

المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

دليل المعلم

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

طبعة ١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

يوزع مجاناً ولا يباع

الرياضيات
الصف الأول الثانوي

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عمر محمد أبو غليون
عبدالحكيم عبدالله سليمان
يوسف سليمان جرادات
د. عبدالله محمد الجوعي
صلاح بن عبد الله الزيد
أحمد مصطفى سمارة
هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي
نخبة من المتخصصين

حول الغلاف
تسـقط أشـعة الشـمس المتوازية على الطبق الشمسي فترتد مكوِّنة زوايا متناظرة وأخرى متحالفة. تدرس هذه الزوايا في هذا الصف.



Original Title:

Geometry © 2010
By:
John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D

Contributing Authors
Jerry Cummins
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph. D
Arthur K. Wayman, Ph. D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

College Readiness
Robert Lee Kimball, Jr.

Graphing Calculator
Ruth M. Casey

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro, Ph.D

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

www.macmillanmh.com

www.obeikaneducation.com

Mc Graw Hill Education

العبيكان Obeikan

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل© ٢٠١٠م.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

أخي المعلم/ أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون مرشدًا لكم في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وتبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيًّا والمترابطة رأسيًّا، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل:

تم توزيع المقرر إلى فصول. ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخططًا للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. كما يقترح الدليل آلية لتعلم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة. ثم يقدم دعما للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها. ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس:

يقدّم الدليل أنشطة مقترحة تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، وبأساليب تدريس متنوعة، تساعد المعلم على تدريس كل درس. بعد ذلك يعرض الدليل الدرس بخطوات محددة هي:

التركيز: يبين ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس. كما يقدّم أمثلة إضافية للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة بحسب مستويات الطلاب تحقق أهداف الدرس.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آلية لمتابعة المطويات.
كما يقدّم الدليل في كل درس إجابات مفصّلة لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.
ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوز على اهتمامهم، ويلبي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم في أداء رسالتهم.

والله ولي التوفيق



الفهرس

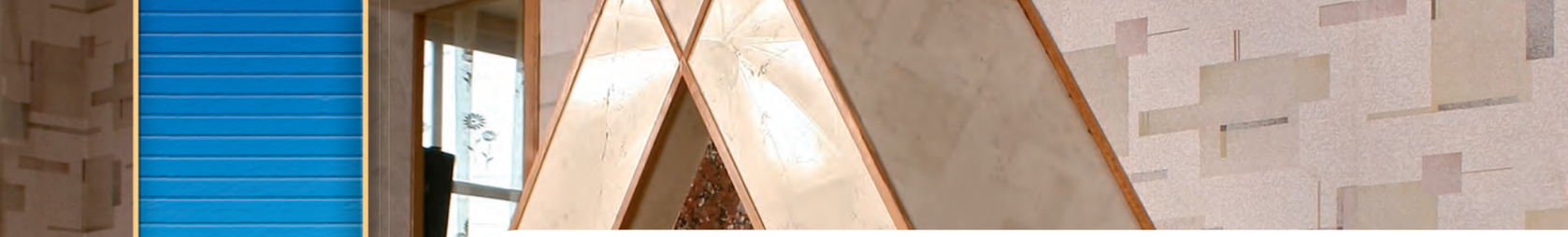
الفصل 5 الأشكال الرباعية

مخطط الفصل 5 ..... 10A
التقويم والمعالجة 10C
تنويع التعليم 10D
المحتوى الرياضي 10E
التهيئة للفصل 5 11
5-1 زوايا المضلع 12
توسع 5-1 معمل الجداول الإلكترونية: زوايا المضلع 20
5-2 متوازي الأضلاع 21
5-3 تمييز متوازي الأضلاع 29
اختبار منتصف الفصل 37
5-4 المستطيل 38
5-5 المعيّن والمربع 44
5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة 52
دليل الدراسة والمراجعة 61
اختبار الفصل 65
الإعداد للاختبارات 66
اختبار تراكمي 68
ملحق الإجابات 69A

الفصل 6 التشابه

مخطط الفصل 6 ..... 70A
التقويم والمعالجة 70C
تنويع التعليم 70D
المحتوى الرياضي 70E
التهيئة للفصل 6 71
6-1 المضلعات المتشابهة 72
6-2 المثلثات المتشابهة 80
اختبار منتصف الفصل 89
6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة 90
6-4 عناصر المثلثات المتشابهة 99
توسع 6-4 معمل الهندسة: الكسريّات 106
دليل الدراسة والمراجعة 108
اختبار الفصل 111
الإعداد للاختبارات 112
اختبار تراكمي 114
ملحق الإجابات 115A





الفهرس

الفصل 7 التحويلات الهندسية والتماثل

مخطط الفصل 7 ..... 116A
التقويم والمعالجة 116C
تنويع التعليم 116D
المحتوى الرياضي 116E
التهيئة للفصل 7 117
7-1 الانعكاس 118
7-2 الإزاحة (الانسحاب) 126
استكشاف 7-3 معمل الهندسة: الدوران 132
7-3 الدوران 133
اختبار منتصف الفصل 139
استكشاف 7-4 معمل الحاسبة البيانية: تركيب التحويلات الهندسية 140
7-4 تركيب التحويلات الهندسية 141
توسع 7-4 معمل الهندسة: التبليط 149
7-5 التماثل 154
7-6 التمدد 160
دليل الدراسة والمراجعة 167
اختبار الفصل 171
الإعداد للاختبارات 172
اختبار تراكمي 174
ملحق الإجابات 175A

الفصل 8 الدائرة

مخطط الفصل 8 ..... 176A
التقويم والمعالجة 176C
تنويع التعليم 176D
المحتوى الرياضي 176E
التهيئة للفصل 8 177
8-1 الدائرة ومحيطها 178
8-2 قياس الزوايا والأقواس 186
8-3 الأقواس والأوتار 194
8-4 الزوايا المحيطية 201
اختبار منتصف الفصل 208
8-5 المماسات 209
8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا 216
8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة 224
استكشاف 8-8 معمل الحاسبة البيانية: معادلة الدائرة 230
8-8 معادلة الدائرة 231
دليل الدراسة والمراجعة 236
اختبار الفصل 241
الإعداد للاختبارات 241
اختبار تراكمي 244
ملحق الإجابات 245A



الفصل 5

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (11)

	الدرس 5-1 حصتان	توسع 5-1 حصة واحدة	الدرس 5-2 حصتان
العنوان	**زوايا المضلع**	**معمل الجداول الإلكترونية: زوايا المضلع**	**متوازي الأضلاع**
الأهداف	• إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع واستعماله. • إيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع واستعماله.	• استعمال الجداول الإلكترونية لإيجاد قياسات الزوايا الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم.	• تعرف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وتطبيقها. • تعرف خصائص أقطار متوازي الأضلاع وتطبيقها.
المفردات	القطر		متوازي الأضلاع
التمثيلات المتعددة	ص (18)		ص (27)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (6) دون ضمن فوق	**المواد:** • حاسوب • برنامج الجداول الإلكترونية	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (7) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	جهاز العرض، ص (14)		السبورة التفاعلية، ص (23)
تنويع التعليم	ص (13, 15)		ص (23, 26)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الأشكال الرباعية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(13) حصة	(4) حصص	(17) حصة

الدرس 5-3 حصتان	الدرس 5-4 حصتان	الدرس 5-5 حصتان	الدرس 5-6 حصتان
تمييز متوازي الأضلاع	**المستطيل**	**المعيّن والمربع**	**شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة**
• تعرّف الشروط التي تؤكد أن شكلًا رباعيًا متوازي أضلاع، وتطبيقها. • إثبات أنّ أربع نقاط في المستوى الإحداثي تشكل رؤوس متوازي أضلاع.	• تعرف خصائص المستطيل وتطبيقها • تحديد ما إذا كان متوازي أضلاع مستطيلًا.	• تعرُّف خصائص المعين والمربع وتطبيقها. • تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيلاً أو معينًا أو مربّعًا.	• تعرّف خصائص شبه المنحرف وتطبيقها. • تعرّف خصائص شكل الطائرة الورقية وتطبيقها.
	المستطيل	المعيّن المربّع	شبه المنحرف قاعدتا شبه المنحرف ساقا شبه المنحرف زاويتا القاعدة شبه المنحرف المتطابق الساقين القطعة المتوسطة لشبه المنحرف شكل الطائرة الورقيّة
ص (35)	ص (42)	ص (50)	ص (59)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (8) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (9) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (10) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (11) دون ضمن فوق
مدونة، ص (32)	مدونة، ص (40)	تسجيل مرئي، ص (47)	السبورة التفاعلية، ص (55)
ص (31, 34, 36)	ص (39, 43)	ص (47, 48, 51)	ص (54, 56, 58)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (37)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (61–64)
- اختبار الفصل، ص (65)

التقويم والمعالجة

الفصل 5

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 5**	
	التهيئة للفصل 5 ، ص (11)	مخطط المعالجة، ص (11)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال	**مستوى المعالجة 1**
	تأكد	تدريبات المهارات، الفصل 5
	مسائل مهارات التفكير العليا	www.obeikaneducation.com
	مراجعة تراكمية	**مستوى المعالجة 2**
	أمثلة إضافية	تنويع التعليم
	تنبيه!	تنويع الواجبات المنزلية
	الخطوة 4، التقويم	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
	الاختبارات القصيرة ، ص(11, 12)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص(37)	**مستوى المعالجة 1**
	اختبار منتصف الفصل، ص(13)	تدريبات المهارات، الفصل 5
	www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com
		مستوى المعالجة 2
		تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص(61-64)	**مستوى المعالجة 1**
	اختبار الفصل، ص(65)	تدريبات المهارات، الفصل 5
	اختبار تراكمي، ص(66-69)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 2**
		تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 5**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص(15-20)	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 5
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص(21-22)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص(14)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص(23)	
	الاختبار التراكمي: الفصول 1-5 ، ص(24-26)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

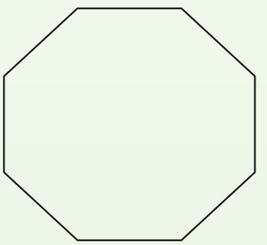
البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون والمكانيّون: اعرض صورًا لأغطية لحف تتكوّن من مضلع مكرر. قُصَّ أحد المضلعات المتكررة، ثم قسِّمه إلى مضلعات أخرى تكوِّن هذا المضلع. فمثلًا إذا كان الشكل المضلع سداسيًّا منتظمًا، فإنه يمكن تقسيمه إلى أشباه منحرفات متطابقة الساقين، أو معينات، أو مثلثات متطابقة الضلعين، أو مثلثات متطابقة الأضلاع، أو أشكال طائرة ورقيّة. وعلى الطلاب أن يعملوا فُرادى لتصميم أغطية لحف عليها صور لأشكال منبثقة من مضلع سداسي منتظم ويلوِّنوها. وحالما تنتهي التصاميم، اطلب إليهم أن يقيسوا الزوايا ويضعوا تخمينًا حول مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع (S)، وأن يستعملوا الصيغة $S = (n - 2)\cdot 180°$، حيث n عدد الأضلاع، ثم اطلب إليهم أن يكتبوا تقريرًا مختصرًا لتفسير حساباتهم، وأيّ خصائص للمضلعات المنتظمة مثل التماثل والتطابق التي تظهر في تصاميمهم، ثم اعرض تصاميم اللحف في غرفة الصف.

البديل 2 دون المتوسط دون

أعطِ الطلاب المسألة الآتية:

ما قياس كل زاوية داخليّة وكل زاوية خارجيّة في مضلع ثماني منتظم؟ وضّح طريقة تفكيرك بالكلمات أو الأعداد أو المعادلات أو الرسم.



البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب أن يبحثوا عن أعمال الفنان ايشر "Escher" في الإنترنت. وأن يقرؤوا عن الطرائق التي استعملها في دمج زوايا المضلعات، والانعكاس والدوران في أعماله. ثم اطلب إليهم أن يختاروا واحدًا من أعماله لتحليله، أو يتعاونوا لاستخراج إحدى رسوم Escher، وأن يكتبوا ملاحظات حول: لماذا وجدوا هذا الرسم مثيرًا ولافتًا للانتباه. ويجب أن يلاحظوا الخصائص الهندسية للعمل من حيث الأشكال والتماثلات والانعكاسات والدورانات.

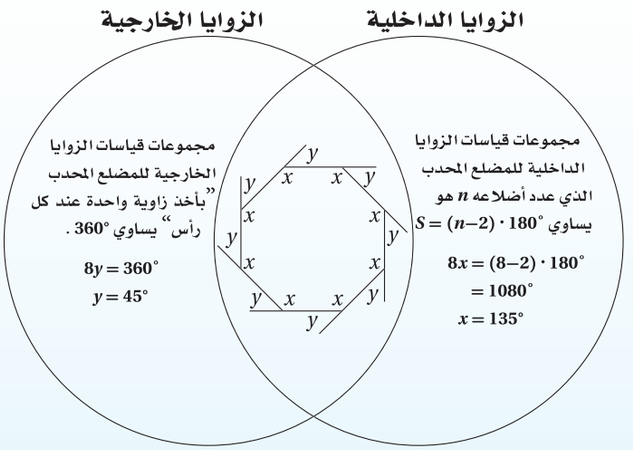
القراءة والكتابة بلغة الرياضيات

مهارة الدراسة

مهارة الدراسة

يمكن عمل شكل ڤن كنشاط تعاوني بعد دراسة موضوع ما في هذا الفصل.

أعطِ مجموعات من الطلاب لوحات ورقية كبيرة وأقلام تخطيط، واطلب إلى كل مجموعة اختيار موضوعين متشابهين من موضوعات الفصل، مثل مجموع الزوايا الداخلية والخارجية للمضلع، واطلب إليهم المقارنة بينها برسم شكل ڤن.



يسهم هذا النشاط وماشابهه في بناء استقلالية الطلاب من خلال استعمالهم الاستراتيجيات الخاصة بهم.

المحتوى الرياضي

الفصل 5

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 5

- استعمال مفاهيم وخصائص هندسية لحل مسائل في مجالات عملية مختلفة مثل الفن والعمارة.
- تطبيق الرياضيات في مواقف حياتية يومية، وفي أنشطة داخل المدرسة وخارجها وفي مجالات معرفية ومواضيع رياضية أخرى.
- التعبير عن الأفكار الرياضية باستعمال اللغة والأدوات الفعّالة والوحدات المناسبة والنماذج الرياضية البيانية أو العددية أو الحسية أو الجبريّة.

الفصل 5

- استعمال الأنماط العدديّة والهندسية لصياغة تعميمات حول الخصائص الهندسية متضمِّنة خصائص المضلعات.
- وضع تخمينات حول خصائص المضلعات الأساسية واختبارها.
- اشتقاق صيغ تتضمن الطول والميل ونقطة المنتصف واستعمالها.

مابعد الفصل 5

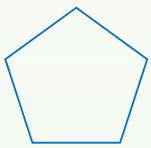
التهيئة للصف الثالث الثانوي

- استعمال خصائص القطوع المخروطية لوصف ظواهر طبيعية مثل خصائص انعكاس الضوء والصوت.
- استعمال مفهوم المتجهات لعمل نماذج لكميات تُحدد من خلال مقدارها واتجاهها.

ملخص الدروس

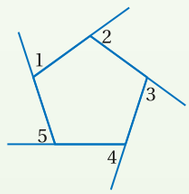
5-1 زوايا المضلع

تنص نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع على أنه إذا كان عدد أضلاع مضلع محدب، n ومجموع قياسات الزوايا الداخلية S، فإن $S = (n-2)\cdot 180°$. ويمكن استعمال هذه المعادلة لإيجاد قياس كل زاوية داخلية لمضلع منتظم. كما يمكن استعمالها لإيجاد عدد أضلاع مضلع إذا عُرف مجموع قياسات زواياه الداخلية.



$$n = 5$$
$$S = (n-2)\cdot 180°$$
$$= (5-2)\cdot 180° = 540°$$

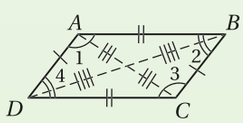
أما مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع محدب "بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس" فيساوي دائمًا 360°، وذلك بغض النظر عن عدد أضلاعه. وهذه هي نظرية مجموع الزوايا الخارجية.



$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360°$$

5-2 متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ولمتوازي الأضلاع عدة خصائص خاصة تساعد على تعريفه. الأولى: الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة، والزوايا المتقابلة متطابقة أيضًا. والثانية: الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة. والثالثة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع تكون قوائم. وأخيرًا: فإن قطري متوازي الأضلاع ينصِّف كل منهما الآخر، وكل قطر يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.



$$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$$
$$m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$$
$$m\angle 3 + m\angle 4 = 180°$$
$$m\angle 4 + m\angle 1 = 180°$$
$$\triangle ABC \cong \triangle CDA$$

5-3 تمييز متوازي الأضلاع

بالإضافة إلى تعريف متوازي الأضلاع بوصفه شكلًا رباعيًّا أضلاعه المتقابلة متوازية، توجد طرائق أخرى يمكن استعمالها لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. فإذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع. وإذا كانت كل زاويتين متقابلتين في شكل رباعي متطابقتين، فإنه متوازي أضلاع، وإذا كان قطرا الشكل الرباعي ينصِّف كل منهما الآخر، فإنه متوازي أضلاع. وإذا كان ضلعان متقابلان لشكل رباعي متوازيين ومتطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

ويكفي أن يحقق الشكل الرباعي واحدًا من هذه الشروط الخمسة حتى يكون متوازي أضلاع. ولا حاجة لإثبات جميع خصائص متوازي الأضلاع.

وإذا رُسم شكل رباعي في مستوى إحداثي، فيمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين وصيغة الميل وصيغة نقطة المنتصف لتحديد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. حيث تستعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كانت الأضلاع المتقابلة متوازية أم لا. أما صيغة المسافة بين نقطتين، فتستعمل لاختبار تطابق الأضلاع المتقابلة، أما صيغة نقطة المنتصف للقطرين، فتستعمل لاختبار ما إذا كان القطران ينصِّف كل منهما الآخر، أي لكل منهما نقطة المنتصف نفسها.

5-4 المستطيل

المستطيل هو شكل رباعي جميع زواياه قوائم. ولأن كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان، فإن للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع. وله خصائص أخرى خاصة به. فمثلًا، قطرا المستطيل متطابقان، ويمكن أن يستعمل هذا لإثبات أن متوازي الأضلاع مستطيل.

وإذا رُسم شكل رباعي في مستوى إحداثي، فإنه يمكن استعمال صيغة الميل للتحقق من كون الأضلاع المتجاورة متعامدة، فإذا كانت متعامدة يكون الشكل الرباعي مستطيلًا. كما يمكن استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإثبات أن شكلًا رباعيًّا مستطيل، فيمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لحساب طولي القطرين، فإذا كانا متطابقين فإن متوازي الأضلاع مستطيل.

5-5 المعين والمربع

المعين هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة. ونظرًا لأن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإن المعين متوازي أضلاع. لذلك فجميع خصائص متوازي الأضلاع تنطبق على المعين. وللمعين أيضًا خصائص خاصة به. فقطراه متعامدان. وعكس هذه النظرية صحيح أيضًا. فإذا كان قطرا متوازي الأضلاع متعامدين يكون معينًا، وقطر المعين ينصِّف الزاويتين عند طرفيه.

وإذا كان شكل رباعي معينًا ومستطيلًا فإنه مربع. فالمربع حالة خاصة جدًّا، وله جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين. ومن المهم ملاحظة أن كل مربع معين ولكن ليس بالضرورة أن يكون كل معين مربعًا.

5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان فقط متوازيان. يُسمّى الضلعان المتوازيان قاعدتي شبه المنحرف والضلعان غير المتوازيين ساقَيهِ. وكل قاعدة وساق يشكِّلان زاوية قاعدة. وإذا كان ساقا شبه المنحرف متطابقين، فإنه متطابق الساقين. وزاويتا قاعدة شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقتان. وقطراه متطابقان أيضًا.

وتُسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ساقي شبه المنحرف قطعة متوسطة. والقطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًّا من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين. وهذه العلاقة صحيحة لكل شبه منحرف، وليس لمتطابق الساقين فقط.

وشكل الطائرة الورقية هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة، كما يوجد فيه زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين. كما أن قطري شكل الطائرة الورقية متعامدان.

مشروع الفصل

وقت اللعب:

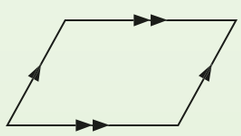
يستعمل الطلاب ما تعلموه من تصنيفات مختلفة للأشكال الرباعيّة لتصميم لوحة لعب باستعمال هذه الأشكال.

- نظِّم الطلاب في مجموعات ثنائية، واطلب إليهم استعمال أنواع مختلفة من الأشكال الرباعيّة لتصميم لوحة لعب خاصة بهم. واطلب إليهم أن يحدّدوا الهدف للعبتهم، ويضعوا تعليمات ممارسة اللعبة والفوز بها.
- بعد إكمال الخطوة السابقة وتجهيز لوحة اللعب، اطلب إلى الطلاب تصنيف الأشكال الرباعية التي استعملوها في لوحاتهم، ثم اطلب إليهم أن يضعوا معايير لتصنيفات جديدة وتنظيم الأشكال الرباعيّة على أساس هذه المعايير.
- وأخيرًا، اطلب إلى كل مجموعة أن تعرض لوحة اللعب التي صمَّمتها وتعليمات اللعبة، وما توصلت إليه في بحثها أمام طلاب الصف، ثم تتبادل المجموعات لوحات اللعب، وتلعب كل مجموعة لعبة مجموعة أخرى.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.

مثال:



سؤال: ما العلاقة بين أطوال الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع؟ وما العلاقة بين قياسات الزوايا المتقابلة فيه بحسب توقعك؟

إجابة ممكنة: متطابقة

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب عمل مطوياتهم وعَنْوَنتها كما هو موضّح.

غرضها: يدوِّن الطلاب ملاحظاتهم حول دروس هذا الفصل.

وظيفتها:

يستعمل الطلاب مطوياتهم لتدوين ملاحظاتهم وتعريفات المصطلحات وتسجيل المفاهيم وتطبيق خصائص الأشكال الرباعيّة. شجِّع الطلاب على استعمال البيانات المسجّلة لمقارنة الأشكال الرباعية الستة التي يدرسونها في هذا الفصل.

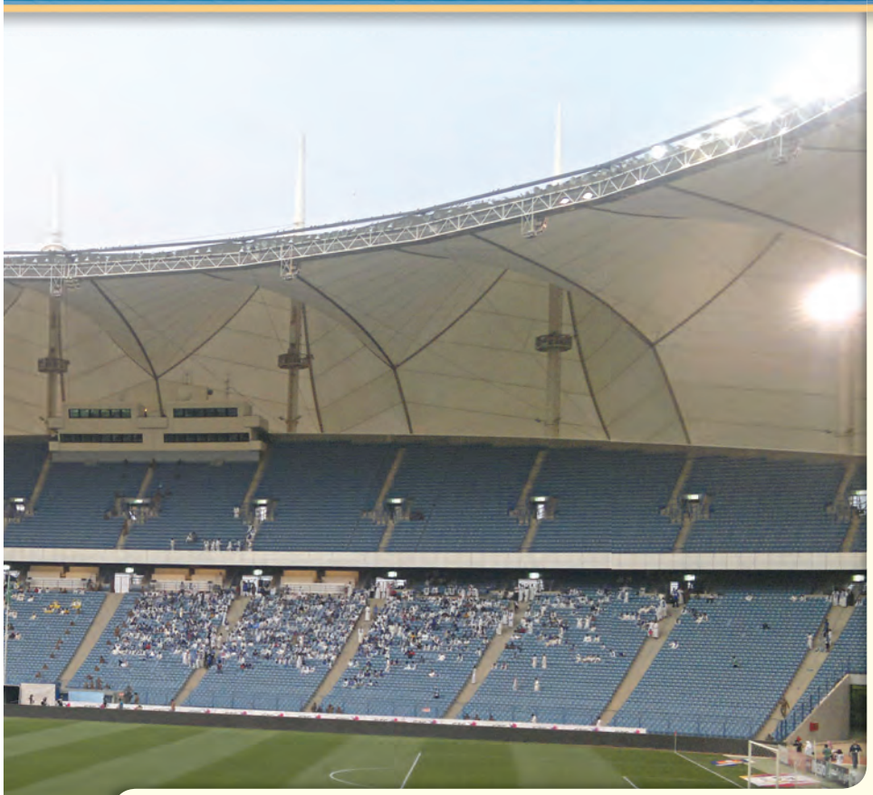
وقت استعمالها:

أوراق المطويّة	الدروس
زوايا المضلع	5–1
متوازي الأضلاع	5–2, 5–3
المستطيل	5–4
المربع والمعين	5–5
شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية	5–6

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (9) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.



فيما سبق:
درستُ تصنيف المضلعات وميَّزت خصائصها وطبَّقتُها.

والآن:
- أجد مجموع قياسات كل من الزوايا الداخلية والخارجيّة لمضلع، وأستعملها.
- أتعرف خصائص الأشكال الرباعية، وأطبّقها.
- أقارن بين الأشكال الرباعيّة.

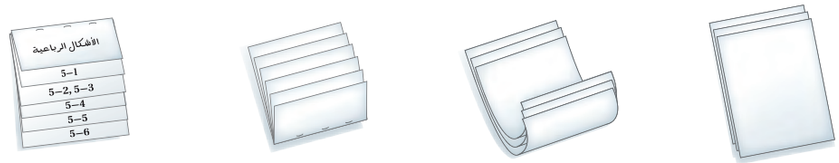
لماذا؟

أدوات رياضية:
تُستعمل خصائص الأشكال الرباعيّة لإيجاد قياسات زوايا أو أطوال أضلاع، كقياس زوايا الملاعب وتخطيطها.

المطويات منظم أفكار

الأشكال الرباعيّة: اعملْ هذه المطويَّةَ لتساعدَكَ على تنظيم معلوماتِكَ حول الفصل 5 . ابدأْ بثلاثِ أوراقِ A4 .

1. ضَعْ 3 أوراقٍ بعضها فوق بعض بحيثُ تبعد كل ورقة عن الأخرى 2 cm
2. اطوِ الأوراقَ بحيث تكون لحوافها الظاهرة العرض نفسه.
3. ثَبِّتِ الأوراقَ على طُولِ خطِّ الطَّيِّ.
4. اُكتبْ عنوان الفصل وأرقام الدُّروس، وسجِّلْ مُلاحظاتِكَ.



التهيئة للفصل 5

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

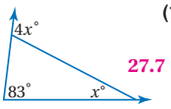
البديل 1

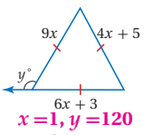
أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

(يستعمل مع الدروس 1–5، 2–5، 3–5، 5–6)

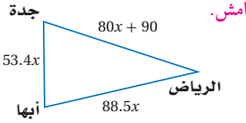
أوجد قيم x, y في كل مما يلي مقرَّبًا إلى أقرب عُشر:

1) 

2) 

$x = 1, y = 120$

3) **مدن:** تمثل مواقع كل من الرياض وجدة وأبها رؤوس مثلث كما في الشكل أدناه. إذا كان محيط هذا المثلث 2198 km، فأوجد المسافة الجوية بين كل من المدن الثلاث. انظر الهامش.



(يستعمل مع الدروس 3–5، 4–5، 5–5، 6–5)

حدِّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يلي:

4) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$ متوازيان

5) $A(4, 2), B(1, -3), C(-3, 5), D(2, 2)$ متعامدان

6) $A(-8, -7), B(4, -4), C(-2, -5), D(1, 7)$ غير متوازيين ولا متعامدين

7) **حدائق:** صمَّم مهندس رسمًا لحديقة رباعيّة الشكل، إحداثيات رؤوسها: $A(-2, 1), B(3, -3), C(5, 7), D(-3, 4)$، إذا رسم ممرين يقطعانها $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$، فهل الممران متعامدان؟ فسّر إجابتك. انظر الهامش.

(يستعمل مع الدروس 3–5، 4–5، 5–5، 6–5)

أوجد المسافة بين كل نقطتين، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة الواصلة بينهما في كل مما يلي:

8) $J(-6, 2), K(-1, 3)$ $\sqrt{26}$; $(-3.5, 2.5)$

9) $R(2, 5), S(8, 4)$ $\sqrt{37}$; $(5, 4.5)$

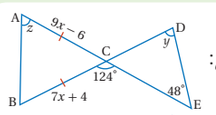
10) **مسافات:** وقف شخص عند النقطة $T(80, 20)$ من مستوى إحداثي، ورغب في الانتقال إلى كل من $U(20, 60)$ وَ $V(110, 85)$، فما أقصر مسافة يمكن أن يقطعها الشخص؟ فسّر إجابتك.

ينتقل من T إلى V ثم إلى U؛ لأن $TU \approx 72.1, TV \approx 71.6$

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد x, y, z في الشكل الآتي:



معطى	$AC = BC$
بالتعويض	$9x - 6 = 7x + 4$
بالطرح	$2x = 10$
بالتبسيط	$x = 5$
نظريّة الزاوية الخارجية للمثلث	$124° = y + 48$
بالتبسيط	$y = 76°$
نظريّة الزاوية الخارجية للمثلث	$124° = z + z$
بالجمع	$124° = 2z$
بالتبسيط	$z = 62°$

مثال 2

إذا كان $A(-2, 5), B(4, 17), C(0, 1), D(8, -3)$، فحدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{17 - 5}{4 - (-2)} = \frac{12}{6} = 2$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{-3 - 1}{8 - 0} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

بما أن ميلي المستقيمين غير متساويين، فهما غير متوازيين.

