مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

فيما سبق :

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

الآن :

- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات :

المتطابقة	identity
المتطابقة المثلثية	trigonometric identity
المتطابقات النسبية	quotient identities
متطابقات المقلوب	resiprocal identities
متطابقات فيثاغورس	pythagorean identities
متطابقات الزاويتين المتتامتين	cofunction identities
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية	odd-even identities

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

جدول التعلم

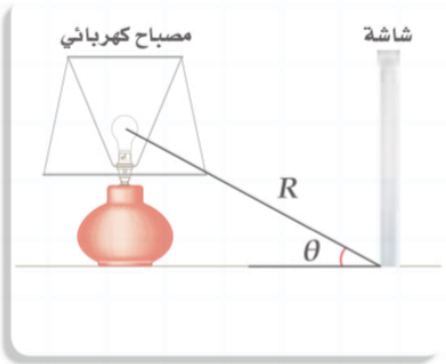
	ماذا أعرف
	ماذا أريد أن أعرف
	ماذا تعلمت
	كيف أتعلم أكثر

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

لماذا؟



تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.

المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًّا يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

مقطع توضيحي 💡

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب:

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta},\ \csc\theta \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sin\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta},\ \sec\theta \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$$

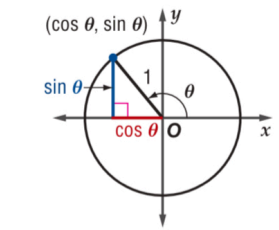
$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta},\ \cot\theta \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},\ \tan\theta \neq 0$$

متطابقات فيثاغورس:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$



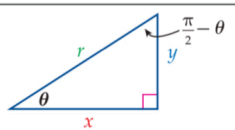
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

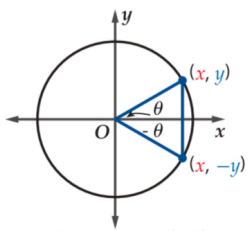
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



$\sin\theta = y$ $\quad \sin(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x$ $\quad \cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	متطابقات فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	اطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين
$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$	عوّض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$	أوجد مربع العدد $\frac{1}{4}$
$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$	اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$	خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\sin^{-1}\frac{1}{4}$

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ استعمل الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° = 165.52°$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$

$-0.968 \approx -0.97$ ✓

b) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\csc\theta$ إذا كان $\cot\theta = -\frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	متطابقات فيثاغورس
$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$	عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$
$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$	أوجد مربع العدد $-\frac{3}{5}$
$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$	$\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$
$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$	خذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

1A) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$.

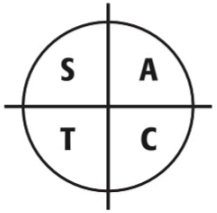
1B) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$.

إرشادات للدراسة

الأرباع:

يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكّر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4 .

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1, 2	3, 4
$\csc\theta$		
$\cos\theta$	1, 4	2, 3
$\sec\theta$		
$\tan\theta$	1, 3	2, 4
$\cot\theta$		



A all functions
S sine
T tangent
C cosine

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

2) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$

3) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، $270° < \theta < 360°$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

مقطع توضيحي

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

تبسيط العبارات المثلثية: تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

مثال 2 تبسيط العبارة المثلثية

بسّط العبارة : $\frac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\tan\theta}}$$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}}$$

$\frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta$$

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية

عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تُكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب $(\sin\theta)$ و/أو بدلالة جيب التمام $(\cos\theta)$.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

(2A $\dfrac{\tan^2\theta \csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

(2B $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة — إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

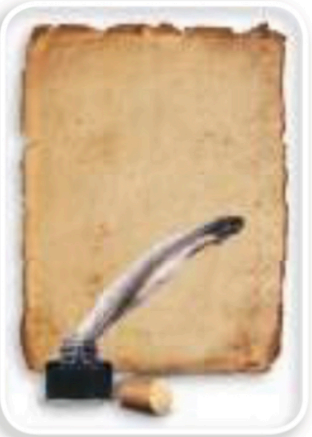
a) حل المعادلة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لِـ E.

$\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$	المعادلة الأصلية
$E\sec\theta = \frac{I}{R^2}$	اضرب كلا الطرفين في E
$E\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
$E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$	اضرب كلا الطرفين في $\cos\theta$

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ ؟ فسِّر إجابتك.

$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$	المعادلة الأصلية
$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta$	اضرب كلا الطرفين في E
$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2}$	اقسم كلا الطرفين على R^2
$E = \frac{I\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2}$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$	بسّط

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تبسّط إلى: $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$ ، بينما المعادلة في الفرع **(a)** تكتب على الصورة: $E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$.



تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوَّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له ، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبد الله البتاني، والزرقلي ، ونصير الدين الطوسي.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة $\tau = Fr \sin\theta$. أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

مسائل مهارات التفكير العليا

25) اكتشف الخطأ: تحاور سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد: إنها متطابقة، حيث جرَّب 10 قيم للمتغير وحققت جميعها المعادلة فعلًا، بينما قال أحمد: إنها ليست متطابقة، حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

32) اكتشف الخطأ: بسِّط كل من علاء وسامي المقدار $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

علاء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\tan^2\theta+1$$
$$=\sec^2\theta$$

سامي

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$=\sin^2\theta$$

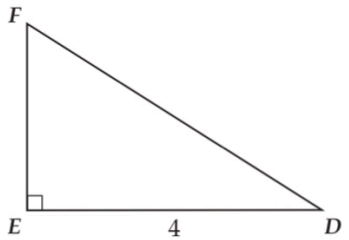
@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-1 المتطابقات المثلثية

تدريب على اختبار

39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D = 0.8$ ، فما طول $\overline{DF}$؟



A 5

B 4

C 3.2

D 10

40) إذا كان $\sin x = m$ وَ $0° < x < 90°$ ، فما قيمة $\tan x$؟

A $\frac{1}{m^2}$

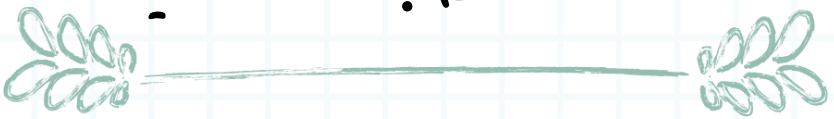
B $\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\frac{1-m^2}{m}$

D $\frac{m}{1-m^2}$

@Hudali_math

3-1 المتطابقات المثلثية



(3 – 1) المتطابقات المثلثية

اسم الطالب :..... الشعبة : .....

اختر الإجابة الصحيحة:

1 اذا كانت $270^\circ < \theta < 360^\circ, \cos\theta = \frac{5}{13}$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ تساوي :

A	B	C	D
$\frac{13}{12}$	$-\frac{12}{13}$	$\frac{12}{13}$	$-\frac{13}{12}$

2 تبسيط العبارة $\csc^2\theta - \cot^2\theta$:

A	B	C	D
$\sin\theta\cos\theta$	$\cos^2\theta$	$\sin^2\theta$	1

3 اذا كانت $\cot\theta = 2, 0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\tan\theta$ تساوي :

A	B	C	D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

خريطة مفاهيم

قوانين حساب المثلثات

دوال المقلوب

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

$$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \sin B\cos A$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$$
$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A.\tan B}$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

متطابقات نصف الزاوية

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = \tan\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

ورقة عمل

Puzzle قوانين الدوال المثلثية

$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\frac{1}{\sin\theta}$

$1+\cot^2\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\tan^2\theta+1$	$\sin^2\theta+\cos^2\theta$
$\csc^2\theta$	$\cos\theta$	$\sec^2\theta$	1

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني
عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :