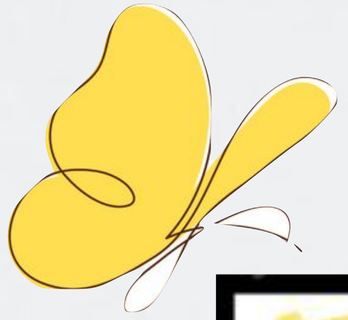


مقدمه في المتجهات

بسمه math

فيما سبق

درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث

والآن

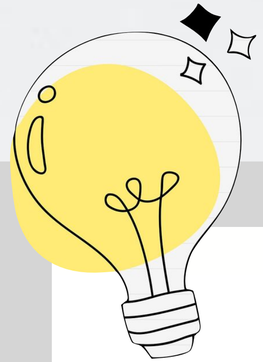
١| اجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم وأمثلها هندسيا .

٢| أحلل المتجه الى مركبتيه المتعامدتين

٣| احل مسائل تطبيقية على المتجهات

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

بسمه math



لماذا ؟

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كلٍّ من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1 المتجهات

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **المتجه** فهو كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك تُعتبر متجه والعدد المرتبط بمتجه يسمى **كميةً متجهةً**.

بسمه math

تحديد الكميات المتجهة

مثال 1

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة 15 mi/h في اتجاه الجنوب الغربي.

بما أن لهذه الكمية اتجاهًا، إذن هي كميةٌ متجهةٌ.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min جهة الغرب.

بما أن لسرعة الشخص قيمة هي 75 m/min ، واتجاهًا للغرب؛ لذا فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .

بما أن لهذه الكمية قيمة وهي 20 km ، وليس لها اتجاه؛ إذن هذه المسافة كمية قياسية.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h

، وبزاوية 15° جهة الجنوب الشرقي.

1B) هبوط مظلَي رأسيًّا إلى أسفل

، بسرعة 12.5 mi / h .

1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm .

بسمه math

تدرب

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

1) طول محمد 125 cm .

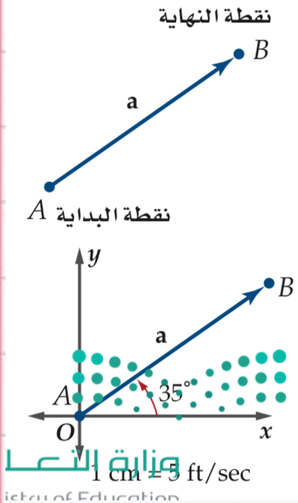
3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1 المتجهات

المتجهات:

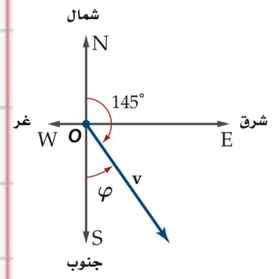
يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعةٍ مستقيمةٍ لها اتجاه (**قطعة مستقيمة متجهة**)، أو سهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه. ويمثِّل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، و**نقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .



أما **طول المتجه** فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو $1\text{ cm} = 5\text{ ft/s}$، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز $|\mathbf{a}|$ ، يساوي 5×2.6 أو 13 ft/s .

يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو $35°$.

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $35°$ جنوب شرق، وتُكتب $S\ 35°\ E$.



كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها $25°$ من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة $025°$.

إرشادات للدراسة

زاوية الاتجاه الحقيقي

إذا أُعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $145°$.

إرشادات للدراسة

النيوتن

وحدةٌ لقياس القوّة، ويرمز له بالحرف N، وهو عبارة عن القوّة التي تؤثر في جسم كتلته 1kg؛ لتكسبه تسارعًا مقداره 1m/s^2.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1 المتجهات

تمثيل المتجه هندسياً

تنبيه!

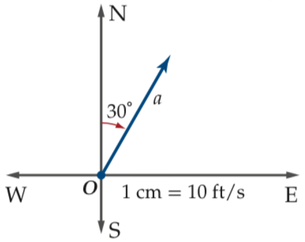
الطول

يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثّل المسافة المقطوعة .

مثال 2

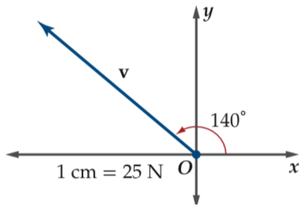
استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

a) $a = 20\ ft/s$ باتجاه $030°$.



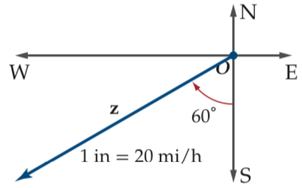
استعمل مقياس الرسم $1\ cm = 10\ ft/s$ ، وارسم سهمًا طوله $20 \div 10$ ، أو $2\ cm$ بزاوية قياسها $30°$ من الشمال، وفي اتجاه عقارب الساعة.

b) $v = 75\ N$ ، بزاوية قياسها $140°$ مع الاتجاه الأفقي.



استعمل مقياس الرسم $1\ cm = 25\ N$ ، وارسم سهمًا طوله $75 \div 25$ ، أو $3\ cm$ في الوضع القياسي، وبزاويةٍ قياسها $140°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x .

c) $z = 30\ mi/h$ ، باتجاه $S\ 60°\ W$.



استعمل مقياس الرسم $1\ in = 20\ mi\ /\ h$ ، وارسم سهمًا طوله $30 \div 20 = 1.5\ in$ ، بزاوية قياسها $60°$ في اتجاه جنوب غرب .

تحقق من فهمك

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $\mathbf{t} = 20$ ft/s ، باتجاه 065° .

2B) $\mathbf{u} = 15$ mi/h ، باتجاه S 25° E .

2C) $\mathbf{m} = 60$ N ، بزاوية قياسها 80° مع الاتجاه الأفقي.

بسمه math

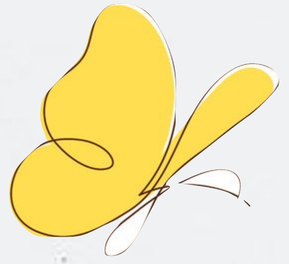
تدرب

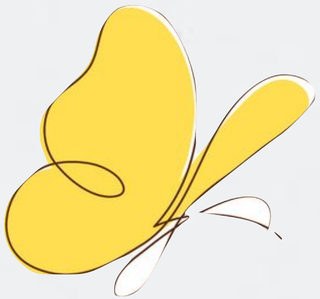
استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة. (مثال 2)

7) $\mathbf{h} = 13$ in/s ، باتجاه $205°$

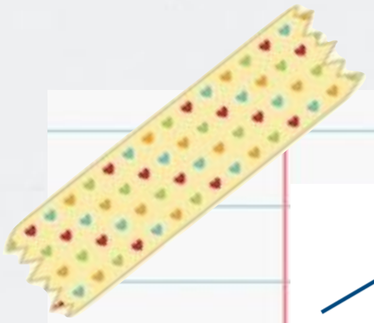
8) $\mathbf{g} = 6$ km/h ، باتجاه N $70°$ W

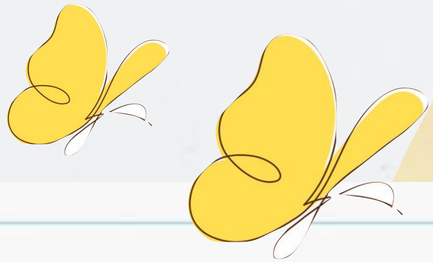
مقطع توضيحي





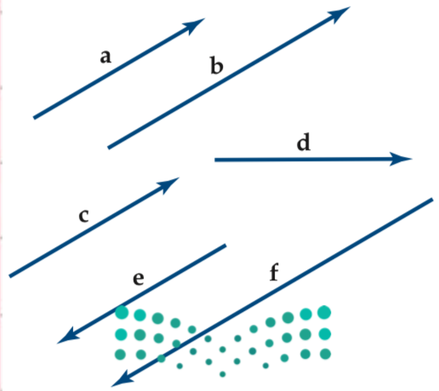
1 المتجهات





عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:

- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه $\mathbf{a}$ على الصورة $-\mathbf{a}$ ، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

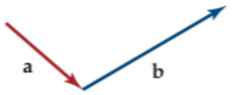
1 المتجهات

مفهوم أساسي — إيجاد المحصلة

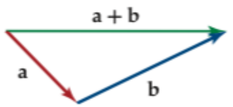
قاعدة المثلث

لإيجاد محصّلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، اتّبع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه $\mathbf{b}$ ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه $\mathbf{a}$.



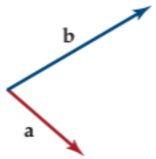
الخطوة 2 محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي المتجه المرسوم من نقطة بداية $\mathbf{a}$ إلى نقطة نهاية $\mathbf{b}$.



قاعدة متوازي الأضلاع

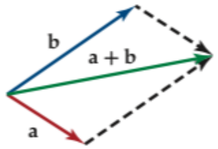
لإيجاد محصّلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، اتّبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه $\mathbf{b}$ ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه $\mathbf{a}$.



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

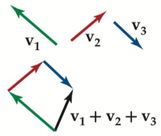
الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّله قطر متوازي الأضلاع .



إرشادات للدراسة

المحصلة

لإيجاد محصلة أكثر من متجهين باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، يلزم إعادة الرسم أكثر من مرة؛ لذا من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة مشابهة لقاعدة المثلث، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.

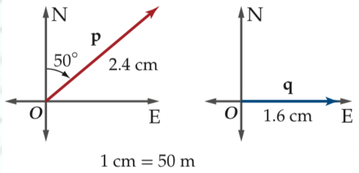


بسمه math

مثال من واقع الحياة 3

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E ، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

افترض أن المتجه **p** يمثِّل المشي 120 m في الاتجاه N 50° E ، وأن المتجه **q** يمثِّل المشي 80 m باتجاه الشرق. ارسم شكلًا يمثّل **p** ، **q** باستعمال مقياس الرسم 1cm = 50 m .

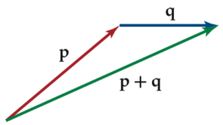


1 cm = 50 m

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم سهم طوله 2.4 cm = 120 ÷ 50 ؛ ويصنع زاوية قياسها 50° شمال شرق؛ ليُمثّل المتجه **p** ، وارسم سهمًا آخر طوله 1.6 cm = 50 ÷ 80 في اتجاه الشرق؛ ليُمثّل المتجه **q**.

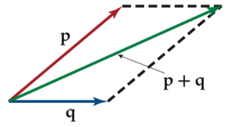
الطريقة 1 قاعدة المثلث

اعمل انسحابًا للمتجه **q** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **p** ، ثم ارسم متجه المحصلة **p + q** كما في الشكل أدناه.

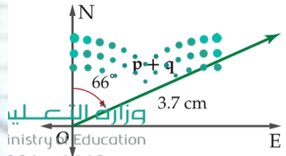


الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

اعمل انسحابًا للمتجه **q** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **p**، ثم أكمل متوازي الأضلاع، وارسم قطره الذي يمثِّل المحصلة **p + q** ، كما في الشكل أدناه.



نحصل في كلتا الطريقتين على متجه المحصلة **p + q** نفسه. قِس طول **p + q** باستعمال المسطرة، ثم قِس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الرأسي كما في الشكل المجاور.



تجد أن طول المتجه يساوي 3.7 cm تقريبًا، ويُمثّل 3.7 × 50 = 185 m .
وعليه يكون عبد الله على بعد 185 m من نقطة البداية باتجاه N 66° E .

