

تحليل التمثيلات
البيانية للسؤال
والعلاقات



جدول التعلم



ماذا أعرف

Blank dotted line for writing.



ماذا أريد أن أعرف

Blank dotted line for writing.



ماذا تعلمت

Blank dotted line for writing.



كيف أنعم أكثر

Blank dotted line for writing.

المضردات:

الأصفار

zeros

الجدور

roots

التمائل حول مستقيم

line symmetry

التمائل حول نقطة

point symmetry

الدالة الزوجية

even function

الدالة الفردية

odd function



مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج

فيما سبق :
درست الدوال وكيفية إيجاد
قيمها

والآن :

- استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم الدوال ، وإيجاد مجالها ومداهها ومقطعها مع محور y واصفارها .
- استكشف تماثل منحنيات الدوال ، واحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية



مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

تحليل التمثيلات
البيانية للدوال
والعلاقات

تطوير - إنتاج - توثيق
1-2



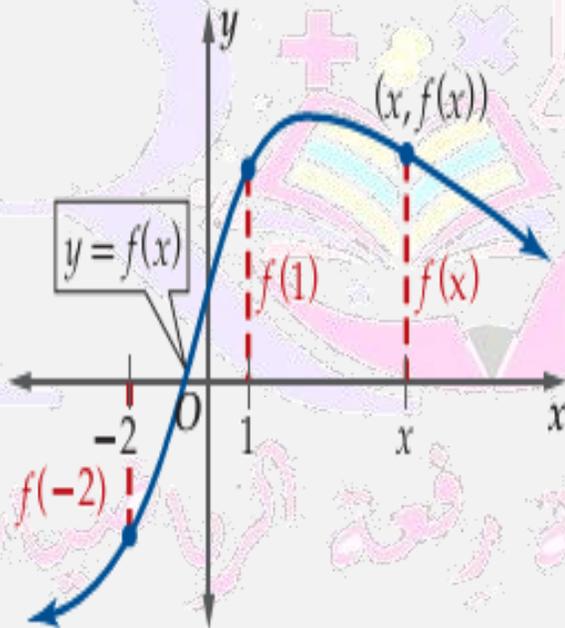
لماذا؟

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلاً يمكن تقدير مخصصات الصحة والهيل الأحم (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1433 – 1440) هـ بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07, 1 \leq x \leq 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1433 هـ . ويساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

$$1 + 2 = 3$$



تحليل التمثيل البياني للدالة التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة

الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ ، حيث x أحد عناصر مجال f . وبمعنى آخر فإن

التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. وعليه تكون قيمة الدالة

مساوية لطول العمود الواصل من النقطة x على المحور x إلى منحنى الدالة

كما هو موضح في الشكل المجاور.

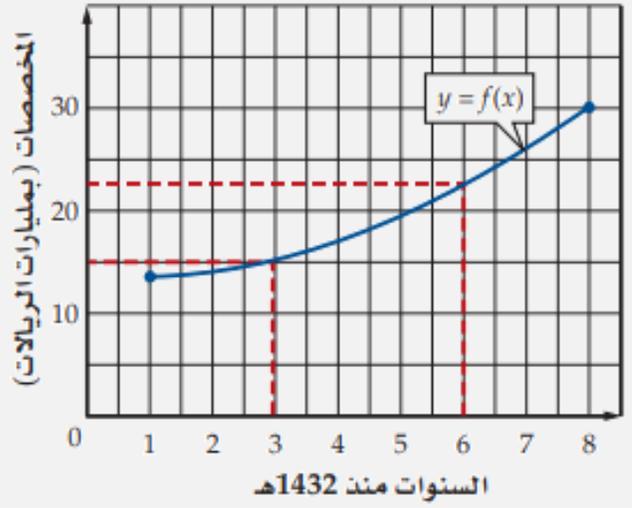
يُستعمل التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة.

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 1

مخصصات الصحة والهلال الأحمر



مخصصات: استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عما يأتي:

(a) قَدِّر قيمة المخصصات سنة 1438 هـ، ثم تحقِّق من إجابتك جبرياً.

السنة 1438 هـ هي السنة السادسة بعد 1432 هـ، لذا تُقدَّر قيمة الدالة عند $x = 6$ بـ 23 مليار ريال، وعليه تكون المخصصات سنة 1438 هـ هي 23 مليار ريال تقريباً.

وللتحقُّق من ذلك جبرياً، أوجد قيمة $f(6)$ بالتعويض في الدالة.

$$f(6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 - 0.5654(6) + 14.07 \approx 22.95$$

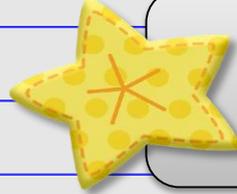
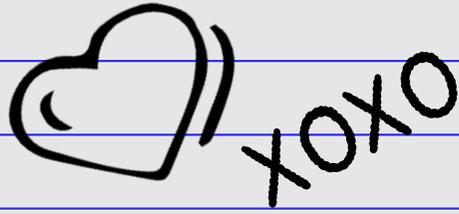
لذا يُعدُّ التقريب 23 مليارًا باستعمال التمثيل البياني معقولاً.

(b) قَدِّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليار ريال، ثم تحقِّق من إجابتك جبرياً. يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليارًا عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3، لذا تكون المخصصات 15 مليارًا في سنة 1435 هـ. وللتحقُّق جبرياً أوجد $f(3)$.

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 - 0.5654(3) + 14.07 \approx 15.4149$$

لذا تعد السنة التقريبية 1435 هـ معقولة.





تقوى من تقوى

(1) **أسهم:** تابع مستمر قيمة سهم خلال عشرين يوماً، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة:
 $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \leq d \leq 20$ حيث $v(d)$ قيمة السهم بالريال
 في اليوم d .

