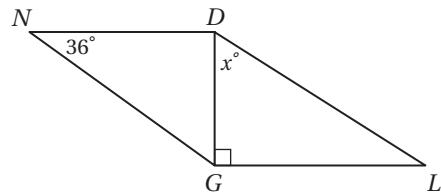
$\triangle WXY \cong \triangle IJK$ D



أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٌ مما يأتي:

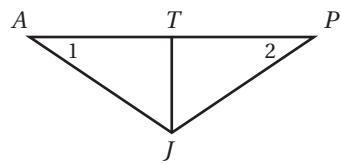
(7) إذا كان $\triangle NDG \cong \triangle LGD$ في الشكل أدناه، فما قيمة x ؟



(8) اكتب عكس العبارة الآتية:

”إذا كنت الرابح، فأنا الخاسر“.

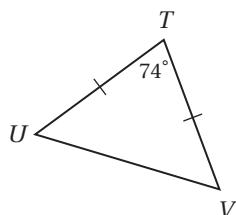
(9) في الشكل أدناه $\angle 1 \cong \angle 2$ في الشكل أدناه $\overline{JT} \perp \overline{AP}$ ،



حدّد نظرية التطابق التي تبيّن أن $\triangle PTJ \cong \triangle ATJ$ باستعمال المعطيات الواردة في السؤال فقط، ووضح إجابتك.

(10) اكتب معادلة المستقيم المار بال نقطتين $(-5, 4), (0, 3)$ بصيغة الميل والمقطع الصادي.

(11) أوجد $m\angle TUV$ في الشكل أدناه.



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن ...

فعد إلى الدرس ...



14	19	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
3-7	3-3	3-6	3-6	3-6	2-5	3-5	1-3	3-3	3-2	3-6	3-2	3-3	3-1	2-3

العلاقات في المثلث

Relationships in Triangle

فيما سبق:

درستُ طرائق تصنيف المثلثات.

والآن:

- أتعرف القطع المستقيمة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
- أتعرف العلاقات الخاصة بين أضلاع المثلث وزواياه.
- أكتب برهاناً غير مباشر.

المادة:

التصميم الداخلي:

تستعمل العلاقات في المثلث لإيجاد الأبعاد وقياسات الزوايا ومقارنتها. ويستعمل مهندسو التصميم الداخلي هذه العلاقات لتحسين تصاميمهم.

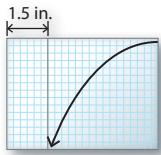
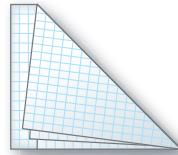
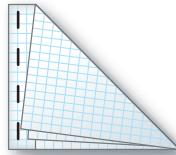
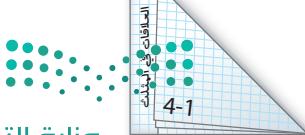


المطويات

منظم أفكار

العلاقات في المثلث، اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 4، مبتدئاً بسبعين أوراق رسم بياني.

- 1 اجمع الأوراق، واطو الركن العلوي الأيمن إلى الحافة السفلی لتشكل مثلثاً متطابقة وحافة مستقطبة.
- 2 اطو الجزء المستطيل كما هو مبين بالشكل.
- 3 ثبت الأوراق على طول الحافة المستطيلة في أربعة أماكن.
- 4 اكتب عنوان الفصل على الحافة المستطيلة، ورقم كل درس أسفل المثلث، وخصص الورقة الأخيرة لمفردات الجديدة كما هو موضح بالشكل.





التهيئة للفصل 4

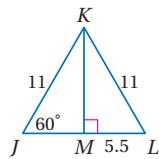
تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

اختبار سريع

مثال 1



أوجد كلاً من القياسين الآتيين :
 $m\angle JKL$ (b) JM (a)

(a) بما أن $JK = KL$ (معطى)، فإن $m\angle J = m\angle L$ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)، وبما أن $m\angle KMJ = m\angle KML = 90^\circ$ ($KM \perp JM$)يعني أن $\triangle KMJ \cong \triangle KML$ ، ويكون $\angle KMJ \cong \angle KML$

بحسب AAS، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين

المتطابقين تكون متطابقة، فإن $JM = ML = 5.5$

$$m\angle J + m\angle JKL + m\angle L = 180^\circ \quad (b)$$

$$m\angle J = m\angle L = 60^\circ \quad 60^\circ + m\angle JKL + 60^\circ = 180^\circ$$

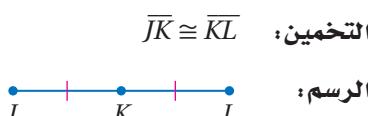
$$\text{بسط} \quad 120^\circ + m\angle JKL = 180^\circ$$

$$\text{اطرح } 120 \text{ من الطرفين} \quad m\angle JKL = 60^\circ$$

مثال 2

ضع تخميناً مبنياً على المعطى الآتي، إذا كانت K نقطة منتصف \overline{JL} ، ورسم شكلًا يوضح تخمينك.

المعطيات: K نقطة منتصف \overline{JL} .



التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

الرسم: الرسم

مثال 3

حل المتباعدة $3x + 5 > 2x$

$$\text{معطى} \quad 3x + 5 > 2x$$

$$\text{اطرح } 3x \text{ من الطرفين} \quad 3x - 3x + 5 > 2x - 3x$$

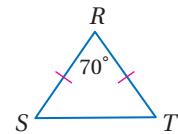
$$\text{بسط} \quad 5 > -x$$

$$\text{اقسم الطرفين على } -1$$

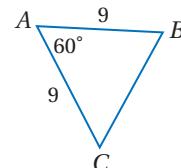


أوجد كلاً من القياسين الآتيين :

$$m\angle RST \quad (2)$$



$$BC \quad (1)$$



- (3) **حذاق:** يضم عبد الله حوضاً لزراعة الورود على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول كل من ضلعي القائمة 7 ft، فما طول الضلع الثالث (قرب إلى أقرب عدد صحيح)؟

للسئلة 6-4 ضع تخميناً مبنياً على المعطيات وارسم شكلًا يوضح تخمينك:

(4) زوايتان متجلزان على خط مستقيم.

(5) $JKLM$ مربع.

(6) $\angle ABC$ منصف لـ $\angle ADC$.

- (7) **تبرير:** حدّد ما إذا كان التخمين التالي المبني على المعطيات الواردة صحيحًا دائمًا أو صحيحًا أحياناً أو غير صحيح أبداً. وفسّر إجابتك.

المعطيات: ثلات نقاط تقع على استقامة واحدة.

التخمين: $DE + EF = DF$

حل كلاً من المتباينات الآتية:

$$x - 6 > 2x \quad (9) \quad x + 16 < 41 \quad (8)$$

$$8x + 15 > 9x - 26 \quad (11) \quad 6x + 9 < 7x \quad (10)$$

- (12) **صور:** أضافت نورة 15 صورة إلى الألبوم صورها، فأصبح عدد الصور أكثر من 120، فكم صورة كانت في الألبوم؟

إنشاء المنصّفات Constructing Bisectors

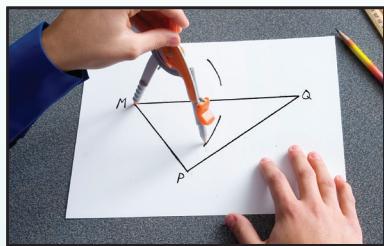
4-1

سوف تنشئ فيما يلي العمود المنصف لأحد أضلاع مثلث والمنصف لإحدى زواياه.
العمود المنصف لقطعة مستقيمة هو العمود على القطعة المار بمنتصفها.

إنشاء هندسي 1 العمود المنصف

إنشاء العمود المنصف لأحد أضلاع مثلث.

الخطوة 1:

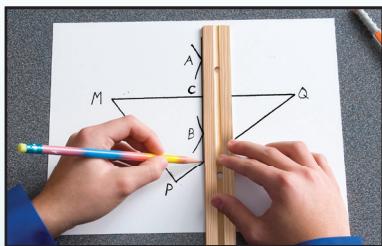


أفتح الفرجار فتحة أكبر من $\frac{1}{2}MQ$ ، وارسم قوساً من الرأس M فوق \overline{MQ} وقوسًا آخر تحتها.



استعمل فتحة الفرجار نفسها. وارسم من الرأس Q قوسًا فوق \overline{MQ} وقوسًا آخر تحتها. وسم نقطتي تقاطع القوسين A, B .

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة وارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{MQ}$. وسم نقطة تقاطع بالحرف C .

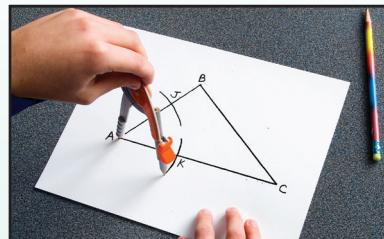
الخطوة 2:

منصف زاوية في مثلث هو نصف مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.

إنشاء هندسي 2 منصف الزاوية

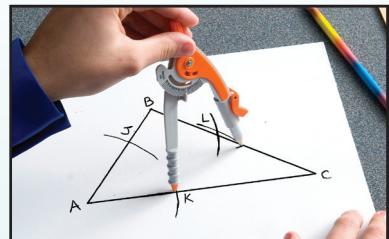
إنشاء منصف زاوية في مثلث.

الخطوة 1:



ثبت الفرجار عند الرأس A ، وارسم قوساً داخل الزاوية A ، وارسم من K قوساً آخر، مستعملاً فتحة الفرجار نفسها، على أن يقطع القوس الأول في نقطة سُمِّها L .

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم \overrightarrow{AL} وهو منصف للزاوية في $\triangle ABC$.

الخطوة 2:

التمثيل والتحليل:

- أنشئ العمودين المنصّفين للضلعين الآخرين في $\triangle MPQ$. ثم أنشئ منصفي الزاويتين الباقيتين في $\triangle ABC$. ماذلاحظ حول نقطة التلاقي في الحالتين؟





المنصّفات في المثلث

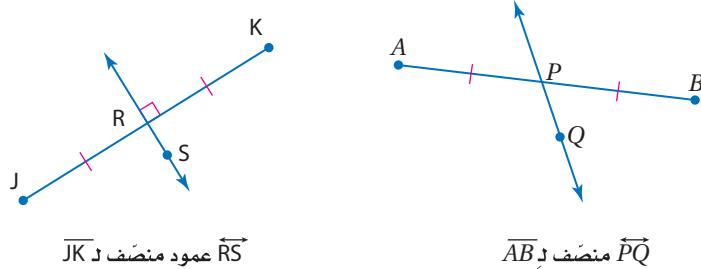
Bisectors of Triangle

4-1

لماذا؟



الأعمدة المنصّفة: تعلمت سابقاً أن منصّف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستوى يقطع القطعة عند نقطة منتصفها، وإذا كان المنصّف عمودياً على القطعة سُميَّ عموداً منصّفاً.



تذكّر أنَّ المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطاً معيناً، فالعمود المنصّف لقطعة مستقيمة هو المحل الهندسي لمجموعة نقاطٍ في المستوى، تقع كُلُّ منها على بُعدين متساوين من طرفي القطعة المستقيمة، وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

فيما سبق:

درست منصّف القطعة المستقيمة ومنصّف الزاوية.

والآن:

- أتعرّف للأعمدة المنصّفة في المثلثات وأستعملها.
- أتعرّف منصّفات الزوايا في المثلثات وأستعملها.

المفردات:

العمود المنصّف

perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقيّة

concurrent lines

نقطة التلاقي

point of concurrency

مركز الدائرة الخارجية

للمثلث

circumcenter

مركز الدائرة الداخلية

للمثلث

incenter

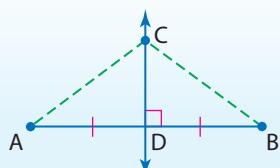
نظريتان

الأعمدة المنصّفة

4.1 نظرية العمود المنصّف

كل نقطة على العمود المنصّف لقطعة مستقيمة تكون على بُعدين متساوين من طرفي القطعة المستقيمة.

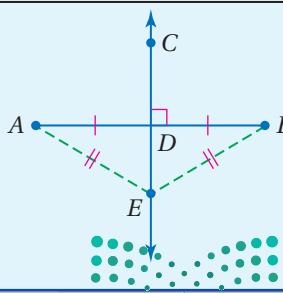
مثال: إذا كان \overleftrightarrow{CD} عموداً منصّفاً لـ \overline{AB} ، فإن $AC = BC$.



4.2 عكس نظرية العمود المنصّف

كل نقطة على بُعدين متساوين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.

مثال: إذا كان $AE = BE$ ، و \overleftrightarrow{CD} هو العمود المنصّف لـ \overline{AB} ، فإن E تقع على \overleftrightarrow{CD} .



مثال 1 استعمال نظريات العمود المنصف

أوجد كل قياس مما يأتي :

AB (a)

من المعطيات في الشكل المجاور ، نعلم أن

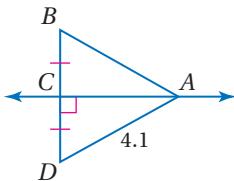
$$\overleftrightarrow{BD} \text{ عمود منصف لـ } \overleftrightarrow{CA}$$

نظريّة العمود المنصف

$$AB = AD$$

عُوْضٌ

$$AB = 4.1$$



WY (b)

معطيات

$$WX = ZX, \overleftrightarrow{XY} \perp \overleftrightarrow{WZ}$$

عكس نظريّة العمود المنصف

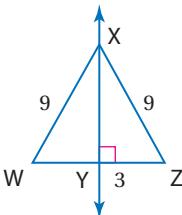
$$\overleftrightarrow{WZ} \text{ عمود منصف لـ } \overleftrightarrow{XY}$$

تعريف منصف قطعة مستقيمة

$$WY = YZ$$

عُوْضٌ

$$WY = 3$$



RT (c)

. \overleftrightarrow{QT} عمود منصف لـ \overleftrightarrow{SR}

$$RT = RQ$$

عُوْضٌ

$$4x - 7 = 2x + 3$$

نطريّة العمود المنصف

$$2x - 7 = 3$$

اطرح $2x$ من الطرفين

$$2x = 10$$

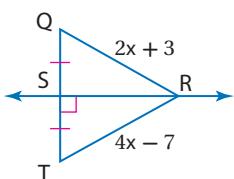
اجمع 7 إلى الطرفين

$$x = 5$$

اقسم الطرفين على 2

$$RT = 4(5) - 7 = 13$$

إذن $RT = 13 - 7 = 6$

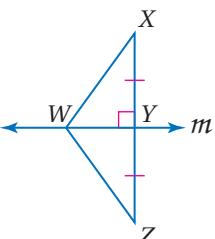


تحقق من فهمك

(1A) إذا كان $WX = 25.3, YZ = 22.4, WZ = 25.3$ ، فأوجد طول \overline{XY} .

(1B) إذا كان m عموداً منصفاً لـ \overline{XZ} ، $WZ = 14.9$ ، فأوجد طول \overline{WX} .

(1C) إذا كان m عموداً منصفاً لـ \overline{XZ} ، $WZ = a + 12$ ، $WX = 4a - 15$ ، فأوجد طول \overline{WX} .



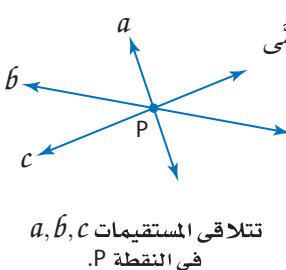
عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة، فإن هذه المستقيمات تُسمى

مستقيمات متلاقيّة . والنقطة التي تلتقي فيها المستقيمات تُسمى **نقطة التلاقي**.

وبما أن لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإن له ثلاثة أعمدة منصفة. وهذه الأعمدة

المنصفة هي مستقيمات متلاقيّة. وتُسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصفة

مركز الدائرة الخارجية للمثلث.



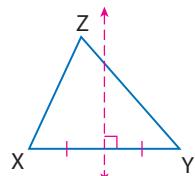
تلاقي المستقيمات
في النقطة P.

ارشادات للدراسة

العمود المنصف

ليس من الضروري أن يمر العمود المنصف لضلع مثلث برأس المثلث المقابل .

فمثلاً في أدناه $\triangle XYZ$ العمود المنصف \overleftrightarrow{XY} لا يمر بالرأس Z.



نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث.

التعبير الفظي : تلتقي الأعمدة المنصفة للأضلاع مثلث في نقطة تُسمى مركز

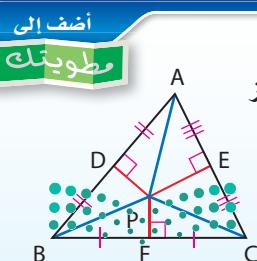
الدائرة الخارجية للمثلث، وهي دائرة تمر برأسوس المثلث،

وهي على أبعاد متساوية من الرؤوس.

إذا كانت P مركز الدائرة الخارجية للمثلث $\triangle ABC$ ،

$$PB = PA = PC$$

مثال :



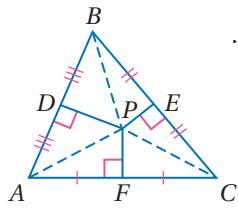
زيارة التسليم

Ministry of Education

2022 - 1444

برهان

نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث



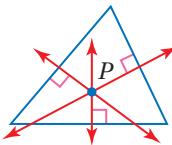
المعطيات: \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} أعمدة منصفة للأضلاع \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} على الترتيب.

$$AP = CP = BP \quad \text{المطلوب:}$$

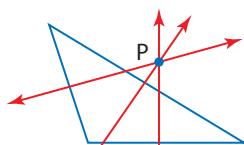
برهان حز:

بما أنّ P تقع على العمود المنصف لـ \overline{AC} , فإنها متساوية البُعد عن A , C . أي أن $AP = CP$. والعمود المنصف لـ \overline{BC} يمر أيضًا بالنقطة P . لذلك يكون $CP = BP$ ، وتبعًا لخاصية التعدي لعلاقة المساواة يكون $AP = CP = BP$; إذن $AP = CP = BP$.

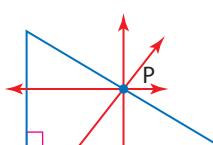
يمكن أن يقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزاوية



مثلث قائم الزاوية

إرشادات للدراسة

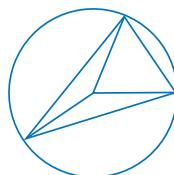
مركز الدائرة

الخارجية للمثلث

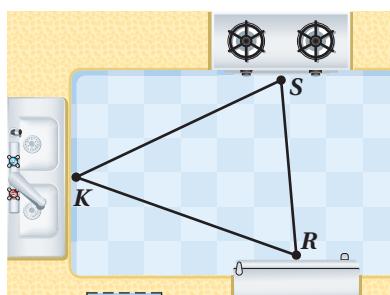
هو مركز الدائرة

التي تمر برؤوس هذا

المثلث.

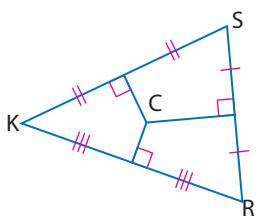


مثال 2 من واقع الحياة استعمال نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث



تصميم داخلي: تطبيقاً للفكرة التي وردت في فقرة (المذا؟)، إذا وضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S , K , R .

بحسب نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث، يمكن تعين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث باستعمال الأعمدة المنصفة للأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط.



انسخ $\triangle SKR$ واستعمل المسطرة والمنقلة لرسم الأعمدة المنصفة للأضلاع، فتكون النقطة C مركز الدائرة الخارجية للمثلث SKR . وهي النقطة المطلوبة.

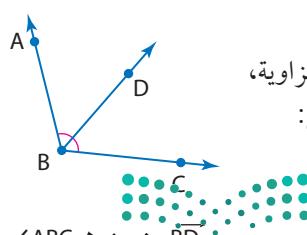


(2) يريد علي أن يضع مرشة الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقة المثلث الشكل .
فأين يتعين عليه وضع المرشة؟



الربط مع الحياة

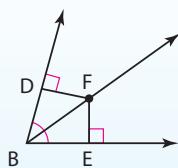
يتركز معظم النشاط داخل المطبخ حول ثلاثة مناطق عمل أساسية هي: مصدر الماء، الثلاجة، فرن الطبخ، ويجب ألا يزيد مجموع أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث منطقة العمل على سبعة أمتر.



منصفات الزوايا: تعلم أنّ منصف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متlappingتين،

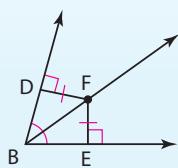
كما يمكن أن يوصف منصف الزاوية بأنه المحل الهندسي للنقاط الواقعة داخل الزاوية، وتكون على أبعاد متساوية من ضلعها. ويقود هذا الوصف إلى النظريتين الآتىتين:

نظريّة منصّف الزاويّة 4.4



كل نقطة تقع على منصّف زاويّة تكون على بُعدين متساوين من ضلعيها.

مثال: إذا كان \overrightarrow{BF} منصّفًا لـ $\angle DBE$ ، وكان $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ ، فإن $DF = FE$.



عكس نظريّة منصّف الزاويّة 4.5

كل نقطة تقع داخل الزاويّة وتكون على بُعدين متساوين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصّف الزاويّة.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ ، $DF = FE$ ، فإن \overrightarrow{BF} ينصلّف $\angle DBE$.

ستبرهن النظريتين 4.4، 4.5 في السؤالين 30، 32.

استعمال نظريّي منصّفات الزاويّة

مثال 3

أوجد كل قياس مما يأتي :

XY (a)

نظريّة منصّف الزاويّة

$XY = \textcolor{red}{XW}$

عَوْض

$XY = \textcolor{red}{7}$

$m\angle JKL$ (b)

بما أن L على بُعدين متساوين من ضلعي $\angle JKM$. وبحسب عكس نظريّة منصّف الزاويّة، فإن \overrightarrow{KL} ينصلّف $\angle JKM$

تعريف منصّف الزاويّة $\angle JKL \cong \angle LKM$

تعريف الزوايا المتطابقة $m\angle JKL = \textcolor{red}{m\angle LKM}$

عَوْض

$m\angle JKL = \textcolor{red}{37^\circ}$

SP (c)

نظريّة منصّف الزاويّة

$SP = \textcolor{blue}{SM}$

عَوْض

$6x - 7 = \textcolor{red}{3x + 5}$

اطرح $3x$ من الطرفين

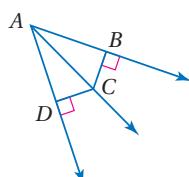
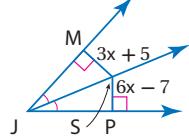
$3x - 7 = 5$

اجمع 7 إلى الطرفين

$3x = 12$

اقسم الطرفين على 3

$x = 4$



إرشادات للدراسة

منصّف الزاويّة

لا تهدّد المعلومة

b في الفرع $JL = LM$

لوحدتها كافية لاستنتاج أن \overrightarrow{KL} ينصلّف $\angle JKM$.

تحقق من فهمك ✓

إذا كان: $5 = m\angle DAC, m\angle BAC = 38^\circ$ ، فأوجد $SP = \textcolor{red}{6(4)} - 7$ (3A)

إذا كان: $10 = m\angle BAC, m\angle DAC = 40^\circ$ ، فأوجد $BC = \textcolor{red}{4x + 8}$ (3B)

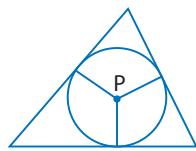
إذا كان \overrightarrow{AC} ينصلّف $\angle DAB$ ، و $7 = m\angle DAB$ ، فأوجد $DC = \textcolor{red}{9x - 7}$ (3C)

فأوجد BC

مركز الدائرة

الداخلية للمثلث

هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع داخل المثلث دائمًا.



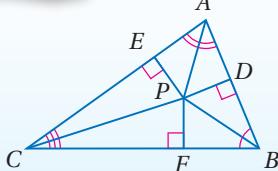
نظريّة 4.6

نظريّة مركز الدائرة الداخلية للمثلث

التعبير اللغوي: تتقاطع منصفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمى مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC ،

$$PD = PE = PF$$



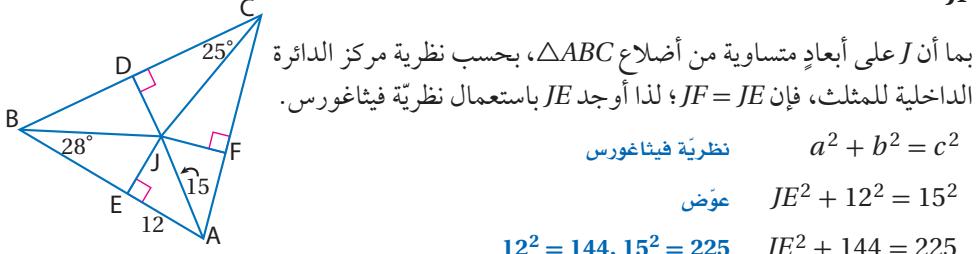
ستبرهن النظريّة 4.6 في السؤال 28

مثال 4

استعمال نظريّة مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أوجد كلاً من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.

JF (a)



وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا؛ إذن نأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط.

$$JF = 9$$

$m\angle JAC$ (b)

. $m\angle CBE = 2(28^\circ) = 56^\circ$ ، فإن \overrightarrow{BJ} ينصف $\angle CBE$ ، إذن $m\angle CBE = 2m\angle JBE$ ؛ إذن $m\angle JBE = 28^\circ$.

. وبالمثل: $m\angle DCF = 2(25^\circ) = 50^\circ$ ، إذن $m\angle DCJ = 2m\angle DCJ$.

$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180^\circ$ نظريّة مجموع قياسات زوايا المثلث

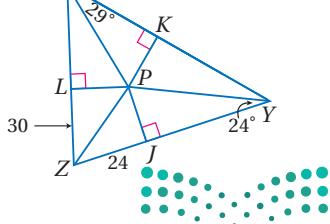
$$m\angle CBE = 56^\circ; m\angle DCF = 50^\circ \quad 56^\circ + 50^\circ + m\angle FAE = 180^\circ$$

بسط. $106^\circ + m\angle FAE = 180^\circ$

$$m\angle FAE = 74^\circ$$

اطرح 106° من الطرفين.

وبما أن \overrightarrow{AJ} ينصف $\angle FAE$ ، فإن $2m\angle JAC = m\angle FAE$. وهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2} m\angle FAE$. إذن $m\angle JAC = \frac{1}{2}(74^\circ) = 37^\circ$



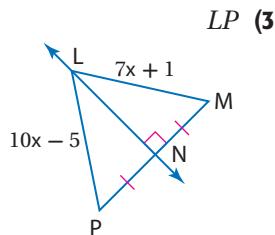
تحقق من فهمك

إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$ ، فأوجد القياسين الآتيين:

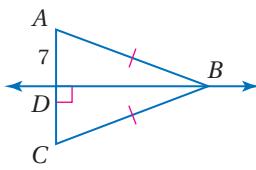
$$PK \quad (4A)$$

$$\angle LZP \quad (4B)$$

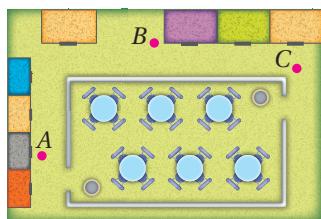
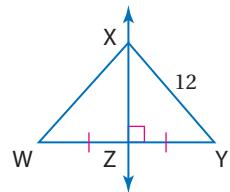
المثال 1 أوجد كل قياسٍ مما يأتي:



AC (2)



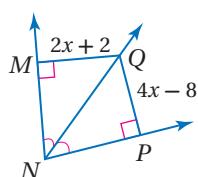
XW (1)



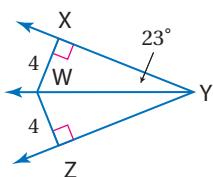
المثال 2 **اعلانات:** يقوم أربعة أصدقاء بتوزيع إعلانات على الناس في ساحة سوق تجاري. فحمل ثلاثة منهم ما يستطيعون من الإعلانات وأخذوا مواقعهم كما في الصورة المجاورة. أما الرابع فكان يزوردهم بالإعلانات. انسخ الموقع A, B, C في دفترك، ثم عين مكان الصديق الرابع D على أن يكون على أبعاد متساوية من أصدقائه الثلاثة.

المثال 3 أوجد كل قياسٍ مما يأتي :

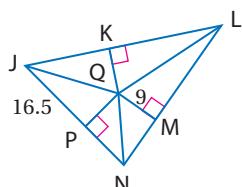
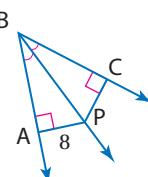
QM (7)



$\angle WYZ$ (6)



CP (5)

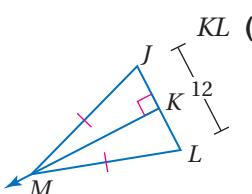


المثال 4 إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$ ، فأوجد طول \overline{JQ} .

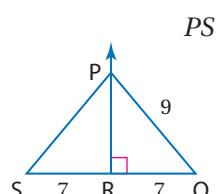
تدريب وحل المسائل

المثال 1 أوجد كل قياسٍ مما يأتي :

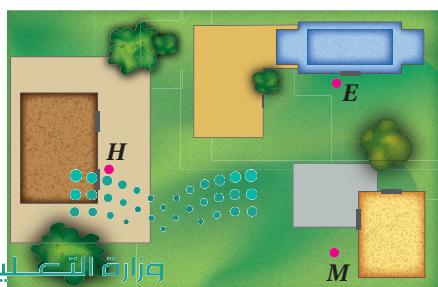
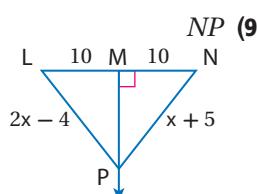
KL (11)



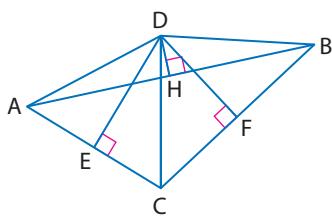
PS (10)



NP (9)



المثال 2 **مدرسة:** يتكون مجتمع مدارس من مدرسة ابتدائية M ومدرسة ثانوية H في الموضع المبينة في الصورة المجاورة. انسخ موقع النقاط E, M, H في دفترك، ثم عين موقع موقف الحافلات، على أن يكون على أبعاد متساوية من المدارس الثلاث.



النقطة D مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle ABC$. اكتب القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:

\overline{AH} (14)

\overline{AD} (13)

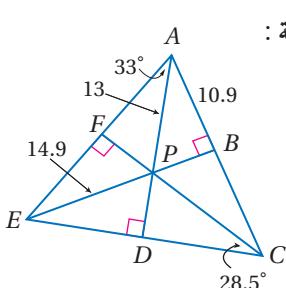
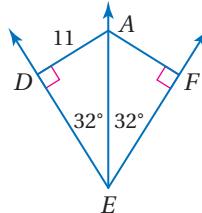
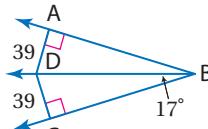
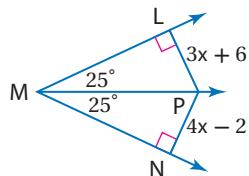
أوجد قياس كل مما يأتي :

المثال 3

PN (17)

$\angle DBA$ (16)

AF (15)



إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle AEC$ ، فأوجد كلاً من القياسات الآتية :

PB (18)

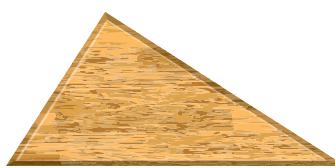
DE (19)

$\angle DAC$ (20)

$\angle DEP$ (21)

المثال 4

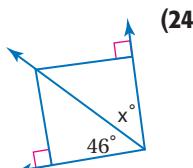
(22) **تصميم داخلي:** توضع زهرية فضية عند مركز سطح الطاولة المبيضة في الشكل أدناه، بحيث تكون على أبعاد متساوية من حواهه. انسخ الرسم المجاور في دفترك، وبيّن أين ستضع الزهرية. وضح إجابتك.



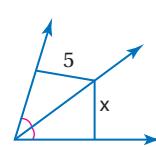
حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x . وضح إجابتك.

الربط مع الحياة

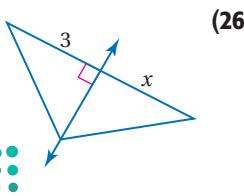
مهندس التصميم الداخلي
يزين مهندس الديكور المكان؛
بحيث يجعله بهيج المنظر
ومريحا للإقامة أو العمل فيه.
ويجب على مهندسي الديكور
أن يكونوا على معرفة بالألوان
وتصاميم الإنارة وتحطيط
المكان.



(23)

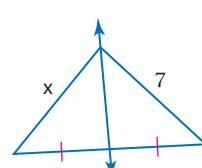


(24)



(26)

(25)



برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لكلٌ من النظريتين الآتىتين:

4.6 (28) النظرية

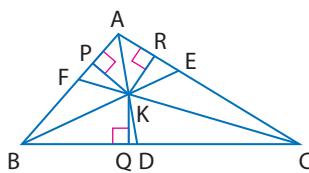
4.2 (27) النظرية

المعطيات: $\triangle ABC$ منصفات لزوايا \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF}

$\overline{KP} \perp \overline{AB}$, $\overline{KQ} \perp \overline{BC}$

$\overline{KR} \perp \overline{AC}$

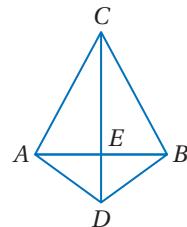
المطلوب: $KP = KQ = KR$



المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, $\overline{AD} \cong \overline{BD}$

المطلوب: النقطتان C , D تقعان على

العمود المنصف لـ \overline{AB}



برهان: اكتب برهاناً حرّاً لكُلٌ من النظريتين الآتىتين:

4.5 (29) النظرية

4.1 (30) النظرية

(31) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي إحداثياً نقطتي طرفيها هما $A(-3, 1)$, $B(4, 3)$. ووضح إجابتك.

مراجعة المفردات

المحل الهندسي

مجموعة من النقاط

تحقق شرطاً معيناً.

(32) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين للنظرية 4.4.

(33) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي $A(0, 0)$, $B(0, 6)$, $C(10, 0)$. ووضح إجابتك.

(34) **المحل الهندسي:** انظر إلى القطعة المستقيمة \overline{CD} , وصف مجموعة النقاط في الفضاء التي يبعد كل منها بعدين متساوين عن C, D



مسائل مهارات التفكير العليا

(35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثاً، على أن يقع مركز الدائرة الداخلية له داخله، ويقع مركز الدائرة التي تمر برؤوسه خارجه. ببرر صحة رسمك باستعمال مسطرة غير مدرجة وفرجار لإيجاد نقطتي التلاقي.

تبrier: حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتىتين صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحياناً أو ليست صحيحة أبداً. وبرر إجابتك.

(36) تتقاطع منصفات زوايا المثلث عند نقطة تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.

(37) في المثلث المتطابق الضلعين، يكون العمود المنصف للقاعدة منصفاً لزاوية الرأس المقابلة للقاعدة.



وزارة التعليم

Ministry of Education

2022 - 1444

(38) **اكتب:** قارن بين الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث ومنصفات زواياه مبيناً أوجه التشبه وأوجه الاختلاف.

وقارن بين نقطتي التلاقي.

تدريب على اختبار

(40) إذا كانت $x \neq -3$ ، فإن $\frac{3x+9}{x+3}$ يساوي:

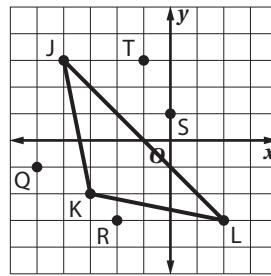
A $x + 9$

B $x + 3$

C x

D 3

(39) بأي نقطتين يمر العمود المنصف للضلوع \overline{JL} في $\triangle JKL$ ؟



C J, R

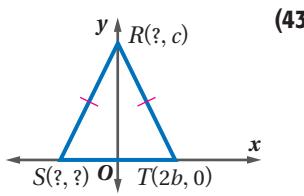
D S, K

A T, K

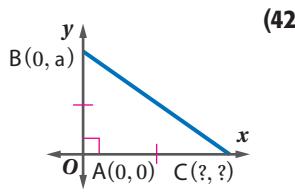
B L, Q

مراجعة تراكمية

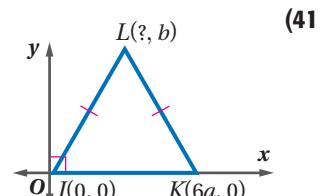
عين الإحداثي المجهول في كل من المثلثات الآتية : (الدرس 3-7)



(43)



(42)



(41)

أوجد البعد بين المستقيم والنقطة المعطاة في كل مما يأتي : (الدرس 6-2)

$y = 5, (-2, 4)$ (44)

$y = 2x + 2, (-1, -5)$ (45)

$2x - 3y = -9, (2, 0)$ (46)

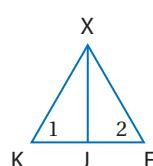
استعد للدرس اللاحق

(برهان): اكتب برهاناً ذا عمودين:

المعطيات: $\triangle XKF$ متطابق الأضلاع.

$\angle X$ تنصف $\angle KJF$.

المطلوب: J نقطة متصرف \overline{KF} .





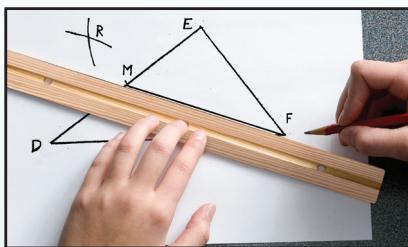
إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات Constructing Medians and Altitudes

4-2

القطعة المتوسطة في مثلث هي قطعة مستقيمة، طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة متتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.
ويمكنك استعمال طريقة تعين نقطة المتتصف لقطعة مستقيمة لإنشاء قطعة متوسطة.

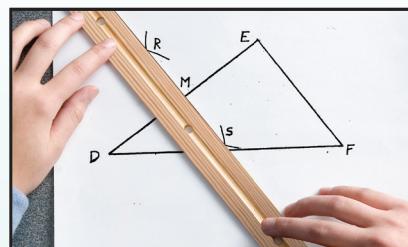
إنشاء هندسي 1 قطعة متوسطة لمثلث

الخطوة 3 :



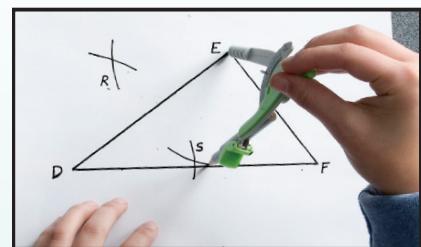
رسم مستقيماً يمر بالنقطتين F, M فتكون \overline{FM} قطعة متوسطة لـ $\triangle DEF$.

الخطوة 2 :



استعمال مسطرة لإيجاد نقطة تقاطع $\overline{RS}, \overline{DE}$ ، وسمّ نقطة المتتصف M .

الخطوة 1 :



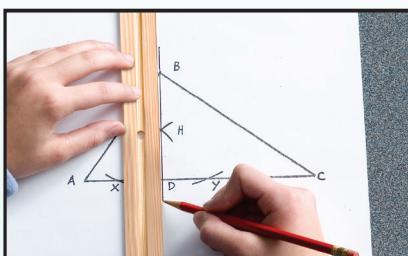
ثبت الفرجار عند الرأس D ثم عند الرأس E ؛ لترسم أقواساً متقاطعة فوق \overline{DE} وتحتها، وسمّ نقطتي التقاطع R, S .

ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل، وتكون عمودية عليه.

ارتفاع المثلث

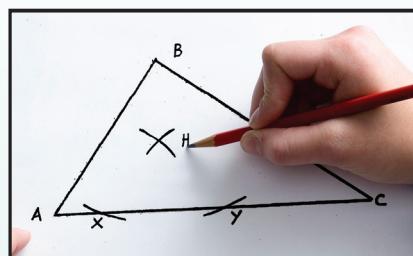
إنشاء هندسي 2

الخطوة 3 :



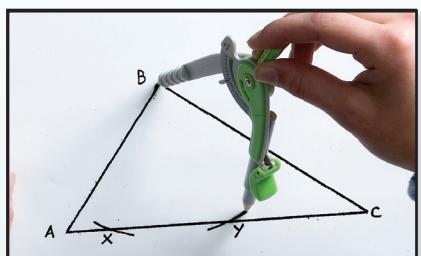
استعمال مسطرة غير مدرجة لرسم \overrightarrow{BH} ، وسمّ نقطة تقاطع \overrightarrow{BH} , \overrightarrow{AC} بالحرف D ، فتكون \overline{BD} ارتفاعاً لـ $\triangle ABC$ وهي عمودية على \overline{AC} .

الخطوة 2 :



عدل فتحة الفرجار على أن تكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$ وثبته عند X ، وارسم قوساً فوق \overline{AC} ، ثم استعمل الفتحة نفسها وارسم قوساً آخر من Y ، وسمّ نقطة تقاطع القوسين H .

الخطوة 1 :



ثبتت الفرجار عند الرأس B ، وارسم قوسين يقطعان \overline{AC} في النقطتين X, Y .

التمثيل والتحليل :

- أنشئ القطعتين المتوسطتين على الضلعين الآخرين في $\triangle DEF$ ، ماذا تلاحظ بالنسبة للقطع المتوسطة للمثلث؟
- أنشئ الارتفاعين الآخرين على الضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟





القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

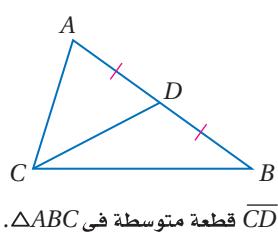
Medians and Altitudes of Triangle

4-2

لماذا؟



صمم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن، يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يرتكز على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو في حاجة إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها، ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسطة، وتعيين نقطة تقاطعها.



$\triangle ABC$ قطعة متوسطة في \overline{CD}

القطعة المتوسطة: **القطعة المتوسطة** لمثلث قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة متتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثالث قطع متوسطة تتلاقى في نقطة تسمى **مركز المثلث**، وتقع داخله دائمًا.

فيما سبق:

درست الأعمدة المنصفة ومنصفات الزوايا في المثلث وأستعملها.

والآن:

- أتعرف القطع المتوسطة في المثلث وأستعملها.
- أتعرف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

المفردات:

القطعة المتوسطة

median

مركز المثلث

centroid

الارتفاع

altitude

ملتقى ارتفاعات المثلث

orthocenter

نظرية مركز المثلث

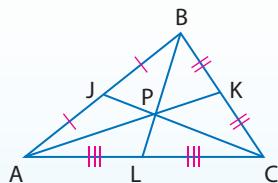
نظرية 4.7

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث $\frac{1}{3}$ طول القطعة المستقيمة الواقلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإن

$$AP = \frac{2}{3} AK, BP = \frac{2}{3} BL, CP = \frac{2}{3} CJ$$

أضف إلى
مطويتك



استعمال نظرية مركز المثلث

إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$ ، $BQ = 9$.
فأوجد كلاً من BQ ، QE .

نظرية مركز المثلث

$$BQ = \frac{2}{3} BE$$

$$BE = 9 \quad BQ = \frac{2}{3}(9) = 6$$

جمع أطوال القطع المستقيمة

$$BQ + QE = 9$$

$$BQ = 6 \quad 6 + QE = 9$$

$$\text{اطرح } 6 \text{ من الطرفين} \quad QE = 3$$

تحقق من فهمك



في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولي القطعتين الآتتين:

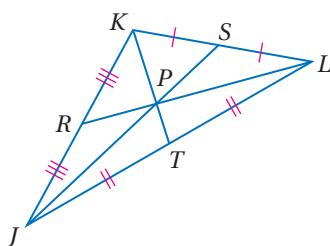
QC (1B)

FQ (1A)

إرشادات للدراسة

استعمال الحسن العددي
في المثال 2، يمكنك أيضًا استعمال الحسن العددي لإيجاد $KP = \frac{2}{3}KT$ بما أن $\overline{JK} \cong \overline{RK}$ ، فإن R نقطة متوسطة لـ \overline{JK} ، وتكون \overline{LR} قطعة متوسطة في $\triangle JKL$ ، وبالمثل نستنتج أن T هما نقطتا متوسطة على \overline{KL} ، \overline{LJ} في الترتيب؛ لذا فإن \overline{KT} ، \overline{JS} قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$ ، لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.
 $KP = \frac{2}{3}KT$
 $KP = 2PT$
وكذلك $PT = 2$ لذا إذا كان $KP = 2(2) = 4$ فإن 4

مثال 2 استعمال نظرية مركز المثلث



في $\triangle JKL$ ، إذا كان $PT = 2$ ، فأوجد KP .

بما أن $\overline{JK} \cong \overline{RK}$ ، فإن R نقطة متوسطة لـ \overline{JK} ، وتكون \overline{LR} قطعة متوسطة في $\triangle JKL$ ، وبالمثل نستنتج أن S هما نقطتا متوسطة على \overline{KL} ، \overline{LJ} في الترتيب؛ لذا فإن \overline{KT} ، \overline{JS} قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$ ، لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.

نظرية مركز المثلث

$$KP = \frac{2}{3}KT$$

جمع القطع المستقيمة والتعويض

$$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$$

$$PT = 2$$

$$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$$

خاصية التوزيع

$$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$$

اطرح $\frac{2}{3}KP$ من الطرفين

$$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$$

اضرب الطرفين في 3

$$KP = 4$$

تحقق من فهتمك

في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $RP = 3.5$ ، $JP = 9$ ، فأوجد طولي القطعتين الآتىتين:

$$PS \quad (2B)$$

$$PL \quad (2A)$$

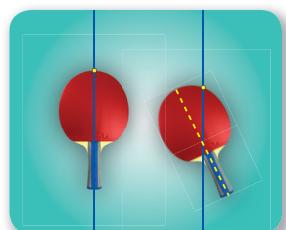
جميع المضلعات لها نقطة اتزان، وهذه النقطة تعتبر مركز ثقل الجسم، وهي النقطة التي يظهر فيها الجسم متوازناً تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

مثال 3 من واقع الحياة إيجاد المركز في المستوى الإحداثي



فن الأداء: في مهرجان رياضي يُخطط عبد العزيز لازдан قطع مثلثية من المعدن كما في الشكل المجاور، وعندما وضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(9, 5)$, $(5, 0)$, $(1, 10)$. ما إحداثيات النقطة التي يجب على عبد العزيز أن يثبت المثلث عندها حتى يحفظه متوازناً؟ وضح إجابتك.

افهم: تحتاج إلى إيجاد مركز المثلث من خلال الإحداثيات المعطاة، وستكون هذه هي النقطة التي سيترن عندها المثلث.

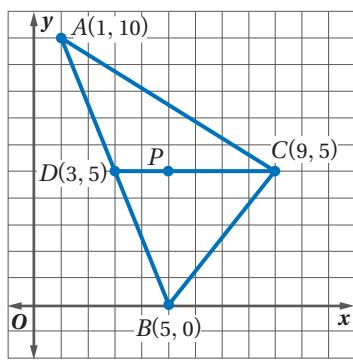


الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)
يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأى جسم، سواءً أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:
علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح.
ارسم مستقيماً رأسياً من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيماً رأسياً منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.

خطط: ارسم المثلث الذي رؤوسه $A(1, 10)$, $B(5, 0)$, $C(9, 5)$ ، وبما أن مركز المثلث هو النقطة التي تلاقى عندها القطع المتوسطة للمثلث؛ إذن استعمل نظرية نقطة المتضيق لإيجاد نقطة متضيق أحد أضلاع المثلث، فيكون مركز المثلث واقعاً على القطعة المتوسطة وعلى بعد من الرأس يساوي ثلثي طول القطعة المتوسطة.

وزارة التربية والتعليم



حل: مثل $\triangle ABC$ بيانياً .

أوجن نقطة متتصف D للضلع \overline{AB} الذي طرفة .
 $A(1, 10), B(5, 0)$

$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

عَيْنَ النَّقْطَةِ D ، وَلَاحِظَ أَنَّ \overline{DC} أَفْقَيَّةٌ ، وَالْمَسَافَةُ مِنْ
إِلَى $C(9, 5)$ تَسَاوِي $9 - 3 = 6$ ، أَيْ
6 وَحْدَاتٍ .

فَإِذَا كَانَتْ P مَرْكَزُ $\triangle ABC$ ، فَإِنَّ $PC = \frac{2}{3}DC$ ؛ وَلَذَا يَقْعُدُ الْمَرْكَزُ عَلَى بُعدِ $(6, \frac{2}{3} \cdot 6)$ أَيْ $(5, 4)$.

إِذْنَ يَتَوازَّنُ الْمُثَلِّثُ عَنْدَ النَّقْطَةِ $(5, 5)$.

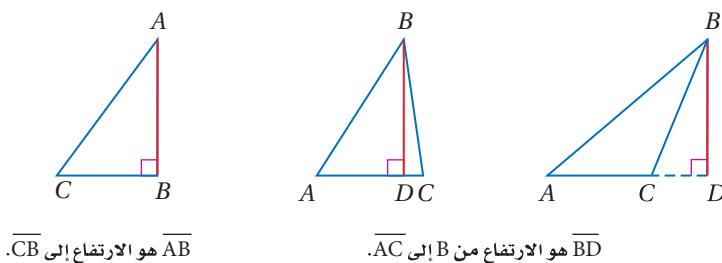
تحقق: استعمل قطعة متوسطة أخرى للتحقق من صحة إجابتكم. بما أنّ نقطة متتصف الضلع \overline{AC} هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right) = F(5, 7.5)$ أو $F(5, 7.5)$ ، وأن \overline{BF} رأسية فإن المسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0 = 7.5$ وحدات، وعلى ذلك يكون \overline{PB} يساوي $\frac{2}{3} \cdot 7.5 = 5$ ، إذن P تقع على بعد 5 وحدات إلى أعلى من B .

وتكون إحداثيات P هي $(5, 5)$ أَيْ $(5, 5)$.

تحقق من فهمك

3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(1, 0), (6, 11.5), (12, 4)$ ، مما إحداثيات النقطة التي يتزن عندها هذا المثلث؟ ووضح إجابتكم.

ارتفاعات المثلث: ارتفاع المثلث هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



قراءة الرياضيات

ارتفاع المثلث

يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة.
ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.

ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقى المستقيمات التي تحويها في نقطة مشتركة.

مفهوم أساسى

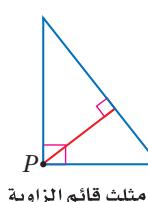
متتقى الارتفاعات

تقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات أي مثلث في نقطة تسمى **متتقى الارتفاعات**.

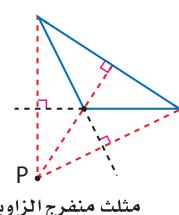
مثال: تقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BG}$ عند النقطة P ، وهي متتقى الارتفاعات للمثلث ABC .

وزارة التعليم

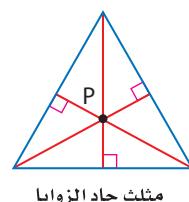
يمكن أن تلتقي الارتفاعات في مثلث داخله أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث قائم الزاوية



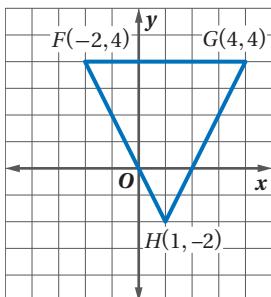
مثلث منفرج الزاوية



مثلث حاد الزوايا

مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

هندسة إحداثية: إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2, 4)$, $G(4, 4)$, $H(1, -2)$ فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1: مثل $\triangle FGH$ بيانياً. ولإيجاد ملتقى الارتفاعات، أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من F إلى \overline{GH} بما أن ميل \overline{GH} يساوي 2 فإن ميل الارتفاع العمودي على \overline{GH} يساوي $-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{ll} \text{صيغة النقطة والميل} & y - y_1 = m(x - x_1) \\ (x_1, y_1) = F(-2, 4), m = -\frac{1}{2} & y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)] \\ \text{بسط} & y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2) \\ \text{خاصية التوزيع} & y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1 \\ \text{اجمع 4 إلى الطرفين} & y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{array}$$

ثم أوجد معادلة الارتفاع من G إلى \overline{FH} بما أن ميل \overline{FH} يساوي -2 فإن ميل الارتفاع العمودي على \overline{FH} يساوي $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{ll} \text{صيغة النقطة والميل} & y - y_1 = m(x - x_1) \\ (x_1, y_1) = G(4, 4), m = \frac{1}{2} & y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4) \\ \text{خاصية التوزيع} & y - 4 = \frac{1}{2}x - 2 \\ \text{اجمع 4 إلى الطرفين} & y = \frac{1}{2}x + 2 \end{array}$$

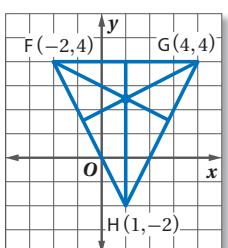
الخطوة 3: حل نظام المعادلتين الناتج لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

اجمع المعادلين لتحذف x ، فيتخرج أن $5y = 5$ ، ومن ثم فإن $y = \frac{5}{2}$

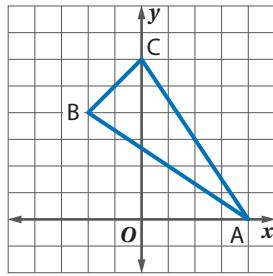
$$\begin{array}{ll} \text{معادلة الارتفاع من } G & y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = \frac{5}{2} & \frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2 \\ \text{اطرح } \frac{4}{2} \text{ ، أو 2 من الطرفين} & \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x \\ \text{اضرب الطرفين في 2} & 1 = x \end{array}$$

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولة
استعمل ر肯 ورقة لرسم ارتفاعات المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريرياً عند $(1, 2\frac{1}{2})$ لهذا فالجواب معقول.



تحقق من فهمك

- 4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.

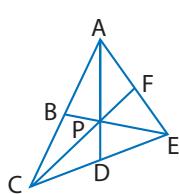
ملخص المفاهيم				
أضف إلى مطويتك	قطع مستقيمة ونقاط خاصة في المثلث			
مثال	الخاصية	نقطة التلاقي	مثال	المفهوم
	مركز الدائرة الخارجية P ، $\triangle ABC$ د، وتقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.	مركز الدائرة الخارجية للمثلث		العمود المنصف
	مركز الدائرة الداخلية Q في $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.	مركز الدائرة الداخلية للمثلث		منصف الزاوية
	مركز R ، وتبعد $\triangle ABC$ عن كل رأس ثلثي طول القطعة الواسقة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.	مركز المثلث		القطعة المتوسطة
	تلتقى المستقيمات التي تحوى ارتفاعات $\triangle ABC$ عند النقطة S ، وتسمى ملتقى الارتفاعات.	ملتقى الارتفاعات		الارتفاع

تأكد

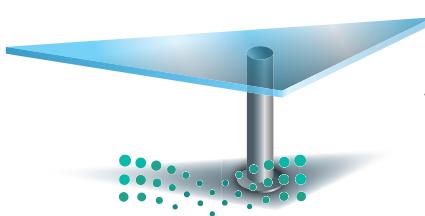
إذا كانت النقطة P مركز $.PF = 6, AD = 15$ ، $\triangle ACE$ فأوجد كل طول مما يأتي:

$$PC \quad (1)$$

$$AP \quad (2)$$



(3) تصميم داخلي: بالعودة إلى فقرة "لماذا؟" ، إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث عند النقاط $(3, 6), (5, 2), (7, 10)$. فعند أيّ نقطة ستوضع الدعامة؟



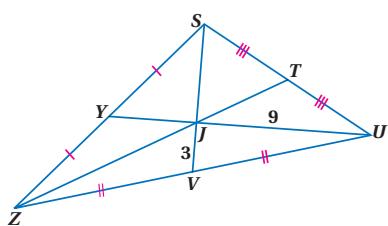
المثال 2

$$PF = 6, AD = 15$$

المثال 3

(4) هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه: $A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$

المثال 4



في $\triangle SZU$ ، إذا كان $ZT = 18$ ، فأوجد كـل طول مما يأتي:

SJ (6)

YJ (5)

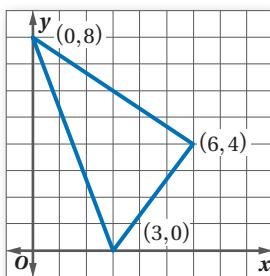
SV (8)

YU (7)

ZJ (10)

JT (9)

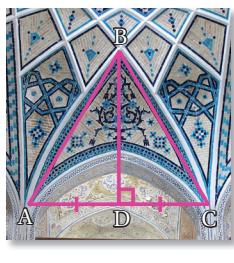
المثال 3 (11) تصميم داخلي: صنعت كوش لوحـة مـثلـة الشـكـل كـما فـي الشـكـل أدـنـاه لـتـضـع عـلـيـها صـورـ مـعـالـم مشـهـورـة. وأرادـت أـن تـعـلـقـها فـي سـقـفـ حـجـرـتها عـلـى أـن تـكـوـنـ مـواـزـية لـهـ. فـعـنـدـ أـيـ نـقـطـةـ يـجـبـ أـنـ ثـبـتـ الـخـيـطـ؟



المثال 4 هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه:

$J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$

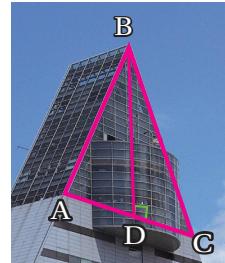
صنـفـ \overline{BD} في كـلـ من الأـسـلـةـ الآـتـيـةـ إـلـىـ اـرـفـاعـ، أو قـطـعـةـ مـتوـسـطـةـ، أو عـمـودـ منـصـفـ:



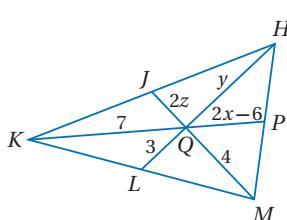
15



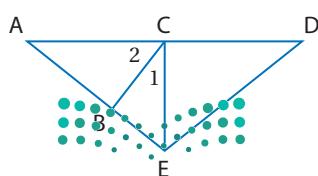
14



13

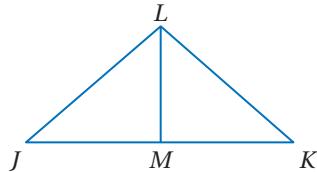


جـبرـ: في الشـكـلـ المجـاـوـرـ، إـذـاـ كـانـتـ L, P, J نقاطـ مـنـتـصـفـاتـ . على التـرتـيبـ، فأـوجـدـ قـيـمةـ كـلـ منـ x, y, z .



جـبرـ: في الشـكـلـ المجـاـوـرـ، إـذـاـ كـانـتـ \overline{EC} اـرـفـاعـاـلـ، $\triangle AED$ اـرـفـاعـاـلـ، $m\angle 1 = (2x + 7)^\circ$ ، $m\angle 2 = (3x + 13)^\circ$. $m\angle 1, m\angle 2$

في الشكل المجاور، حدد ما إذا كانت \overline{LM} عموداً منصفاً، أو قطعة متوسطة ، أو ارتفاعاً لـ $\triangle JKL$ في كل حالة مما يأتي:



$$\triangle JLM \cong \triangle KLM \quad (19)$$

$$\overline{LM} \perp \overline{JK} \quad (18)$$

$$\overline{LM} \perp \overline{JK}, \overline{JL} \cong \overline{KL} \quad (21)$$

$$\overline{JM} \cong \overline{KM} \quad (20)$$

(22) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عמודتين.

المعطيات: $\overline{XY}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$

قطع متوسطة لـ $\triangle XYZ$

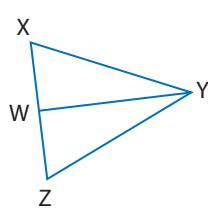
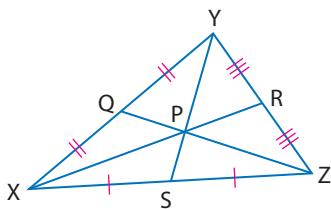
المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$

(22) **برهان:** اكتب برهاناً حرّاً.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فيه

$\overline{XY} \cong \overline{ZY}, \angle Y$ تنصّف \overline{WY}

المطلوب: قطعة متوسطة.

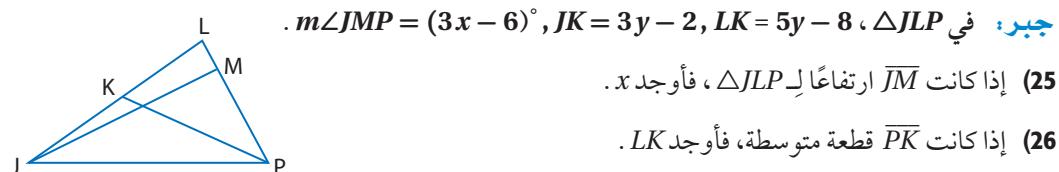


(24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف موقع نقاط التلاقي لأي مثلث متطابق الأضلاع.

(a) **عملياً:** أنشئ ثلاثة مثلثات متطابقة الأضلاع ومختلفة بعضها عن بعضٍ على ورق سهل الطي، ثم قصّها. واطوِّ كل مثلث لتحديد موقع مركز الدائرة الخارجية للثلث، ومركز الدائرة الداخلية للثلث، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات.

(b) **لفظياً:** خمن العلاقات بين نقاط التلاقي الأربع لأي مثلث متطابق الأضلاع.

(c) **بيانياً:** ارسم مثلثاً متطابق الأضلاع في مستوى إحداثي، وعيّن مركز الدائرة الخارجية للثلث، ومركز الدائرة الداخلية ، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات. وحدد إحداثيات كل نقطة منها.



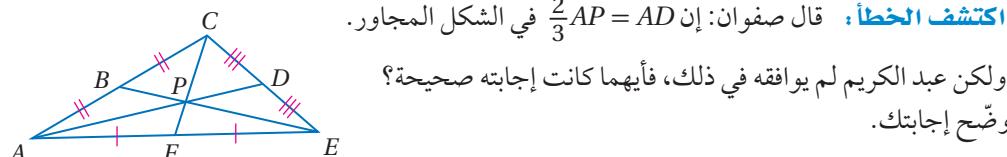
$$\text{جبر: في } . m\angle JMP = (3x - 6)^\circ, JK = 3y - 2, LK = 5y - 8, \triangle JLP \quad (25)$$

إذا كانت \overline{JM} ارتفاعاً لـ $\triangle JLP$ ، فأوجد x .

إذا كانت \overline{PK} قطعة متوسطة، فأوجد LK .

مسائل مهارات التفكير العليا

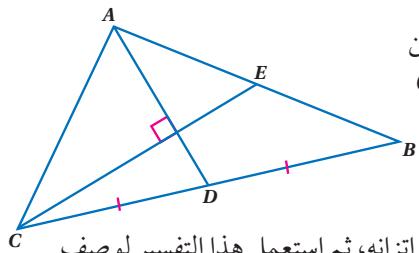
(27) **اكتشف الخطأ:** قال صفوان: إن $AP = \frac{2}{3}AD$ في الشكل المجاور.



ولكن عبد الكريم لم يوافقه في ذلك، فما كان إجابته صحيحة؟
ووضح إجابتك.

(28) **تبرير:** هل العبارة التالية صحيحة أم خطأ؟ وضح إجابتك إذا كانت صحيحة، وإلا فاعطِ مثلاً مضاداً.
”ملتقى ارتفاعات المثلث القائم الزاوية تقع عند رأس الزاوية القائمة“.





(29) **تحدة:** في الشكل المجاور، إذا كانت \overline{AD} , \overline{CE} قطعتين متواسطتين في $\triangle ACB$ ، وكانت $CA \perp CE$, $AB = 10$, $CE = 9$ ، فأوجد $\triangle ACB$

(30) **اكتب:** استعمل المساحة لتفسير لماذا يكون مركز المثلث هو نقطة اتزانه، ثم استعمل هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل.

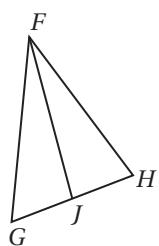
تدريب على اختبار

(32) ما المقطع x للمسقى $4x - 6y = 12$

- 3 **C**
- 2 **D**

- 3 **A**
- 2 **B**

(31) في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$ ، فأي عبارة مما يأتي صحيحة؟



$\triangle FGH$ ارتفاع لـ \overline{FJ} **A**

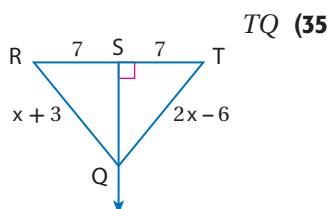
$\triangle FGH$ منصف زاوية في \overline{FJ} **B**

$\triangle FGH$ قطعة متواسطة في \overline{FJ} **C**

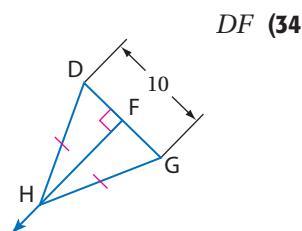
$\triangle FGH$ عمود منصف في \overline{FJ} **D**

مراجعة تراكمية

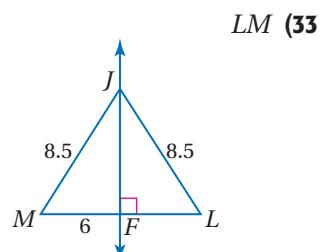
أوجد كل قياس مما يأتي : (الدرس 4-1)



TQ (35)



DF (34)



LM (33)

(36) ارسم المثلث المتطابق الصلعين QRT في المستوى الإحداثي الذي طول قاعدته \overline{QR} يساوي b وحدة، وحدد إحداثيات رؤوسه. (الدرس 3-7)

(37) بين ما إذا كان \overrightarrow{RS} متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $R(1, 1)$, $S(9, 8)$, $J(-6, 1)$, $K(2, 8)$ ، وارسم كل مستقيم لتحققه من إجابتك. (الدرس 3-2)

استعد للدرس اللاحق

اكتب <أو> داخل ○ لتحصل على عبارة صحيحة.

$$-4.25 \bigcirc -\frac{19}{4} \quad (41)$$

$$2.7 \bigcirc \frac{3}{5} \quad (40)$$

$$\frac{3}{8} \bigcirc \frac{5}{16} \quad (39)$$

$$-\frac{18}{25} \bigcirc \frac{19}{27} \quad (38)$$



المتباينات في المثلث

Inequalities in One Triangle

4-3

لماذا؟



فيما سبق:

درست العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

والآن:

- أتعرف خصائص المتباينات، وأطبقها على قياسات زوايا المثلث.
- أطبق خصائص المتباينات على العلاقة بين زوايا مثلث وأضلاعه.

متباينات الزوايا: تعلمت في الجبر المتباينة بوصفها علاقة بين عددين حقيقيين، وتُستعمل هذه العلاقة عادة في البراهين.

مفهوم أساسى

تعريف المتباينة

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين مثل a, b يكون $b > a$ ، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$

مثال إذا كان $3 + 2 = 5$ ، فإن $2 > 0$

وفي الجدول أدناه قائمة بعض خصائص المتباينات التي درستها.

مفهوم أساسى

خصائص المتباينة على الأعداد الحقيقية

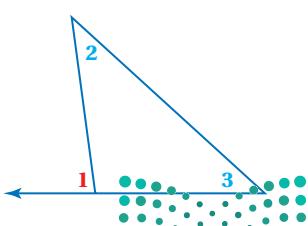
الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c ،

خاصية المقارنة . $a < b$ أو $a = b$ أو $a > b$

خاصية التعدّي .
 (1) إذا كان $c < b$ ، $a < b$ ، فإن $a < c$.
 (2) إذا كان $c > b$ ، $a > b$ ، فإن $c > a$.

خاصية الجمع .
 (1) إذا كان $a > b$ ، $a + c > b + c$ ، فإن $a + c > b$.
 (2) إذا كان $a < b$ ، $a + c < b + c$ ، فإن $a + c < b$.

خاصية الطرح .
 (1) إذا كان $b > a$ ، $b - c > a - c$ ، فإن $b - c > a$.
 (2) إذا كان $b < a$ ، $a - c < b - c$ ، فإن $a - c < b$.



يمكن أن يطبق تعريف المتباينة وخصائصها على قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة؛ لأنها أعداد حقيقة.

تأمل $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ في الشكل المجاور.

من نظرية الزاوية الخارجية، تعلم أن $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$

وبما أن قياسات الزوايا أعداد موجبة، إذن نستنتج أن:

$$m\angle 1 > m\angle 2 \quad \text{و} \quad m\angle 1 > m\angle 3$$

وهذه النتيجة تقود إلى النظرية الآتية:

نظريّة 4.8 متباهنة الزاويّة الخارجيّة

أضف إلى
مطويتك



قياس الزاويّة الخارجيّة لمثلث أكبر من قياس أيّ من الزاويّتين الداخليّتين البعيدين عنها.

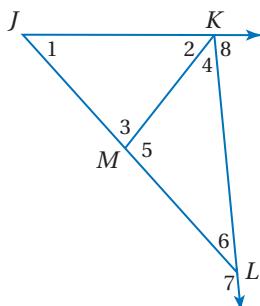
مثال: $m\angle 1 > m\angle A$
 $m\angle 1 > m\angle B$

ستبرهن هذه النظريّة في الدرس 4-4

استعمال نظريّة متباهنة الزاويّة الخارجيّة

مثال 1

استعمل نظريّة متباهنة الزاويّة الخارجيّة؛ لكتابه جميع الزوايا الممرّقة التي تتحقّق الشرط المُعطى في كلّ ما يأتي:



(a) قياساتها أقل من $m\angle 7$

$\angle 7$ زاويّة خارجيّة لـ $\triangle KML$ ، والزاويّتان $5, \angle 4$ هما زاويّتان
الداخليّتان البعيدين عن $\angle 7$ ، وبناءً على نظريّة متباهنة الزاويّة الخارجيّة يكون:

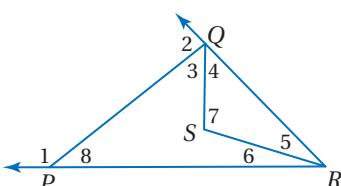
$$m\angle 7 > m\angle 4, m\angle 7 > m\angle 5$$

وكذلك $\angle 7$ زاويّة خارجيّة لـ $\triangle JKL$ ، والزاويّتان $1, \angle JKL$ ،
هما زاويّتان الداخليّتان البعيدين عن $\angle 7$ ؛ لذا فإنّ $m\angle 7 > m\angle 1$
 $m\angle JKL = m\angle 2 + m\angle 4$. وبما أنّ $m\angle 7 > m\angle JKL$
وبالتعويض يكون $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$ ؛ إذن $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$.

لذا فالزوايا التي قياساتها أقل من $m\angle 7$ هي $\angle 1, \angle 2, \angle 4, \angle 5$.

(b) قياساتها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ زاويّة خارجيّة لـ $\triangle KLM$. وبناءً على نظريّة متباهنة الزاويّة الخارجيّة يكون $m\angle 3 > m\angle 6$. وبما أنّ
 $\angle 8$ زاويّة خارجيّة لـ $\triangle JKL$ ، فإنّ $m\angle 8 > m\angle 6$ ؛ لذا فقياس كلّ من $\angle 3, \angle 8$ أكبر من $m\angle 6$.