ايجاد محصلة متجهين

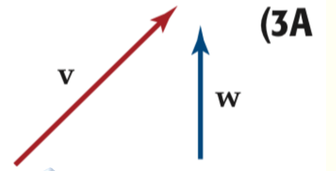
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

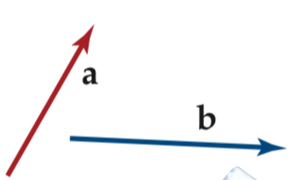
تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

(3A



(3B



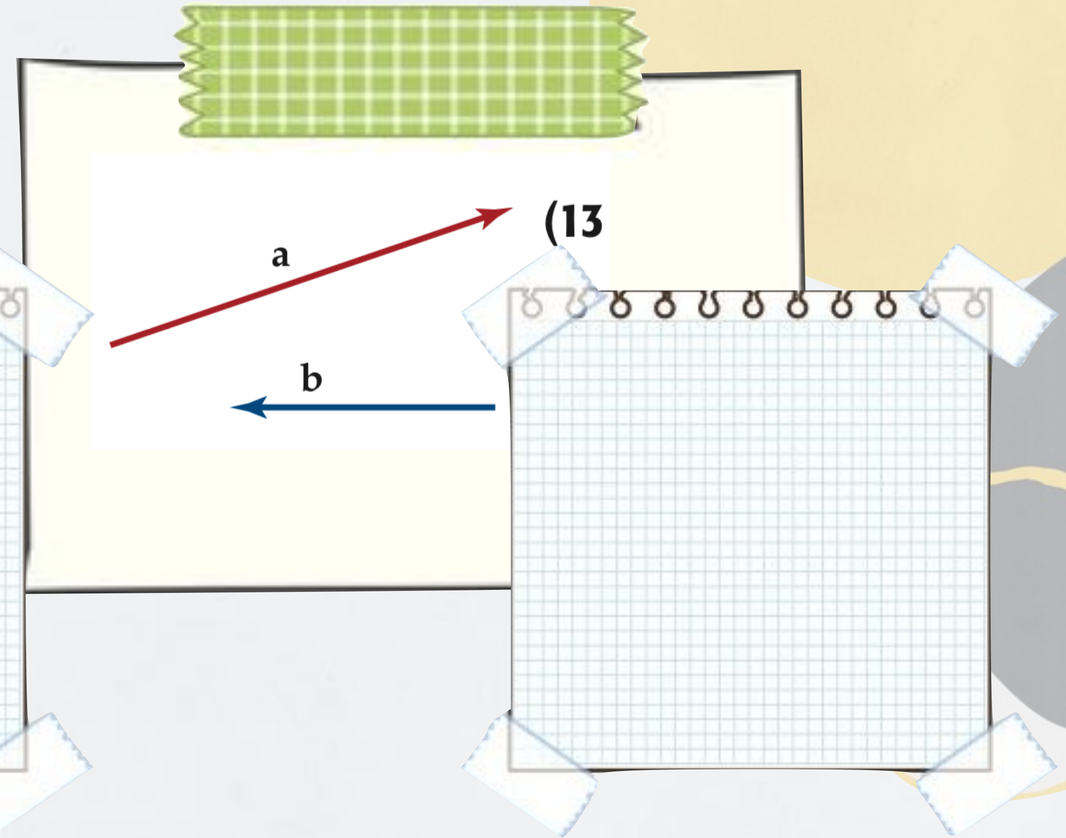
3C) لعبة أطفال: رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة 7 in/s، باتجاه °310، فارتدت باتجاه °055، وبسرعة 4 in/s . أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)