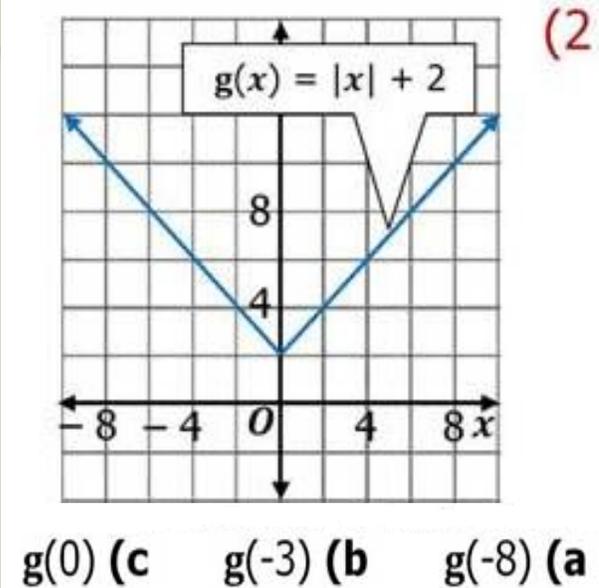
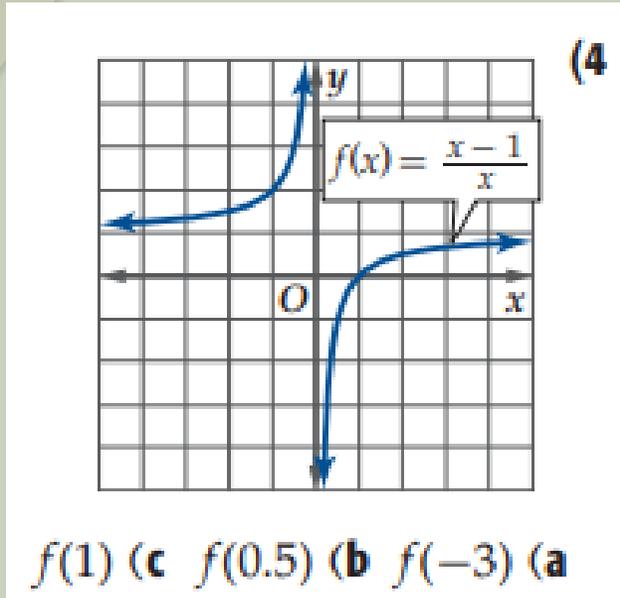
(1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر.



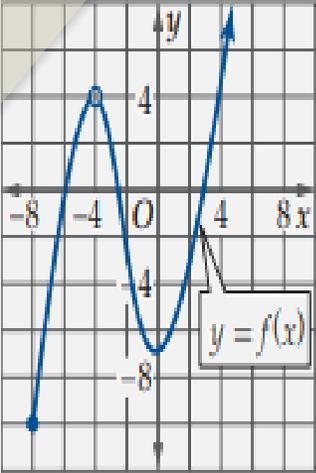
(1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم 30 ريالاً.



تدريب



مثال 2



أوجد مجال الدالة f ومداهما باستعمال التمثيل البياني المجاور .

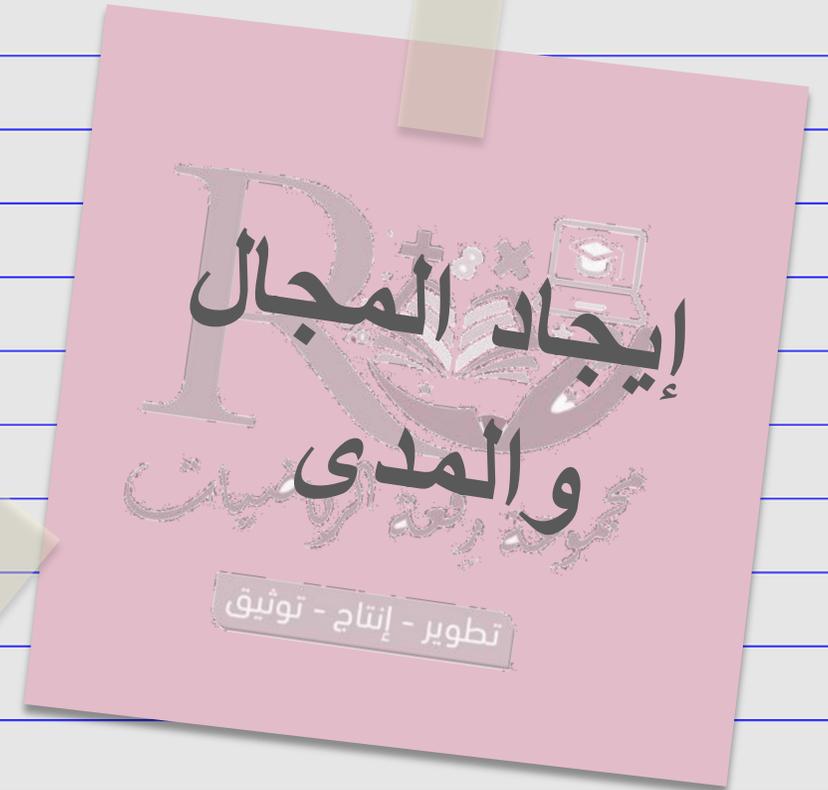
المجال:

- تدل النقطة عند $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f .
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

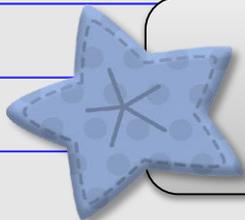
مما سبق يكون مجال الدالة f هو $(-4, \infty) \cup [-8, -4)$. وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو $\{x \mid x \geq -8, x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$.

المدى:

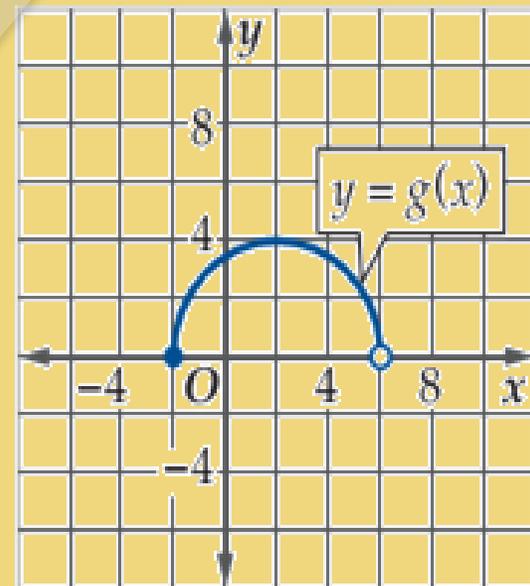
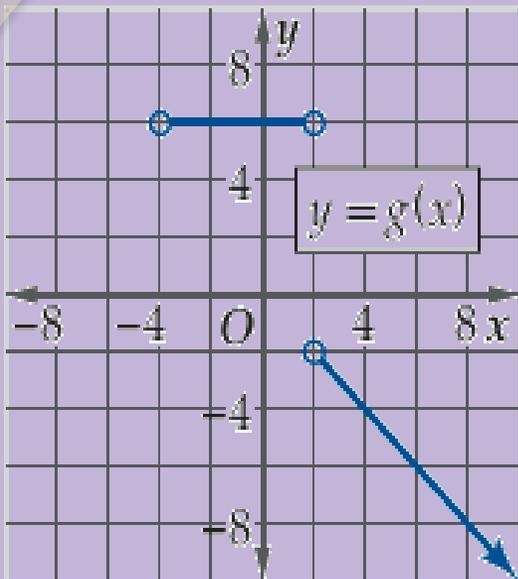
إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10 ، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x ، لذا فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.



$$1 + 2 = 3$$



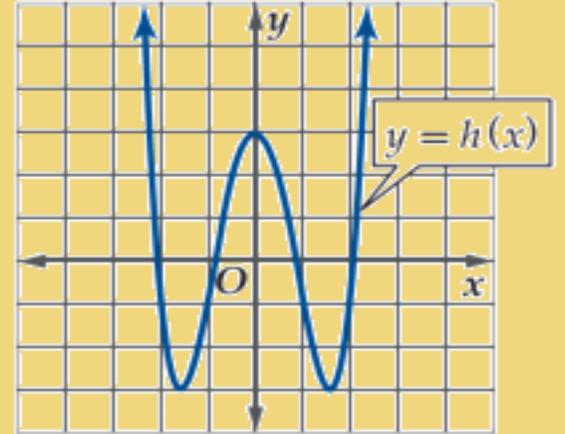
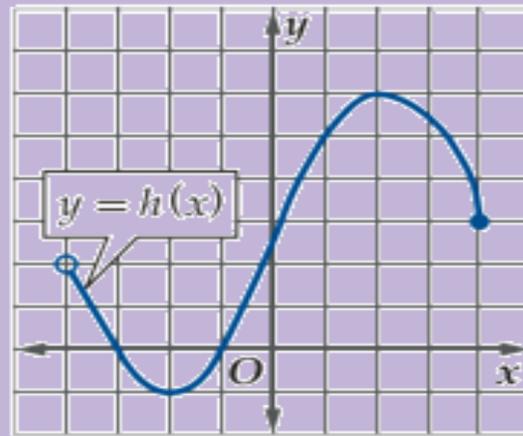
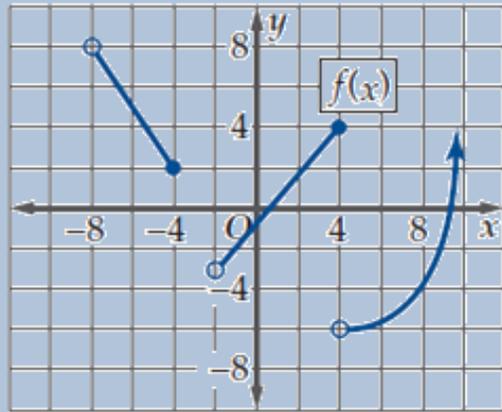
تفكر من نفسك

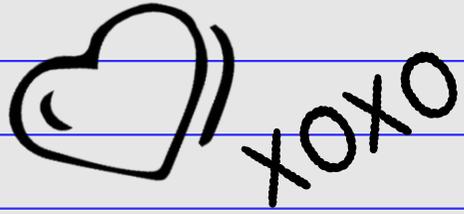




تطوير

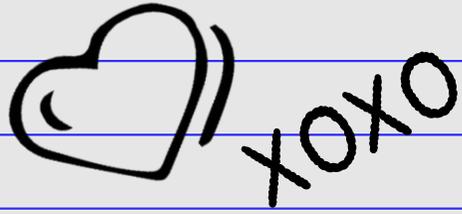
استعمل التمثيل البياني للدالة f لتحديد مجالها ومداهما في كل مما يأتي:





مقطع توضيحي

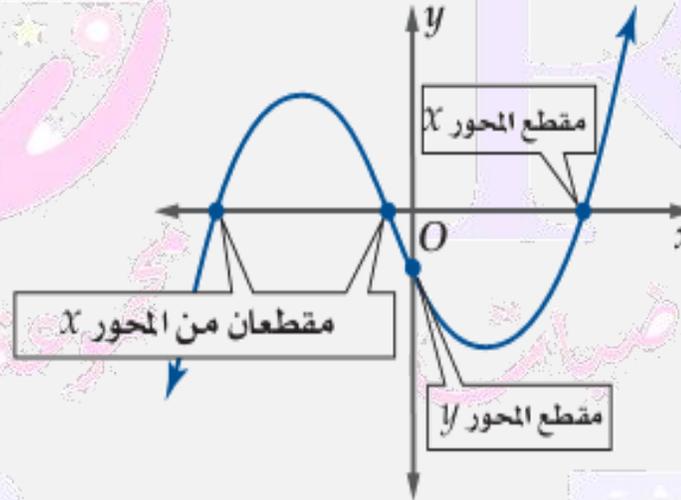




النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع x بتعويض $y = 0$ ، وللحصول على المقطع y فإننا نعوض $x = 0$. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x ، وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.



ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x وقد يكون هناك مقطع واحد أو أكثر



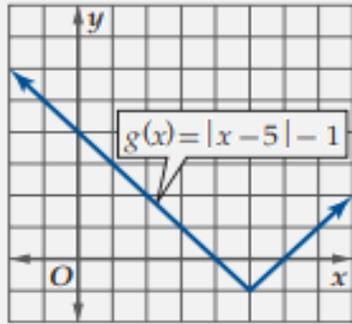
تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق

ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبرياً، فإننا نجد $f(0)$.

مثال 3

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y ، ثم أوجده جبريًا:



التقدير من التمثيل البياني:

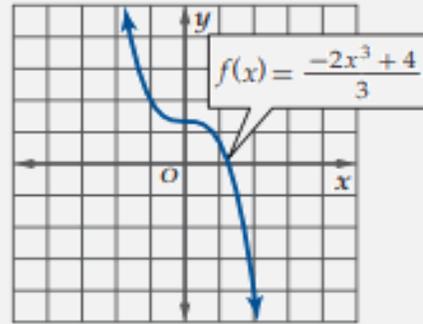
يتضح من الشكل أن $g(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 4)$ ، وعليه فإن المقطع y هو 4.

الحل جبريًا:

أوجد قيمة $g(0)$.

$$g(0) = |0 - 5| - 1 = 4$$

أي أن المقطع y هو 4.



التقدير من التمثيل البياني:

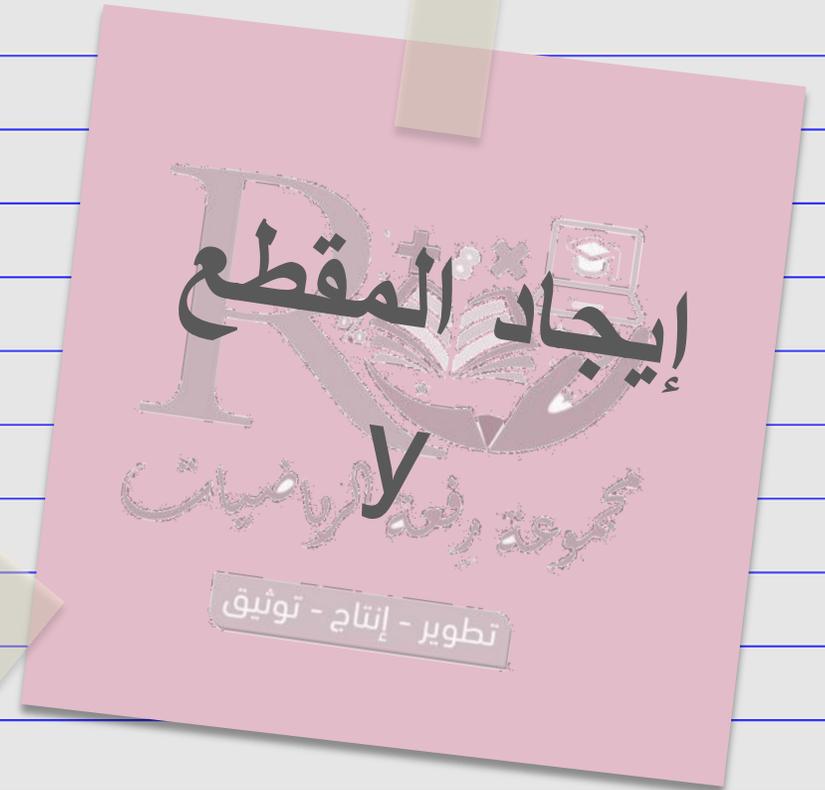
يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ ، وعليه فإن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا.

الحل جبريًا:

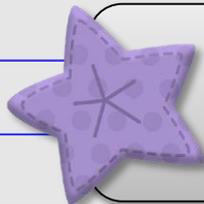
أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3 + 4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

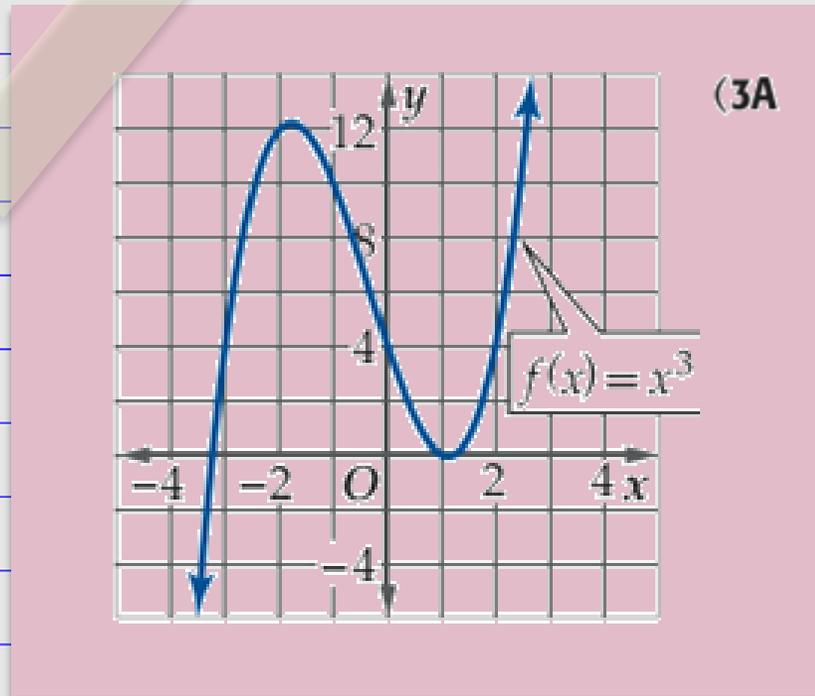
أي أن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ أو $\frac{4}{3}$.



$$1 + 2 = 3$$



تفقد من تفمك



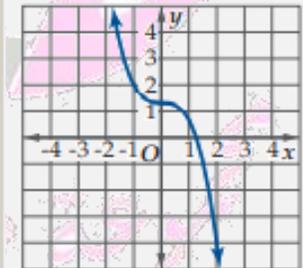


إرشادات للدراسة

تسمية المحورين في التمثيل البياني، عندما تُسمى المحورين في التمثيل البياني، فإن المتغير الذي يدل على المجال يكون على المحور x ، والمتغير الذي يدل على المدى يكون على المحور y . ويمكن أن تستعمل متغيرات كثيرة لكل من المجال والمدى. ولكن للتسهيل نسمي عادةً المحور الأفقي x والرأسي y .

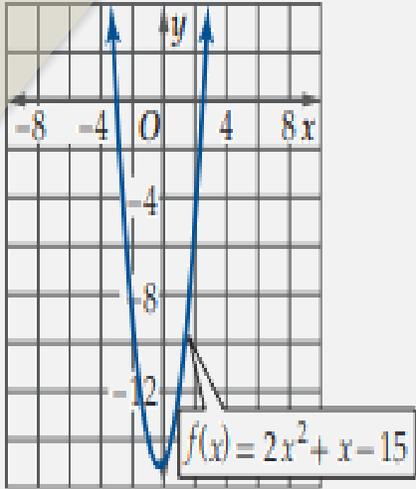
إرشادات للدراسة

تدريج المحورين x و y . إذا لم يظهر التدريج على المحورين x و y في التمثيل البياني، فذلك يعني أن التدريج بالوحدات. انظر المثال 3a.



تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار الدالة**، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور المعادلة**. ولإيجاد أصفار دالة f ، فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

مثال 4



استعمل التمثيل البياني المجاور، الذي يمثل الدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبية لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبرياً.

التقدير من المنحنى:

يتضح من التمثيل البياني أن مقطعي المحور x هما -3 و 2.5 تقريباً. لذا فإن صفري الدالة f هما -3 و 2.5 .

الحل جبرياً:

$$2x^2 + x - 15 = 0$$

$$(2x - 5)(x + 3) = 0$$

$$2x - 5 = 0 \quad \text{أو} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 2.5 \quad \text{أو} \quad x = -3$$

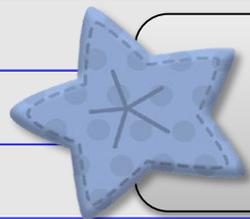
أي أن جذري المعادلة $2x^2 + x - 15 = 0$ هما -3 و 2.5 وهما صفرا الدالة f .

