

التوزيعات ذات الحدين

فيما سبق :
درست أستمعمال
نظرية ذات الحدين

والآن :
أميز تجربة ذات الحدين.
أجد الاحتمالات باستعمال التوزيع ذي
الحدين ومفكوكة.



لماذا؟

في لعبة الكرة الطائرة تبين أن اللاعب سلمان ينجح في لعب الإرسال الساحق الذي لا يصدده الخصم في 36% من محاولاته، وبذلك يحصل فريقه على نقطة في كل مرة ينجح فيها.

أسئلة التعزيز :

- ما احتمال ألا يحصل سلمان على نقطة عند لعبة ارسال؟
- هل يمثل النجاح مرتين متتاليتين حادثتين مستقلتين ؟
- إذا كانت نجاحات الارسال مستقلة ،فما احتمال ألا يحصل سلمان على أي نقطة في إرسالين متتالين ؟



التوزيع ذو الحدين كثير من التجارب الاحتمالية يكون لها نتيجتان فقط؛ نجاح أو فشل أو يمكن جعلها كذلك. فمثلاً في مسائل الاختيار من متعدد التي لها 5 إجابات، يمكن تصنيف نتائج الإجابة عن كل فقرة إلى صح، أو خطأ، ويمكن تصنيف نتائج دواء طبي على أنه فعال أو غير فعال.

تجربة ذات الحدين

مفهوم أساسي

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

- يُعاد إجراء التجربة لعدد محدد (n) من المحاولات المستقلة (المرات).
- كل محاولة لها فقط نتيجتان متوقعتان: نجاح S ، أو فشل F .
- $P(S)$ ويرمز له بالحرف p هو نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$ ويرمز له بالحرف q هو نفسه في كل محاولة ويساوي $1 - p$.
- ويُمثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

3

الاحتمال والاحصاء

مقطعة توضيحي



مثال 1 تمييز التجربة ذات الحدين

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

(a) تُبيّن نتيجة لمسح إحصائي داخل إحدى المدارس أن 68% من الطلاب يمتلكون حاسبة بيانية. إذا تم اختيار 6 طلاب عشوائياً، وسؤالهم عما إذا كانوا يمتلكون هذه الآلة؛ وكان المتغير العشوائي X يُمثّل عدد الطلاب الذين يمتلكون الحاسبة البيانية، فإن:
هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين وهي:

- كل طالب تم اختياره يُمثّل محاولة، وعملية اختيار الطلاب الستة تتكون من محاولات مستقلة.
- للتجربة نتيجتان متوقعتان: الطالب يملك الحاسبة البيانية S ، أو لا يملكها F .
- احتمال النجاح نفسه لكل طالب تم اختياره $P(S) = 0.68$.

وفي هذه التجربة $n = 6, p = P(S) = 0.68$. احتمال الفشل $q = 1 - p$ ، أي أن:
 $q = 1 - 0.68 = 0.32$. ويُمثّل X عدد الطلاب الذين يمتلكون حاسبة بيانية من الذين تم اختيارهم، أي أن:
 $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

(b) يحتوي صندوق على 52 بطاقة، وخُصّص لكل 13 بطاقة أحد الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأبيض. سحبت منه 5 بطاقات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد البطاقات المسحوبة ذات اللون الأخضر.

في هذه التجربة، كل بطاقة يتم سحبها تُمثّل محاولة، وبما أنه يتم الاحتفاظ بالبطاقة التي تم اختيارها (السحب دون إرجاع)، فإن المحاولات غير مستقلة، واحتمال النجاح في كل محاولة يختلف عن الأخرى؛ لذا فإن هذه التجربة ليست ذات حدين.

سواء

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

(1A) أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحد أن 61% يحبون الزي الجديد، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبًا بشكل عشوائي، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يحبون الزي الجديد. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.

(1B) أجاب خالد عن اختبار مكوّن من 20 فقرة من نوع «الاختيار من متعدد» لكل فقرة منها أربع إجابات، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار). وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة.

تدريب

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها ذات حدين. وإن كانت كذلك، فاكتب قيم n, p, q ، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن تجربة ذات حدين، فبيّن السبب.

(2) أُلقيت قطعة نقد 20 مرة، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة.

(1) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6، ثم أُلقي المكعب 10 مرات، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5.

يُسمى توزيع النتائج المتوقعة لتجربة ذات حدين والاحتمالات المرتبطة بها **توزيع ذات الحدين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستعمال الصيغة ${}_nC_X p^X q^{n-X}$ التي تمثل حدًا في مفكوك $(p + q)^n$.