بسمه math

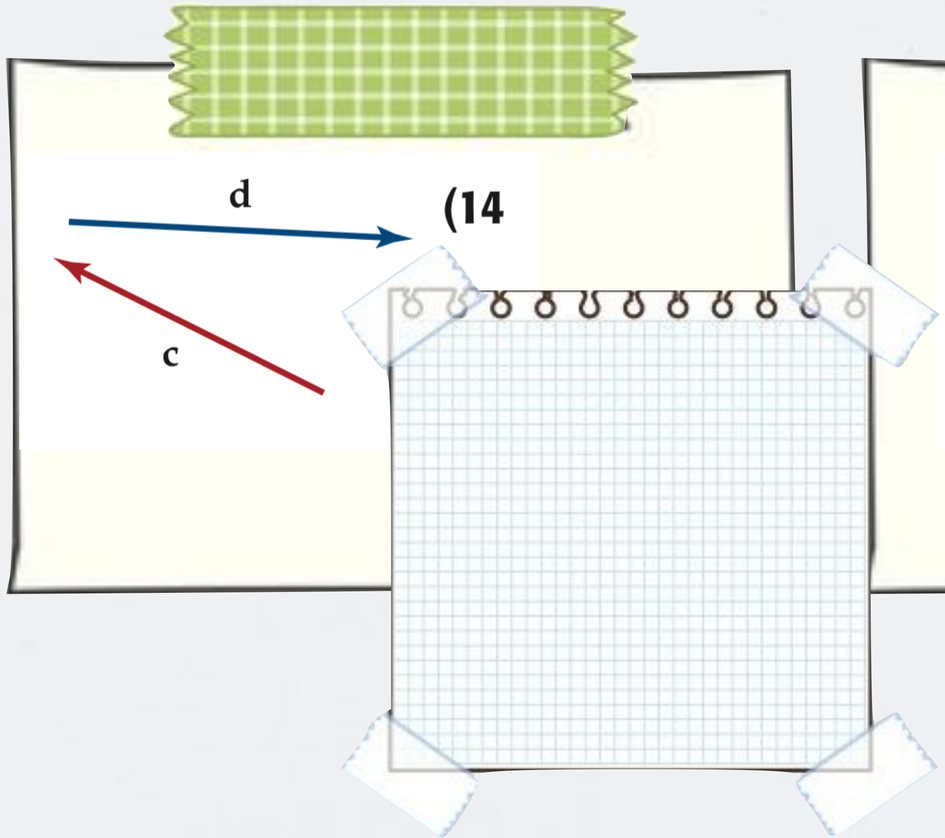
تدرب

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

(13



(14



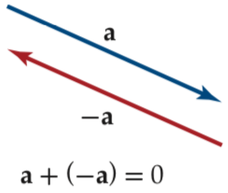
مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

1 المتجهات

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**.ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$ ، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد.

لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ ، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$ ؛ أي أن: $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.

و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.



$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0$

قراءة الرياضيات

$|k|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.

$|v|$ تمثل طول المتجه v.

مفهوم أساسي

ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

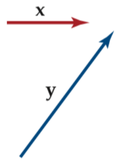
- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

1 المتجهات

العمليات على المتجهات

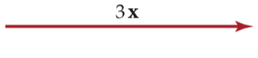
مثال 4

ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

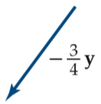


أعد كتابة المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ على صورة حاصل جمع متجهين $3\mathbf{x} + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$ ، ثم مثِّل المتجه $3\mathbf{x}$ برسم متجه طوله 3 أمثال المتجه $\mathbf{x}$ ، وبالاتجاه نفسه كما في الشكل 1.1.1 .

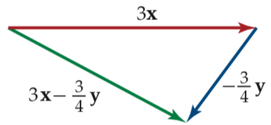
ولتمثيل المتجه $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، ارسم متجهًا طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$ ، وفي اتجاه معاكس لاتجاه $\mathbf{y}$ كما في الشكل 1.1.2 ، ثم استعمل قاعدة المثلث؛ لرسم متجه المحصلة كما في الشكل 1.1.3 .



الشكل 1.1.1



الشكل 1.1.2

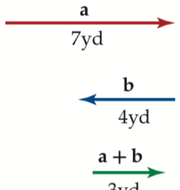


الشكل 1.1.3

إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان

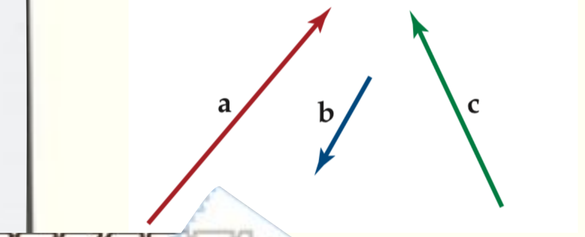
محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين، هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.



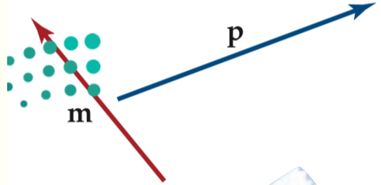
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

$a - c + 2b$ (4A



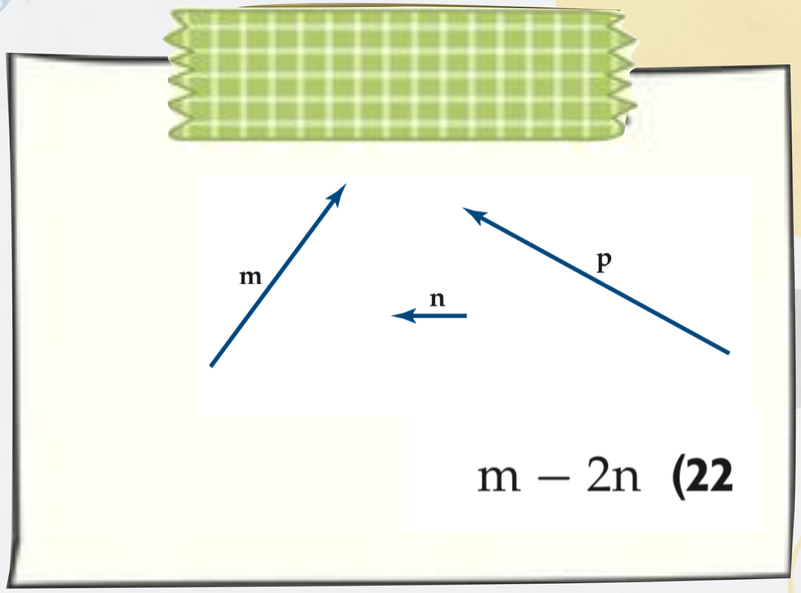
$m - \frac{1}{4}p$ (4B



بسمه math

تدرب

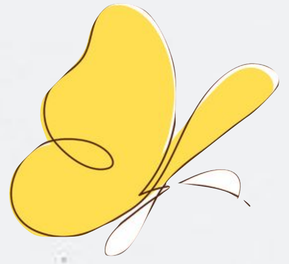
استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثِّل كل عبارة مما يأتي:

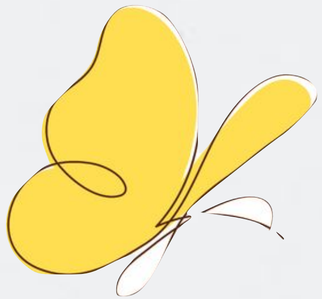


22) $m - 2n$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مقطع توضيحي

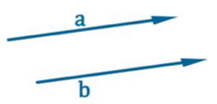




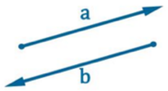
1 المتجهات

المتجهات

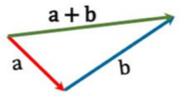
- **المتجهات المتساوية**
  لها الاتجاه و الطول نفسه



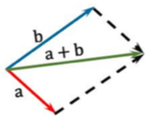
- **المتجهات المتوازية**
  لها الاتجاه نفسه أو اتجاهان متعاكسان وليس بالضرورة الطول نفسه



- **المتجه الصفري**
  متجه طوله صفر وليس له اتجاه
- **المحصلة**
  جمع متجهين أو اكثر
  - **قاعدة المثلث**



  - **قاعدة متوازي الاضلاع**



- **اتجاه المتجه**
  - **الاتجاه الربعي**
  - **الاتجاه الحقيقي**
  - **الوضع القياسي**
    مع الأفقي

الواجب المنزلي