إيجاد الأصفار

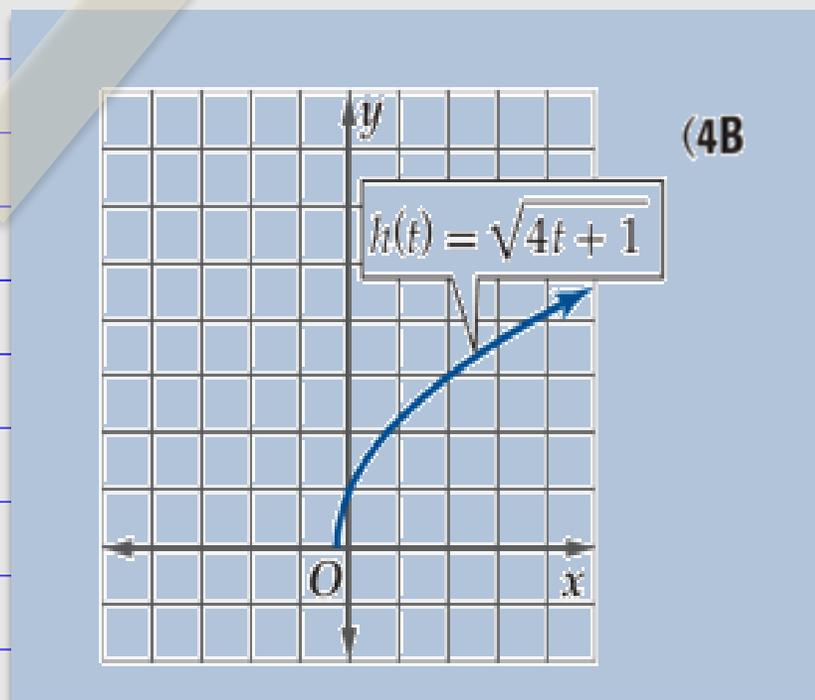
مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$



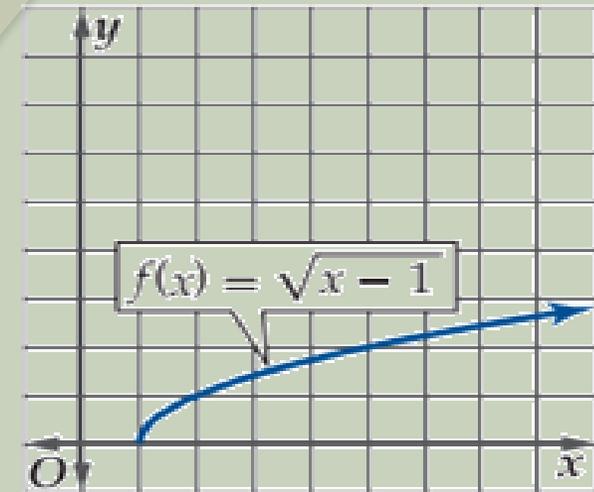
تحقق من تفكيرك





تطوير

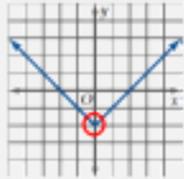
$$h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8 \quad (37)$$



تحليل الدالة بيانياً 1

مقطع y

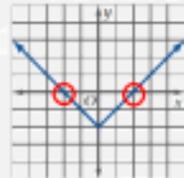
الإحداثي y لنقاط تقاطع منحنى
الدالة مع محور y
(قيم y تحت شرط $x = 0$)



$$y = -2$$

أصفار الدالة (مقطع x)

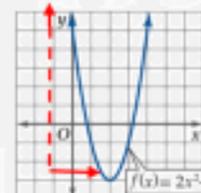
الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى
الدالة مع محور x
(قيم x تحت شرط $y = 0$)



$$x = 2, -2$$

المدى

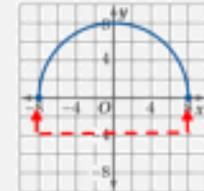
قيم y من أسفل التمثيل البياني
الى الأعلى مع حذف نقاط عدم
التعريف



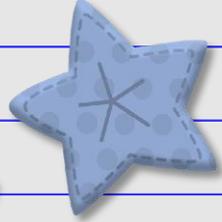
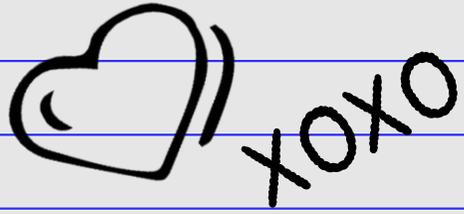
$$\text{المدى} = [-3, \infty)$$

المجال

قيم x من أقصى يسار التمثيل
البياني الى أقصى اليمين مع حذف
نقاط عدم التعريف



$$\text{المجال} = [-8, 8]$$



مقطع توضيحي



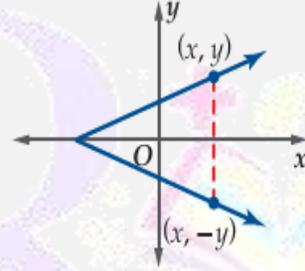
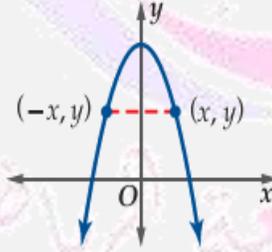
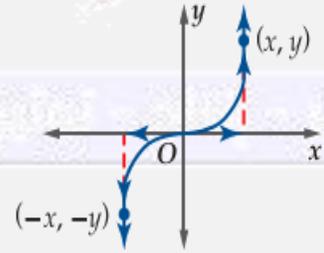
اختبارات التماثل



إرشادات للدراسة

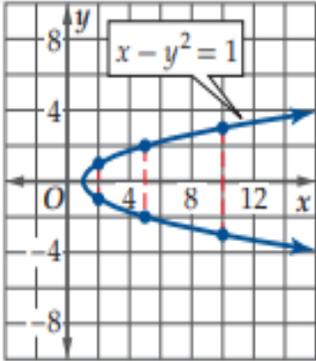
تماثل العلاقات والدوال
يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط. أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

مفهوم أساسي اختبارات التماثل

الاختبار الجبري	النموذج	اختبار التمثيل البياني
إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة .		يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضاً.
إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة .		يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور y ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضاً.
إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.		يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضاً.