مفهوم أساسي

صيغة احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح في X مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو:

$$P(X) = {}_nC_X p^X q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!X!} p^X q^{n-X}$$

حيث p احتمال النجاح، و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

التوزيع ذو الحدين

مثال 2 من واقع الحياة

اختبار: في اختبار نهائي، أكد 35% من الطلاب أنهم أجابوا بشكل اعتيادي. إذا اختير 5 طلاب عشوائيًا، وتم سؤالهم عما إذا أدوا الاختبار بشكل اعتيادي. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم عن السؤال، فكُون جدولًا للتوزيع ذي الحدين، ومثله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب 3 طلاب على الأقل عن السؤال بنعم.

هذه تجربة ذات حدين فيها: $n = 5, p = 0.35, q = 1 - 0.35 = 0.65$. استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لحساب احتمال كل قيمة ممكنة من قيم X مستعملًا صيغة احتمال ذات الحدين.

$$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^5 \approx 0.116$$

$$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^4 \approx 0.312$$

$$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^3 \approx 0.336$$

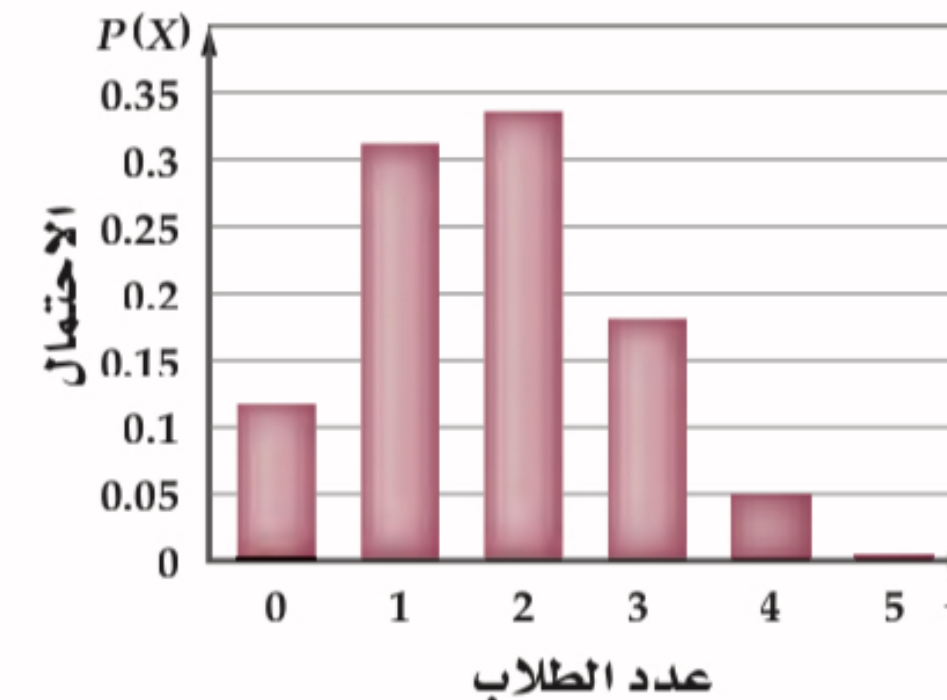
$$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^2 \approx 0.181$$

$$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^1 \approx 0.049$$

$$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^0 \approx 0.005$$

وفيما يأتي جدول التوزيع ذي الحدين للمتغير X ، وتمثيله بالأعمدة.

عدد الذين أدوا الاختبار بشكل اعتيادي



X	P(X)
0	0.116
1	0.312
2	0.336
3	0.181
4	0.049
5	0.005

لإيجاد احتمال أن 3 طلاب على الأقل أجابوا بنعم، أوجد $P(3) + P(4) + P(5)$.

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$$

$$P(3) = 0.181, P(4) = 0.049, P(5) = 0.005 \quad = 0.181 + 0.049 + 0.005$$

$$\text{بسط} \quad = 0.235 = 23.5\%$$

تحقق من فهمك

(2) **كليات:** يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج. إذا اختير 7 خريجين عشوائيًا، وتم سؤالهم عمّا إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم، فكونّ التوزيع ذا الحدين، ومثله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم.

تستعمل الصيغ الآتية؛ لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي

المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

يحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي X في التوزيع ذي الحدين بالصيغ الآتية:

$$\mu = np \quad \text{المتوسط}$$

$$\sigma^2 = npq \quad \text{التباين}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq} \quad \text{الانحراف المعياري}$$

المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

مثال 3

اختبار: بالرجوع إلى تجربة ذات الحدين في المثال 2 . أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X ، ثم فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

استعمل صيغ المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين. في هذه التجربة ذات الحدين $n = 5, p = 0.35, q = 0.65$.

$$\begin{aligned}\mu &= np \\ &= 5(0.35) = 1.75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= npq \\ &= 5(0.35)(0.65) = 1.1375\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sigma^2} \\ &= \sqrt{1.1375} \approx 1.0665\end{aligned}$$

متوسط التوزيع يساوي 1.8 تقريبًا، ويعني أن خريجين تقريبًا من أصل 5 أجابوا بنعم. كل من التباين والانحراف المعياري يساوي 1.1 تقريبًا.

تحقق من فهمك

(3) **كليات:** أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في تحقق من فهمك 2 ، وفسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

كوّن التوزيع ذا الحدين لكلّ متغير عشوائي مما يأتي، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد المتوسط، وفسّر معناه في سياق الموقف، ثم أوجد التباين، والانحراف المعياري. (المثالان 2, 3)

(5) إذا كان 89 % من طلاب المرحلة الثانوية في إحدى المدارس يتابعون مباريات منتخبهم الوطني، وتم اختيار 5 طلاب عشوائياً من هذه المدرسة، وسؤالهم عما إذا كانوا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

عندما يزداد عدد المحاولات في تجربة ذات الحدين، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب التوزيع ذي الحدين.

تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

مفهوم أساسي

في التوزيع ذي الحدين عندما تُمثل n عدد المحاولات، واحتمال النجاح p ، واحتمال الفشل q ، ويكون $n p \geq 5, n q \geq 5$ ، يمكن تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = np$ ، وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$.

مثال 4

تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي

أشارت دراسة سابقة إلى أن 64% من الخريجين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة. وقد نفذ بلال دراسة مسحية على 300 من هؤلاء الخريجين اختارهم عشوائيًا. ما احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل على ما جاء في الدراسة الإحصائية السابقة؟

في الدراسة المسحية التي نفذها بلال، عدد الخريجين الذين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة يتبع التوزيع ذا الحدين، حيث:

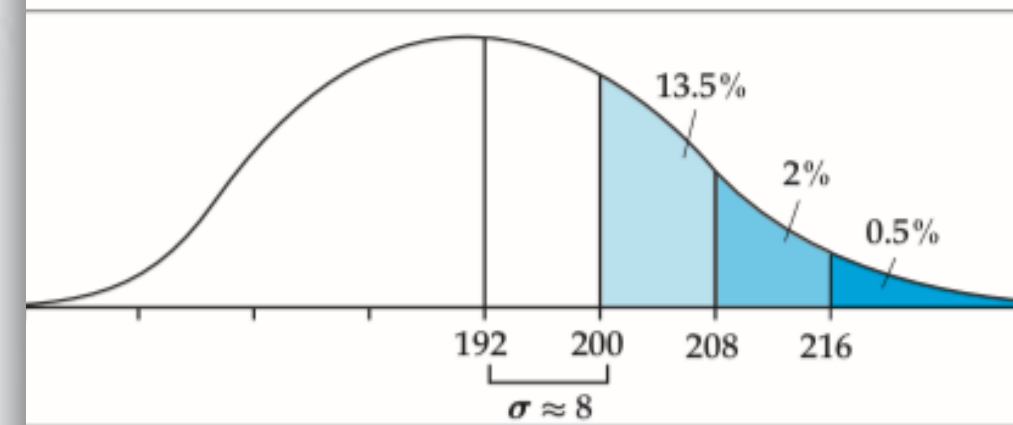
$$n = 300, p = 0.64, q = 0.36$$

وحيث إن:

$$n p = 300 (0.64) = 192 > 5$$

$$n q = 300 (0.36) = 108 > 5$$

يمكنك استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو الآتي:



$$\mu = n p \quad \text{المتوسط للتوزيع الطبيعي}$$

$$n = 300, p = 0.64 \quad = 300(0.64) = 192$$

$$\sigma = \sqrt{n p q} \quad \text{الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي}$$

$$n = 300, p = 0.64, q = 0.36 \quad = \sqrt{300(0.64)(0.36)}$$

$$\approx 8.31 \quad \text{استعمل الآلة الحاسبة}$$

العدد 200 أكبر من المتوسط بمقدار انحراف معياري واحد تقريبًا كما هو مبين في الرسم أعلاه؛ لذا يكون احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل يساوي 16% تقريبًا.

تحقق من فهمك

(4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي. غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتم الدراسة السابقة. ما احتمال ألا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوبَ تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية؟

(8) **أعمال صيفية:** تبين في دراسة سابقة أن 90% من طلاب الصفوف العليا في مدرسة ثانوية يحصلون على أعمال صيفية، لكن منذراً قدر أن النسبة أقل من ذلك؛ لذا قام بدراسة مسحية شملت 400 طالب من الصفوف العليا تم اختيارهم عشوائياً. ما احتمال ألا يكون أكثر من 348 من الطلاب المستهدفين حصلوا على عمل صيفي؟ (مثال 4)

الواجب المنزلي