حاصل ضرب ميلي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ $2(-\frac{1}{2}) = -1$

وبما أن حاصل ضرب ميليهما يساوي -1، فهما متعامدان.

مثال 3

أوجد المسافة بين النقطتين $J(2, -1), K(7, 1)$، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

صيغة المسافة بين نقطتين $JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$

بالتعويض $= \sqrt{(7 - 2)^2 + (1 - (-1))^2}$

بالتبسيط $= \sqrt{29}$

صيغة نقطة المنتصف $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{2 + 7}{2}, \frac{-1 + 1}{2}\right)$

$= (4.5, 0)$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا ... فعد إلى"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،
فعد إلى	تدريبات المهارات، الفصل (3)، ص (13, 18)
	مشروع الفصل، ص (10)
	www.obeikaneducation.com

المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فعد إلى	تدريبات إعادة التعليم، الفصل (3)، ص (11-12, 16-17)
	www.obeikaneducation.com

إجابات:

3) الرياض – جدة: 850 km تقريبًا،

الرياض – أبها: 841 km تقريبًا،

جدة – أبها: 507 km تقريبًا

7) نعم؛ لأن ميل AC: $\frac{1-7}{-2-5} = \frac{6}{7}$

ميل BD: $\frac{-3-4}{3-(-3)} = -\frac{7}{6}$

$\frac{6}{7} \cdot \left(\frac{-7}{6}\right) = -1$

بما أن حاصل ضرب ميليهما يساوي -1 فهما متعامدان.

5-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-1

تعرف أسماء المضلعات وتصنيفها.

الدرس 5-1

إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع واستعماله.

إيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع واستعماله.

ما بعد الدرس 5-1

تعرّف خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وتطبيقها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- ما عدد الزوايا الداخليّة لكل خلية؟ 6
- ماذا نستفيد من كون الخلية على شكل سداسي منتظم بالنسبة لقياس الزوايا الداخلية فيها؟ بما أن الشكل سداسي منتظم، فإن جميع قياسات زواياه الداخلية متساوية.
- قارن بين الزوايا الداخليّة لكل خليّة، والزوايا الداخليّة لجميع الخلايا. الزوايا الداخليّة لكل خليّة متساوية في القياس. وجميع الخلايا متطابقة، إذن قياسات الزوايا الداخليّة لجميع الخلايا متساوية.
- إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع السداسي يساوي 720°، فما قياس كل زاوية داخلية لخلية النحل؟ 120°

مصادر الدرس 5-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (13)	• تنويع التعليم، ص (13, 15)	• تنويع التعليم، ص (13, 15)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (6)	• كتاب التمارين، ص (6)	• كتاب التمارين، ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

5-1 زوايا المضلع

Angles of Polygon

فيما سبق:

درستُ أسماء المضلعات وتصنيفها.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع، وأستعمله.
- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع، وأستعمله.

المفردات:

القطر
diagonal

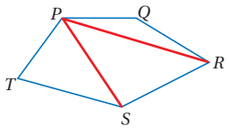
www.obeikaneducation.com

لماذا؟



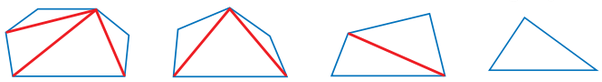
تنتج عاملات النحل اليافعة شمعًا تشكّله بعناية نحلات أخريات على صورة خلايا سداسيّة. ومع أنّ سُمْكَ جدران الخلايا 0.1 mm، إلّا أنّها تتحمّل ثقلًا يعادل 25 مثل وزنها. وتشكّل جدران الخلايا الزاوية نفسها عند كل التقاء. وقياس هذه الزاوية يساوي قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع: **قطر** المضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين أي رأسين غير متتاليين فيه.



رأسا المضلع $PQRST$ غير التاليين للرأس P هما R, S؛ لذا فالمضلع $PQRST$ له قطران من الرأس P هما $\overline{PR}, \overline{PS}$. لاحظ أن هذين القطرين يقسمان الشكل الخماسي إلى ثلاثة مثلثات.

مجموع قياسات زوايا المضلع يساوي مجموع قياسات زوايا المثلثات التي تتشكّل عند رسم جميع الأقطار الممكنة من أحد الرؤوس.



مثلث — رباعي — خماسي — سداسي

بما أن مجموع قياسات زوايا المثلث 180°، فإنّه يمكننا إنشاء جدول والبحث عن نمط لإيجاد مجموع قياسات زوايا أي مضلع محدّب.

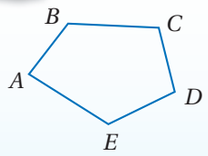
المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
مثلث	3	1	$180^\circ\ (1) = 180^\circ$
رباعي	4	2	$180^\circ\ (2) = 360^\circ$
خماسي	5	3	$180^\circ\ (3) = 540^\circ$
سداسي	6	4	$180^\circ\ (4) = 720^\circ$
ذو n من الأضلاع	n	$n-2$	$180^\circ\ (n-2)$

وهذا يقودنا إلى النظرية الآتية :

نظرية 5.1 مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدّب عدد أضلاعه n يساوي $S = (n-2) \cdot 180^\circ$.



مثال:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E = (5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

سوف تبرهن النظرية 5.1 للثماني في السؤال 39

مراجعة المفردات

المضلع: هو شكل مغلق، يتكوّن من ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر، تلتقي كل قطعة بطرفي قطعتين أخريين من المضلع، ولا تقع أي قطعتين منها على استقامة واحدة، وتكون رؤوس المضلع هي أطراف القطع المستقيمة فيه. أما قطر المضلع فهو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين غير متتاليين فيه.

مراجعة المفردات

الزاوية الداخلية: هي الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين في مضلع وتقع داخله.

يمكنك استعمال النظرية 5.1 لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع والقياسات المجهولة لزواياه.

مثال 1 إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع

a) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب.

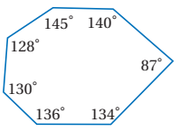
السباعي المحدب له سبعة أضلاع. استعمل النظرية 5.1 ؛ لإيجاد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

$(n-2)\cdot 180^\circ = (7-2)\cdot 180^\circ$ $\quad n=7$

$= 5\cdot 180^\circ = 900^\circ$ بالتبسيط

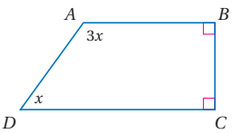
إذن فمجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب يساوي 900°.

تحقق: ارسم سباعيًّا محدّبًا، واستعمل المنقلة لقياس كل زاوية داخليّة مقربًا إلى أقرب درجة، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.



✓ $128^\circ+145^\circ+140^\circ+87^\circ+134^\circ+136^\circ+130^\circ = 900^\circ$

b) جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للرباعي المجاور.



الخطوة 1: أوجد قيمة x.

بما أن للشكل الرباعي 4 زوايا، فإن مجموع قياسات زواياه الداخليّة يساوي $(4-2)\cdot 180 = 360$.

$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة

$3x + 90^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ$ بالتعويض

$4x + 180^\circ = 360^\circ$ بتجميع الحدود المتشابهة

$4x = 180^\circ$ بطرح 180° من كلا الطرفين

$x = 45^\circ$ بقسمة كلا الطرفين على 4

الخطوة 2: استعمل قيمة x لإيجاد قياس كل زاوية.

$m\angle A = 3x = 3(45^\circ) = 135^\circ$

$m\angle B = 90^\circ$

$m\angle C = 90^\circ$

$m\angle D = x = 45^\circ$

تحقق: اكتب قياسات الزوايا الداخلية للرباعي، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.

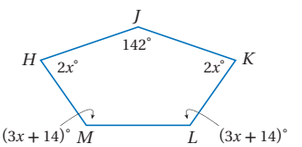
$90^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 3(45^\circ) = 135^\circ$

✓ $90^\circ + 90^\circ + 45^\circ + 135^\circ = 360^\circ$

تحقق من فهمك

1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب. 1080°

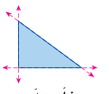
1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



$m\angle H = 74^\circ$, $m\angle K = 74^\circ$, $m\angle L = 125^\circ$, $m\angle M = 125^\circ$ (1B

مراجعة المفردات

المضلع المحدّب: يكون المضلع محدبًا إذا لم يحتوِ امتداد أي من أضلاعه نقاطًا داخله، وبعكس ذلك يكون مقعرًا.


مضلع محدّب


مضلع مقعر

إرشادات للدراسة

المضلع: عند ذكر كلمة مضلع في هذا الفصل فإننا نعني المضلع المحدّب.

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع

الأمثلة 3-1 تبيّن كيفية إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع باستعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلّع.

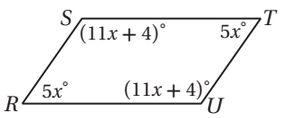
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **a)** أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للتساعي المحدّب. 1260°

b) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لمتوازي الأضلاع $RSTU$.



$m\angle R = m\angle T = 55^\circ$;
$m\angle S = m\angle U = 125^\circ$

إرشادات للمعلم الجديد

الحسّ الرياضي: ذكِّر الطلاب بأنهم إذا نسوا صيغة مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع، يمكنهم رسم جميع الأقطار الممكنة من أحد الرؤوس، ثم ضرب عدد المثلثات الناتجة في 180°. قدّم لهم مثالًا باستعمال مضلع خماسي أو سداسي.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

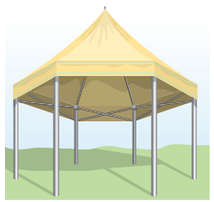
المتعلمون المنطقيّون: اطلب إلى الطلاب أن يستعملوا مسطرة لرسم مضلع غير منتظم له خمسة أضلاع أو أكثر، واطلب إليهم أن يستعملوا منقلة لإيجاد قياس نصف زواياه الداخليّة وزواياه الخارجيّة عند الرؤوس الأخرى، واطلب إليهم أن يتبادلوا رسومهم ويجدوا قياسات الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية الباقية دون استعمال المنقلة، ثم يعيدوا الرسوم إلى أصحابها الأصليين؛ ليتحققوا من الإجابات باستعمال المنقلة.

تذكّر أن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع لإيجاد قياس الزاوية الداخلية لأي مضلع منتظم.

مراجعة المفردات

المضلع المنتظم: هو مضلع محدّب جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه متطابقة.

مثال 2 من واقع الحياة — قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم



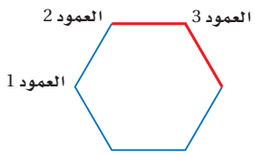
مظلة: في المنظر العلوي للمظلة المجاورة، تشكّل الأعمدة رؤوس مضلع سداسي منتظم. أوجد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي من أركان المظلة.

افهم:

المعطيات: منظر علوي لمظلة سداسية منتظمة الشكل.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية التي تشكل عند أي ركن من أركان المظلة.

ارسم شكلًا يمثّل المنظر العلوي للمظلة.



الزاوية التي تتشكّل عند أي من أركان المظلة هي زاوية داخليّة لسداسي منتظم.

خطط: استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسداسي. وبما أن الزوايا الداخلية للسداسي المنتظم متطابقة، فإن قياس كل زاوية داخلية يساوي ناتج قسمة المجموع على عدد الزوايا.

حل: أولًا: أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة.

$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$ — صيغة مجموع قياسات الزوايا الداخلية

$= (6 - 2) \cdot 180^\circ$ — $n = 6$

$= 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ — بالتبسيط

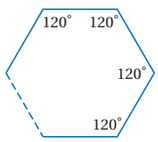
ثانيًا: أوجد قياس كل زاوية داخليّة.

$\frac{\text{مجموع قياسات الزوايا الداخلية}}{\text{عدد الزوايا الداخلية}} = \frac{720^\circ}{6}$ — بالتعويض

$= 120^\circ$ — بالقسمة

إذن قياس الزاوية المتكوّنة عند كل ركن يساوي 120°.

تحقق: للتحقق من أنّ هذا القياس صحيح، استعمل المسطرة والمنقلة لرسم سداسي منتظم قياس زاويته الداخليّة 120°.



سيرتبط الضلع الأخير بنقطة البداية لأول قطعة مستقيمة رُسمت. ✓

تحقق من فهمك

2A) سجاد: أوجد قياس الزاوية الداخلية لسجادة على شكل ثماني منتظم. 135°

2B) نوافير: تزيِّن النوافير الأماكن العامة، ويقام بعضها على شكل مضلعات منتظمة. أوجد قياس الزاوية الداخلية لنافورة على شكل تساعي منتظم. 140°

التعليم باستعمال التقنيات

جهاز العرض: استعمل برمجية هندسية لرسم عدّة مضلعات. واطلب إلى الطلاب أن يتناوبوا في قياس الزوايا الداخليّة، وإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل مضلع. واطلب إليهم أن يكتبوا ملخصًا لنتائجهم، ويشرحوا ذلك لطلاب الصف. احفظ أعمالهم ووزّعها على طلاب الصف.

مثال إضافي

2 فن العمارة: صُمّم مركز تجاري بحيث تتلاقى خمس ممرات فيه عند ساحة الطعام على شكل مضلع خماسي منتظم. أوجد قياس إحدى الزوايا الداخلية لهذا المضلع. 108°



تنبيه!

الزوايا الداخليّة: يجب على الطلاب أن يتأكدوا من المعلومة المطلوبة في السؤال. هل السؤال يطلب قياس زاوية داخليّة واحدة، أم مجموع قياسات الزوايا الداخليّة؟

يمكنك أيضًا استعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع لإيجاد عدد أضلاع مضلع منتظم إذا عُلم قياس زاوية داخلية له.

مثال 3 إيجاد عدد الأضلاع إذا عُلم قياس زاوية داخليّة

إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي $135°$، فأوجد عدد أضلاعه .

افترض أن عدد أضلاع المضلع يساوي n. وبذلك يكون مجموع قياسات زواياه الداخليّة $135n$ ؛ لأن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. وبناءً على نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة يمكن التعبير أيضًا عن مجموع قياسات الزوايا الداخليّة بالعبارة $S = (n - 2) \cdot 180°$.

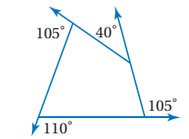
$135°n = (n - 2) \cdot 180°$	كتابة معادلة
$135°n = 180°n - 360°$	خاصية التوزيع
$-45°n = -360°$	بطرح $180n$ من كلا الطرفين
$n = 8$	بقسمة كلا الطرفين على -45

إذن للمضلع 8 أضلاع.

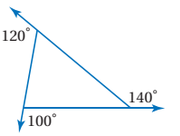
تحقق من فهمك

3) إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي $144°$، فأوجد عدد أضلاعه. **10 أضلاع**

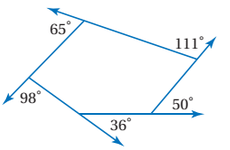
مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع: هل توجد علاقة بين عدد أضلاع مضلع محدّب ومجموع قياسات زواياه الخارجية؟ انظر المضلعات أدناه التي أُعطي في كل منها قياس زاوية خارجية عند كل رأس.