مثال 5

استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
عزز إجابتك عدديًا، ثم تحقق منها جبريًا.



$$(a) \quad x - y^2 = 1$$

التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًا:

يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x :

x	2	2	5	5	10	10
y	1	-1	2	-2	3	-3
(x, y)	(2, 1)	(2, -1)	(5, 2)	(5, -2)	(10, 3)	(10, -3)

التحقق جبريًا:

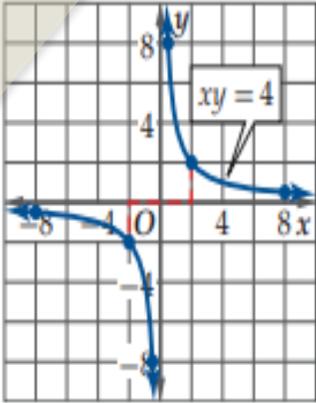
بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

اختبار التماثل

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 5



(b) $xy = 4$

التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًا:

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول نقطة الأصل:

x	-8	-2	-0.5	0.5	2	8
y	-0.5	-2	-8	8	2	0.5
(x, y)	$(-8, -0.5)$	$(-2, -2)$	$(-0.5, -8)$	$(0.5, 8)$	$(2, 2)$	$(8, 0.5)$

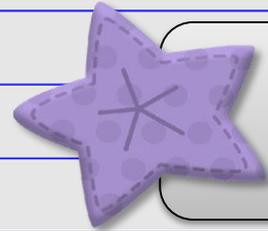
التحقق جبريًا:

بما أن المعادلة $4 = (-x)(-y)$ تكافئ $xy = 4$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

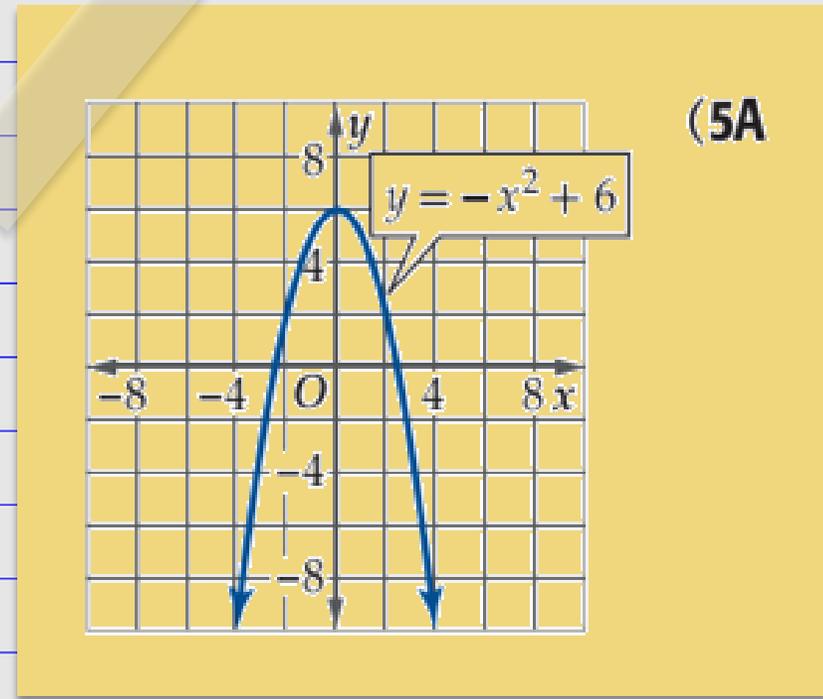
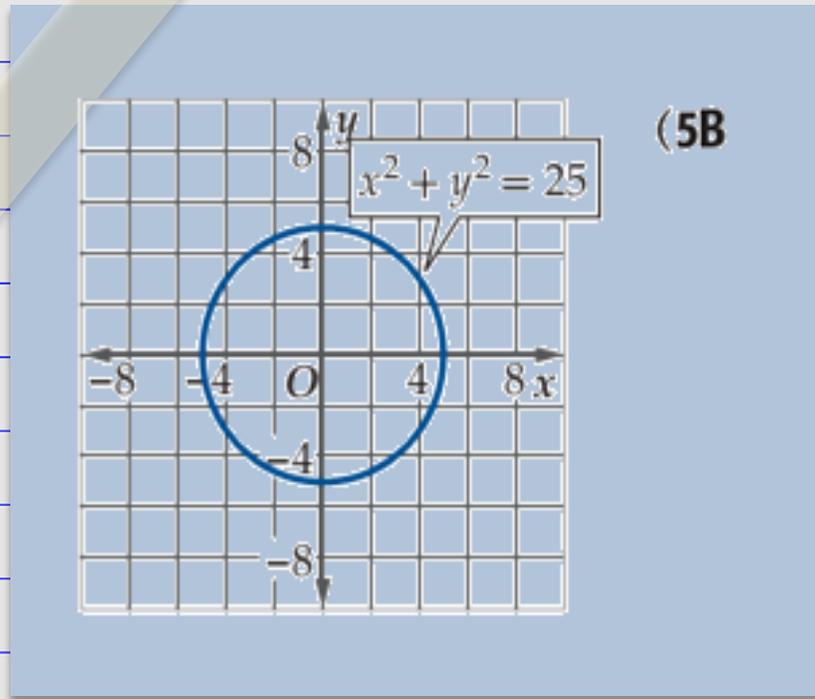
اختبار التماثل

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق



نتفق من نفسك



$$1 + 2 = 3$$

إرشادات للدراسة

الدوال الزوجية والدوال
الفردية،

قد تُظهر لك بعض
التمثيلات البيانية تماثلاً
والحقيقة غير ذلك؛ لذا
عليك التأكد من التماثل
جبرياً في كل مرة.

يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط؛ ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصان.

مفهوم أساسي	
الدوال الزوجية والدوال الفردية	
الاختبار الجبري	نوع الدالة
لكل x في مجال f ، فإن $f(-x) = f(x)$.	تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.
لكل x في مجال f ، فإن $f(-x) = -f(x)$.	تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.

مثال 6

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كل دالة مما يأتي بيانياً. ثم حلل منحناها لتحديد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبرياً.

$$f(x) = x^3 - 2x \quad (a)$$

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، لذا فهي دالة فردية، وللتحقق من ذلك جبرياً نجد:

عوّض $-x$ مكان x

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$$

بسّط

$$= -x^3 + 2x$$

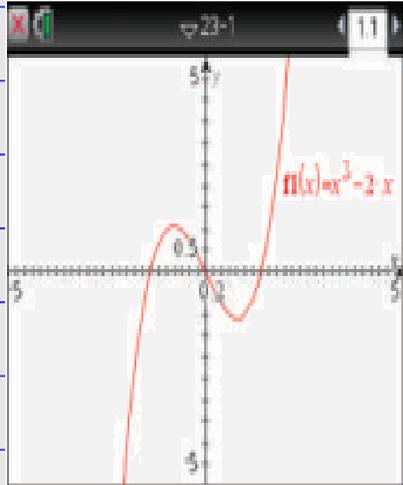
خاصية التوزيع

$$= -(x^3 - 2x)$$

$$f(x) = x^3 - 2x \text{ الدالة الأصلية}$$

$$= -f(x)$$

أي أن الدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.