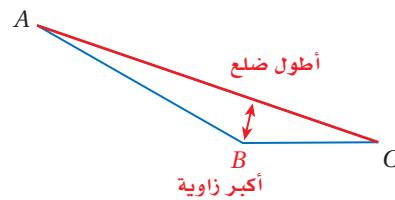
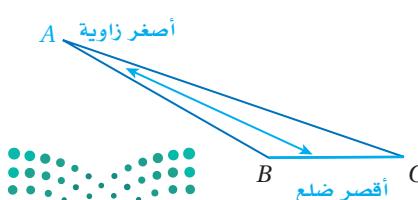


تحقق من فهمك

(1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$

(1B) قياساتها أكبر من $m\angle 8$

العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه: في الدرس 3-6، تعلّمت أنّه إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويّتين المقابلتين لهذين الضلعين متّابقتان. ولكن كيف تكون العلاقة إذا كان الضلعان غير متّابقين. وللإجابة عن هذا السؤال، افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج الزاويّة ومختلف الأضلاع.



لاحظ أنّ أطول ضلع في $\triangle ABC$ يقابل أكبر زاويّة، وبالمثل فإنّ أقصر ضلع يقابل أصغر زاويّة.

تنبيه !

تحديد الضلع المقابل

انتبه عند تحديد الضلع المقابل لزاوية بصورة صحيحة، فالضلوع المقابلان للزاوية يشكّلان زاويّة لا يمكن أن يكون أحدهما مماثلاً لها.

رمزاً الزاوية والمتباعدة

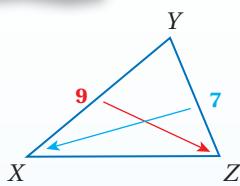
يبدو رمز الزاوية (\angle)
مشابهاً لرمز أقل من ($<$)، وخاصة عند الكتابة باليد؛ لذا كان دقيقاً في كتابة الرموز بصورة صحيحة عندما يُستخدم الرمزان معاً.

نظريتان

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

4.9

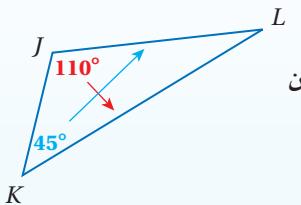
متباينة ضلع-زاوية: إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإن قياس الزاوية المقابلة للضلعين الأطوال يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلعين الأقصر.



مثال بما أن $XY > YZ$ ، فإن $m\angle X > m\angle Z$.

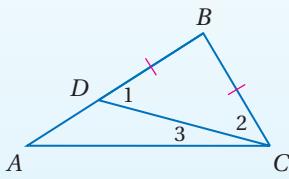
4.10

متباينة زاوية-ضلع: إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإن الضلع المقابل للزاوية الكبرى يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.



مثال بما أن $m\angle K > m\angle J$ ، فإن $KL > JL$.

برهان النظرية 4.9



المعطيات: $AB > BC$ ، فيه $\triangle ABC$

. المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$

البرهان:

بما أن $AB > BC$ في $\triangle ABC$ ، فإنه توجد نقطة D على \overline{AB} بحيث $BD = BC$ ؛ لذا ارسم \overline{CD} لتشكل $\triangle BCD$ المتطابق للصلعين، وبناءً على نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle 1 \cong \angle 2$ ، واستناداً إلى تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle 1 = m\angle 2$.

واعتماداً على مسلمة جمع قياسات الزوايا يكون $m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle BCA$ ، إذن $m\angle BCA > m\angle 2$ بحسب تعريف المتباينة.

وبالتعریض ينتج أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

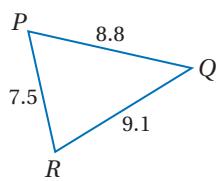
وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجية يكون $m\angle A > m\angle 1$. وبما أن

$m\angle BCA > m\angle 1$ ، فإن $m\angle BCA > m\angle A$ بحسب خاصية التعدي للمتباعدة.

ستبرهن النظرية 4.10 في الدرس 4-4

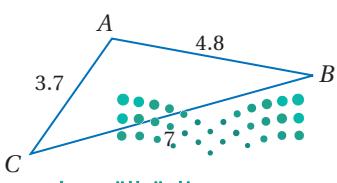
ترتيب زوايا المثلث وفقاً لقياساتها

مثال 2



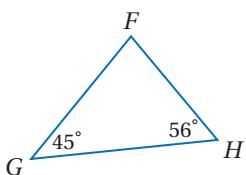
اكتب زوايا $\triangle PQR$ مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر.
الأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول هي: \overline{PR} , \overline{PQ} , \overline{QR} . والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle Q$, $\angle R$, $\angle P$ على الترتيب؛ لذا فالزوايا مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر تكون على النحو الآتي: $\angle Q$, $\angle R$, $\angle P$.

تحقق من فهمك



(2) اكتب زوايا $\triangle ABC$ مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر.

مثال 3



اكتب أضلاع $\triangle FGH$ مرتبةً من الأقصر إلى الأطول.

أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.

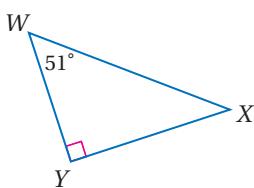
$$m\angle F = 180 - (45^\circ + 56^\circ) = 79^\circ$$

لذا فالزوايا مرتبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle G, \angle H, \angle F$.

والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$ على الترتيب.

إذن فالأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول تكون على النحو التالي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$.

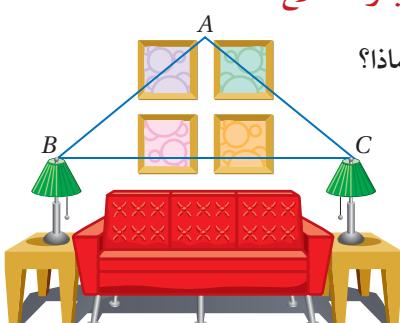
تحقق من فهمك



٣) اكتب زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه، مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر.

ويمكنك استعمال العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلثات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة العrelations بين الزوايا والأضلاع



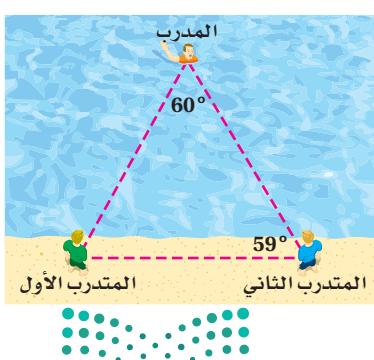
تصميم داخلي: يستعمل مصمم فكرة التثليث الواردة في فقرة لماذا؟ لترتيب غرفة الاستقبال.

إذا أراد المصمم أن يكون $m\angle B < m\angle A$ أقل من $m\angle C$ ، فأي مسافة يجب أن تكون أطول: المسافة بين المصباحين أم المسافة بين النقطتين A, C ? فسر إجابتك.

بحسب نظرية «متباينة زاوية- ضلع»، لكي يكون طول الضلع المقابل لـ $\angle B$ أقصر من طول الضلع المقابل لـ $\angle A$. وبما أن $\overline{AC} > \overline{BC}$ ، فإن $\angle A < \angle C$ ؛ لذا فالمسافة BC بين المصباحين ستكون أكبر من المسافة بين النقطتين A, C .



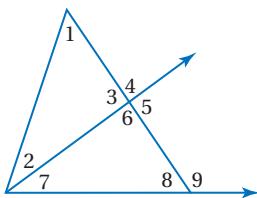
تحقق من فهمك



٤) سباحو الإنقاذ: في أثناء التدريب يمثل المدرب دور شخص في خطر ليتمكن المتدربان من تطبيق مهارات الإنقاذ. إذا كان المدرب والمتدربان الأول والثاني في الموضع المبين في الشكل، فأي المتدربين أقرب إلى المدرب؟

الربط مع الحياة

برامج إعداد المنقذين في السباحة تتضمن تدريباً على المراقبة والإنقاذ والإنعاشات الأولية، وتتراوح مدة البرنامج عادة ما بين 30 إلى 37 ساعة، تبعاً لطبيعة الوسط المائي مثل البحيرات أو شواطئ البحار.

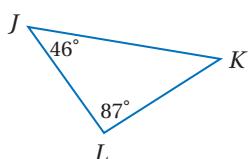


استعمل نظرية متباعدة الزاوية الخارجية، لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تتحقق الشرط المعطى في كلٍّ مما يأتي :

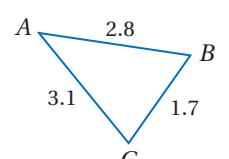
- (1) قياساتها أقل من $m\angle 4$.
- (2) قياساتها أكبر من $m\angle 7$.
- (3) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.
- (4) قياساتها أقل من $m\angle 9$.

المثال 1

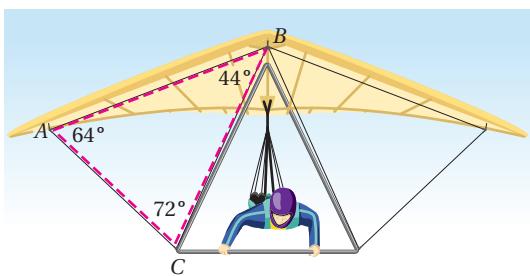
اكتب زوايا كل مثلث مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين :



(6)



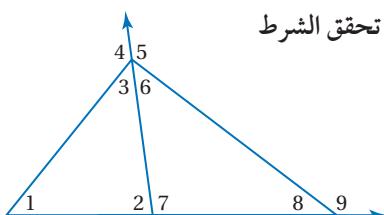
المثالان 2, 3



(7) طيران شراعي: تشکل دعائم الطائرة الشراعية مثلثات كالمثلث الظاهر في الصورة . فأي دعامة تكون أطول: \overline{BC} أم \overline{AC} ؟ وضح إجابتك.

المثال 4

تدريب وحل المسائل



استعمل نظرية متباعدة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تتحقق الشرط المعطى في كلٍّ مما يأتي:

- (8) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.
- (9) قياساتها أقل من $m\angle 4$.
- (10) قياساتها أقل من $m\angle 9$.
- (11) قياساتها أكبر من $m\angle 8$.

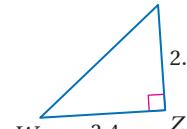
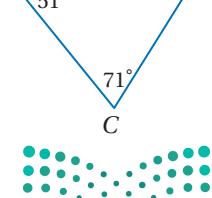
المثال 1

اكتب زوايا كل مثلث مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر في كلٍّ مما يأتي:

A 51° B (14)

H 57° 62° K (13)

Y 2.3 (12)

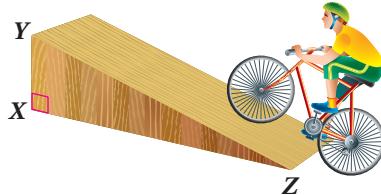


المثالان 2, 3

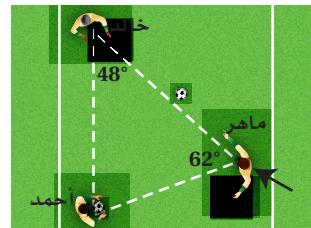
المثال 4



16) منحدرات: يمثل المنحدر طريقة للدرجات الهوائية. فماهما أطول؟ طول المنحدر \overline{XZ} أم طول السطح العلوي للمنحدر \overline{YZ} ؟ وضح إجابتك باستعمال النظرية 4.9.



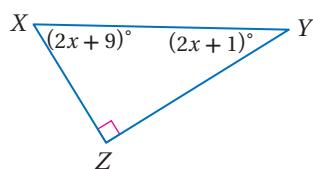
15) كرة قدم: يقف أحمد و خالد و ماهر في ملعب كرة قدم كما في الشكل أدناه، و يريد ماهر أن يمرر الكرة إلى أحد زميليه، على أن تكون مسافة التمرير أقصر. أيهما يختار: خالد أم أحمد؟ ببر إجابتك.



الربط مع الحياة

بینت إحدى الدراسات أن فريق كرة القدم يصبح في حالة الهجوم ما بين 45–65 مرة في المباراة الواحدة.

والفريق المتميز هو الذي يتميز بقدرته على تنفيذ الهجمات بشكل جيد، وفي الوقت نفسه يستطيع الاحتفاظ بدفاع متصل.



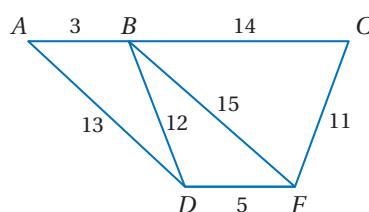
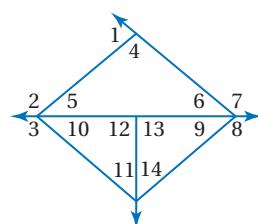
17) اكتب زوايا المثلث المجاور مرتبة من الأصغر إلى الأكبر :

استعمل الشكل المجاور؛ لتحديد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعة مما يأتي :

$$\angle 2, \angle 4, \angle 6 \quad (19) \quad \angle 1, \angle 5, \angle 6 \quad (18)$$

$$\angle 3, \angle 11, \angle 12 \quad (21) \quad \angle 7, \angle 4, \angle 5 \quad (20)$$

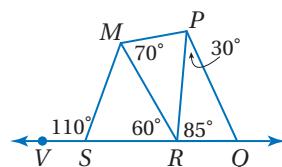
$$\angle 8, \angle 10, \angle 11 \quad (23) \quad \angle 3, \angle 9, \angle 14 \quad (22)$$



استعمل الشكل المجاور؛ لتحديد العلاقة بين قياسات الزوايا المعطاة في كلٍ من الأسئلة الآتية :

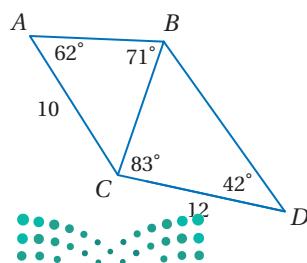
$$\angle BCF, \angle CFB \quad (25) \quad \angle ABD, \angle BDA \quad (24)$$

$$\angle DBF, \angle BFD \quad (27) \quad \angle BFD, \angle BDF \quad (26)$$



استعمل الشكل المجاور؛ لتحديد العلاقة بين أطوال الأضلاع المعطاة في كلٍ من الأسئلة الآتية :

$$\overline{RQ}, \overline{PQ} \quad (30) \quad \overline{RP}, \overline{MP} \quad (29) \quad \overline{SM}, \overline{MR} \quad (28)$$



31) اكتب أضلاع كل مثلث في الشكل المجاور مرتبة من الأقصر إلى الأطول. ووضح إجابتك.

CA	$AB + BC$	BC	AB	المثلث
				الحاد الزوايا
				المنفرج الزاوية
				القائم الزاوية

(32) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث.

(a) هندسياً: ارسم ثلاثة مثلثات: الأول حاد الزوايا، والثاني منفرج الزاوية، والثالث قائم الزاوية، وسمّ رؤوس كل مثلث A, B, C .

(b) جدولياً: استعمل المسطرة لقياس أطوال أضلاع كل مثلث، ثم انسخ الجدول في دفترك وأكمله.

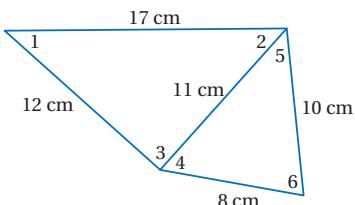
(c) جدولياً: نظم جدولين آخرين كالجدول أعلاه، وأوجد مجموع BC, CA في أحدهما، ومجموع AB في الجدول الآخر.

(d) جبرياً: اكتب متابينة لكل جدول كونته تربط بين مجموع طولي الضلعين في مثلث وطول الضلع الثالث.

(e) لفظياً: خمن العلاقة بين مجموع طولي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

(33) **تبرير:** هل تكون قاعدة المثلث المتطابق الضلعين هي الضلع الأطول في المثلث دائماً أم أحياناً لا تكون أبداً؟ وضح إجابتك.



(34) **تحد:** استعمل أطوال الأضلاع في الشكل المجاور؛ لترتب قياسات الزوايا المرقمة من الأصغر إلى الأكبر، فإذا علمت أن $m\angle 5 = m\angle 2$. ووضح إجابتك.

(35) **اكتب:** وضح لماذا يكون الوتر في المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول دائماً؟

تدريب على اختبار

(36) إذا كان قياسا زاويتين في مثلث هما $45^\circ, 92^\circ$ ، فما نوع هذا المثلث؟

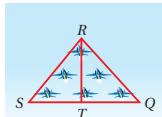
| -28 | C
| -39 | D

| 45 | A
| 15 | B

- A منفرج الزاوية و مختلف الأضلاع.
- B حاد الزوايا و مختلف الأضلاع.
- C منفرج الزاوية و متطابق الضلعين.
- D حاد الزوايا و متطابق الضلعين.

مراجعة تراكمية

(38) **هندسة إحداثية:** بصيغة الميل والمقطع اكتب معادلة العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها $(-2, 4), E(3, 5)$ ، $D(-4, 2)$. (الدرس 4-1)



(39) **طائرات:** يطير سربٌ من الطائرات على هيئة مثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle SRT \cong \triangle QRT$. (الدرس 3-4)

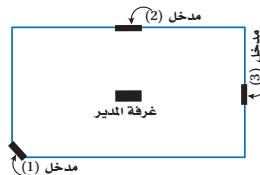
استعد للدرس اللاحق



إذا كان $3 = x, 8 = y, 2 = z$ ، فحدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحةً أم خاطئةً:

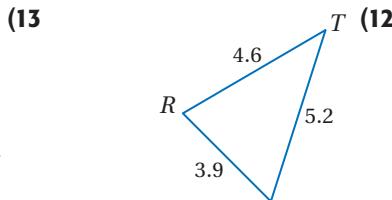
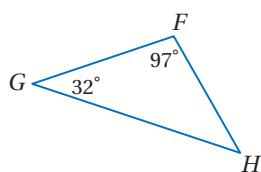
اختبار منتصف الفصل

(11) تصميم هندي: في إحدى المدارس، صمم مهندس مبني للإدارة، وراعي في التصميم أن تكون غرفة المدير على نفس بعد من مداخل المبني الثلاثة. هل تقع غرفة المدير عند نقطة التقائه ارتفاعات المثلث الذي رؤوسه هي المداخل الثلاثة؟ ولماذا؟ (الدرس 4-2)



أكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتبة من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-3)

(13)



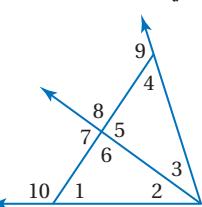
(14) مسافات: في الخريطة أدناه، إذا علمت أن $m\angle C = 70^\circ$, $m\angle A = \frac{2}{3}m\angle B$ ، فأجب عما يأتي: (الدرس 4-3)



. (a) أوجد قياس كلٌّ من الزاويتين A , B .

. (b) رتب أطوال أضلاع المثلث من الأقصر إلى الأطول.

استعمل نظرية متباعدة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كلٌّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 4-3)



. (15) قياسها أقل من $m\angle 8$.

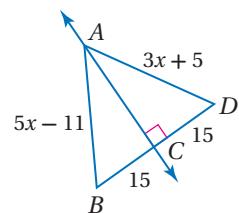
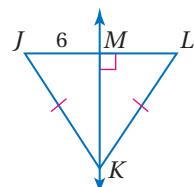
. (16) قياسها أكبر من $m\angle 3$.

. (17) قياسها أقل من $m\angle 10$.

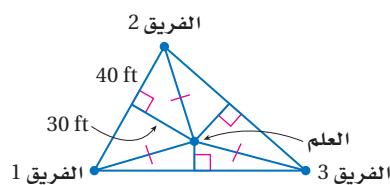
أوجد كلاً من القياسين الآتيين: (الدرس 4-1)

JL (2)

AB (1)

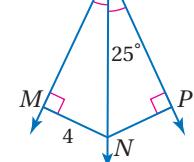
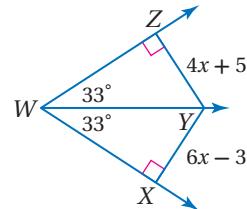


(3) مخيم: يلعب المشاركون في مخيم كشفي لعبه الفوز بالعلم. إذا كانت الفرق الثلاثة تقف في الأماكن المبينة في الشكل أدناه، والعلم مثبت عند نقطة متساوية بعد عن الفرق الثلاثة، فما المسافة بين العلم وكل من هذه الفرق؟ (الدرس 4-1)

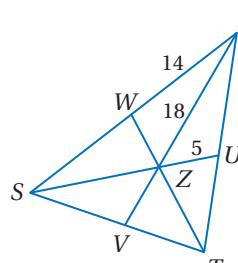


أوجد كلاً من القياسين الآتيين: (الدرس 4-1)

XY (5)

 $m\angle MNP$ (4)

إذا كانت Z مركز $RZ = 18$ ، $\triangle RST$ فأوجد كلاً من الأطوال الآتية: (الدرس 4-2)



ZV (6)

SZ (7)

SR (8)

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات مركز كل مثلث علمت رؤوسه في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-2)

$A(1, 7), B(4, 2), C(7, 7)$ (9)

$J(-5, 5), K(-5, -1), L(1, 2)$ (10)



البرهان غير المباشر

Indirect Proof

4-4

لماذا؟



أعلن محل أحذية عن تخفيض مقداره 25٪ على جميع القطع الموجودة في المحل، فسألت هند أختها مها خلال تسوقهما في المحل قائلةً: إذا كان ثمن القطعة 80 ريالاً بعد التخفيض، فهل كان ثمن القطعة أكثر من 100 ريال قبل التخفيض؟ فأجابت مها: نعم؛ لأنه لو كان ثمن القطعة قبل التخفيض 100 ريال أو أقل، فإن ثمنها بعد التخفيض سيكون 75 ريالاً أو أقل.

البرهان الجبري غير المباشر: البراهين التي كتبتها حتى الآن استعملت فيها **البرهان المباشر**، حيث كنت تبدأ بمعطيات صحيحة وثبت أن النتيجة صحيحة هذه الطريقة من البرهان تعتبر **برهاناً مباشراً**، وعندما تستعمل **البرهان غير المباشر** فإنك تفترض أن النتيجة خطأ، ثم تبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو مع أي حقيقة سابقةٍ كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية. وحيث إن جميع خطوات البرهان تكون صحيحة منطقياً، فإن هذا يكون إثباتاً لخطأ الافتراض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحة، ويسمى هذا النوع من البرهان **برهاناً غير مباشراً أو برهاناً بالتناقض**. والخطوات التالية تلخص عملية البرهان غير المباشر.

فيما سبق:

- درستُ البراهين
- الحرة وذات العمودين
- والتسليلية.

والآن:

- أكتب براهين جبرية غير مباشرة.
- أكتب براهين هندسية غير مباشرة.

المفردات:

البرهان المباشر	direct reasoning
البرهان غير المباشر	indirect reasoning
برهان بالتناقض	indirect proof
برهان غير مباشراً	proof by contradiction

اضف إلى
مخطوبيتك

خطوات كتابة البرهان غير المباشر

مفهوم أساسى

- الخطوة 1: حدد النتيجة التي ستبرهنها. ثم افترض خطأها، وذلك بافتراض أنّ نفيها صحيح.
- الخطوة 2: استعمل البرهان المنطقي لتبيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو مع حقيقة أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظرية.
- الخطوة 3: بما أن الافتراض الذي بدأ به أدى إلى تناقض، فيبَين أن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.

صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

مثال 1

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهاناً غير مباشراً لكل عبارة مما يأتي :

$$\angle ABC \not\cong \angle XYZ \quad (a)$$

الافتراض هو: $\angle ABC \cong \angle XYZ$

(b) إذا كان العدد 6 عاملًا للعدد n ، فإن 2 عامل للعدد n .

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي 2 عامل للعدد n ، ونفي هذه النتيجة هو 2 ليس عاملًا للعدد n ؛ لذا فالافتراض هو: العدد 2 ليس عاملًا للعدد n .

(c) $\angle 3$ زاوية منفرجة.

الافتراض هو: $\angle 3$ ليست زاوية منفرجة.

تحقق من فهمك

(1B) النقاط L, K, J , تقع على استقامة واحدة.

$$x > 5 \quad (1A)$$

(1C) $\triangle XYZ$ متطابق الأضلاع.



التناقض

التناقض مبدأ في المنطق ينص على أنه لا يمكن تحقق الافتراض ونفيه في آن واحد.