$105° + 110° + 105° + 40° = 360°$



$120° + 100° + 140° = 360°$



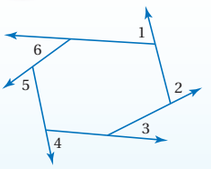
$65° + 98° + 36° + 50° + 111° = 360°$

لاحظ أنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس في كل حالة يساوي $360°$. وتقودنا هذه الملاحظة إلى النظرية الآتية :

نظرية 5.2 مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المحدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.



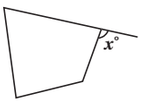
مثال:

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 360°$

ستبرهن نظرية 5.2 في السؤال 40

مراجعة المفردات

الزاوية الخارجيّة: الزاوية الخارجية لمضلع محدب هي زاوية محصورة بين أحد أضلاعه وامتداد ضلع آخر.



إرشادات للدراسة

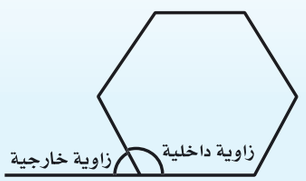
قياس الزاوية الخارجية: قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n يساوي $\frac{360°}{n}$

مثال إضافي

3 إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي $150°$، فأوجد عدد أضلاعه. 12 ضلعًا

المحتوى الرياضي

الزوايا الخارجيّة: يمكن إيجاد قياس زاوية خارجية لمضلع باستعمال نظريّة الزاويتين المتكاملتين. فإذا عُلم قياس زاوية داخلية لمضلع، فإن قياس الزاوية الخارجية للمضلع عند الرأس نفسه يساوي الفرق الموجب بين $180°$ (قياس الزاوية المستقيمة) وقياس الزاوية الداخليّة.



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يرسموا مضلعًا محدّبًا، وأن يقيسوا الزوايا الداخليّة والزوايا الخارجيّة له باستعمال المنقلة، ثم اطلب إليهم أن يلاحظوا ما إذا كانت قياساتهم تتفق مع النظريتين 5.1 و 5.2.

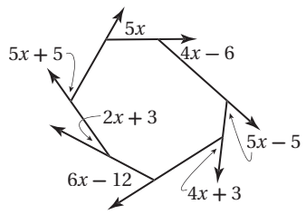
انظر أعمال الطلاب.

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع

المثال 4 يبيّن كيفية استعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع محدب في حل مسائل.

مثال إضافي

4 **a)** أوجد قيمة x في الشكل الآتي:



$x = 12$

b) أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للعشاري المنتظم. $36°$

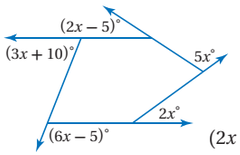
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–11 للتأكد من فهم الطلبة، ثمّ استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

مثال 4 إيجاد قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع

a) جبر: أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع لكتابة معادلة، ثمّ حُلّها لإيجاد قيمة x.

$$(2x-5)^\circ + 5x^\circ + 2x^\circ + (6x-5)^\circ + (3x+10)^\circ = 360^\circ$$
$$(2x + 5x + 2x + 6x + 3x)^\circ + [-5 + (-5) + 10]^\circ = 360^\circ$$
$$18x^\circ = 360^\circ$$
$$x^\circ = \frac{360^\circ}{18} = 20$$

b) أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للتساعي المنتظم.

تتطابق الأضلاع والزوايا الداخلية في التساعي المنتظم وتكون الزوايا الخارجية متطابقة لأن المكملات للزوايا المتطابقة تكون متطابقة أيضًا.

افترض أن قياس كل زاوية خارجيّة يساوي x، ثم اكتب معادلة وحلّها.

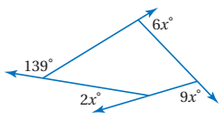
$9x = 360^\circ$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع
$x = 40^\circ$	بقسمة كلا الطرفين على 9

إذن قياس كل زاوية خارجيّة للمضلع التساعي المنتظم يساوي 40.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة: لإيجاد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم يمكنك إيجاد قياس زاوية داخليّة وطرح هذا القياس من 180°؛ لأنّ الزاوية الخارجيّة والزاوية الداخليّة المرتبطة بها متكاملتان.

تحقق من فهمك



4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. 13

4B) أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا. 30°

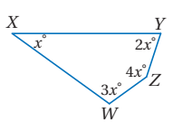
تأكد

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) العشاري 1440° **2)** الخماسي 540°

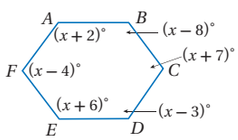
أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

3)



$m\angle X = 36^\circ$, $m\angle Y = 72^\circ$, $m\angle Z = 144^\circ$, $m\angle W = 108^\circ$

4)



$m\angle A = 122^\circ$, $m\angle B = 112^\circ$, $m\angle C = 127^\circ$, $m\angle D = 117^\circ$, $m\angle E = 126^\circ$, $m\angle F = 116^\circ$

المثال 2

5) عجلة دوارة: العجلة الدوّارة في الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه 15 ضلعًا.



أوجد قياس الزاوية الداخليّة له. 156°

المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

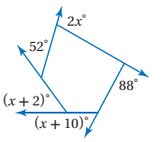
6) 150° 12 **7)** 170° 36

تنويع الواجبات المنزلية

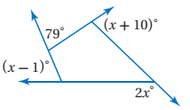
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	12-34، 43، 45-55
ضمن ضمن المتوسط	13-37 فردي، 38-41، 43، 50-55
فوق فوق المتوسط	36-53، 54، 55 اختياري

المثال 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين :

8) 52



9) 68



أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

10) رباعي 90° **11)** ثُماني 45°

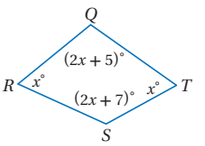
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

12) ذو 12 ضلعًا 1800° **13)** ذو 20 ضلعًا 3240° **14)** ذو 29 ضلعًا 4860° **15)** ذو 32 ضلعًا 5400°

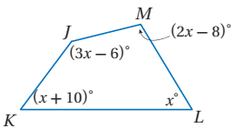
أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

16)



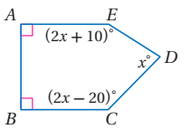
$m\angle Q = 121^\circ, m\angle R = 58^\circ,$
$m\angle S = 123^\circ, m\angle T = 58^\circ$

17)



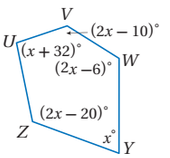
$m\angle J = 150^\circ, m\angle K = 62^\circ,$
$m\angle L = 52^\circ, m\angle M = 96^\circ$

18)



$m\angle A = 90^\circ, m\angle B = 90^\circ,$
$m\angle C = 128^\circ, m\angle D = 74^\circ,$
$m\angle E = 158^\circ$

19)



$m\angle U = 100^\circ, m\angle V = 126^\circ,$
$m\angle W = 130^\circ, m\angle Y = 68^\circ,$
$m\angle Z = 116^\circ$

20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع في الشكل المجاور؟ 540°



المثال 2 أوجد قياس زاوية داخليّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

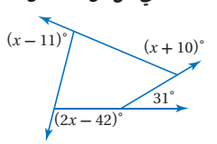
21) الاثنا عشري 150° **22)** الخماسي 108° **23)** العشاري 144° **24)** التُّساعي 140°

المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

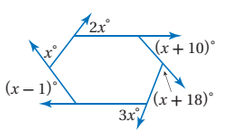
25) 60° 3 **26)** 90° 4 **27)** 120° 6 **28)** 156° 15

المثال 4 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

29) 93



30) 37



17 الدرس 1-5 زوايا المضلع

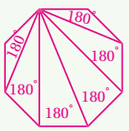
تنبيه لحل سؤال

المسطرة والفرجار والمنقلة:
يتطلب السؤال 42 استعمال مسطرة وفرجار ومنقلة.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 42، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسيّة والجدول والوصف اللفظي لاستقصاء علاقات الزوايا والأضلاع في أشكال رباعيّة خاصّة.

إجابات:

38) ارسم جميع الأقطار لمضلع ثماني محدّب من أحد رؤوسه.

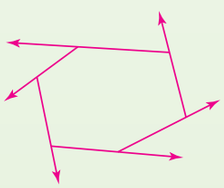


لاحظ أنّ المضلع قُسم إلى 6 مثلثات وبما أنّ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل مثلث 180°، فإنّ مجموع قياسات الزوايا الداخلية للثّماني يساوي

$$6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ$$

39) افترض أن N تساوي مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع عدد أضلاعه n.

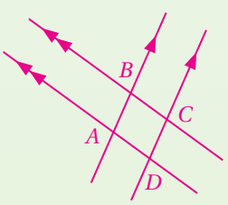
حيث أنه عند كل رأس تشكل الزاوية الخارجية والزاوية الداخلية المرتبطة بها زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم، فإن N تساوي مجموع قياسات أزواج الزوايا المتجاورة على مستقيم مطروحًا منه مجموع قياسات الزوايا الداخلية.

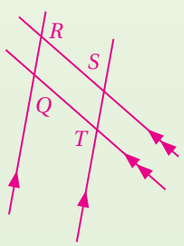


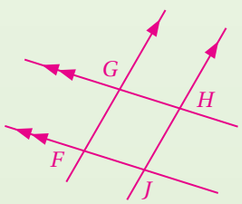
$$N = 180^\circ n - 180^\circ \cdot (n-2)$$
$$= 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ$$
$$= 360^\circ$$

لذا فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360°.

42a) إجابة ممكنة:









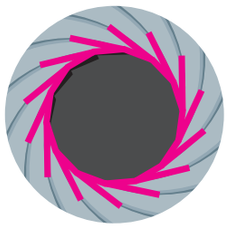
تاريخ الرياضيات

أبو علي الحسن بن الهيثم
354 - 430 هـ
يعد ابن الهيثم رائد علم الضوء والبصريات؛ فقد وصف العديد من الظواهر الضوئية وصفًا دقيقًا في كتابه المناظر.

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

31) العشاري 36° **32)** الخماسي 72° **33)** السداسي 60° **34)** ذو 15 ضلعًا 24°

35) تصوير: تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعًا منتظمًا ذا 14 ضلعًا.



a) أوجد قياس الزاوية الداخلية مقرّبة إلى أقرب عُشر. 154.3° تقريبًا

b) أوجد قياس الزاوية الخارجية مقرّبة إلى أقرب عُشر. 25.7° تقريبًا

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل مما يأتي، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشر:

36) 7 $51.4^\circ, 128.6^\circ$ **37)** 13 $27.7^\circ, 152.3^\circ$

38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي 1080°، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع. انظر الهامش.

39) برهان: استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع. انظر الهامش.

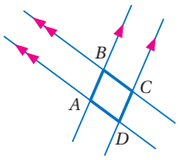
جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

40) عشاري قياسات زواياه الداخليّة:
$(x+5)^\circ, (x+10)^\circ, (x+20)^\circ, (x+30)^\circ, (x+35)^\circ, (x+40)^\circ, (x+60)^\circ, (x+70)^\circ, (x+80)^\circ, (x+90)^\circ$

$105^\circ, 110^\circ, 120^\circ, 130^\circ, 135^\circ, 140^\circ, 160^\circ, 170^\circ, 180^\circ, 190^\circ$

41) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخليّة: $6x, (4x+13)^\circ, (x+9)^\circ, (2x-8)^\circ, (4x-1)^\circ$
$m\angle A = 186^\circ, m\angle B = 137^\circ, m\angle C = 40^\circ, m\angle D = 54^\circ, m\angle E = 123^\circ$

42) تمثيلات متعدّدة: سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في متوازي أضلاع.



a) هندسيًّا: ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $QRST$, $FGHJ$. انظر الهامش.

b) جدوليًّا: أكمل الجدول الآتي :

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
$ABCD$	$m\angle A$	101°	$m\angle B$	79°	$m\angle C$	101°	$m\angle D$	79°
	AB	0.6 cm	BC	0.6 cm	CD	0.6 cm	DA	0.6 cm
$FGHJ$	$m\angle F$	76°	$m\angle G$	104°	$m\angle H$	76°	$m\angle J$	104°
	FG	1 cm	GH	0.9 cm	HJ	1 cm	JF	0.9 cm
$QRST$	$m\angle Q$	121°	$m\angle R$	59°	$m\angle S$	121°	$m\angle T$	59°
	QR	0.5 cm	RS	1.2 cm	ST	0.5 cm	TQ	1.2 cm

c) لفظيًّا: خمّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

d) لفظيًّا: خمّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

e) لفظيًّا: خمّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

42c) إجابة ممكنة: في الشكل الرباعي المتكوّن من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتقابلتان متطابقتين.

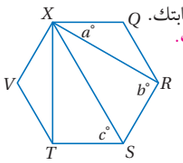
42d) إجابة ممكنة: في الشكل الرباعي المتكوّن من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتحالفتان متكاملتين.

42e) إجابة ممكنة: في الشكل الرباعي المتكوّن من زوجين من المستقيمات المتوازية يكون الضلعان المتقابلان متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا

43) **اكتشف الخطأ:** قالت مريم: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للعشاري أكبر منه للسباعي؛ لأنّ عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساوٍ . فهل أيٌّ منهما ادعاؤها صحيح؟ وضّح تبريرك. انظر الهامش.

44) **تحدَّ:** أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$ المجاور. برّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات.



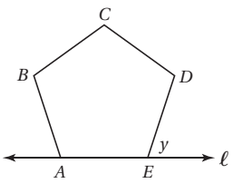
45) **تبرير:** إذا مُدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيان في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبدًا؟ برّر إجابتك. 47–45) انظر الهامش.

46) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا، وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة. ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة مِثلا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.

47) **اكتب:** وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

تدريب على اختبار

48) **إجابة قصيرة:** الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي $\overline{AE}$. ما قياس $\angle y$؟ 72°



49) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع مِثْلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟ C

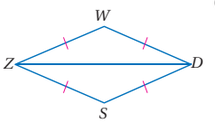
A مربع **B** خماسي **C** سداسي **D** ثماني

مراجعة تراكمية

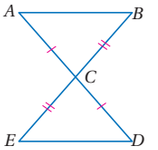
50) **جبر:** اكتب متباينة تمثِّل مدى القيم الممكنة لِـ x (الدرس 4-6) $4 < x < 16$

بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدِّد حالة التطابق، ثم اكتب عبارة تطابق : (الدرسان 3-5, 3-4) 53–51) انظر الهامش.

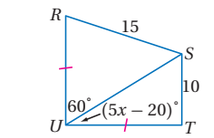
(51

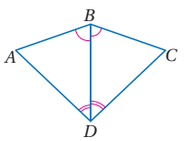


(52



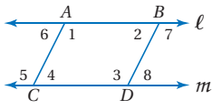
(53





استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$, $m \parallel \ell$ ، حدِّد جميع أزواج الزوايا التي تصنف وفقًا لما يلي: 54, 55) انظر الهامش.