تحديد الدوال الزوجية
والدوال الفردية

تطوير - إنتاج - توثيق

مثال 6

$$f(x) = x^4 + 2 \quad (b)$$

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y ، لذا فهي دالة زوجية، وللتحقق من ذلك جبرياً نجد:

$$f(-x) = (-x)^4 + 2 \quad \text{عوض } -x \text{ مكان } x$$

$$= x^4 + 2 \quad \text{بسط}$$

$$= f(x) \quad \text{الدالة الأصلية } f(x) = x^4 + 2$$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$.

$$f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x \quad (c)$$

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة ليست متماثلة حول المحور y وليست متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبرياً نجد:

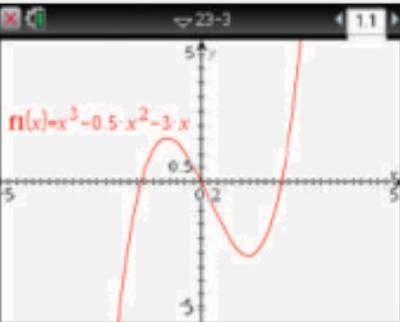
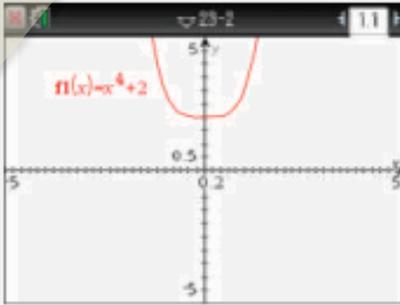
$$f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x) \quad \text{عوض } -x \text{ مكان } x$$

$$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x \quad \text{بسط}$$

$$\text{وبما أن } -f(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$$

$$\text{فإن } f(-x) \neq f(x) \text{، وكذلك } f(-x) \neq -f(x)$$

لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية.