مثال 2 كتابة برهان جبري غير مباشر

اكتب برهاناً غير مباشر لتبيّن أنه: إذا كان $16 > -3x + 4$ ، فإن $-4 < x$.

المعطيات: $16 > -3x + 4$

المطلوب: إثبات أن $x < -4$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$ ؛ لذا افترض أن $x \geq -4$ صحيحة.

افتراض

$x \geq -4$

الخطوة 2:

اضرب الطرفين بـ -3

$-3x \leq 12$

اجمع 4 للطرفين

$-3x + 4 \leq 12 + 4$

بسط

$-3x + 4 \leq 16$

ولكن $-3x + 4 > 16$ - معطى

الخطوة 3: الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعلومة المعطاة $16 > -3x + 4$ ؛ لذا فالافتراض بأن $x \geq -4$ يجب أن يكون خطأً، وأن النتيجة الأصلية $x < -4$ هي الصحيحة.

تحقق من فهمك

اكتب برهاناً غير مباشر لكلٍ من العبارتين الآتتين:

(2B) إذا كانت $56 > 7x$ ، فإن $x < 8$ (2A) إذا كان $c -$ موجباً، فإن c سالب.

ويمكنك أن تستعمل البرهان غير المباشر في المواقف الحياتية اليومية.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال البرهان الجبري غير المباشر

تسوق: اشتري فهد قميصين بأكثر من 60 ريالاً، وبعد عدة أسابيع سأله صديقه حامد عن ثمن كل قميص، ولكن فهدا لم يتذكر ثمن كل قميص. استعمل البرهان غير المباشر لتبيّن أن أحد القميصين على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالاً.

المعطيات: ثمن القميصين معاً أكثر من 60 ريالاً.

$x + y > 60$ ، حيث x ثمن القميص الأول، وبـ y ثمن القميص الثاني.

المطلوب: إثبات أن قميصاً واحداً على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالاً؛ أي $x > 30$ أو $y > 30$.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن ثمن كل قميص لا يزيد على 30 ريالاً، أي $x \leq 30$ ، $y \leq 30$.

الخطوة 2: إذا كانت $x \leq 30$ ، $y \leq 30$ ، فإن $x + y \leq 30 + 30 = 60$ ؛ أي $x + y \leq 60$.

لأن ثمن القميصين معاً أكثر من 60 ريالاً.

الخطوة 3: بما أن الافتراض أدى إلى تناقض معحقيقة معلومة، فإن الافتراض بأن $x \leq 30$ ، $y \leq 30$ غير صحيح.

افتراض خطأ. لذا يجب أن يكون ثمن أحد القميصين على الأقل أكثر من 30 ريالاً.

تحقق من فهمك

(3) **رحلة:** قطع رياض أكثر من 360 كيلومتراً في رحلة، وتوقف في أثناء سفره مرتين فقط. استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن رياضاً قطع أكثر من 120 كيلومتراً في إحدى مراحل رحلته الثالثة على الأقل.

تُستعمل البراهين غير المباشرة عادة لإثبات مفاهيم في نظرية الأعداد، ويكون من المفيد في هذه البراهين تذكر أنه يمكنك تمثيل العدد الزوجي على الصورة $2k$ ، والعدد الفردي على الصورة $1 + 2k$ حيث k عدد صحيح.

مثال 4 برهان غير مباشر في نظرية الأعداد

اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًّا، فإن x عدد زوجي.

المعطيات: $x + 2$ عدد زوجي.

المطلوب: x عدد زوجي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن x عدد فردي ، وهذا يعني أن $x = 2k + 1$ ، حيث k عدد صحيح.

$$\text{الخطوة 2: } \begin{array}{l} \text{عَوْض} \quad x + 2 = (2k + 1) + 2 \\ \text{خَاصِيَّةُ الْإِبَدَال} \quad = (2k + 2) + 1 \\ \text{خَاصِيَّةُ التَّوزِيع} \quad = 2(k + 1) + 1 \end{array}$$

والآن حدد ما إذا كان $(k + 1) + 2$ عددًا زوجيًّا أو فرديًّا. بما أن k عدد صحيح، فإن $k + 1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن m تساوي $k + 1$ ، فيكون:

$$\text{الخطوة 3: } \begin{array}{l} \text{عَوْض} \quad 2(k + 1) + 1 = 2m + 1 \\ \text{إذن } 2x + 2 \text{ يمكن أن يُمثَّل بـ } 2m + 1, \text{ حيث } m \text{ عدد صحيح، ولكن هذا التمثيل يعني أن } 2x + 2 \text{ عدد فردي. وهذا يتناقض مع العبارة المعطاة } 2x + 2 \text{ عدد زوجي.} \\ \text{الخطوة 4: } \text{بما أنَّ افتراض } x \text{ عدد فردي أدى إلى تناقضٍ مع العبارة المعطاة، فإنَّ النتيجة الأصلية } x \text{ عدد زوجي يجب أن تكون صحيحة.} \end{array}$$

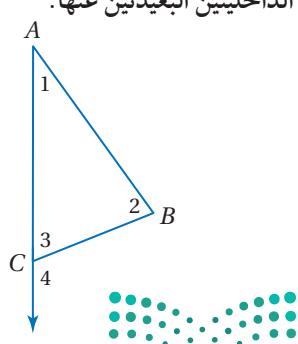
تحقق من فهمك

4) اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه ”إذا كان مربع عدد صحيح فرديًّا، فإنَّ العدد الصحيح فرديًّا“.

البرهان غير المباشر في الهندسة: يمكن أن يستعمل التبرير غير المباشر لإثبات صحة عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباعدة الزاوية الخارجية.

مثال 5 برهان هندسي

أثبتت أنَّ قياس الزاوية الخارجية لمثلث يكون أكبر من قياس كلٌّ من الزواياتين الداخليةتين البعيدتين عنها. ارسم شكلًا توضيحيًّا، ثم عِّين عليه المعطيات والمطلوب.



المعطيات: $\angle 4$ زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle 4 > m\angle 1$ ، $m\angle 4 > m\angle 2$ ، وأن $m\angle 1 > m\angle 2$.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $m\angle 4 \leq m\angle 1$ ، أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

أي أن $m\angle 4 \leq m\angle 1$ ، أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

تنبيه!

- البرهان بالتناقض
- مقابل المثال المضاد
- البرهان بالتناقض
- واعطاء مثال مضاد
- أمران مختلفان: إذ
- يُستعمل المثال المضاد
- إثبات خطأ تخمين
- أو افتراض، ولا يمكن
- استعماله لإثبات صحة
- التخمين أو الافتراض.

الخطوة 2: تحتاج فقط إلى بيان أن الافتراض $m\angle 4 \leq m\angle 1$ يؤدي إلى تناقض، وبالمثل سيؤدي الافتراض $m\angle 2 \leq m\angle 4$ إلى تناقض أيضًا.

الافتراض 1 $m\angle 4 < m\angle 1$ يعني أن $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$

الحالة 1: $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$

نظريه الزاوية الخارجية $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$

عَوْض $m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$

اطرح $m\angle 4$ من كلا الطرفين. $0 = m\angle 2$

وهذا ينافي حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0؛ لذا فإن $m\angle 1 \neq m\angle 4$.

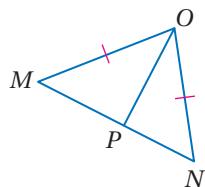
الحالة 2: $m\angle 4 < m\angle 1$

نظريه الزاوية الخارجية $m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$

قياسات الزوايا موجبة $m\angle 4 > m\angle 1$

هذا ينافي الفرض بأن $m\angle 4 < m\angle 1$

الخطوة 3: في الحالتين يؤدي الافتراض إلى تناقض مع نظرية أو تعريف؛ لذا فالنتيجة الأصلية بأن $m\angle 4 > m\angle 1$ وأن $m\angle 4 > m\angle 2$ يجب أن تكون صحيحة.



إرشادات للدراسة

تعرف التناقضات

تذكّر أن التناقض في البرهان غير المباشر لا يكون دائمًا مع المعطيات أو الفرض الذي تبدأ به، بل يمكن أن يكون مع حقيقة معلومة أو تعريف كما ورد في الحالة 1 من المثال 5، حيث إن قياس أي زاوية في مثلث يجب أن يكون أكبر من 0.

تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا غير مباشر.

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \not\cong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$

تأكد

المثال 1

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

(2) $\triangle XYZ$ مختلف الأضلاع.

(4) $\angle A$ ليس زاوية قائمة.

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad (1)$$

$$\text{إذا كان } 24 < 4x, \text{ فإن } 6 < x \quad (3)$$

المثال 2

اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين :

$$\text{إذا كان } 8 > 3x - 4, \text{ فإن } 2 < 2x + 3, \text{ فإن } 4 > x \quad (5)$$

المثال 3

كرة قدم: سجل فهد 13 هدفًا لصالح فريقه المدرسي في المباريات الست الأخيرة. أثبت أن متوسط عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة كان أقل من 3

(8) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $2 - 5x$ عددًا فرديًّا، فإن x عدد فردي.

المثال 4

اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين :

(9) وتر المثلث القائم الزاوية هو أطول أضلاعه.

المثال 5

(10) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإنه لا يمكن أن تكونا منفرجتين معًا.



تدريب وحل المسائل

المثال 1

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

(11) إذا كان $16 > 2x$ ، فإن $x < 8$.

(12) $\angle 2 \neq \angle 1$ زاويتان غير متكاملتين.

(13) إذا تساوى ميلاً مستقيمين، فإن المستقيمين متوازيان.

(14) العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2.

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

(15) إذا كان $x < -3x + 4$ ، فإن $x > -1$.

(16) إذا كان $12 > 6 - 2x$ ، فإن $x < -3$.

المثال 2

(17) **ألعاب حاسوب:** اشتري منصور لعبتي حاسوب بأكثر من 400 ريال، وبعد أسبوع قليلة سأله صديقه كم تكلفة اللعبة الواحدة. فلم يتذكر منصور ذلك. استعمل التبرير غير المباشر؛ لتبيّن أن إحدى اللعبتين على الأقل كلفت أكثر من 200 ريال.

المثال 3

(18) **جمع التبرعات:** أقامت جمعية خيرية حفلة لجمع التبرعات لمساعدة الفقراء والمحاجين، وكان سعر تذكرة الدخول للكبار 30 ريالاً، وللأطفال 12.5 ريالاً. إذا بيعت 375 تذكرة، وكان ريعها أكثر من 7300 ريال، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل للكبار.

اكتب برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

(20) المعطيات: n^2 عدد زوجي.

(19) المعطيات: xy عدد صحيح فردي.

المطلوب: كلاً من xy عدد صحيح فردي

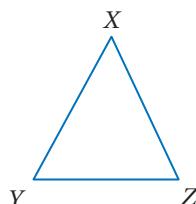
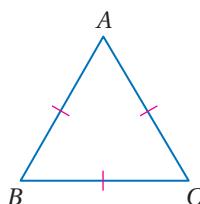
المطلوب: كلاً من xy عدد صحيح فردي

(22) المعطيات: $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.

(21) المعطيات: $XZ > YZ$

المطلوب: $\triangle ABC$ متطابق الزوايا.

المطلوب: $\angle X \neq \angle Y$



(23) اكتب برهاناً غير مباشر لإثبات أنه لا يمكن أن يكون للمثلث أكثر من زاوية قائمة.



الربط مع الحياة

هناك أكثر من طريقة لتسجيل ثلاث نقاط في كرة السلة، منها التسجيل من خارج المنطقة، ومنها أن يسجل اللاعب نقطتين ويحصل على رمية حرة نتيجة خطأ من الفريق المنافس ويسجل منها نقطة.

(24) **كرة سلة:** عندما خرج عدنان من الملعب ليدخل زميل له قُبيل نهاية الشوط الأول من المباراة كان الفريق مدرسته متقدماً بـ 28 نقطة مقابل 26 . وعندما عاد مع بداية الشوط الثاني كان الفريق المنافس متقدماً بـ 29 نقطة مقابل 28 نقطة. استنتج أخو عدنان حين علم بذلك أنّ لاعباً من الفريق المنافس سجّل ثلاث نقاط من رمية واحدة. أثبت صحة أو خطأ استنتاجه باستعمال البرهان غير المباشر ومعلومات الربط مع الحياة.



(27) ألعاب إلكترونية: تتضمن لعبة حاسوبية فارسًا في رحلة للبحث عن الكنز، وفي نهاية الرحلة يقترب الفارس من البابين المبينين أدناه.



أخبر خادم الفارس بأن أحد الإعلانين صحيح والآخر خطأ. استعمل التبرير غير المباشر لتحديد أي البابين سيختاره الفارس. وضح إجابتك.

حدّد ما إذا كان إثبات كل عبارة حول أقصر مسافة بين نقطة وخط مستقيم أو مستوً، يمكن إثباتها باستعمال البرهان المباشر أو البرهان غير المباشر، ثم اكتب برهاناً لكُلّ منهما.

(28) المعطيات: \overline{AB} عمودي على المستقيم p مثل قائم الزاوية
المطلوب: الوتر \overline{AC} أطول ضلع في المثلث
 أقصر قطعة مستقيمة من A إلى المستقيم p .



(30) نظرية الأعداد: في هذه المسألة سُتُّخْمِنُ علاقةً في نظرية الأعداد، وُتُّبَشِّرُ صحة تخمينك.

- (a) اكتب عبارة جبرية تمثل "مجموع مكعب العدد n والعدد ثلاثة".
- (b) كون جدولًا يعطي قيمة العبارة لعشر قيم زوجية وفردية مختلفة لـ n .
- (c) اكتب تخميناً حول n عندما تكون قيمة العبارة زوجية.
- (d) اكتب برهاناً غير مباشر لتخمينك.

مراجعة المفردات

مجموعة الأعداد
 الصحيحة هي:
 $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

مسائل مهارات التفكير العليا

(31) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة يمكن إثبات صحتها باستعمال البرهان غير المباشر ثم أثبتها.

(32) تحدّ: إذا كان x عددًا نسبيًّا، فإنه يمكن تمثيله بالصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a, b عداد صحيحان، و $0 \neq b$. ولا يمكن تمثيل العدد غير النسبي في صورة ناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهاناً غير مباشر تبيّن فيه أن ناتج ضرب عدد نسبي لا يساوي الصفر في عدد غير نسبي، هو عدد غير نسبي.



(33) **اكتشف الخطأ:** يحاول أسعد ورضوان أن يثبتا العبارة التالية باستعمال البرهان غير المباشر. فهل أيٌّ منهما إجابت صحيحة؟ وضع إجابتك.

”إذا كان مجموع عددين زوجيًّا، فإن العددين زوجيًّان.“

رضوان

العبارة صحيحة. إذا كانت العددين فردان فـإنـ مجـوعـهـما يـكـوـنـ عـدـدـاـ زـوـجـيـاـ. وبـماـ أـفـتـراـضـ صـحـيـحـ عـنـدـمـ تـكـوـنـ النـتـيـجـةـ خـطـأـ، فـإـنـ الـعـبـارـةـ صـحـيـحـةـ.

أسعد

العبارة صحيحة. إذا كان أحد العددين زوجيًّا والآخر صفرًا، فإن المجموع يكون عدًّا زوجيًّا. وبـماـ أـنـ الـافـتـراـضـ صـحـيـحـ حـتـىـ عـنـدـمـ تـكـوـنـ النـتـيـجـةـ خـطـأـ، فـإـنـ الـعـبـارـةـ صـحـيـحـةـ.

(34) **اكتب:** اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الموجودة في السؤال 8، واتكتب برهانًا مباشرًا للمعاكس الإيجابي .
كيف يرتبط البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة بالبرهان غير المباشر للعبارة الأصلية؟

تدريب على اختبار

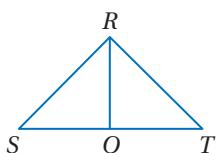
(36) إذا كان $a > b$ ، فأيٌّ مما يأتي يكون صحيحاً دائمًا؟

- $-a > -b$ **A**
- $3a > b$ **B**
- $a^2 < b^2$ **C**
- $a^2 < ab$ **D**

(35) إذا كان طولاً ضلعين في مثلث $12, 7$ ، فأيٌّ مما يأتي لا يمكن أن يكون محيط المثلث؟

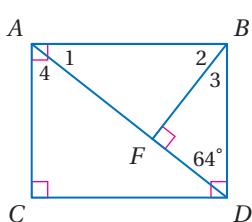
- 29 **A**
- 34 **B**
- 37 **C**
- 38 **D**

مراجعة تراكمية



(37) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 4-3)
المعطيات: $\angle SRT$ تنصُّف \overline{RQ} .

المطلوب: إثبات أن $m\angle SQR > m\angle SRQ$



أوجد كلاً من القياسين الآتيين : (الدرس 3-2)
 $m\angle 4$ (39) $m\angle 1$ (38)

(40) **هندسة إحداثية:** أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين: (الدرس 6-2)

$$y = 2x + 2$$

$$y = 2x - 3$$

استعد للدرس اللاحق



أ ج د ك لًّا م ن ال م ت ب ا ي ن ات ال آ ت ي ة :

$$3x + 54 < 90 \quad (43)$$

$$8x - 14 < 3x + 19 \quad (42)$$

$$4x + 7 < 180 \quad (41)$$

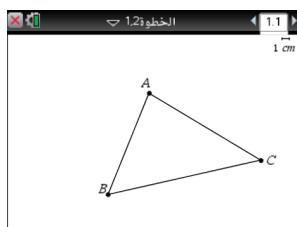


متباينة المثلث The Triangle Inequality

يمكنك استعمال تطبيق الهندسة في الحاسبة TI-nspire لاستكشاف خصائص المثلث.

النشاط 1

أنشئ مثلثاً، ولاحظ العلاقة بين مجموع طولي ضلعين وطول الضلع الثالث.



الخطوة 1: أنشئ مثلثاً بالضغط على المفاتيح

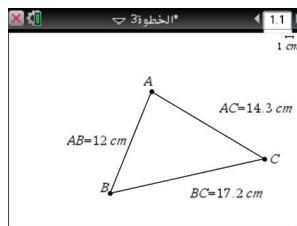
ثم اختر 5: الأشكال الهندسية واختر منها 2: مثلث

ثم ارسم المثلث واضغط esc

الخطوة 2: سُمّ رؤوس المثلث، وذلك بوضع المؤشر عند كل نقطة ثم

الضغط على ctrl menu ، ثم اختيار 2: التسمية ، وعلى زر

A, B, C لجعل الحروف كبيرة ثم سُمّ الرؤوس Shift



الخطوة 3: • حدد طول كل ضلع من أضلاع المثلث بالضغط على

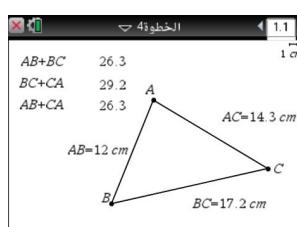
واختر 6: القياس واختر منها 1: الطول ، ولإيجاد

طول كل ضلع: اضغط على رأسين في المثلث، ثم ضع

المؤشر في مكان مناسب لظهور النتيجة ثم اضغط enter

• اكتب اسم الضلع بجانب الطول المقيس بالضغط

على ctrl menu ، ثم اختيار 5: النص ثم اكتب اسم الضلع واضغط enter



الخطوة 4: ولحساب مجموع طول ضلعين في المثلث، اضغط

واختر منها 5: النص ، وابدأ اسم ضلعين مثل:

ctrl menu ، ثم ظلّل النص AB + BC واضغط

واختر منها 5: الأشكال الهندسية ، واضغط على الرقم الذي

يمثل طول الضلع AB ، ثم على الرقم الذي يمثل طول الضلع

BC ، وسيظهر مجموع الضلعين، ثم ضع المؤشر في مكان مناسب لظهور النتيجة ثم اضغط enter

تحليل النتائج:

(1) ضع إشارة < أو > أو = داخل ○؛ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يأتي:

$$BC + CA \bigcirc AB$$

$$AB + CA \bigcirc BC$$

$$AB + BC \bigcirc CA$$

(2) خمن العلاقة بين مجموع طولي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.

(3) ضع إشارة < أو > أو = داخل ○؛ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يأتي:

$$|BC - CA| \bigcirc AB$$

$$|AB - CA| \bigcirc BC$$

$$|AB - BC| \bigcirc CA$$



(4) كيف يمكنك استعمال ملاحظاتك؛ لتحديد مدى طول الضلع الثالث لمثلث إذا علمت طولي

الضلعين الآخرين؟



متباينة المثلث

The Triangle Inequality

4-5

فيما سبق:

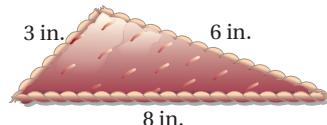
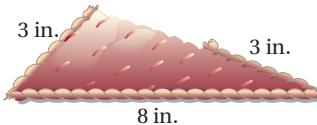
درست خصائص المتباينات
وتطبيقاتها على العلاقات
بين زوايا المثلث وأضلاعه.

والآن:

- أستعمل نظرية متباينة المثلث لأعين الأطوال التي تكون مثلثاً.
- أثبت العلاقات في المثلث باستعمال نظرية متباينة المثلث.

لماذا؟

يريد أحد المصمّمين أن يستعمل قطع الخيوط المجدولة والمتبقيّة من أحد أعماله لتزيين الوسائد المثلثة الشكل أدناه ولتنقليل الإهدار، أراد المصمّم أن يستعمل القطع دون قصها، فاختار ثلاَث قطع عشوائياً وحاول أن يشكّل مثلثاً. والشكّان الآتيان يبيّنان اثنين من هذه المحاوّلات.



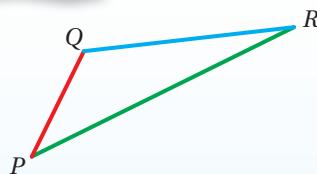
متباينة المثلث: بما أن المثلث يتكون من ثلاَث قطع مستقيمة، فيجب أن تتوافر علاقَة خاصة بين أطوال هذه القطع، كي تشَكّل مثلثاً.

اضف إلى

مِطْوِيْتُك

نظريّة متباينة المثلث

نظريّة 4.11



مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

$$\text{أمثلة } PQ + QR > PR$$

$$QR + PR > PQ$$

$$PR + PQ > QR$$

ستبرهن النظريّة 4.11 في السؤال 19

ولتوسيع عدم إمكانية رسم مثلث من ثلاَث قطع مستقيمة عُلمت أطوالها، يجب بيان أن إحدى متباينات المثلث الثالث غير صحيحة.

تعيّن الأطوال التي تكون مثلثاً

مثال 1

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍ من السؤالين الآتيين، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فوضح السبب:

. 8 in, 15 in, 17 in (a)

تحقق من صحة كل متباينة.

$$15 + 17 > 8$$

$$\checkmark 32 > 8$$

$$8 + 17 > 15$$

$$\checkmark 25 > 15$$

$$8 + 15 > 17$$

$$\checkmark 23 > 17$$

بما أن مجموع طولي أي قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإنَّ القطع المستقيمة التي أطوالها 8, 15, 17 تكون مثلثاً.

6 m, 8 m, 14 m (b)

$$6 + 8 > 14$$

$$\times 14 \not> 14$$

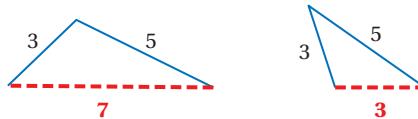
بما أن مجموع طولي قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإنَّ القطع المستقيمة التي أطوالها 6, 8, 14 لا يمكن أن تكون مثلثاً.

إرشادات للدراسة

إذا كان مجموع أقصر طولين أكبر من طول الضلع الثالث، فإنَّ الأطوال الثلاثة تمثل أطوال أضلاع مثلث.



عندما يُعلم طولاً ضلعين في مثلثٍ، يمكن تحديد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث باستعمال نظرية متباعدة المثلث.