54) زاويتان متبادلتان داخليًّا. **55)** زاويتان متحالفتان.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 43، يجب على الطلاب أن يفهموا أنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لأي مضلع يساوي 360°. في حين يزداد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة بازدياد عدد الأضلاع.

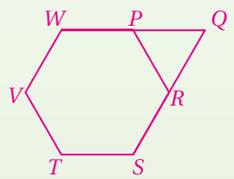
4 التقويم

تعلّم لاحق: اطلب إلى الطلاب أن يصفوا كيفيّة إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع، وكيف ترتبط هذه العملية بالدرس التالي حول قياسات زوايا متوازي الأضلاع.

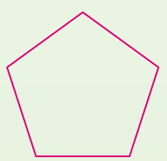
إجابات:

43) لبنى؛ بحسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة، سيكون مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لأي مضلع محدّب يساوي 360°.

45) دائمًا؛ بحسب نظرية مجموع الزوايا الخارجيّة، $m\angle QPR = 60°$ و $m\angle QRP = 60°$. ولمّا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لأي مثلث يساوي 180°، فإنّ $m\angle PQR = 180° - m\angle QPR - m\angle QRP$، $180° - 60° - 60° = 60°$. إذن فالمثلث $\triangle PQR$ متطابق الأضلاع.



46) 8؛ إجابة ممكنة:



مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لهذا المضلع يساوي $S = (5 - 2)\cdot 180°$ أو 540°. ومِثْلا هذا المجموع يساوي $2(540)°$ أو 1080°. وعدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة 1080° هو حلّ المعادلة $(n - 2)\cdot 180° = 1080°$ ومنها $n = 8$.

48) اشتقت نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع من النمط الذي يربط عدد أضلاع المضلع بعدد المثلثات. والصيغة هي حاصل ضرب مجموع قياسات زوايا المثلث أي 180° في عدد المثلثات في المضلع.

51) $\overline{WD} \cong \overline{SD}$ ؛ $\overline{WZ} \cong \overline{SZ}$ ؛ $\overline{ZD} \cong \overline{DZ}$ ؛ يتطابق المثلثان ZWD, ZSD بالحالة SSS؛ $\triangle ZWD \cong \triangle ZSD$

52) $\overline{AC} \cong \overline{DC}$ ؛ $\overline{BC} \cong \overline{EC}$ ؛ $\angle ACB \cong \angle DCE$؛ يتطابق المثلثان ACB, DCE بالحالة SAS؛ $\triangle ACB \cong \triangle DCE$

53) $\angle ABD \cong \angle CBD$؛ $\angle ADB \cong \angle CDB$ ؛ $\overline{BD} \cong \overline{DB}$ ، يتطابق المثلثان ABD, CBD بالحالة ASA؛ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

54) $\angle 1$ و $\angle 5$ ؛ $\angle 4$ و $\angle 6$ ؛ $\angle 2$ و $\angle 8$؛ $\angle 3$ و $\angle 7$

55) $\angle 1$ و $\angle 4$ ؛ $\angle 2$ و $\angle 3$ ؛ $\angle 1$ و $\angle 2$؛ $\angle 3$ و $\angle 4$ $\angle 8$ و $\angle 7$ ؛ $\angle 6$ و $\angle 5$

1 التركيز

الهدف

استعمال الجداول الإلكترونية لإيجاد قياسات الزوايا الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم.

المواد

- حاسوب
- برنامج الجداول الإلكترونية

إرشادات للتدريس

يمكن أن يستعمل الطلاب خاصية "Fill – down" للجداول الإلكترونية لإدخال البيانات في العمودين الأول والثاني. وسوف يلاحظ الطلاب أن بإمكانهم إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع كثير الأضلاع بهذه الطريقة بما في ذلك مضلع عدد أضلاعه 115 ضلعًا (السؤال 7).

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إلى أحد الطالبين في كل مجموعة أن يُدخل البيانات في الحاسوب، في حين يملي عليه الطالب الآخر المعلومات المُدخلة، ثم اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 4–1.

واسأل:

- ما فائدة الجداول الإلكترونية؟

يمكنك إدخال البيانات مرّة واحدة ثم البناء على هذه البيانات.

- ما عيوب استعمال الجداول الإلكترونية؟

قد تجعل الأخطاء في أثناء إدخال البيانات (كتابتها) نتائجك غير صحيحة.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 8–5.

زوايا المضلع
Angles of Polygon

من الممكن إيجاد قياسات الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية بالإضافة إلى مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مضلع منتظم عدد أضلاعه n، وذلك باستعمال برنامج الجداول الإلكترونية.

نشاط

صمّم جدولًا إلكترونيًا باتباع الخطوات الآتية :

- اكتب عناوين للأعمدة كما في الجدول أدناه .
- أدخل الأرقام 10–3 في العمود الأول بدءًا من الخلية A2.
- عدد المثلثات في كل مضلع أقل من عدد أضلاعه بـ 2. اكتب صيغة في الخلية B2 لطرح 2 من كل عدد في الخلية A2 وذلك بوضع المؤشر في الخلية B2 وكتابة =A2 – 2 ثم ضغط enter .
- اكتب صيغة في الخلية C2 لحساب مجموع قياسات الزوايا الداخليّة. تذكّر أن صيغة مجموع قياسات زوايا مضلع هي $S = (n-2)\cdot 180°$ ، وذلك بوضع المؤشر في الخلية C2 وكتابة =B2*180 ثم ضغط enter .
- استمر في كتابة صيغ لحساب القيم المشار إليها في الجدول، ثم اسحب هذه الصيغ على القيم حتّى الصف 9. سيظهر الجدول في النهاية على النحو الآتي :

المضلعات والزوايا

	A	B	C	D	E	F
1	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية	قياس كل زاوية داخلية	قياس كل زاوية خارجية	مجموع قياسات الزوايا الخارجية
2	3	1	180	60	120	360
3	4	2	360	90	90	360
4	5	3	540	108	72	360
5	6	4	720	120	60	360
6	7	5	900	128.57	51.43	360
7	8	6	1080	135	45	360
8	9	7	1260	140	40	360
9	10	8	1440	144	36	360

Sheet 1 Sheet 2 Sheet 3

تمارين ومسائل:

1) اكتب الصيغة التي استعملتها لإيجاد قياس زاوية داخلية للمضلع المنتظم. =C2/A2

2) اكتب الصيغة التي استعملتها لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المنتظم. =A2*E2

3) ما قياس كل زاوية داخليّة إذا كان عدد الأضلاع 1 أو 2؟ $-180°, 0°$

4) هل من الممكن أن يكون عدد الأضلاع 1 أو 2؟ وضّح إجابتك. لا؛ لأن المضلع شكل مغلق مكوّن من قطع مستقيمة تقع في المستوى نفسه.

استعمل جدولًا إلكترونيًا لحل الأسئلة 8–5 :

5) ما عدد المثلثات في مضلع عدد أضلاعه 17 ضلعًا؟ 15

6) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 16 ضلعًا. $22.5°$

7) أوجد قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 115 ضلعًا مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر. $176.9°$ تقريبًا

8) إذا كان قياس كل من الزوايا الخارجية $0°$، فأوجد قياس الزاوية الداخليّة. وهل هذا ممكن؟ وضّح إجابتك.

8) سيكون قياس كل زاوية داخلية $180°$ ، وهذا غير ممكن للمضلع.

3 التقويم

التقويم التكويني

تحقق من إجابات الطلاب عن الأسئلة 8–5، لتقويم ما إذا أدخل الطلاب الصيغ إدخالًا صحيحًا في الجدول الإلكتروني.

من المحسوس إلى المجرّد

اطلب إلى الطلاب توقع قياسات الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية لمضلع محدّب منتظم عدد أضلاعه 360 ضلعًا باستعمال المعلومات أعلاه.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

الفصل 5



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 5

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

5-1 تدريبات إعادة التعليم

زوايا المضلع

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع:

القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين غير متتاليين لمضلع تُسمّى **قطرًا** له، والأقطار المرسومة من أحد رؤوس مضلع عدد أضلاعه n، تقسمه إلى مثلثات عددها $n-2$، ويمكنك إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع، بجمع قياسات الزوايا الداخلية لهذه المثلثات.

5.1	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع	إذا كان عدد أضلاع مضلع محدّب هو n، ومجموع قياسات زواياه الداخلية هو S، فإن $S = (n-2) \cdot 180°$

مثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب عدد أضلاعه 13 ضلعًا.

$$S = (n-2) \cdot 180°$$
$$= (13-2) \cdot 180°$$
$$= (11) \cdot 180°$$
$$= 1980°$$

مثال 2 إذا كان قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم يساوي $140°$، فأوجد عدد أضلاعه.

ليكن عدد الأضلاع n، فيكون مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع يساوي $140°n$.

$$S = (n-2) \cdot 180°$$
$$140°n = (n-2) \cdot 180°$$
$$140°n = 180°n - 360°$$
$$-40°n = -360°$$
$$n = 9$$

تمارين

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لكلٍّ من المضلعات المحدّبة الآتية:

1) التساعي. $1260°$ 2) ذي 16 ضلعًا. $2520°$ 3) ذي 30 ضلعًا. $5040°$

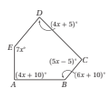
4) الثماني. $1080°$ 5) ذي 18 ضلعًا. $2880°$ 6) ذي 35 ضلعًا. $5940°$

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كلٍّ ممّا يأتي:

7) $150°$ 12 8) $160°$ 18 9) $175°$ 72

10) $165°$ 24 11) $144°$ 10 12) $135°$ 8

13) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للمضلع المجاور.



$m\angle A = 90°$
$m\angle B = 130°$
$m\angle C = 95°$
$m\angle D = 85°$
$m\angle E = 140°$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

5-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

زوايا المضلع

مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع:

توجد علاقة بين عدد أضلاع مضلّع محدّب ومجموع قياسات زواياه الخارجية.

5.2	نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع	مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلّع المحدّب يأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس يساوي $360°$.

مثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الخارجية بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس لمضلّع محدّب عدد أضلاعه 27.

لأي مضلّع محدّب، يكون مجموع قياسات زواياه الخارجية بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس يساوي $360°$.

مثال 2 أوجد قياس الزاوية الخارجية للسداسيّ المنتظم $ABCDEF$.

بما أن مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلّع المحدب بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس يساوي $360°$، وللسداسيّ 6 زوايا خارجيّة، ولعل فرض أن قياس كلّ زاوية خارجيّة هو n فإنّ:

$$6n = 360°$$
$$n = 60°$$

أي أن قياس كلّ زاوية خارجية للسداسيّ المنتظم يساوي $60°$.

تمارين

أوجد مجموع قياسات الزوايا الخارجية بأخذ زاوية واحدة عند كلّ رأس لكلّ مضلّع منتظم:

1) العشاريّ. $360°$ 2) ذو 16 ضلعًا. $360°$ 3) ذو 36 ضلعًا. $360°$

أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للمضلع المنتظم المُعطى عدد أضلاعه في كلٍّ مما يأتي، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشر:

4) ذو 12 ضلعًا. $30°$ 5) ذو 16 ضلعًا. $157.5°$ 6) ذو 20 ضلعًا. $18°$

7) ذو 40 ضلعًا. $9°$ 8) السباعيّ. $51.4°$ 9) ذو 18 ضلعًا. $20°$

10) ذو 24 ضلعًا. $15°$ 11) ذو 180 ضلعًا. $2°$ 12) الثمانيّ. $45°$

تدريبات المهارات (8) — دون ضمن

الاسم _____ التاريخ _____

5-1 تدريبات المهارات

زوايا المضلع

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلّع المحدّب في كلٍّ ممّا يأتي:

1) التُساعي. $1260°$ 2) التُساعيّ. $900°$ 3) العُشاريّ. $1440°$

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم مُعطًى، فأوجد عدد الأضلاع في كلٍّ ممّا يأتي:

4) $108°$ 5 5) $120°$ 6 6) $150°$ 12

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكلٍّ من المضلعات الآتية:

7) $(2x-15)°$, $(3x-15)°$, $x°$, $(2x-15)°$, $(2x-15)°$

$m\angle A = 115°$, $m\angle B = 65°$, $m\angle C = 115°$, $m\angle D = 65°$

8) $(2x+20)°$, $(3x-10)°$, $(2x)°$, $(2x-10)°$

$m\angle L = 100°$, $m\angle M = 110°$, $m\angle N = 70°$, $m\angle P = 80°$

9) $(2x+16)°$, $(2x+16)°$, $(x+14)°$, $(x+14)°$

$m\angle S = 116$, $m\angle T = 116$, $m\angle W = 64$, $m\angle U = 64$

10) $(7x)°$, $(7x)°$, $(4x)°$, $(4x)°$, $(7x)°$, $(7x)°$

$m\angle D = 140$, $m\angle E = 140$, $m\angle F = 80$, $m\angle I = 80$, $m\angle G = 140$, $m\angle H = 140$

أوجد قياس زاوية داخليّة لكلٍّ من المضلعات المنتظمة الآتية:

11) الرباعيّ. $90°$ 12) الخماسيّ. $108°$ 13) العشاريّ. $144°$

أوجد قياسَي زاويةٍ خارجيةٍ وزاويةٍ داخليةٍ للمضلع المنتظم المُعطى عدد أضلاعه في كلٍّ ممّا يأتي:

14) الثماني. $135°$, $45°$ 15) التساعيّ. $140°$, $40°$ 16) ذو 12 ضلع. $150°$, $30°$

تدريبات حل المسألة (9) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

5-1 تدريبات حلّ المسألة

زوايا المضلع

1) **هندسة معمارية**، صُمّمت صالة لعرض قطع أثرية على شكل مضلّع مُعانٍ منتظم كما في الشكل أدناه، فما قياس الزاوية بين كلّ جدارين متجاورين فيها؟



$135°$

2) **صناديق**، صُمّمت جميلة صندوقًا على شكل مضلع منتظم؛ لتحفظ فيه إكسسوارتها، فكان قياس زاويته الداخليّة يساوي نصف قياس زاويته الخارجيّة، فما المضلّع المنتظم الذي ستستعمله؟

مثلث متطابق الأضلاع

3) **مسرح**، بيّن الشكل أدناه مخطط أرضية مسرح، الأضلاع الخمسة العُليا فيه جزءٌ من مضلّع منتظم عدد أضلاعه اثنا عشر ضلعًا، أوجد $m\angle 1$.

$120°$



4) **علم الآثار**، كشف علماء آثار أجزاءً من جدارين متجاورين في قلعة قديمة.

وقد علموا من مخطوطات عثروا عليها في الموقع أن قاعدة القلعة على شكل مضلّع منتظم، إلّا أنهم اختلفوا في عدد أضلاعها، فما عدد أضلاع القلعة تبعًا للمعلومات المبيّنة في الشكل؟

15 ضلعًا

5) **تصميم**، ضمن مشروع الفصل، صمّم عددٌ من الطلاب نموذجًا باستعمال مضلّعات منتظمة، أضلاعها متصلة بعضها ببعض كما في الشكل أدناه.



a) أوجد $m\angle 2$ و $m\angle 5$.