تحديد الدوال الزوجية
والدوال الفردية

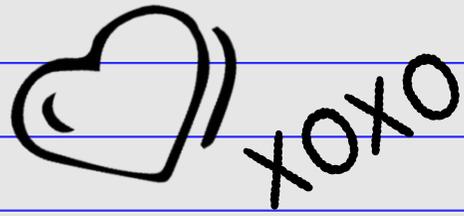
تطوير - إنتاج - توثيق

$$1 + 2 = 3$$

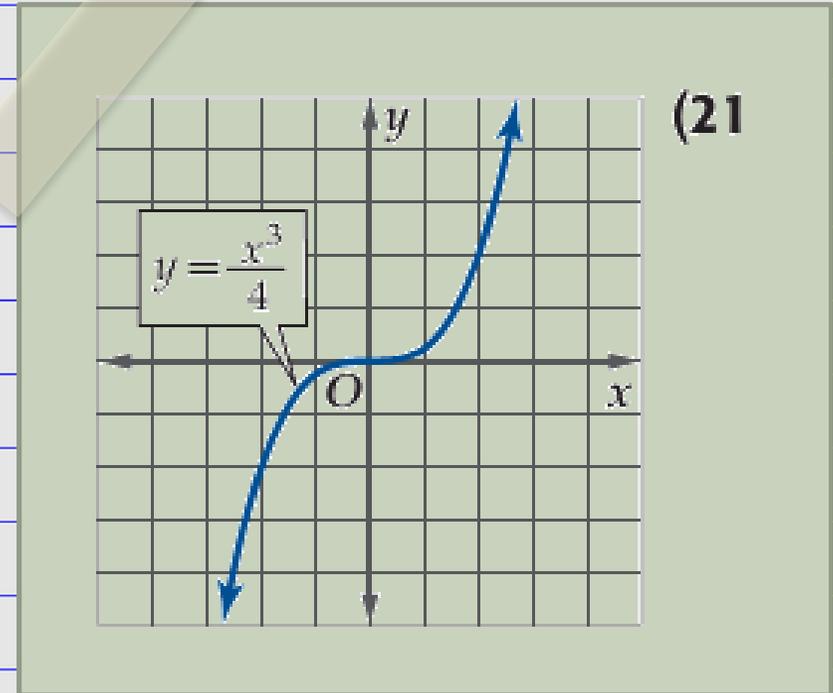


تفوق من تفكير

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \quad (6A)$$

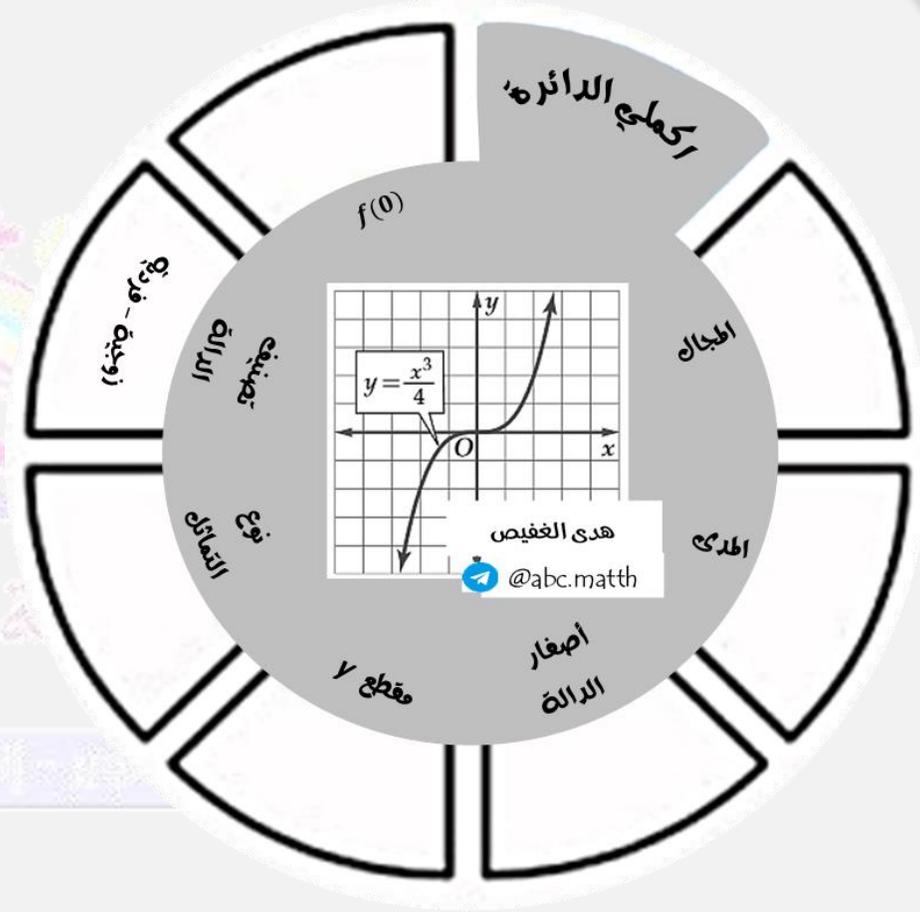
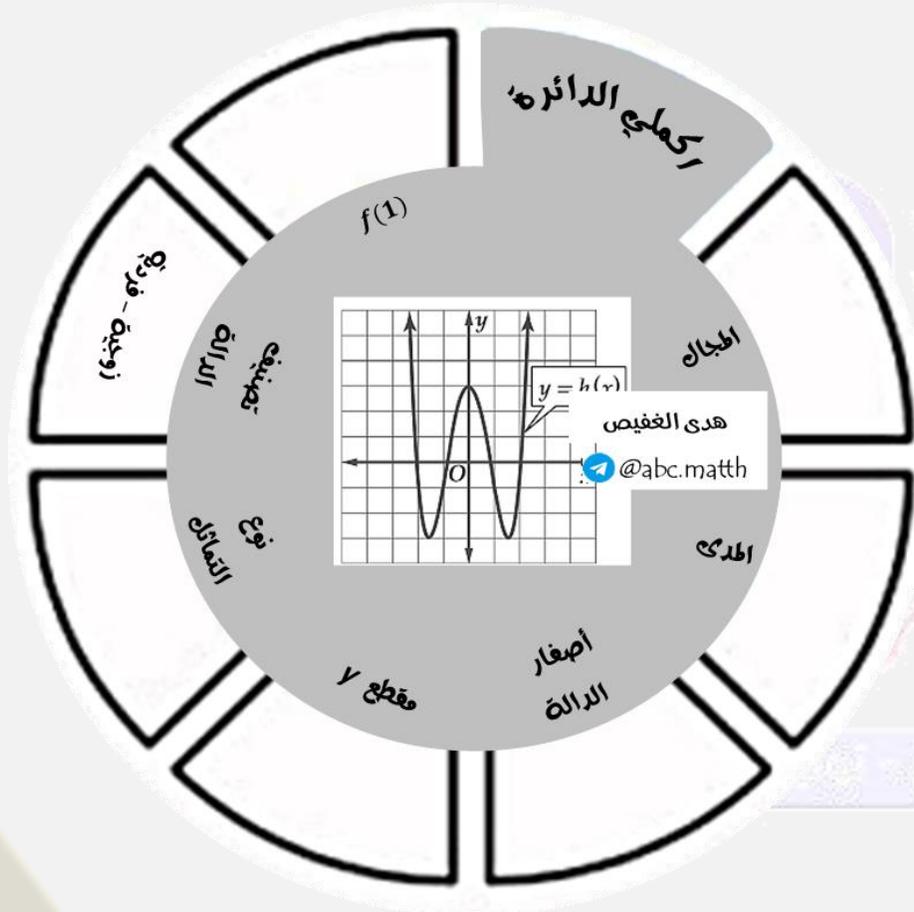


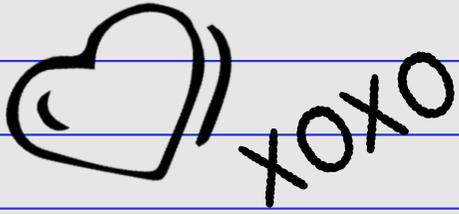
تطوير



العب واستنتج

$$1 + 2 = 3$$



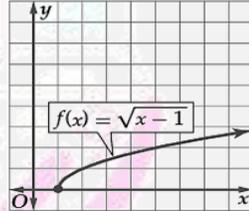


العب واستنتج

ضعي القصصات بالمكان المناسب

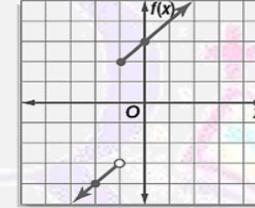


- $(-4, 4]$
- \mathcal{R}
- $[0, \infty)$
- $[2, \infty)$
- $(-\infty, -3) \cup [2, \infty)$
- \mathcal{R}
- $[-1, 6]$
- $[1, \infty)$



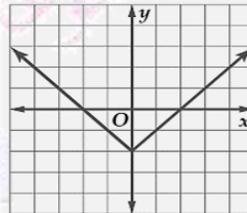
المدى

المجال



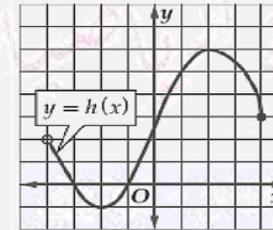
المدى

المجال



المدى

المجال



المدى

المجال

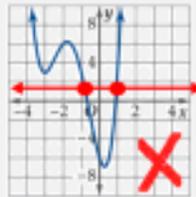
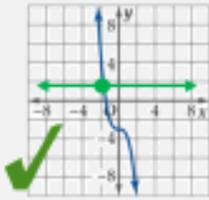
هدى الفقيص

@abc_matth

تحليل الدالة بيانياً 2

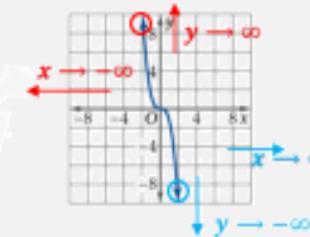
هل الدالة لها دالة عكسية؟!

إذا حققت اختبار الخط الأفقي



سلوك طرفي
التمثيل البياني

الدوال الزوجية والفردية



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

فردية

زوجية

إذا حققت العبارة: $f(-x) = -f(x)$

إذا حققت العبارة: $f(-x) = f(x)$

جدول التعلم



ماذا أعرف

Blank dotted line for writing.



ماذا أريد أن أعرف

Blank dotted line for writing.



ماذا تعلمت

Blank dotted line for writing.



كيف أنعم أكثر

Blank dotted line for writing.

الواجب المنزلي



مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - تطبيق

دعوة

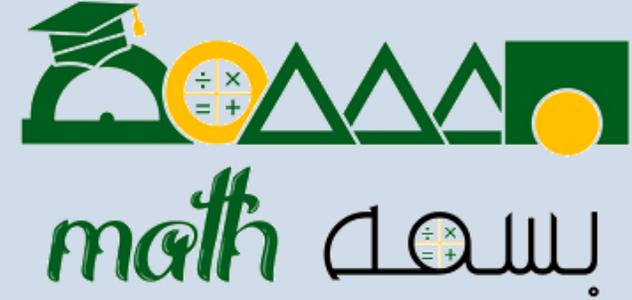
مجموعة رِفعة الرياضيات
مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

تطوير - إنتاج - توثيق



تصميم وإخراج الأستاذة : ابتسام الطاهري
عضو في مجموعة رفعة التعليمية .



الحسابات الإلكترونية :



تطوير - إنتاج - توثيق