مثال 2 من الاختبار

إذا كان طولاً ضلعين في مثلث هما 3 cm, 7 cm، فما أصغر عدد طبيعي يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث؟

- 3 cm A
- 4 cm B
- 5 cm C
- 10 cm D

إرشادات للاختبار

اختبار البديل

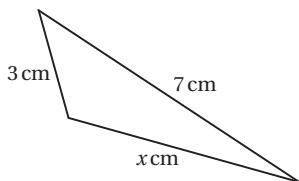
إذا كان الوقت غير كافٍ يمكنك اختبار كل بديل لإيجاد الإجابة الصحيحة واستبعاد البديل الآخر.

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب هو تحديد أصغر قيمة ممكنة لطول الضلع الثالث في مثلثٍ طولاً ضلعين من أضلاعه 3 cm, 7 cm

حل فقرة الاختبار

لتحديد أصغر طول ممكّن من بين البديلات المعطاة، حدد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث أولاً؛ لذا ارسم شكلًا وافتراض أن طول الضلع الثالث يساوي x ، ثم اكتب متباعدة المثلث الثالث، وحل كل واحدة منها.



$$x + 7 > 3$$

$$3 + x > 7$$

$$3 + 7 > x$$

$$x > -4$$

$$x > 4$$

$$10 > x \text{ أو } x < 10$$

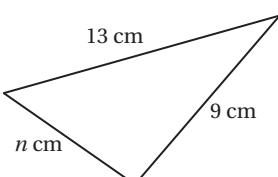
لاحظ أن $-4 < x$ تكون صحيحةً دائمًا لأي قيمةٍ صحيحةٍ موجبةٍ لـ x ، وبربط المتباعدةتين المتبقيتين، يكون مدى القيم التي تحقق كلتا المتباعدةتين هو $4 < x < 10$ ، والذي يمكن كتابته في الصورة $10 > x > 4$ وأقل عدد صحيح موجب بين 4 و 10 هو 5؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C.

قراءة الرياضيات

المتباعدة المركبة

تقرأ المتباعدة المركبة $10 > x > 4$ على النحو التالي: تقع x بين 4 و 10 أو x أكبر من 4 وأقل من 10

تحقق من فهمك



2) في الشكل المجاور، أي الأعداد الآتية لا يمكن أن يكون قيمه لـ n ؟

- | | |
|------|------|
| 10 C | 7 A |
| 22 D | 13 B |



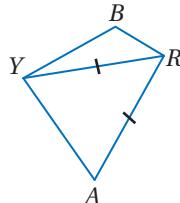
استعمال نظرية متباعدة المثلث في البراهين: يمكنك استعمال نظرية متباعدة المثلث في البراهين المختلفة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال نظرية متباعدة المثلث في البرهان



طيران: المسافة الجوية من الرياض إلى ينبع تساوي المسافة الجوية من الرياض إلى أبها، أثبت أن الطيران المباشر من الرياض إلى ينبع مروراً بمدينة بريدة يقطع مسافةً أكبر من المسافة المقطوعة عند الطيران من الرياض إلى أبها دون توقف.

ارسم شكلًا تقربياً يمثل المسألة، وضع عليه رموز أسماء المدن، وارسم القطعة \overline{YA} لتشكل $\triangle YRA$.



المعطيات: $RY = RA$

المطلوب: $RB + BY > RA$

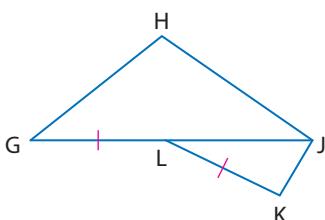
البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	$RY = RA \quad (1)$
(2) نظرية متباعدة المثلث	$RB + BY > RY \quad (2)$
(3) بالتعويض	$RB + BY > RA \quad (3)$



الربط مع الحياة

يختلف الطيران المباشر عن الطيران من دون توقف، ففي حالة الطيران المباشر لا يغير المسافرون الطائرة، ولكن قد تخط الطائرة في مطار واحد أو أكثر قبل وصولها لغايتها.



تحقق من فهمك

3) اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$

تأكد

حدّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٌ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكناً فوضّح السبب.

6 m, 14 m, 10 m (3)

3 in, 4 in, 8 in (2)

5 cm, 7 cm, 10 cm (1)

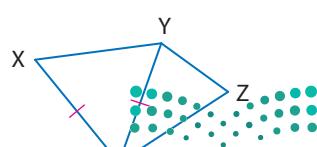
4) اختيار من متعدد: إذا كان طولاً ضلعين في مثلث 5 m, 9 m، 5 m، مما أصغر عدد صحيح يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث فيه؟

6 m **D**

14 m **C**

4 m **B**

5 m **A**



5) **برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$

المثال 1

المثال 2

المثال 3

تدريب وحل المسائل

المثال 1 حدد ما إذا كانت كل من القياسات الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٌ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكناً فوضح السبب.

11 mm, 21 mm, 16 mm (7)

4 ft, 9 ft, 15 ft (6)

$2\frac{1}{2}$ m, $1\frac{3}{4}$ m, $5\frac{1}{8}$ m (9)

9.9 cm, 1.1 cm, 8.2 cm (8)

المثال 2 اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث علم طولاً ضلعين من أضلاعه في كلٌ مما يأتي:

5 m, 11 m (11)

4 ft, 8 ft (10)

$\frac{1}{2}$ km, $3\frac{1}{4}$ km (13)

2.7 cm, 4.2 cm (12)

المثال 3

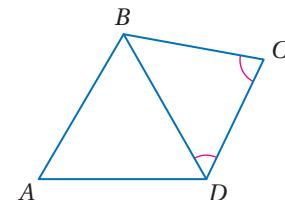
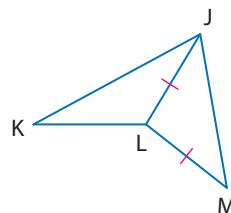
برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين لكلٌ مما يأتي :

(15) المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{LM}$

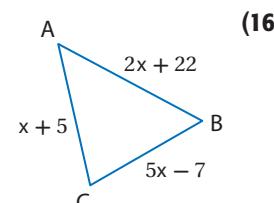
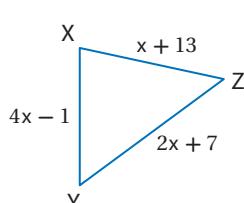
(14) المعطيات: $\angle BCD \cong \angle CDB$

المطلوب: $KJ + KL > LM$

المطلوب: $AB + AD > BC$



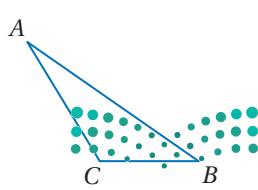
جبر: حدد القيم الممكنة لـ x في كلٌ من السؤالين الآتيين:



المثال 18 **قيادة:** يُريد توفيق أن يسلك المسار الأقصر من بيته إلى المجمع الرياضي، ويمكّنه أن يسلك الطريق 1 أو الطريق 2 ثم الطريق 3.

(a) أي المسارين أقصر من بيت توفيق إلى المجمع الرياضي؟ ووضح إجابتك.

(b) افترض أن توفيقاً يقود سيارته بسرعة قريبة جداً من السرعة القصوى المسموح بها ولا تتعادها. إذا كانت السرعة القصوى على الطريق 1 تساوي 60 km/h ، وعلى كلٍ من الطرقين 2، 3 تساوي 100 km/h ، فأي المسارين سيستغرق وقتاً أقل؟ ووضح إجابتك.



برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين.

$\triangle ABC$: المعطيات

المطلوب: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)

(إرشاد: ارسم قطعة مستقيمة مساعدة \overline{CD} ، على أن تكون C بين B, D ، ويكون $\overline{CD} \cong \overline{AC}$).

إذا كانت كل مجموعة تمثل أطوال أضلاع مثلث، فاكتب متباعدة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كلٌ من الأسئلة الآتية:

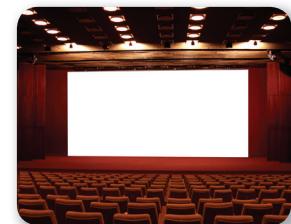
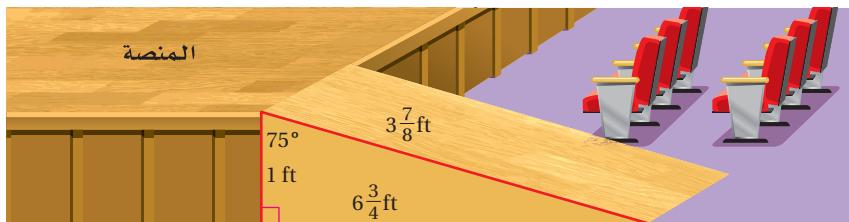
$$8, x, 12 \quad (21)$$

$$x, 4, 6 \quad (20)$$

$$x + 2, x + 4, x + 6 \quad (23)$$

$$x + 1, 5, 7 \quad (22)$$

- (24) **مسرح:** يصمم عبد الرحمن وخليل منحدرًا للصعود إلى منصة المسرح، فخطط عبد الرحمن المنحدر كما في الشكل أدناه، ولكن خليلاً كان قلقاً بشأن القياسات ويريد أن يتحقق منها قبل البدء في قص الخشب، فهل يوجد ما يبرر هذا القلق؟ وضح إجابتك.



الربط مع الحياة

تصمم المسارح وفق نظام هندسي دقيق يُراعى فيه إمكانية مشاهدة جميع الحضور للمنصة، وسماع الصوت بوضوح دون صدى.

تقدير: حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٌ مما يأتي، وذلك دون استعمال الآلة الحاسبة. وضح إجابتك.

$$\sqrt{99} \text{ cm}, \sqrt{48} \text{ cm}, \sqrt{65} \text{ cm} \quad (26)$$

$$\sqrt{8} \text{ ft}, \sqrt{2} \text{ ft}, \sqrt{35} \text{ ft} \quad (25)$$

(27) حدد ما إذا كانت النقاط $X(-3, 1), Y(6, 1), Z(2, 2)$ تمثل رؤوس مثلث. وضح إجابتك.

(28) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين أضلاع مثلثين وزواياهما.

(a) **هندسياً:** ارسم ثلاثة أزواج من المثلثات في كل مثلثين منها زوجان من الأضلاع المتطابقة فقط، وضع إشارات على كل ضلعين متطابقين، وسمّ كل زوج من المثلثات ABC, DEF ، حيث

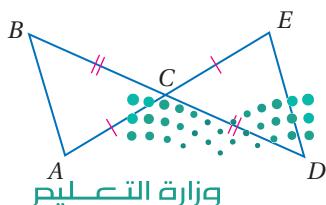
$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

(b) **جدولياً:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم أوجد بالقياس قيمة كلٌ من $m\angle A, m\angle D, m\angle E, m\angle F, m\angle B, m\angle C$ وسجلها في الجدول.

$m\angle D$	EF	$m\angle A$	BC	أزواج المثلثات
				1
				2
				3

(c) **لفظياً:** خمن العلاقة بين الزاويتين المقابلتين للضلعين غير المتطابقين في كل زوج من المثلثات التي فيها زوجان من الأضلاع المتطابقة.

مسائل مهارات التفكير العليا



(29) **تحدد:** ما مدى القيم الممكنة لمحيط الشكل $ABCDE$ ، إذا كان $AC = 7, DC = 9$ ؟ وضح إجابتك.

(30) **تبين:** ما مدى طول كلٌ من الضلعين المتطابقين في مثلث قاعدته 6 cm ؟ وضح إجابتك.

(31) مسألة مفتوحة: طول أحد أضلاع مثلث 5 سم. ارسم مثلثاً يكون الضلع الذي طوله 5 سم أقصر أضلاعه، ومثلثاً آخر يكون الضلع الذي طوله 5 سم أطول أضلاعه. مضمناً رسمك أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه.

(32) اكتب: اشرح الطريقة التي تستعملها لإيجاد أصغر قيمة وأكبر قيمة لطول ضلع مثلث إذا علمت طول أي من الضلعين الآخرين.

تدريب على اختبار

(34) أيُّ معادلة مما يأتي تمثل العبارة:
ناتج طرح 7 من $14w$ يساوي "z"؟

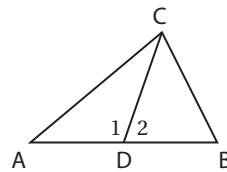
A $7 - 14w = z$

B $z = 14w + 7$

C $7 - z = 14w$

D $z = 14w - 7$

(33) إذا كانت \overline{DC} قطعةً متوسطةً في $\triangle ABC$ وكان $m\angle 1 > m\angle 2$ ، فأي عبارة مما يأتي غير صحيحة؟



AC > BC C

AD = BD A

$m\angle 1 > m\angle B$ D $m\angle ADC = m\angle BCD$ B

مراجعة تراكمية

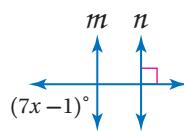
اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي : (الدرس 4-4)

y إذا كان $41 = 4y + 17$ ، فإن 6

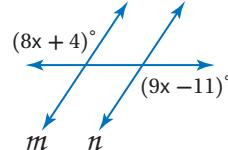
(36) إذا قطع مستقيمين آخرين، وكانت الزاويتان المترادفتان داخلياً متطابقتين، فإن المستقيمين متوازيان.

أوجد قيمة x ، على أن يكون $n \parallel m$ في كلٍّ مما يأتي، واذكر المسماة أو النظرية التي استعملتها : (الدرس 2-2)

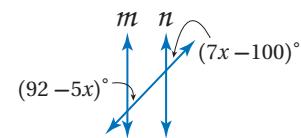
(39)



(38)



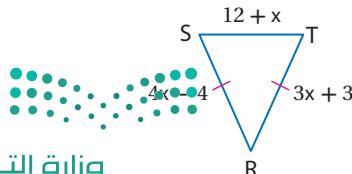
(37)



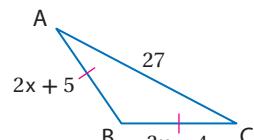
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x ، وأطوال الأضلاع المجهولة في كل مثلث مما يأتي :

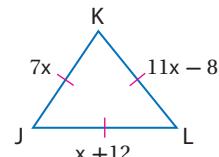
(42)



(41)



(40)

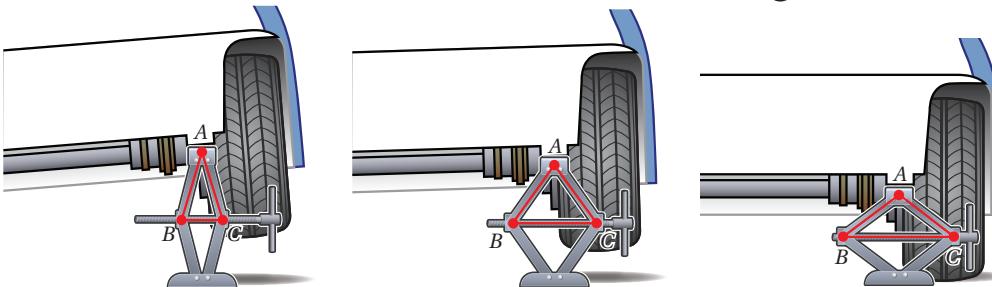


المتباينات في مثلثين Inequalities in Two Triangles

4-6

لعلكم

ستعمل الرافعه عند تغيير إطار السيارات، والرافعه المبيئه أدناه واحدة من الرافعات البسيطة التي ما زالت تُعمل حتى يومنا هذا. لاحظ أنه عندما تُنزل الرافعه فإن ساق $\triangle ABC$ يطألان متطابقين، في حين تزداد الزاوية $\angle A$ اتساعاً ويزداد طول الضلع \overline{BC} المقابل له.



متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS): الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوعٍ من المثلثات وتوضّح النظريتين الآتيتين:

فيما سبق:
درست المتباينات في المثلث الواحد.

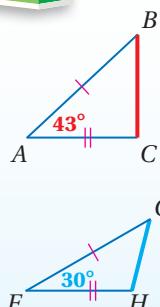
والآن:

- طبق متباينة SAS أو عكسها؛ لإجراء مقارنات بين عناصر مثلثين.
- ثبتت صحة العلاقات باستعمال متباينة SAS أو عكسها.

نظريتان المتباينات في مثلثين

أنظر إلى

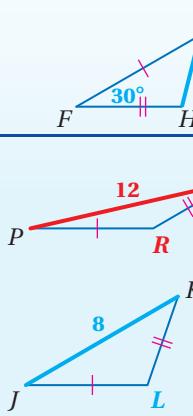
مطويتك



إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{FG}$, $\overline{AC} \cong \overline{FH}$, $m\angle A > m\angle F$.
فإن $BC > GH$.

4.12 متباينة SAS



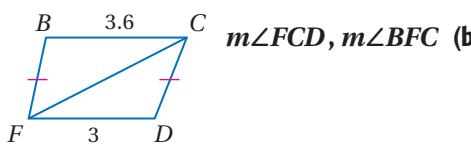
إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإن قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $\overline{PR} \cong \overline{JL}$, $\overline{QR} \cong \overline{KL}$, $PQ > JK$.
فإن $m\angle R > m\angle L$.

4.13 عكس متباينة SAS (SSS)

استعمال متباينة SAS وعكسها

قارن بين القياسين المحددين في كلٍ من السؤالين الآتيين:

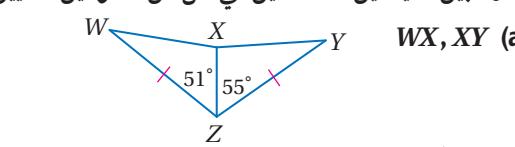


في المثلثين BCF , DFC ، $m\angle FCD > m\angle BFC$ (b)

وبحسب عكس متباينة SAS فإن

زيارة التعليم

$m\angle BFC > m\angle DCF$



في المثلثين WXZ , YXZ ، $WZ \cong YZ$, $XZ \cong XZ$, $m\angle YZX > m\angle WZX$

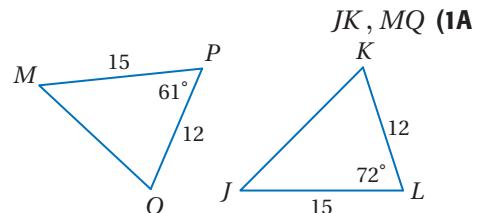
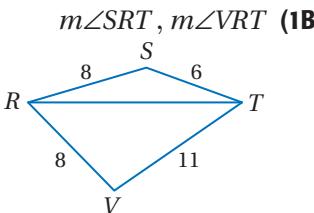
وبحسب متباينة SAS فإن $XY < WX$

مثال 1

ستبرهن النظرية 4.12 في الصفحة التالية، وستبرهن النظرية 4.13 في السؤال 18

تحقق من فهمك

قارن بين القياسات المعطاة في كلٍ من السؤالين الآتيين :



إرشادات للدراسة

متباينة SAS

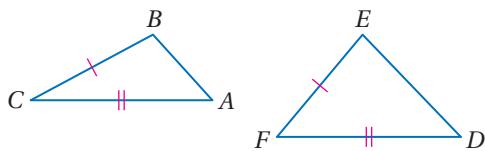
تعرف المتباينة

باسم متباينة الرافعه

وعكسها يعرف

بالمتباينة SSS.

برهان



المعطيات : في المثلثين ABC, DEF

$\overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, m\angle F > m\angle C$

المطلوب : $DE > AB$

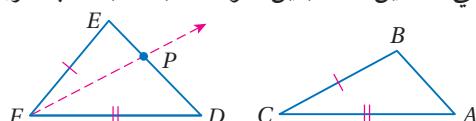
البرهان :

تعلم أنّ : $m\angle F > m\angle C$ ، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، وتعلم أيضًا أنّ : $m\angle F > m\angle C$

ارسم نصف المستقيم FP ، على أن يكون $m\angle DFP = m\angle C, \overline{PF} \cong \overline{BC}$ ، وهذا سيقودنا إلى حالتين هما :

الحالة 1 P تقع على \overline{DE} ، وعندها يكون $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بحسب SAS ، لذا يكون $PD = BA$ ؛ لأنّ

العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة ، وبحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة ،



وسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة يكون $DE = EP + PD$ ؛ لذا يكون $DE > PD$ بناءً على

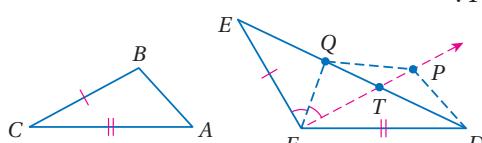
تعريف المتباينة ، وبالتعويض يكون $DE > AB$

الحالة 2 P لا تقع على \overline{DE}

وعندئذٍ سُمّن نقطة تقاطع $\overline{FQ}, \overline{ED}, \overline{FP}$ بالحرف T ، وارسم القطعة المستقيمة المساعدة \overline{FQ}

على أن تكون Q على \overline{DE} ، وتكون $\angle EFQ \cong \angle QFP$ ، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين

المساعدتين $\overline{PD}, \overline{PQ}$.



معطى

$\overline{FP} \cong \overline{BC}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$

$\overline{FP} \cong \overline{EF}$

$\overline{QF} \cong \overline{QF}$

$\angle EFQ \cong \angle QFP$

$\triangle EFQ \cong \triangle PFQ$

$\overline{EQ} \cong \overline{PQ}$

$EQ = PQ$

$m\angle DFP = m\angle C$

$\triangle FPD \cong \triangle CBA$

$\overline{PD} \cong \overline{BA}$

$PD = BA$

$QD + PQ > PD$

$QD + EQ > PD$

$ED = QD + EQ$

$ED > PD$

$ED > BA$

خاصية التعدي للتطابق

خاصية الانعكاس للتطابق

شرط تحديد النقطة Q

SAS

سلمة تطابق العناصر المتناظرة

تعريف التطابق

شرط تحديد النقطة T

SAS

تطابق العناصر المتناظرة

تعريف التطابق

متباينة المثلث

بالتعويض

سلمة جمع أطوال القطع المستقيمة

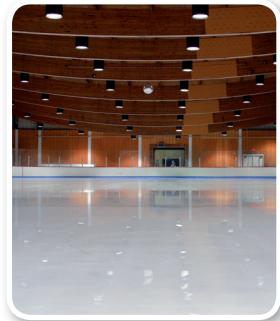
بالتعويض

بالتعويض

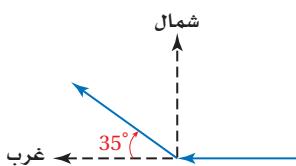


يمكنك استعمال متباعدة SAS لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال متباعدة SAS

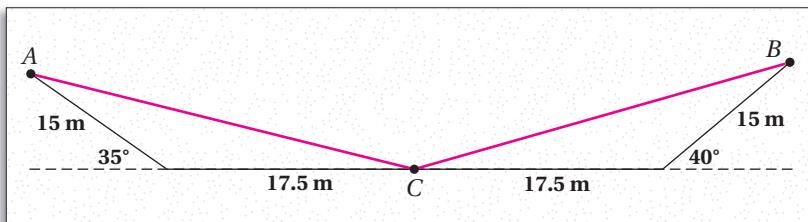


التزلج على الجليد: في إحدى صالات التزلج، انطلق اثنان من المترجلين على الجليد من المكان نفسه، قطعوا المترجل A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف 35° في اتجاه الشمال الغربي قاطعاً 15 m، بينما قطع المترجل B مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف 40° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعاً 15 m، أيهما كان الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضح إجابتك.



افهم: المعطيات: قطع المترجل A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف 35° في اتجاه الشمال الغربي قاطعاً 15 m، والمترجل B قطع مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف 40° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعاً 15 m.
المطلوب: أيهما كان أبعد عن مكان الانطلاق.

خطط: ارسم شكلاً لهذا الوضع.



المسار الذي أتبّعه كل مترجل وبعده عن مكان الانطلاق يشكّل مثلثاً؛ إذ قطع كُلّ مترجل 17.5 m، ثم انحرف وقطع 15 m آخر.

استعمل أزواج الزوايا المستقيمة لإيجاد قياس الزاويتين المحصورتين، ثم طبّق متباعدة SAS؛ لقارن بين بُعد المترجلين عن مكان الانطلاق.