$90°$ و $60°$

b) أوجد $m\angle 3$ و $m\angle 4$.

$162°$ و $132°$

c) ما قياس $\angle 7$؟

$96°$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 5

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)　ضمن فوق

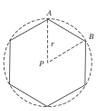
الاسم _____ التاريخ _____

5-1 التدريبات الإثرائيّة

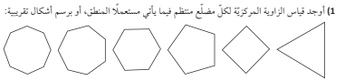
الزوايا المركزية للمضلع المنتظم:

درست الزوايا الداخليّة والزوايا الخارجيّة للمضلّع، وتحتوي المضلّعات المنتظمة على زوايا مركزية أيضًا، ويكون رأس الزاوية المركزية عند مركز المضلّع.

ومركز المضلّع نقطةٌ لها البعد نفسه عن جميع رؤوس المضلع، وهو مثل مركز الدائرة الذي يبعد بُعدًا ثابتًا عن جميع نقاط الدائرة لماذا، والزاوية المركزيّة هي الزاوية التي رأسها عند مركز الدائرة، ويمرّ ضلعاها برأسين متتاليين من رؤوس المضلّع. فالزاوية APB هي إحدى الزوايا المركزية في المضلّع السداسيّ المنتظم المجاور، ولعلّك تذكر من التمثيل بالقطاعات الدائريّة أن مجموع قياسات الزوايا حول مركز الدائرة يساوي $360°$.



1) أوجد قياس الزاوية المركزيّة لكلّ مضلّع منتظم فيما يأتي مستعملًا المنقلة، أو برسم أشكال تقريبية:



45°　51.43° تقريبًا　60°　72°　90°　120°

2) خمّن العلاقة بين قياس الزاوية المركزيّة لمضلّع منتظم وقياسَي زاويتيه الداخليّة والخارجيّة.

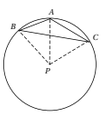
قياس الزاوية المركزية يساوي قياس الزاوية الخارجية، والزاوية المركزية مكملة للزاوية الداخلية.

3) **تحدٍّ:** الضلع $\overline{BC}$ هو أطول الأضلاع في ΔABC المنفرج الزاوية، و $\overline{AC}$ ضلع في مضلّع منتظم عدد أضلاعه 21 أيضًا، و $\overline{AB}$ ضلع في مضلّع منتظم عدد أضلاعه 28. المضلّع المنتظم ذو 21 ضلعًا والمضلّع المنتظم ذو 28 ضلعًا لهما نقطة المركز P نفسها. إذا كان $\overline{BC}$ ضلعًا في مضلّع منتظم عدد أضلاعه n ومركزه النقطة P، فأوجد قيمة n.

(**إرشاد:** ارسم دائرةً مركزها P، وعيّن عليها النقاط A, B, C).

إجابة ممكنة:

12 ضلعًا؛ قياس الزاوية المركزية للمضلع المنتظم ذي الـ 21 ضلعًا، والذي $\overline{AC}$ ضلع فيه يساوي $\frac{360°}{21} \approx 17.14°$ ، وقياس الزاوية المركزية للمضلع المنتظم ذي الـ 28 ضلعًا، والذي $\overline{AB}$ ضلع فيه يساوي $\frac{360°}{28} \approx 12.86°$ ، فيكون بحسب الشكل المجاور قياس الزاوية المركزية للمضلع المنتظم الذي $\overline{BC}$ ضلع فيه يساوي، $17.14° + 12.86° = 30°$ أي أن، $\frac{360°}{n} = 30°$ ، $n = 12$.



كتاب التمارين (6)　دون ضمن فوق

الفصل الخامس: الأشكال الرباعية

5-1 زاويا المضلع

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

1) ذو 11 ضلعًا　**1620°**

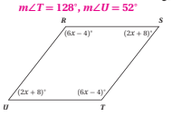
2) ذو 14 ضلعًا　**2160°**

3) ذو 17 ضلعًا　**2700°**

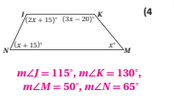
أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

$m\angle R = 128°, m\angle S = 52°$
$m\angle T = 128°, m\angle U = 52°$

5)



4)



$m\angle J = 115°, m\angle K = 130°,$
$m\angle M = 50°, m\angle N = 65°$

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

6) $144°$　**10**

7) $156°$　**15**

8) $160°$　**18**

أوجد قياس الزاوية الخارجية والزاوية الداخليّة للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل مما يأتي، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًّا :

9) 16　الخارجية $22.5°$، الداخلية $157.5°$

10) 24　الخارجية $15°$، الداخلية $165°$

11) 30　الخارجية $12°$، الداخلية $168°$

12) 36　الخارجية $10°$، الداخلية $170°$

13) 22　الخارجية $16.4°$، الداخلية $163.6°$

14) 40　الخارجية $9°$، الداخلية $171°$

15) أوجد قيمة x في الشكل المجاور: **36**



16) **بلورات:** تُصنّف البلورات إلى سبعة أنواع بناءً على أشكال وجوهها. وينتمي البلور الفيروزي إلى نوع يسمى ثلاثي الميل. وكل وجه من الوجوه الستّة لبلورة الفيروز على شكل متوازي أضلاع. أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأحد هذه الوجوه. **360°**

5-2 متوازي الأضلاع
Parallelogram

فيما سبق:
درستُ تصنيف المضلعات الرباعية .

(مهارة سابقة)

والآن:
- أتعرف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وأطبّقها.
- أتعرف خصائص أقطار متوازي الأضلاع وأطبّقها.

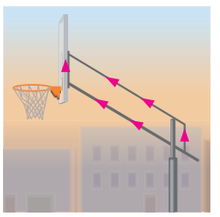
المفردات:
متوازي الأضلاع
parallelogram

www.obeikaneducation.com

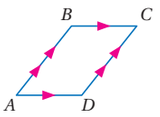
لماذا؟

يمكن التحكم في ارتفاع مرمى كرة السلة من خلال أذرع خلفية كما في الشكل أدناه. لاحظ أنّه كلّما تم تعديل الارتفاع، يبقى كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الذي تشكّله الأذرع متوازيين.





أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه: متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ويُرمز لمتوازي الأضلاع بالرمز ▱.
ففي ▱ABCD المبين جانبًا $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ بحسب التعريف.



▱ABCD

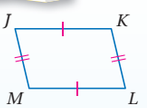
تقدم النظريات الآتية خصائص أخرى لمتوازي الأضلاع.

نظريات — خصائص متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

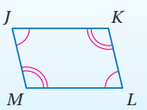
5.3 كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.

مثال: $\overline{JK} \cong \overline{ML}$, $\overline{JM} \cong \overline{KL}$



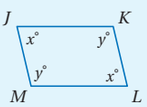
5.4 كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.

مثال: $\angle J \cong \angle L$, $\angle K \cong \angle M$



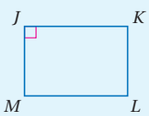
5.5 كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.

مثال: $x^\circ + y^\circ = 180^\circ$



5.6 إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

مثال: في ▱JKLM، إذا كانت $\angle J$ قائمة، فإنّ : $\angle K, \angle L, \angle M$ قوائم أيضًا.



سوف تبرهن النظريات 5.3, 5.5, 5.6 في الأسئلة 27, 25, 5 على الترتيب

مصادر الدرس 5-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (23)	• تنويع التعليم، ص (23, 26)	• تنويع التعليم، ص (26)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (7)	• كتاب التمارين، ص (7)	• كتاب التمارين، ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

ملاحظات الدرس 5-2

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-2
تصنيف المضلعات ذات الأضلاع الأربعة بوصفها أشكالًا رباعيّة.

الدرس 5-2
تعرّف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وتطبيقها.
تعرف خصائص أقطار متوازي الأضلاع وتطبيقها.

ما بعد الدرس 5-2
تعرّف الشروط التي تؤكد أن شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاع.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- ما الخصائص التي تجعل الشكل المكوّن من الأذرع الخلفية متوازي أضلاع؟ كل ذراعين متقابلين يبقيان متوازيين دائمًا.
- ماذا يحصل لقياسات الزوايا عندما ينخفض الهدف من ارتفاع 10 ft إلى 5 ft؟ الزوايا الحادّة تصبح منفرجة والزوايا المنفرجة تصبح حادّة.
- ما التخمينات التي يمكن أن تضعها حول العلاقة بين الزوايا الأربعة بغض النظر عن ارتفاع الهدف؟ مجموع قياسات الزوايا الأربعة يبقى دائمًا 360°. والزوايا المتقابلة تبقى دائمًا متطابقة. وإذا أصبحت إحدى الزوايا قائمة، فإنّ جميع الزوايا تصبح قائمة.

أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه

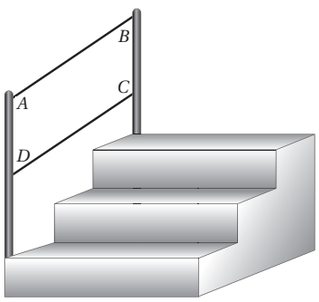
المثال 1 يبيّن كيفية استعمال خصائص متوازي الأضلاع لإيجاد القياسات المجهولة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1



إنشاءات: في $\square ABCD$، افترض أنّ $m\angle B = 32°$، $CD = 80$ in، $BC = 15$in، أوجد كل قياس مما يأتي:

a) AD 15 in

b) $m\angle C$ 148°

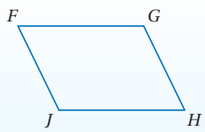
c) $m\angle D$ 32°

إرشادات للدراسة

رسم الأشكال: تكتب النظريات بمصطلحات عامّة، أما في البرهان فيجب رسم شكل بحيث يمكن من خلاله الإشارة إلى القطع المستقيمة والزوايا بصورة دقيقة.

برهان نظريّة 5.4

اكتب برهانًا ذا عمودين للنظريّة 5.4.



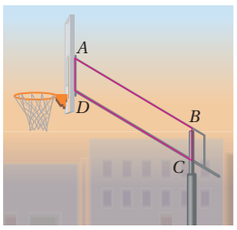
المعطيات: $\square FGHJ$

المطلوب: $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\square FGHJ$	1) معطى.
2) $\overline{FG} \parallel \overline{JH}, \overline{FJ} \parallel \overline{GH}$	2) تعريف متوازي الأضلاع.
3) $\angle F, \angle J$ متكاملتان.	3) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
$\angle J, \angle H$ متكاملتان.	
$\angle H, \angle G$ متكاملتان.	
4) $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$	4) الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها تكونان متطابقتين.

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال خصائص متوازي الأضلاع



كرة سلّة: في $\square ABCD$، إذا كان $m\angle A = 55°$، $AB = 2.5$ ft، $BC = 1$ ft، فأوجد كلًّا مما يأتي، وبرِّر إجابتك.

a) DC

$\overline{DC} \cong \overline{AB}$ — كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان

$DC = AB$ — تعريف تطابق القطع المستقيمة

$= 2.5$ ft — بالتعويض

b) $m\angle B$

$m\angle B + m\angle A = 180°$ — كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان

$m\angle B + 55° = 180°$ — بالتعويض

$m\angle B = 125°$ — بطرح 55° من كلا الطرفين

c) $m\angle C$

$m\angle C = m\angle A$ — كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان

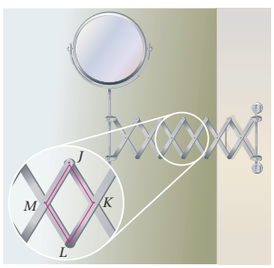
$= 55°$ — بالتعويض



الربط مع الحياة

الأبعاد القياسية لملعب كرة السلة هي 94 ft × 50 ft، والارتفاع القياسي للهدف عن الأرض 10 ft.

تحقق من فهمك



1) مرايا: تُستعمل في مرآة الحائط المبينة جانبًا متوازيات أضلاع يتغير شكلها كُلّما مُدّ الذراع. في $\square JKLM$، إذا كان $MJ = 8$ cm، $m\angle J = 47°$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

A) LK 8 cm **B)** $m\angle L$ 47°

C) إذا مُدّ الذراع حتى أصبح $m\angle J = 90°$، فكم يصبح قياس كلٍّ من $\angle K, \angle L, \angle M$؟ برّر إجابتك.

1C) سيكون قياس كل من الزوايا الأخرى 90° تبعًا للنظرية 5.6

تنبيه!

متوازي الأضلاع: لا تطبق النظريات 5.6–5.3 إلا إذا كُنت تعرف أن الشكل متوازي أضلاع.

إرشادات للمعلم الجديد

متوازي الأضلاع: قبل أن تقدّم النظريات 5.6–5.3 إلى الطلاب، استعمل معهم أسلوب العصف الذهني؛ لمعرفة الخصائص التي يعتقدون أنها صحيحة بالنسبة لمتوازي الأضلاع.

قطرا متوازي الأضلاع: قطرا متوازي الأضلاع يُحقّقان الخاصيّتين الآتيتين :

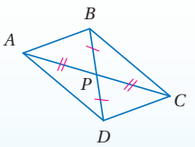
نظريات

أضف إلى مطويتك

قطرا متوازي الأضلاع

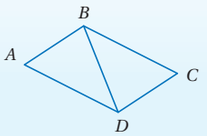
5.7 قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر.

مثال: $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, $\overline{DP} \cong \overline{PB}$.



5.8 قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

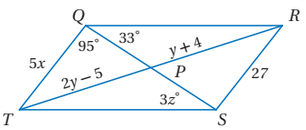
مثال: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



سوف تبرهن النظريتين 5.8 ,5.7 في السؤالين 26, 28 على الترتيب

مثال 2 خصائص متوازي الأضلاع والجبر

جبر: إذا كان ***QRST*** متوازي أضلاع، فأوجد قيمة كل من المتغيرات الآتية:



a) x

$\overline{QT} \cong \overline{RS}$	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
$QT = RS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$5x = 27$	بالتعويض
$x = 5.4$	بقسمة كلا الطرفين على 5

b) y

$\overline{TP} \cong \overline{PR}$	قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$2y - 5 = y + 4$	بالتعويض
$y = 9$	بطرح y وإضافة 5 لكلا الطرفين

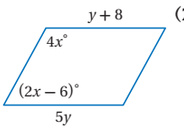
c) z

$\triangle TQS \cong \triangle RSQ$	قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين
$\angle QST \cong \angle SQR$	العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة
$m\angle QST = m\angle SQR$	تعريف تطابق الزوايا
$3z = 33^\circ$	بالتعويض
$z = 11$	بقسمة كلا الطرفين على 3

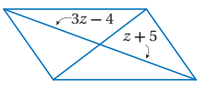
تحقق من فهمك

أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

(2A)



(2B) $x = 31, y = 2$



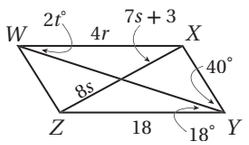
$z = 4.5$

قطرا متوازي الأضلاع

الأمثلة 4-2 تبيّن كيفية استعمال النظريات لإثبات أن قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر.

مثال إضافي

2 إذا كان الشكل $WXYZ$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة المتغير المحدد فيما يلي:



a) r 4.5

b) s 3

c) t 9

المحتوى الرياضي

القواطع: يمثل قطرا متوازي الأضلاع قاطعين لأضلاعه؛ لذلك فكل زاويتين متبادلتين داخليًّا متطابقتان.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: قدّم للطلاب عدة أسئلة حول إيجاد طولي قطري متوازي أضلاع، ثم اختر بعض الطلاب ليشرحوا أعمالهم لطلاب الصف، ثم احتفظ بأعمالهم ووزّعها على طلاب الصف.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيّون: أكّد للطلاب أن أقطار بعض متوازيات الأضلاع تبدو كأنها تنصّف الزوايا المتقابلة، إلا أن هذه ليست خاصية لمتوازيات الأضلاع. نبّه الطلاب ألّا يفترضوا أن الزوايا منصفة. وفي الدرس 5–5 سوف يدرس الطلاب المعين والمربع؛ حيث القطران ينصفان الزوايا المتقابلة في هذين الشكلين.

يمكنك استعمال النظرية 5.7 لتحديد إحداثيات نقطة تقاطع قطري متوازي أضلاع في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه.

مثال 3 متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثية

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه $F(-2, 4), G(3, 5), H(2, -3), J(-3, -4)$.

بما أنّ قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{GJ}$, $\overline{FH}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{FH}$ التي طرفاها $(2, -3)$, $(-2, 4)$.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{4 + (-3)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (0, 0.5)$$ بالتبسيط

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\square FGHJ$ هما $(0, 0.5)$.

تحقق: أوجد نقطة منتصف $\overline{GJ}$ التي طرفاها $(-3, -4)$, $(3, 5)$.

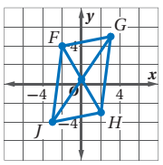
$$\left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{5 + (-4)}{2}\right) = (0, 0.5)$$ ✓

تحقق من فهمك

3) هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8, -2), S(-6, 7), T(6, 7), U(4, -2)$. **(−1, 2.5)**

إرشادات للدراسة

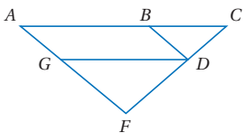
التحقق من الإجابة: في المثال 3 ، مثّل متوازي الأضلاع على المستوى الإحداثي وعيّن نقطة تقاطع القطرين التي أوجدتها. ارسم القطرين لتجد أن نقطة تقاطعهما هي $(0, 0.5)$.



يمكنك استعمال خصائص متوازي الأضلاع وأقطاره لكتابة براهين.

مثال 4 استعمال خصائص متوازي الأضلاع لكتابة براهين

اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\square ABDG, \overline{AF} \cong \overline{CF}$

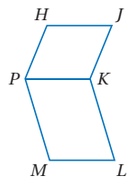
المطلوب: $\angle BDG \cong \angle C$

البرهان:

من المعطيات $ABDG$ متوازي أضلاع. وبما أن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\angle A \cong \angle BDG$. ومعطى أيضًا أنّ $\overline{AF} \cong \overline{CF}$. ومن نظريّة المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle A \cong \angle C$. ومن خاصيّة التعدّي للتطابق تكون $\angle BDG \cong \angle C$.

تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\square HJKP , \square PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$ انظر الهامش.

مثالان إضافيان

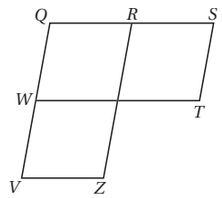
3 هندسة إحداثية:

أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square MNPR$ الذي إحداثيات رؤوسه $M(-3, 0)$، $N(-1, 3)$، $P(5, 4)$، $R(3, 1)$. **(1, 2)**

4 اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $VZRQ$ ، $WQST$ متوازيا أضلاع.

المطلوب: $\angle Z \cong \angle T$



البرهان

العبارات	المبررات
1) $VZRQ, WQST$ متوازيا أضلاع	1) معطيات
2) $\angle Z \cong \angle Q, \angle Q \cong \angle T,$	2) الزاويتان المتقابلتان في متوازي الأضلاع متطابقتان.
3) $\angle Z \cong \angle T$	3) خاصية التعدي

إجابة (تحقق من فهمك):

4) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $HJKP, PKLM$ متوازيا أضلاع	1) معطيات
2) $\overline{HJ} \cong \overline{PK}, \overline{PK} \cong \overline{ML}$	2) الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.
3) $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$	3) خاصية التعدي

تأكـد

المثال 1

1) ملاحة: يستعمل البحّارة مسطرتين متوازيتين، يصل بينهما ذراعان متساويا الطول لتحديد اتجاه إبحارهم، فيضعون حافة إحدى المسطرتين بمحاذاة مسار الإبحار، ثم يحركون المسطرة الأخرى حتى تصل إلى قرص بوصلة مرسوم على الخريطة. تُشكّل المسطرتان والذراعان الواصلتان بينهما $MNPQ$▭.



a) إذا كان $MQ = 2\text{in}$ ، فأوجد NP. **2 in**

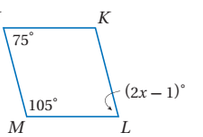
b) إذا كان $m\angle NMQ = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$. **142°**

c) إذا كان $m\angle MQP = 128^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$. **128°**

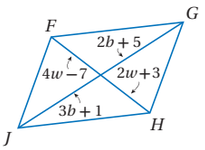
المثال 2

جبر: أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2) **38**



3) **$w = 5$, $b = 4$**



المثال 3

4) هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $ABCD$▭ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$. **$(0, 2)$**

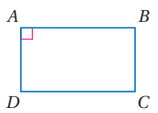
المثال 4

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين : **5, 6) انظر الهامش.**

5) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، $\angle A$ قائمة.

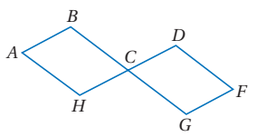
المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



6) برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $ABCH$, $DCGF$ متوازيا أضلاع.

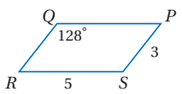
المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.



تدرب وحل المسائل

المثال 1

استعمل $PQRS$▭ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



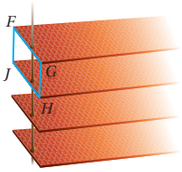
7) $m\angle R$ **52°**

8) QR **3**

9) QP **5**

10) $m\angle S$ **128°**

11) ستائر: في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $FGHJ$▭ ، إذا كان $FJ = \frac{3}{4}\text{ in}, FG = 1\text{ in}, m\angle JHG = 62^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



a) JH **1 in**

b) GH **$\frac{3}{4}$ in**

c) $m\angle JFG$ **62°**

d) $m\angle FJH$ **118°**

3 التدريب

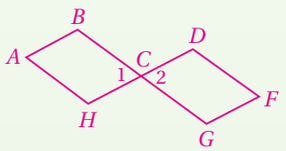
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 6–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

5) البرهان: بحسب تعريف متوازي الأضلاع $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. ولأن $\angle A$ قائمة فإنّ $\overline{AD} \perp \overline{AB}$. وبحسب نظريّة القاطع العمودي يكون $\overline{AB} \perp \overline{CB}$. إذن $\angle B$ قائمة؛ لأنّ المستقيمين المتعامدين يشكّلان زاوية قائمة، وكذلك $\angle D \cong \angle B$ و $\angle C \cong \angle A$ لأنّ الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة؛ إذن $\angle C$ و $\angle D$ قائمتان؛ لأن لجميع الزوايا المتطابقة القياس نفسه.

6)



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $ABCH$ و $DCGF$ متوازيا أضلاع	1) معطيات
2) $\angle C_1 \cong \angle C_2$	2) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
3) $\angle A \cong \angle BCH$ و $\angle DCG \cong \angle F$	3) الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة
4) $\angle BCH \cong \angle F$	4) خاصيّة التعدّي
5) $\angle A \cong \angle F$	5) خاصيّة التعدّي

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	7-17، 33-52
ضمن ضمن المتوسط	7-29 فردي، 31، 33-52
فوق فوق المتوسط	25-49، (اختياري: 50-52)

المثال 2 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

(12 $x = 7, y = 11$

(13 $x = 58, y = 63.5$

(14 $x = 5, y = 17$

المثال 3 **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square WXYZ$ المعطاة رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين :

(15 $W(-1, 7), X(8, 7), Y(6, -2), Z(-3, -2)$ **(2.5, 2.5)**

(16 $W(-4, 5), X(5, 7), Y(4, -2), Z(-5, -4)$ **(0, 1.5)**

المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي :

(17 **المعطيات:** $\square WXTV$, $\square ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$ **انظر الهامش.**

جبر: استعمل $\square ABCD$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :

(18 x **7.5**

(19 y **11**

(20 $m\angle AFB$ **104°**

(21 $m\angle DAC$ **82°**

(22 $m\angle ACD$ **57°**

(23 $m\angle DAB$ **139°**

(24 **هندسة إحداثيّة:** إذا كانت $A(-2, 5), B(2, 2), C(4, -4)$ رؤوسًا في $\square ABCD$ ، فأوجد إحداثيات الرأس D. وبرّر إجابتك. **انظر الهامش.**

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل مما يأتي : **25–28) انظر ملحق الإجابات.**

(25 برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $GKLM$ متوازي أضلاع ،
المطلوب: اثبات أن كل زاويتين في الأزواج التالية متكاملتان $\angle G$ و $\angle K$ ، $\angle K$ و $\angle L$ ، $\angle L$ و $\angle M$ ، $\angle M$ و $\angle G$.
(النظرية 5.5)

(26 برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع ،
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$
(النظرية 5.8)

(27 برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $PQRS$ متوازي أضلاع.
المطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QR} \cong \overline{SP}$
(النظرية 5.3)

(28 برهانًا حرًّا.
المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع.
المطلوب: القطران $\overline{AC}$ وَ $\overline{AD}$ ينصف كلٌّ منهما الآخر.
(النظرية 5.7)

إجابات:

17) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\square WXTV$, $\square ZYVT$	1) معطيات
2) $\overline{WX} \cong \overline{VT}$, $\overline{VT} \cong \overline{YZ}$	2) الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة
3) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$	3) خاصيّة التعدّي

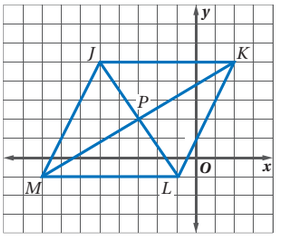
24) $(-1, 0)$؛ إجابة ممكنة: الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، وبما أنّ ميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ فإن ميل $\overline{AD}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ أيضًا. ولتعيين الرأس D، ابدأ من الرأس A وتحرّك إلى الأسفل 6 وحدات و إلى اليمين وحدتين.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يرسموا متوازي أضلاع يقع في الأرباع الأربعة للمستوى الإحداثي، ثم اطلب إليهم أن يرسموا قطري الشكل. اطلب إليهم بعد ذلك أن يرسموا على المستوى الإحداثي نفسه تمددين للشكل مركزهما نقطة الأصل، ومعاملاتهما 0.5 وَ 2 ، وأن يرسموا أقطار الشكلين الناتجين. اطلب إلى الطلاب أن يُسجّلوا العلاقة بين الزوايا الداخلية للأشكال الثلاثة، وكذلك العلاقة بين أقطار تلك الأشكال.
إخضاع متوازي الأضلاع للتمددات لا يغير قياسات الزوايا الداخليّة للأشكال الناتجة. وجميع الأقطار المتناظرة متوازية.

29) **هندسة إحداثيّة:** استعن بالشكل المجاور في كل مما يأتي:



a) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحديد ما إذا كان قطرا $JKLM$ ينصّف كل منهما الآخر. وضّح إجابتك.

b) حدّد ما إذا كان قطرا $JKLM$ متطابقين. وضّح إجابتك.

c) استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة أم لا. وضّح إجابتك.

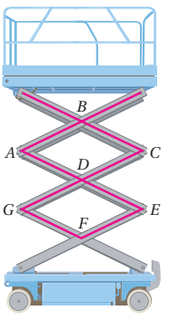
29a) $JP = \sqrt{13}$, $LP = \sqrt{13}$, $MP = \sqrt{34}$, $KP = \sqrt{34}$، بما أن $JP = LP$, $MP = KP$ فإن القطرين ينصّف كل منهما الآخر.

29b) لا؛ $JP + LP \neq MP + KP$

29c) لا؛ ميل $\overline{JK}$ يساوي 0، وميل $\overline{JM}$ يساوي 2؛ وحاصل ضرب ميليهما لا يساوي -1



30) **رافعات:** في الشكل المجاور: $ABCD$, $GDEF$ متوازيا أضلاع متطابقان. **a–c) انظر الهامش.**



a) حدِّد الزوايا التي تطابق $\angle A$. وضّح تبريرك.

b) حدِّد القطع المستقيمة التي تطابق $\overline{BC}$. وضّح تبريرك.

c) حدِّد الزوايا المكملة للزاوية C. وضّح تبريرك.

الربط مع الحياة

توفر الرافعات المقصيّة مساحات عمل على ارتفاعات مختلفة تصل إلى 100 m.

31) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة اختبارات لتمييز متوازي الأضلاع.

a) هندسيًّا: ارسم ثلاثة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة والمتوازية. صِل الأطراف لتكوِّن أشكالًا رباعية، وسمِّها $ABCD$, $MNOP$, $WXYZ$. ثم قِس أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لكل منها. **انظر الهامش.**

b) جدوليًّا: أكمل الجدول الآتي:

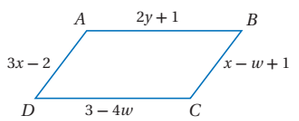
الشكل الرباعي	هل الأضلاع المتقابلة متطابقة؟	هل الزوايا المتقابلة متطابقة؟	هل الشكل متوازي أضلاع؟
$ABCD$	نعم	نعم	نعم
$MNOP$	نعم	نعم	نعم
$WXYZ$	نعم	نعم	نعم

c) لفظيًّا: ضع تخمينًا حول الأشكال الرباعيّة التي لها ضلعان متطابقان ومتوازيان.

31c) إجابة ممكنة: إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان ومتطابقان، فإن هذا الشكل متوازي أضلاع.