حل: قياس الزاوية المحصورة لمسار المترجل A يساوي $35^\circ - 180^\circ = 145^\circ$ أو $145^\circ - 180^\circ = 140^\circ$ ، وقياس الزاوية المحصورة لمسار المترجل B يساوي $40^\circ - 180^\circ = 140^\circ$ أو $140^\circ - 180^\circ = 140^\circ$.

بما أن $140^\circ > 145^\circ$ ، إذن $AC > BC$ بحسب متباعدة SAS؛ لذا فالمترجل A أبعد عن مكان الانطلاق من المترجل B.

تحقق: المترجل B انحرف 5° أكثر مما فعل المترجل A في اتجاه مكان الانطلاق؛ لذا سيكون المترجل B أقرب إلى مكان الانطلاق من المترجل A. ✓

تحقق من فهمك

(2) **التزلج على الجليد:** انطلقت مجموعتان من المترجلين من المكان نفسه، فقطعت المجموعة A مسافة 4 mi في اتجاه الشرق، ثم انحرفت 70° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعةً مسافةً 3 mi، وقطعت المجموعة B مسافة 4 mi في اتجاه الغرب، ثم انحرفت 75° في اتجاه الشمال الغربي قاطعةً 3 mi، أي مجموعتان كانتا الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضح إجابتك.

الربط مع الحياة

ظهرت رياضة التزلج على الجليد في منتصف القرن التاسع عشر، ونظمت أول بطولة لها عام 1891، وهي رياضة مشهورة في البلاد الباردة، مثل كندا والدول الاسكندنافية.

ارشادات لحل المسألة

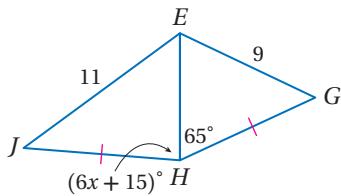
رسم شكل توضيحي
ارسم شكلاً لمساعدتك على فهم المسألة
اللفظية وتوضيحها بصورة صحيحة.

استعمال حقائق إضافية

- عند إيجاد مدى القيم الممكنة لـ x ، قد تحتاج إلى استعمال أحدي الحقائق الآتية:
- قياس أي زاوية في المثلث يكون أكبر من 0 وأقل من 180 دائماً.
 - طول أي قطعة مستقيمة يكون أكبر من 0 دائماً.

مثال 3

استعمال الجبر في العلاقات بين مثلثين



جبر: أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x .

الخطوة 1: من الشكل نعلم أن: $JH \cong GH, EH \cong EH, JE > EG$

عكس متباينة SAS إذن، $m\angle JHE > m\angle EHG$

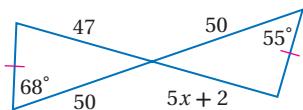
عوض $6x + 15 > 65$

حل بالنسبة لـ x $x > 8\frac{1}{3}$

الخطوة 2: استعمل حقيقة أن قياس أي زاوية في المثلث أقل من 180 لكتابة متباينة أخرى.

$$\begin{aligned} m\angle JHE &< 180^\circ \\ \text{عوض} & \quad 6x + 15 < 180 \\ \text{حل بالنسبة لـ } x & \quad x < 27.5 \end{aligned}$$

الخطوة 3: اكتب المتباينتين $8\frac{1}{3} < x < 27.5$, $x < 27.5$ في صورة متباينة مركبة بالشكل

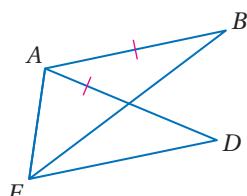


تحقق من فهتمك

(3) أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x .

إثبات العلاقات في مثلثين: يمكنك استعمال متباينة SAS وعكسها لإثبات صحة العلاقات في مثلثين.

مثال 4 إثبات علاقات المثلث باستعمال متباينة SAS



اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $EB > ED$

البرهان:

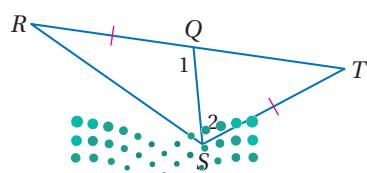
المبررات	العبارات
(1) معطى	$\overline{AB} \cong \overline{AD} \quad (1)$
(2) خاصية الانعكاس	$\overline{AE} \cong \overline{AE} \quad (2)$
(3) مسلمة جمع قياسات الزوايا	$m\angle EAB = m\angle EAD + m\angle DAB \quad (3)$
(4) تعريف المتباينة	$m\angle EAB > m\angle EAD \quad (4)$
(5) متباينة SAS	$EB > ED \quad (5)$

تحقق من فهتمك

(4) اكتب برهاناً ذا عمودين.

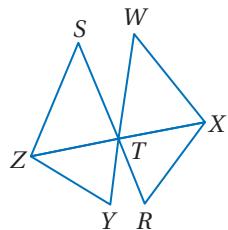
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$



مثال 5

إثبات علاقات باستعمال عكس متباعدة SAS



اكتب برهاناً تسلسلياً.

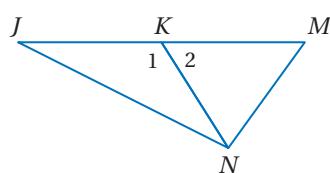
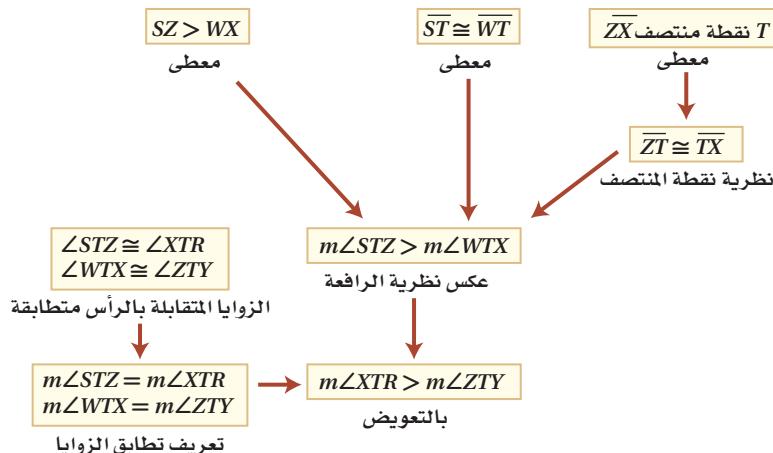
المعطيات: T نقطة متصرف .

$$\overline{ST} \cong \overline{WT}$$

$$SZ > WX$$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$

البرهان التسلسلي:



تحقق من فهمك

(5) اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات: NK قطعة متوسطة في $\triangle JMN$.

$$JN > NM$$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

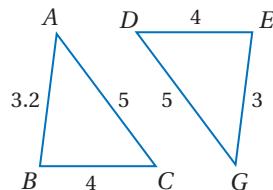
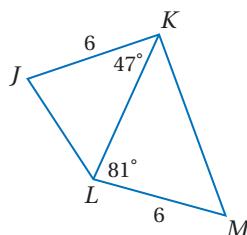
تأكد

المثال 1

قارن بين القياسين المحددين في كلٍ من السؤالين الآتيين:

$$JL, KM \quad (2)$$

$$m\angle ACB, m\angle GDE \quad (1)$$



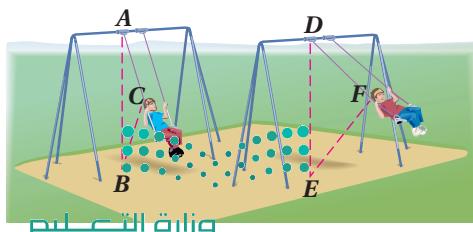
(3) أرجح: يتغير موضع الأرجوحة تبعًا لقرأة دفعها.

(a) أي الأزواج متطابق من هذه القطع المستقيمة؟

(b) أيهما أكبر: قياس $\angle A$ أم قياس $\angle D$ ؟

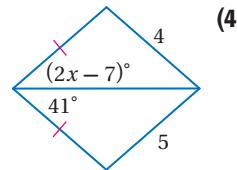
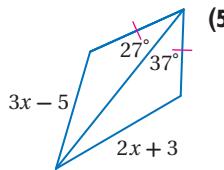
وضح إجابتك.

المثال 2



المثال 3

اكتب متباعدة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كلٍ مما يأتي:

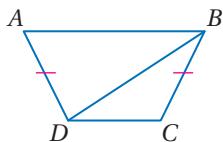


المثالان 4, 5

برهان اكتب برهاناً ذا عمودين في كلٍ من السؤالين 7, 6:

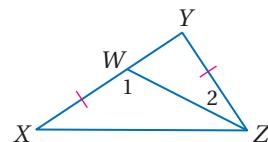
(7) المعطيات: $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
 $DC < AB$

المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$



(6) المعطيات: $\overline{YZ} \cong \overline{XW}$
 $ZX > YW$

المطلوب: $\angle YZX > \angle XWY$



تدريب وحل المسائل

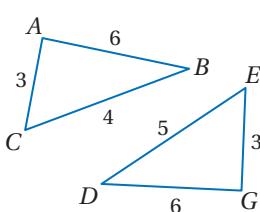
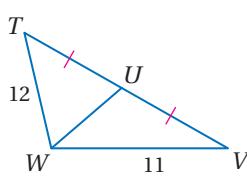
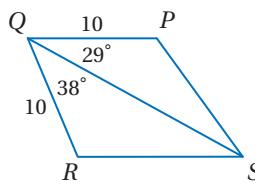
المثال 1

قارن بين القياسين المحددين في كلٍ من الأسئلة الآتية:

PS, SR (10)

$\angle TUW, \angle VUW$ (9)

$\angle BAC, \angle DGE$ (8)

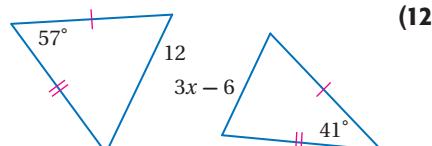
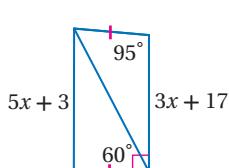


المثال 2 (11) رحلة بريّة: أقام باسم وعثمان مخيّماً في الصحراء، وقرر أن يقوموا برحلة بريّة، فانطلق باسم من المخيّم وسار 5 km في اتجاه الشرق، ثم انعطف 15° جهة الجنوب الشرقي وسار 2 km أخرى، وانطلق عثمان من المخيّم وسار 5 km في اتجاه الغرب، ثم انعطف 35° جهة الشمال الغربي وسار 2 km أخرى.

(a) أيهما أقرب إلى المخيّم؟ وضح إجابتك، وارسم شكلاً توضيحيًّا.

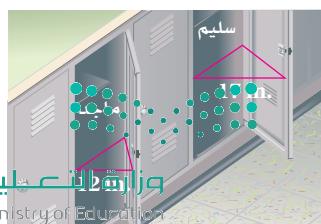
(b) افترض أنّ عثمان انعطف 10° في اتجاه الجنوب الغربي بدلاً من 35° في اتجاه الشمال الغربي، فأيهما يكون أبعد عن المخيّم؟ وضح إجابتك، وارسم شكلاً توضيحيًّا.

اكتب متباعدة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كلٍ من السؤالين الآتيين:



المثال 3

(14) خزان: خزانات سليم وماجد مفتوحتان، كما في الشكل المجاور. أيُّ بابٍ الخزانتين يشكّل زاويةً قياسها أكبر؟ وضح إجابتك.



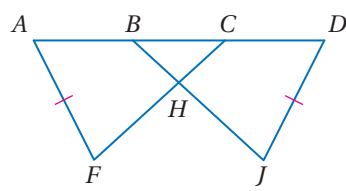
المثلالن 5 ، 4

برهان: اكتب برهاناً ذا عمودين في كلٍ من السؤالين الآتيين:

16) المعطيات: $\overline{AF} \cong \overline{DJ}$, $\overline{FC} \cong \overline{JB}$

$$AB > DC$$

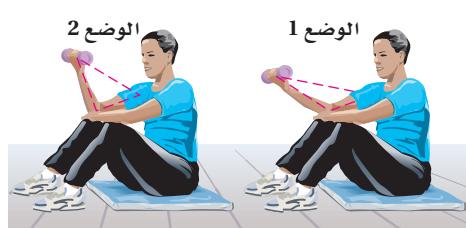
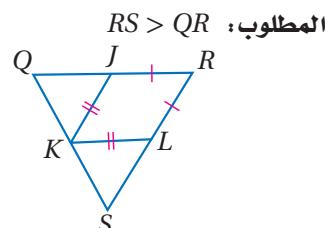
المطلوب: $m\angle AFC > m\angle DJB$



15) المعطيات: $\overline{LK} \cong \overline{JK}$, $\overline{RL} \cong \overline{RJ}$

نقطة متصف K .

$$m\angle SKL > m\angle QKJ$$



17) **تمرين:** يقوم عبد الله بتمرين العضلة ذات الرأسين .

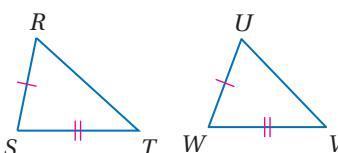
(a) أيهما أكبر: المسافة من قبضة اليد إلى الكتف في الوضع 1 ، أم المسافة نفسها في الوضع 2؟ وضح إجابتك بالقياس.

(b) أيهما أكبر: قياس الزاوية المتكونة عند المرفق في الوضع 1 ، أم المتكونة في الوضع 2؟ وضح إجابتك مستعملاً القياسات التي أوجدتها في الفرع a وعكس متباعدة SAS .



الربط مع الحياة

تمارين اللياقة تزيد القوة والقدرة على التحمل، وينصح معظم خبراء اللياقة الأشخاص المبتدئين بالتدريب ثلاثة جلسات في الأسبوع، بحيث تتراوح مدة الجلسة الواحدة من 20 دقيقة إلى ساعة كاملة (متضمنة فترة الإحماء والاسترخاء) على أن يفصل ما بين الجلسة والأخرى يوم واحد على الأقل.



المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UW}$

$$\overline{ST} \cong \overline{WV}$$

$$RT > UV$$

المطلوب: $m\angle S > m\angle W$

18) **برهان:** استعمل البرهان غير المباشر؛ لإثبات النظرية 4.13 (عكس متباعدة SAS).

(a) هندسياً: ارسم ثلاثة مضلعات: ثلاثي، رباعي، خماسي. وسمّي المضلع الثلاثي ABC ، والرباعي $PQRST$ ، والخمساني $FGHJ$.

(b) جدولياً: انسخ الجدول أدناه في دفترك وأكمله مستعملاً المنقلة لقياس كل زاوية.

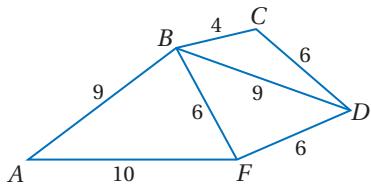
مجموع قياسات الزوايا	قياسات الزوايا				عدد الأضلاع
		$m\angle C$		$m\angle A$	
				$m\angle B$	3
		$m\angle H$		$m\angle F$	4
		$m\angle J$		$m\angle G$	
		$m\angle S$		$m\angle P$	5
		$m\angle T$		$m\angle Q$	
				$m\angle R$	

(c) لفظياً: خمن العلاقة بين عدد أضلاع المضلع ومجموع قياسات زواياه.

(d) منطقياً: ما نوع التبرير الذي استعملته في الفرع c ؟ وضح إجابتك.

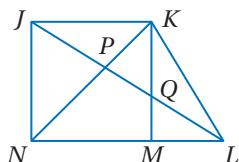


(e) جبرياً: اكتب عباره جبريه؛ لإيجاد مجموع قياسات زوايا مضلع عدد أضلاعه n .

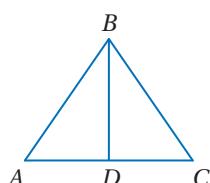


استعمل الشكل المجاور لكتابه متباعدة تربط بين قياس كل زوج من الزوايا في السؤالين الآتيين:
 $m\angle BDC, m\angle FDB$ (20)
 $m\angle ABF, m\angle FDB$ (21)

مسائل مهارات التفكير العليا



(22) **تحدد:** في الشكل المجاور، إذا كان: $m\angle LJM > m\angle KJL$, $\overline{KJ} \cong \overline{JN}$, فأي الزاويتين هي الأكبر: $\angle LNK$ أم $\angle LKN$? ووضح إجابتك.



(23) **تبرير:** إذا كانت \overline{BD} قطعة متوسطة في $\triangle ABC$ كما في الشكل المجاور، وكان $AB < BC$, فهل تكون $\angle BDC$ حادة دائمًا، أو أحياناً، أو لا تكون حادة أبداً؟ ووضح إجابتك.

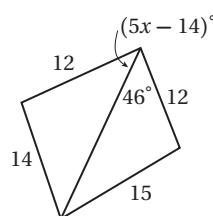
(24) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين متباعدة SAS والمسلمة SAS لتطابق المثلثات.

تدريب على اختبار

(26) إذا كان طول ضلعٍ مربع $x + 3$, فإن طول قطره يساوي:

$2x + 6$ **C**
 $x^2 + 1$ **A**
 $x\sqrt{2} + 6$ **D**

$x^2 + 1$ **A**
 $x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ **B**



(25) أي متباعدة مما يأتي تصف مدى القيم الممكنة لـ x ؟

- $x > 6$ **A**
 $0 < x < 14$ **B**
 $2.8 < x < 12$ **C**
 $12 < x < 15$ **D**

مراجعة تراكمية

اكتب متباعدة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث عُلم طولاً ضلعين من أضلاعه في كل من الأسئلة الآتية: (الدرس 4-5)

3 m, 9 m (29)

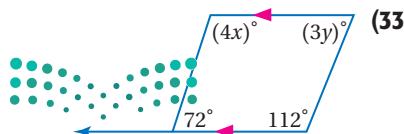
5 ft, 10 ft (28)

3.2 cm, 4.4 cm (27)

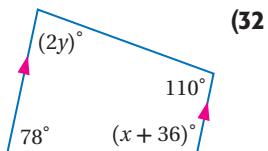
(30) **رحلات:** سأّل علي صديقه ماجداً عن تكلفة الرحلة التي قام بها مع صديقه، فلم يتذكر ماجد تكلفة الشخص الواحد، ولكنه تذكر أن التكلفة الكلية كانت أكثر من 500 ريال. استعمل البرهان غير المباشر لتبيّن أن تكلفة الشخص الواحد كانت أكثر من 250 ريالاً. (الدرس 4-4)

استعد للدرس اللاحق

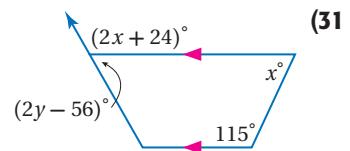
أوجد قيمة كل من y , x في الأسئلة الآتية، موضحاً إجابتك :



(33)



(32)



(31)

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

قطع مستقيمة خاصة في المثلثات: (الدرس 4-1, 4-2)

- القطع المستقيمة الخاصة بالمثلثات هي الأعمدة المنصفة ومنصفات الزوايا والقطع المتوسطة والارتفاعات.

- نقاط تقاطع المستقيمات الخاصة في مثلث تسمى نقاط التلاقي.

- نقاط التلاقي في مثلث، هي مركز الدائرة الخارجية ومركز الدائرة الداخلية ومركز المثلث ومُلتقى الارتفاعات.

البرهان غير المباشر: (الدرس 4-4)

- كتابة برهان غير مباشر:

(1) افترض أن النتيجة غير صحيحة.

(2) بين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض.

(3) بما أن النتيجة الخطأ تؤدي إلى عبارة غير صحيحة، فإن النتيجة الأصلية ستكون صحيحة.

متباينات المثلث: (الدروس 4-3, 4-4, 4-5, 4-6)

- متباينة الزاوية الخارجية: قياس الزاوية الخارجية لمثلث يكون أكبر من أي من الزاويتين الداخليةتين البعيدتين عنها.

- الزاوية الكبيرة في مثلث تقابل الضلع الأطول، والزاوية الصغرى تقابل الضلع الأقصر.

- مجموع طولي أي ضلعين في مثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث.

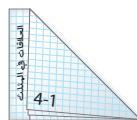
- المتباينة SAS: (نظرية الرافعه) إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإن الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

- المتباينة SSS: (عكس نظرية الرافعه) إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإن قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

منظم أفكار

الـ طويات

تأكد من أن المفاهيم الأساسية قد
دُوّنت في مطويتك.



دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

4-1

المنصفات في المثلث (ص 215-223)

مثال 1

إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JKL$ ، $\angle JKL = 25^\circ$ ، $\angle KJL = 25^\circ$ ، $\angle JLK = 28^\circ$.
فأوجد كلاً من التياسين الآتيين:

a $m\angle QJK$

نطريه مجموع قياسات زوايا المثلث

$$m\angle KLP + m\angle MKN + m\angle NJP = 180^\circ$$

عوض

$$2(25^\circ) + 2(28^\circ) + m\angle NJP = 180^\circ$$

بسط

$$106^\circ + m\angle NJP = 180^\circ$$

اطرح 106 من الطرفين

$$m\angle NJP = 74^\circ$$

وبيما أن \overrightarrow{QJ} ينصف $\angle NJP$ ، إذن $2m\angle QJK = m\angle NJP$ ، أي أن $m\angle QJK = \frac{1}{2} \times 74^\circ = 37^\circ$.
إذن: $m\angle QJK = \frac{1}{2} m\angle NJP$

b QP

نطريه فيثاغورس

$$a^2 + b^2 = c^2$$

عوض

$$(QP)^2 + 20^2 = 25^2$$

$20^2 = 400$ ، $25^2 = 625$

اطرح 400 من الطرفين

$$(QP)^2 + 400 = 625$$

بسط

$$(QP)^2 = 225$$

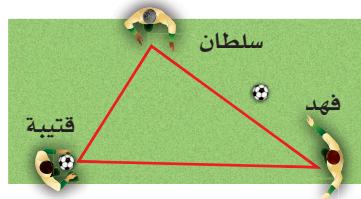
$$QP = 15$$

(10) أوجد EG إذا كانت G مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$.

أوجد كل قياسٍ مما يأتي :

(11) XZ ، RS

(13) **كرة قدم:** يقوم قتيبة وفهد وسلطان بعملية إحماء قبل بدء مباراة كرة قدم، حيث يتطلب أحد تدريبات الإحماء أن يشكل اللاعبون الثلاثة مثلثاً، ويقف اللاعب الرابع في الوسط. أين يجب أن يقف اللاعب الرابع، بحيث يكون على مسافات متساوية من اللاعبين الثلاثة؟



4-2

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث (ص 225-232)

مثال 2

إذا كانت النقطة T مركز المثلث EDF ، $FT = 12$ ، فأوجد $TQ = ?$

$FT = 12$

خاصية التوزيع

$$FT = \frac{2}{3} FQ$$

$$FT = \frac{2}{3}(FT + TQ)$$

$$12 = \frac{2}{3}(12 + TQ)$$

$$12 = 8 + \frac{2}{3} TQ$$

$$4 = \frac{2}{3} TQ$$

$$6 = TQ$$

اطرح 8 من الطرفين

اضرب الطرفين في $\frac{3}{2}$

(14) رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(0, 0)$ ، $E(0, 7)$ ، $F(6, 3)$. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle DEF$.

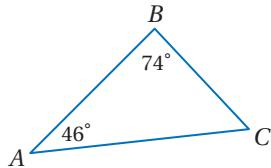
(15) **احتفلات:** تُريد حفصة أن تعلق 4 مثلثات متطابقة في سقف غرفة الصف، بحيث تكون موازية لأرضية الغرفة. فرسمت نموذجاً لأحد المثلثات على مستوى إحداثي، فكانت إحداثيات رؤوسه هي $(0, 4)$ ، $(3, 8)$ ، $(6, 0)$.
إذا كان كل مثلث سيعلق في السقف بخيط، فما إحداثيات النقطة التي سيربط الخيط عندها بالمثلث؟

4-3

المتباينات في المثلث (ص 233-239)

مثال 3

اكتب زوايا $\triangle ABC$ ، مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر.

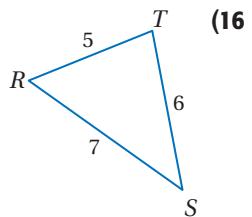
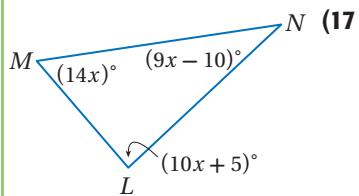


(a) أولاً: أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا. $m\angle C = 180^\circ - (46^\circ + 74^\circ) = 60^\circ$

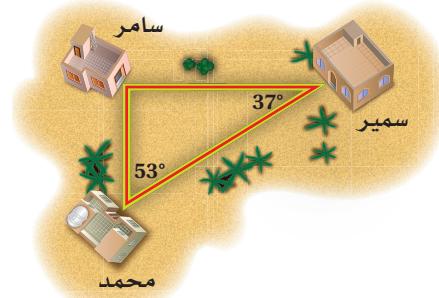
لذا فالزوايا مرتبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle A, \angle C, \angle B$.

(b) والأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$.

اكتب زوايا كل مثلث مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين:



(18) **جيران:** يسكن سمير ومحمد وسامر عند تقاطعات ثلاثة شوارع تشكل المثلث المبين أدناه، إذا أرادوا الالقاء عند أحدهم، فأي الطريقين أقصر: اصطحاب سمير لمحمد وذهابهما معاً إلى بيت سامر. أم اصطحاب محمد لسامر وذهابهما معاً إلى بيت سمير؟



4-4

البرهان غير المباشر (ص 241-247)

مثال 4

اكتب الافتراض الضروري للبدء في برهان غير مباشرٍ لكل عبارةٍ مما يأتي:

$$\overline{XY} \not\cong \overline{JK} \quad (a)$$

الافتراض هو:

(b) إذا كان $18 < 3x$ ، فإن $6 < x$

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي:

$x < 6$ ، ونفيها هو $x \geq 6$ ؛ لذا فالافتراض هو

(c) $\angle 2$ زاوية حادة.

الافتراض هو: $\angle 2$ ليست زاوية حادة.



اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهاناً غير مباشرٍ لكل عبارةٍ مما يأتي:

$$m\angle A \geq m\angle B \quad (19)$$

$$\triangle FGH \cong \triangle MNO \quad (20)$$

$$\triangle KLM \text{ قائم الزاوية.} \quad (21)$$

$$\text{إذا كان } 12 < 3y \text{ ، فإن } 4 < y. \quad (22)$$

(23) اكتب برهاناً غير مباشر لتبيّن أنّه إذا كانت الزاويتان متتاليتين، فإنه لا يمكن أن تكون أيٌ منها قائمةً.

(24) **مطالعة:** اشتري محمود كتابين بأكثر من 180 ريالاً، استعمل البرهان غير المباشر لتبيّن أنّ ثمن أحد هما على الأقل أكثر من 90 ريالاً.

دليل الدراسة والمراجعة

متباينة المثلث (ص 249-254)

4-5

مثال 5

حدّد ما إذا كانت القياسات $(9, 10, 7)$ يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث أم لا، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فوضح السبب.

اخبر كل متباينة.

$10 + 9 > 7$

$7 + 9 > 10$

$7 + 10 > 9$

$19 > 7 \checkmark$

$16 > 10 \checkmark$

$17 > 9 \checkmark$

بما أن مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث، إذن القطع المستقيمة التي أطوالها $9, 10, 7$ تشكل مثلثاً.

حدّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍ مما يأتي أم لا، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فوضح السبب.

3, 4, 8 (26)

5, 6, 9 (25)

اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث علم طولاً ضلعين من أضلاعه في كلٍ من السؤالين الآتيين:

10.5 cm, 4 cm (28)

5 ft, 7 ft (27)

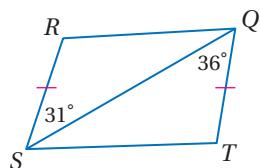
(29) دراجات: يركب خالد دراجته لزيارة صديقه وليد، وبما أن الطريق المباشر مغلق، فقد سلك طريقاً فرعياً طوله 2 km، ثم انعطف وسلك طريقاً آخر طوله 3 km حتى وصل منزل وليد. إذا كانت الطرق الثلاثة تشكل مثلثاً رأسان من رؤوسه هما منزل وليد وفالد، فاكتتب متباينة تمثل مدى المسافة الممكنة بين منزليهما.

مثال 6

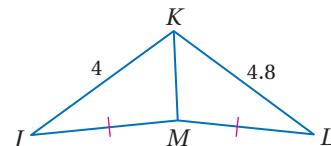
قارن بين كل قياسين فيما يأتي :

 RQ, ST (a)

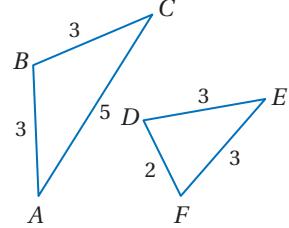
بما أن: $\overline{RS} \cong \overline{TQ}$, $\overline{QS} \cong \overline{SQ}$, $m\angle SQT > m\angle RSQ$:
في المثلثين QRS , STQ إذن, $ST < RQ$ بحسب نظرية المفصلة.

 $m\angle KML, m\angle KMJ$ (b)

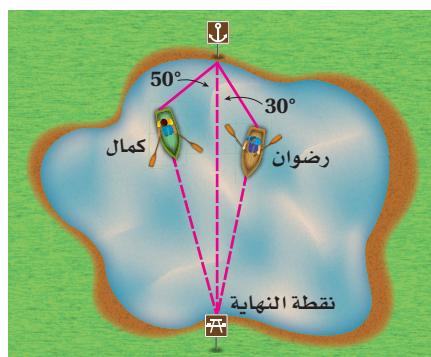
بما أن: $\overline{JM} \cong \overline{LM}$, $\overline{KM} \cong \overline{KM}$, $LK > JK$:
إذن $\angle KML > \angle KMJ$. بحسب عكس نظرية المفصلة.



(30) مستعملاً المثلثين المجاورين،
قارن بين القياسين
 $m\angle ABC, m\angle DEF$



(31) تجديف: يجده كلٌ من رضوان وكمال في بركة متوجهين إلى نقطة محددة، ولأنه ليس لهما خبرٍ في التجديف فقد انحرفا عن المسار مدة 4 دقائق، قطعوا كل منهما فيها مسافة 50 m، ثم استعادا مسارهما الصحيح، كما في الشكل. أيهما أقرب إلى نقطة النهاية عند هذه اللحظة؟

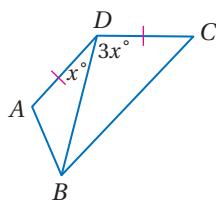


اختبار الفصل

- (13) اختيار من متعدد: إذا كان طولاً ضلعين في مثلث هما 11، 5، فأيٌّ متباعدةٌ مما يأتي تمثل مدى طول الضلع الثالث؟

$6 < x < 16$ C $6 < x < 10$ A
 $x > 11$ D $5 < x < 11$ B

- (14) قارن بين AB , BC في الشكل أدناه.

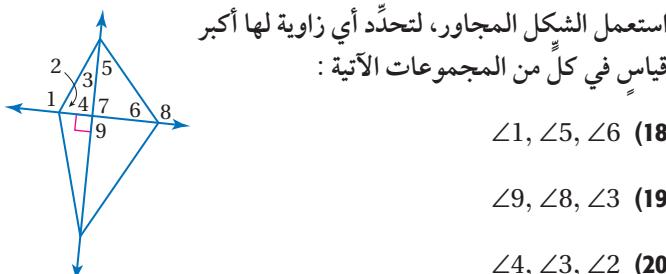


اكتُب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشرٍ لكل عبارة مما يأتي:

- (15) إذا كان 8 عاملاً للعدد n ، فإنّ 4 عامل للعدد n .

$$m\angle M > m\angle N \quad (16)$$

- (17) إذا كان $28 \leq 3a + 7$ ، فإنّ $a \leq 7$.



أوجد متباعدةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في المثلث الذي علم طولاً ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

10 ft, 16 ft (21)

23 m, 39 m (22)

- (1) حدائق: يزرع ماجد ورداً في حوض دائري داخل منطقة مثلثة الشكل محدودة بثلاثة طرق لالمشاة، أيٌّ نقطة من نقاط التلاقي في المثلث سيستعملها مركزاً لأكبر دائرةٍ يمكن رسمها داخل المثلث؟

النقطة K مركز $\triangle CDF$ ، $DK = 16$. أوجد كلَّ طولٍ مما يأتي:

KH (2)

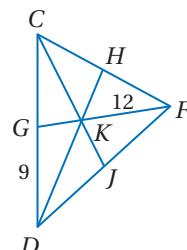
CD (3)

FG (4)

- (5) برهان: اكتب برهانًا غير مباشرٍ.

$$5x + 7 \geq 52$$

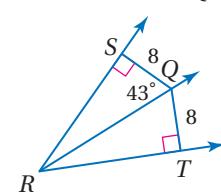
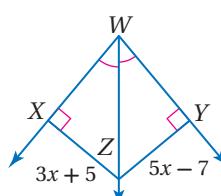
المطلوب:



أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

XZ (7)

$m\angle TQR$ (6)



- (8) اختيار من متعدد: إذا كان طولاً ضلعين في مثلث هما 3.1 cm و 4.6 cm ، فما أصغر عددٍ صحيحٍ يمكن أن يكون طولاً للضلع الثالث؟

1.6 cm A

2 cm B

7.5 cm C

8 cm D

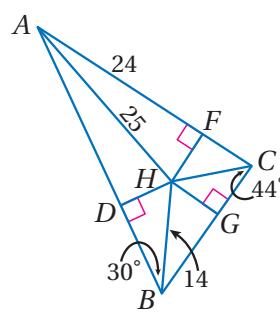
إذا كانت H مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، فأوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

DH (9)

BD (10)

$m\angle HAC$ (11)

$m\angle DHG$ (12)



الإعداد للاختبارات

استبعاد البديل غير المعقولة

يمكنك استبعاد البديل غير المعقولة؛ لتحديد الإجابة الصحيحة عند حل أسئلة الاختيار من متعدي.

طرائق استبعاد البديل غير المعقولة

الخطوة 1

اقرأ نص السؤال بعناية؛ لتحديد المطلوب إيجاده بالضبط.

- ما المطلوب حلّه؟
- هل الجواب عدد صحيح أم كسر اعديادي أم كسر عشري؟
- هل تحتاج إلى استعمال رسم أو جدول؟
- ما وحدات القياس المطلوبة للإجابة (إن وجدت)؟

الخطوة 2

- تفحّص كل بديل بعناية وقدر معقوليته.
- استبعد أي بديل يبدو أنه غير صحيح.
 - استبعد أي بديل ليس ضمن الصيغة المناسبة للإجابة الصحيحة.
 - استبعد أي بديل لا يتضمن وحدات القياس الصحيحة.

الخطوة 3

حل السؤال، واختر الإجابة الصحيحة من بين البديل المتبقية، ثم تحقق من إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعطيات في حلّها.

ما قياس $\angle KLM$ ؟
32° A
44° B
78° C
94° D



اقرأ السؤال وادرس الشكل بعناية. المثلث KLM قائم الزاوية. وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي 180° ، فإن $m\angle KLM + m\angle LMK + m\angle MKL = 180^\circ$. وبما أن المجموع على 180° ، وبما أن البديل D هو قياس لزاوية منفرجة، فإنه يُستبعد لعدم معقوليته؛ وعليه فالجواب الصحيح يكون A أو B أو C .

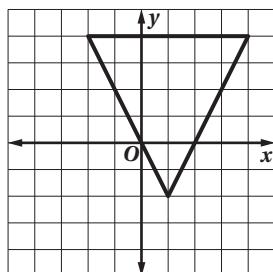
حل المسألة. بحسب عكس نظرية منصف الزاوية التي تنص على أنه: ”إذا وقعت نقطة داخل زاوية، وكانت على بعدين متساوين من ضلعها، فإن هذه النقطة تقع على منصف الزاوية“، وبما أن النقطة M على JL على بعدين متساوين من ضلعي الزاوية LJ ، LK ، فإنها تقع على منصف $\angle JLK$ ؛ لذا $\angle JLM$ يجب أن تطابق $\angle KLM$ ؛ والآن اكتب معادلة لإيجاد قيمة x وحلها.

$$\begin{aligned} 6x + 8 &= 9x - 4 \\ -3x &= -12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

إذن $32^\circ = 32^\circ$ ، والبديل A يمثل الإجابة الصحيحة.

تمارين ومسائل

(3) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟



- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| $(1, \frac{5}{2})$ C | $(-\frac{3}{4}, -1)$ A |
| $(1, \frac{9}{4})$ D | $(-\frac{4}{3}, 1)$ B |

(4) إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، وكان $m\angle A = 94^\circ$ ، فأيُّ مما يأتي يجب أن تكون صحيحة؟

- | |
|---------------------------------|
| $m\angle B = 94^\circ$ A |
| $m\angle B = 47^\circ$ B |
| $AB = BC$ C |
| $AB = AC$ D |

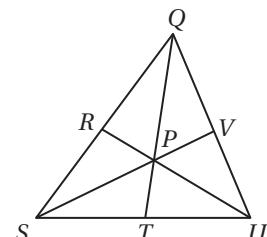
(5) أيُّ مما يأتي يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟



- | |
|----------------------|
| 1.9, 3.2, 4 A |
| 1.6, 3, 3.4 B |

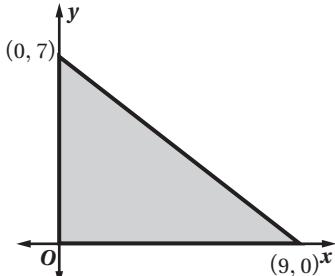
اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

(1) النقطة P مركز المثلث QUS ، إذا كان $QP = 14 \text{ cm}$ ، فما طول \overline{QT} ؟



- | | |
|----------------|----------------|
| 18 cm C | 7 cm A |
| 21 cm D | 12 cm B |

(2) كم وحدة مربعة مساحة المثلث في الشكل أدناه؟



- | | |
|---------------|---------------|
| 31.5 C | 8 A |
| 63 D | 27.4 B |

اختبار تراكمي

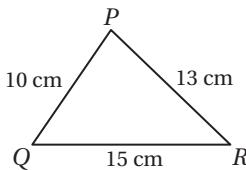
الفصل

4

للفصول 1-4

أسئلة الاختيار من متعدد

(4) ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا $\triangle PQR$ ؟



$m\angle R < m\angle Q < m\angle P$ A

$m\angle R < m\angle P < m\angle Q$ B

$m\angle Q < m\angle P < m\angle R$ C

$m\angle P < m\angle Q < m\angle R$ D

(5) ما الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر للعبارة
”الزاوية S ليست زاوية منفرجة“؟

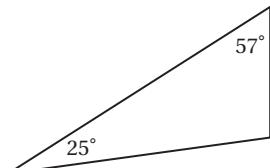
زاوية قائمة A

زاوية منفرجة B

زاوية حادة C

ليست زاوية حادة D

(6) صنف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه.



حادٌ الزوايا A

متطابق الزوايا B

منفرج الزاوية C

قائم الزاوية D

(7) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-2, -5)$, $(3, -5)$ ؟

$-\frac{1}{3}$ C

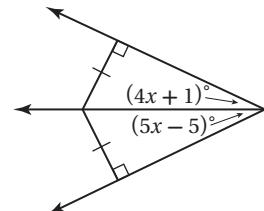
-3 D

3 A

$\frac{1}{3}$ B

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم حدد رمز الإجابة الصحيحة:

(1) أوجد قيمة x .



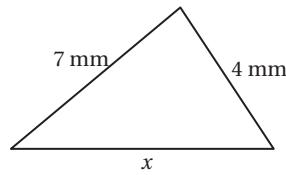
3 A

4 B

5 C

6 D

(2) أيٌ مما يأتي لا يمكن أن يكون قيمة x ؟



8 mm A

9 mm B

10 mm C

11 mm D

(3) أيٌ مما يأتي أفضل وصف لأقصر مسافةٍ من أحد رؤوس مثلثٍ إلى
الضلع المقابل له؟

ارتفاع A

عمود منصف B

قطعة متوسطة C

قطعة مستقيمة D

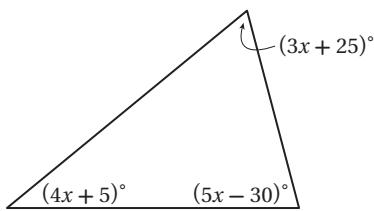


أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

- (12) خرج كل من حمزة وهاني مع فرقة الكشافة وخيموا في الصحراء، فترك حمزة المخيم وسار 2 km في اتجاه الشرق. ثم انعطف 20° في اتجاه الجنوب الشرقي. وسار 4 km أخرى. وأما هاني فسار 2 km في اتجاه الغرب، ثم انعطف 30° في اتجاه الشمال الغربي ، وسار 4 km أخرى. أيهما أبعد عن المخيم؟

(13) أوجد قيمة x في المثلث أدناه.



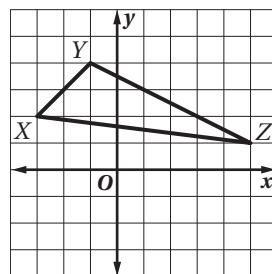
أسئلة ذات إجابات مطولة

- (14) إذا كانت رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-3, 1)$, $B(0, 2)$, $C(3, 4)$ فأجب عن الأسئلة التالية مبيّناً خطوات الحل:

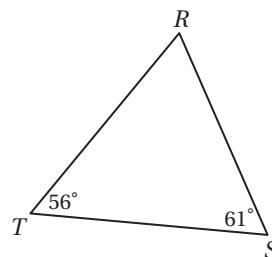
- (a) ارسم هذا المثلث في المستوي الإحداثي.
- (b) أوجد أطوال أضلاعه (قرب إلى أقرب جزءٍ من عشرة).
- (c) صنّف المثلث من حيث أضلاعه وزواياه.
- (d) قارن بين $m\angle A$, $m\angle C$.

- (8) إذا كان طولاً ضلعين في مثلثٍ هما 9 cm, 15 cm ، فما أصغر عدد صحيح من المستويات يمكن أن يكون طولاً للضلع الثالث؟

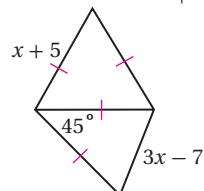
(9) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟



- (10) اكتب أضلاع المثلث أدناه مرتبةً تبعاً لأطوالها من الأقصر إلى الأطول:



- (11) اكتب متباينةً تصف قيم x الممكنة.



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن ...

فعد إلى الدرس ...

14	15	12	14	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
3-1, 4-3	3-2	4-6	4-6	4-3	4-2	4-5	2-3	3-1	4-4	4-3	4-2	4-5	4-1	

مراجعة بعض المصطلحات والرموز

الرمز في المرحلة الثانوية	الرمز في المرحلة المتوسطة	المصطلح باللغة العربية
x	س	الإحداثي السيني
y	ص	الإحداثي الصادي
h	ل	ارتفاع
$\sqrt{}$	$\sqrt{}$	الجذر التربيعي
$m \angle A B C$	ق د أ ب ج	قياس زاوية
\angle	د	زاوية
(a, b)	(أ، ب)	زوج مرتب
b	ق	قاعدة
d	٢ نق	قطر دائرة
A, B قطعة مستقيمة طرفاها	أب قطعة مستقيمة طرفاها أ، ب	قطعة مستقيمة
C	مح	محيط الدائرة
C	م	مركز الدائرة
A	م	مساحة
A, B مستقيم يمر بالنقطتين	أب مستقيم يمر بالنقطتين أ و ب	مستقيم
d	ف	المسافة بين نقطتين
r	نق	نصف قطر الدائرة
A, B نصف مستقيم يمر بالنقطة B وطرفه	أب نصف مستقيم	نصف مستقيم
	م	نقطة الأصل

المهندسة الإحداثية

على خط الأعداد:

$$d = |a - b|$$

في المستوى الإحداثي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

في الفراغ:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$$

المسافة بين نقطتين

الميل

على خط الأعداد:

$$M = \frac{a + b}{2}$$

في المستوى الإحداثي:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

نقطة المنتصف

في الفراغ:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

المحيط

$$C = \pi d \quad \text{أو} \quad C = 2\pi r$$

الدائرة

$$P = 4s$$

المربع

$$P = 2\ell + 2w$$

المستطيل

المساحة

$$A = bh \quad \text{أو} \quad A = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

المُعَيْن

$$A = s^2$$

المربع

$$A = \frac{1}{2}bh$$

المثلث

$$A = bh \quad \text{أو} \quad A = \ell w$$

المستطيل

$$A = \pi r^2$$

الدائرة

$$A = bh$$

متوازي الأضلاع

$$A = \frac{N}{360} \cdot \pi r^2$$

القطاع الدائري

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

شبه المنحرف

المساحة الجانبية

$$L = \frac{1}{2}P\ell$$

الهرم

$$L = Ph$$

المنشور

$$L = \pi r\ell$$

المخروط

$$L = 2\pi rh$$

الأسطوانة

المساحة الكلية للسطح

$$T = \pi r\ell + \pi r^2$$

المخروط

$$T = Ph + 2B$$

المنشور

$$T = 4\pi r^2$$

الكرة

$$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

الأسطوانة

$$T = \frac{1}{2}P\ell + B$$

الهرم

الحجم

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

الهرم

$$V = s^3$$

المكعب

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

المخروط

$$V = \ell wh$$

متوازي المستويات

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

الكرة

$$V = Bh$$

المنشور

$$V = \pi r^2 h$$

الأسطوانة



المعادلات في المستوى الإحداثي

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

معادلة الدائرة

$$y = mx + b$$

معادلة المستقيم
بصيغة الميل والمقطع

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

الصيغة التربيعية

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المستقيم
بصيغة الميل ونقطة

حساب المثلثات

$$a^2 + b^2 = c^2$$

نظرية فيثاغورس

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

قانون الجيب

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

قانون جيب التمام

الرموز

متوازي أضلاع	\square	q أو p	$p \vee q$	العامد	a
المحيط	P	المسافة بين النقطتين A و B	AB	مساوٍ تقريرًا لـ	\approx
عمودي على	\perp	يساوي	$=$	القوس الأصغر الذي طرفة A و B	\widehat{AB}
بأي (ط) النسبة التقريرية	π	لا يساوي	\neq	القوس الأكبر الذي طرفة A و C	\widehat{ABC}
طول ضلع من مضلع	s	أكبر من	$>$	مساحة المضلع أو الدائرة أو القطاع الدائري	A
مشابه	\sim	أكبر من أو يساوي	\geq	مساحة قاعدة المنشور أو الأسطوانة أو الهرم أو المخروط	B
الجيب	\sin	صورة A	A'	$p \leftrightarrow q$ العبارة الشرطية الثنائية: p إذا وفقط إذا q	$\odot P$
المستقيم ℓ ، طول المستطيل، طول القوس، الارتفاع الجانبي	ℓ	أقل من	$<$		
الميل	m	أقل من أو يساوي	\leq	العبارة الشرطية: إذا كان p فإن q	C
الظل	\tan	المساحة الجانبية	L	$p \rightarrow q$	D
مساحة السطح الكلية	T	قياس القوس AB بالدرجات	$m\widehat{AB}$	دائرة مركزها	$\odot P$
المثلث	Δ	نقطة المتتصف	M	محيط الدائرة	C
الحجم	V	نفي العبارة p	$\sim p$	العبارة الشرطية: إذا كان p فإن q	\odot
عرض المستطيل	w	(x, y, z) الثلاثي المرتب	\parallel	مطابق لـ	\equiv
		موازي لـ	\nparallel	$q \wedge p$	$p \wedge q$
		ليس موازيًا لـ	\nparallel	جيب التمام	\cos
				درجة	$^\circ$