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **تحدٍّ:** إذا كان محيط $\square ABCD$ في الشكل أدناه يساوي 22 in، فأوجد AB. **7in**



33) **اكتب:** هل توجد نظرية $SSSS$ في تطابق متوازيات الأضلاع. برّر إجابتك. **انظر الهامش.**

تنبيه لحل سؤال

المسطرة والمنقلة والفرجار: يتطلب السؤال 31 استعمال مسطرة ومنقلة وفرجار.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 31، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية والجدول والوصف اللفظي لاستقصاء شروط كون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

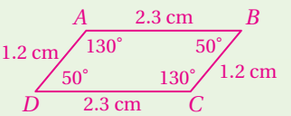
إجابات:

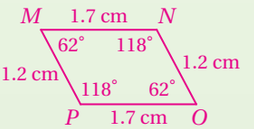
30a) $\angle C$, $\angle E$, $\angle G$، إجابة ممكنة: $\angle C$ تطابق $\angle A$؛ لأنّ الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. $\angle E$ تطابق $\angle A$؛ لأن الزوايا المتناظرة في الأشكال المتطابقة تكون متطابقة. $\angle G$ تطابق $\angle E$؛ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، وتطابق $\angle A$ بحسب خاصية التعدّي.

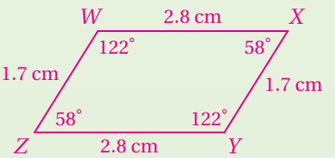
30b) $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{GF}$؛ إجابة ممكنة: $\overline{AD}$ تطابق $\overline{BC}$؛ لأنّ الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. $\overline{DE}$ تطابق $\overline{BC}$؛ لأن الأضلاع المتناظرة في الأشكال المتطابقة تكون متطابقة. $\overline{GF}$ تطابق $\overline{DE}$؛ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\overline{BC}$ بحسب خاصيّة التعدّي.

30c) $\angle ABC$, $\angle ADC$, $\angle EDG$, $\angle EFG$؛ إجابة ممكنة: الزاويتان ABC و ADC مكملتان لـ $\angle C$؛ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة. $\angle EDG$ مكملة لـ $\angle C$؛ لأنها تطابق $\angle ADC$ بحسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس ومكملة لـ $\angle C$ بالتعويض، $\angle EFG$ تطابق $\angle EDG$؛ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، ومكملة لِـ $\angle C$ بالتعويض.

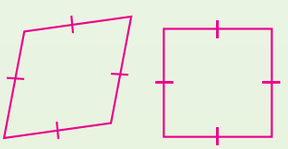
31a) إجابة ممكنة:







33) لا؛ قد يكون لمتوازيي الأضلاع الأطوال نفسها، ولكن تختلف قياسات الزوايا.



4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب أن يعدوا قائمة لجميع خصائص متوازي الأضلاع التي تعلموها، واطلب إليهم أن يسلّموك أوراقهم قبل خروجك من غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرسين 1–5 و 2–5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (11).

إجابات:

34)



35) $m\angle 1 = 116°, m\angle 10 = 115°$؛ إجابة ممكنة: $m\angle 8 = 64°$؛ لأن الزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقة.

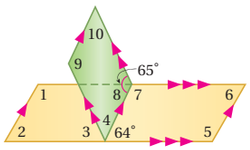
$\angle 1$ مكمّلة لـ $\angle 8$؛ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة. لذلك $m\angle 1$ يساوي $116°$. $\angle 10$ مكملة للزاوية التي قياسها $65°$؛ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة. لذلك فإن $m\angle 10$ يساوي $180° - 65°$ أو $115°$.

49) بحسب نظرية المتباينة SAS، إذا بدأت الشجرة تميل، فإن إحدى زوايا المثلث المتكون من الشجرة وسطح الأرض والدعامة سوف تتغير، والضلع المقابل لتلك الزاوية سوف يتغير. ولأنّ الدعامة ترتكز على الأرض ومثبّتة في الشجرة، فإنه لن يتغير طول أي ضلع من أضلاع المثلث. لذلك لا يمكن أن تتغير أي زاوية. وهذا يؤكد أن الشجرة ستبقى مستقيمة.

36) إجابة ممكنة: في متوازي الأضلاع تكون الأضلاع المتقابلة متطابقة، والزوايا المتقابلة متطابقة، وتكون كل زاويتين متحالفتين متكاملتين. وإذا كانت إحدى الزوايا قائمة تكون جميع زواياه قوائم. وقطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر.

34) إجابة مفتوحة: أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن أن متوازيات الأضلاع ذات الأضلاع المتناظرة المتطابقة ليست متطابقة دائمًا. انظر الهامش.

35) تبرير: أوجد $m\angle 1$, $m\angle 10$ في الشكل المجاور. وبرّر إجابتك. انظر الهامش.



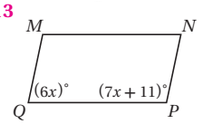
36) اكتب: لخّص خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وأقطاره.

تدريب على اختبار

37) قياسا زاويتين متحالفتين في متوازي أضلاع هما: $9x - 18$, $3x + 42$. ما قياس الزاويتين؟ **D**

A 13, 167 **B** 58.5, 31.5 **C** 39, 141 **D** 81, 99

38) إذا كان $QPNM$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟ **13**



مراجعة تراكمية

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي : (الدرس 1-5)

39) 108° **5** **40)** 140° **9** **41)** 147.3° **11**

42) 160° **18** **43)** 135° **8** **44)** 176.4° **100**

حدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كل مما يأتي: (الدرس 2-5)

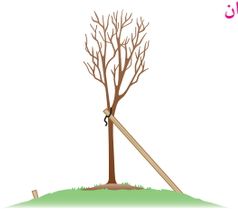
45) $y = -x + 6$, $x + y = 20$ متوازيان

46) $y - 7x = 6$, $7y + x = 8$ متعامدان

47) $3x + 4y = 12$, $6x + 2y = 6$ غير ذلك

48) $2x + 5y = -1$, $10y = -4x - 20$ متوازيان

49) زراعة: عند زراعة الأشجار، تسند الشجرة بدعامة (على شكل عصا) ترتكز على الأرض وتربط في جذع الشجرة لتثبيتها. استعمل متباينة SAS لتفسير سبب فعالية هذه الطريقة في تثبيت الأشجار المزروعة رأسيًّا. (الدرس 4-6) انظر الهامش.



استعد للدرس اللاحق

رؤوس شكل رباعي هي $W(3, -1), X(4, 2), Y(-2, 3), Z(-3, 0)$. حدّد ما إذا كانت كل قطعة مستقيمة مما يأتي تمثل ضلعًا أو قطرًا في الشكل الرباعي، وأوجد ميل كل منها.

50) $\overline{YZ}$ ضلع؛ الميل: 3 **51)** $\overline{YW}$ قطر؛ الميل: $-\frac{4}{5}$ **52)** $\overline{ZW}$ ضلع؛ الميل: $-\frac{1}{6}$

28 الفصل 5 الأشكال الرباعية

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر الدرس 2 - 5

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

5-2 تدريبات إعادة التعليم

متوازي الأضلاع

أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه:

متوازي الأضلاع هو شكل رباعيّ فيه كلّ ضلعين متقابلين متوازيان ويرمز له بالرمز ▱ ، وفيما يأتي أربع خصائص لمتوازي الأضلاع.

	إذا كان **PQRS** متوازي أضلاع، فإنّ:	
5.3	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.	$\overline{PS} \cong \overline{QR}$ و $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$
5.4	كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.	$\angle R \cong \angle P$ و $\angle S \cong \angle Q$
5.5	كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.	$\angle P$ و $\angle S$ متكاملتان، $\angle S$ و $\angle R$ متكاملتان، $\angle R$ و $\angle Q$ متكاملتان، $\angle Q$ و $\angle P$ متكاملتان.
5.6	إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.	إذا كانت: $m\angle P = 90°$ ، فإن: $m\angle R = 90°$ ، $m\angle Q = 90°$ و $m\angle S = 90°$

مثال في الشكل المجاور، إذا كان **ABCD** متوازي أضلاع، فأوجد قيمة كلٍّ من **a** و **b**.

بما أن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ ضلعان متقابلان في متوازي أضلاع، فإنّ:

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
$AB \cong CD$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$2a = 34$	بالتعويض
$a = 17$	بقسمة كلا الطرفين على 2

وبما أن $\angle A$ و $\angle C$ زاويتان متقابلتان، فإنّ:

$\angle C \cong \angle A$	كل زاويتين في متوازي الأضلاع متطابقتان
$m\angle C = m\angle A$	تعريف تطابق الزوايا
$8b° = 112°$	بالتعويض
$b = 14$	بقسمة كلا الطرفين على 8

تمارين

أوجد قيمة كلٍّ من **x** و **y** في كلّ متوازي أضلاع ممّا يأتي:

(1) $x = 30, y = 22.5$ (2) $x = 15, y = 11$ (3) $x = 2, y = 4$

(4) $x = 10, y = 40$ (5) $x = 13, y = 32.5$ (6) $x = 5, y = 180$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

5-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

متوازي الأضلاع

قطرا متوازي الأضلاع:

قُطرا متوازي الأضلاع يحقّقان الخاصيتين الآتيتين:

	إذا كان **ABCD** متوازي أضلاع، فإنّ:	
5.7	قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر.	$AP = PC$ و $DP = PB$
5.8	كلّ قطر في متوازي أضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.	$\triangle ACD \cong \triangle CAB$ و $\triangle ADB \cong \triangle CBD$

مثال أوجد قيمة كلٍّ من **x** و **y** في متوازي الأضلاع **ABCD** المجاور.

بما أنّ قطري متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر، إذن:

$\overline{AE} \cong \overline{EC}$	قُطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر.
$AE = EC$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$18 = 4y$	بالتعويض
$4.5 = y$	بقسمة كلا الطرفين على 4

$\overline{DE} \cong \overline{EB}$	قُطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر.
$DE = EB$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6x = 24$	بالتعويض
$x = 6$	بقسمة كلا الطرفين على 6

تمارين

أوجد قيمة كلٍّ من **x** و **y** في كلّ متوازيات الأضلاع الآتية:

(1) $x = 4, y = 2$ (2) $x = 7, y = 14$ (3) $x = 15, y = 7.5$

(4) $x = 3\frac{1}{2}, y = 10\sqrt{3}$ (5) $x = 15, y = 6\sqrt{2}$ (6) $x = 15, y = \sqrt{241}$

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيّ نقطة تقاطع قُطرَي **ABCD** ▱، الذي أُعطيت إحداثيّات رؤوسه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(7) $A(3,6), B(5,8), C(3,-2), D(1,-4)$ **(3, 2)**

(8) $A(-4,3), B(2,3), C(-1,-2), D(-7,-2)$ **(−2.5, 0.5)**

(9) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا لما يأتي:

المعطيات: **ABCD** متوازي أضلاع.

المطلوب: $\Delta AED \cong \Delta BEC$.

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر، فإن: $\overline{CE} \cong \overline{AE}$ و $\overline{BE} \cong \overline{DE}$ ، وبما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإن: $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. ولأن الأضلاع المتناظرة في المثلثين متطابقان، إذن المثلثان متطابقان وفق SSS.

تدريبات المهارات (13) — دون ضمن

الاسم _____ التاريخ _____

5-2 تدريبات المهارات

متوازي الأضلاع

جبر: أوجد قيمتَي **x** و **y** في كلٍّ من متوازيات الأضلاع الآتية:

(1) $x = 5, y = 4$ (2) $x = 136, y = 44$ (3) $x = 21, y = 25$

(4) $x = 2, y = 7$ (5) $x = 43, y = 120$ (6) $x = 4, y = 3$

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيّ نقطة تقاطع قُطرَي **HJKL** ▱، الذي أُعطيت إحداثيات رؤوسه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(7) $J(5,1), K(6,3), J(2,3), H(1,1)$ **(3.5, 2)**

(8) $J(-1,-1), K(3,-2), J(3,3), H(-1,4)$ **(1, 1)**

(9) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: ▱ $XYTZ$ ، ▱ $RSTW$

المطلوب: $\overline{XZ} \parallel \overline{RW}$

العبارات	المبرّرات
1) ▱ $XYTZ$ ، ▱ $RSTW$	1) معطيات
2) $\overline{SR} \parallel \overline{WR}$ ، $\overline{YT} \parallel \overline{XZ}$	2) الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية.
3) $\overline{XZ} \parallel \overline{RW}$	3) إذا وازى مستقيمان مستقيما ما، فهما متوازيان (خاصة التعدي).

تدريبات حل المسألة (14) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

5-2 تدريبات حلّ المسألة

متوازي الأضلاع

1) ممرّات: يتكون ممرٌّ من أربعة متوازيات أضلاع موصولة بعضها ببعض كما في الشكل أدناه، فهل القطعتان المستقيمتان a و e متوازيتان؟ وضّح إجابتك.

نعم؛ الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، وعلاقة التوازي تحقق خاصية التعدي.

2) مواقف سيارات: يبيّن الشكل أدناه خمسة مواقف أمام أحد المحال التجارية، كلٌّ منها على شكل متوازي أضلاع وجميعها متطابقة، أوجد قياس الزاوية المجهولة x ، وبرّر إجابتك.

135°؛ بما أن متوازيات الأضلاع جميعها متطابقة، إذن الزاوية المجهولة متطابقة مع الزاوية التي قياسها 45°؛ أي أن مجموع قياسيهما 180°. وعليه يكون قياس الزاوية المجهولة x هو: $180° - 45° = 135°$

3) بليارد: يلعب خالد البلياردو، إذا ضرب الكرة فارتطمت بحافة الطاولة واردت في مسارات مختلفة على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل أدناه، فحدّد قياسات الزوايا الأربع لمتوازي الأضلاع.

$m\angle E = 54°$

$m\angle F = 126°$

$m\angle G = 54°$

$m\angle H = 126°$

4) نجارة: الشكل أدناه عبارة عن سطح مكتب صمّمه نجّار على شكل حرف L، وهو عبارة عن متوازيَي أضلاع متلاصقين، فهل القطعتان AD و CF متطابقتان؟ ولماذا.

لا؛ لأن متوازيَي الأضلاع $ABCD$ ، $CDEF$ غير متطابقين.

5) تصوير: ركب مصوّرٌ مرصدًا لالتقاط صورة لمبنًى حديث في إحدى المدن، والشكل أدناه يبين المنظر العلويّ لهذا المبنى، إذا كان قياس الزاوية الخارجية عند المدخل 72°، وأراد مهندسٌ أن يعرف مزيدًا عن البناية، فقام برسم الشكل أدناه، واستعمل مهاراته الهندسية ليعرف المزيد عنها، علمًا بأن المدخل الأمامي يقع بجانب الرأس B.

a) ما قياسات الزوايا الأربع لمتوازي الأضلاع؟

$m\angle A = 72°$

$m\angle D = 72°$

$m\angle B = 108°$

$m\angle C = 108°$

b) ما عدد أزواج المثلثات المتطابقة في الشكل؟ وما هي؟

4 أزواج؛ هي:

$\Delta ABE \cong \Delta DCE$,

$\Delta ABC \cong \Delta DCB$,

$\Delta ACE \cong \Delta DBE$,

$\Delta ABD \cong \Delta DCA$.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 5

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

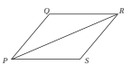
5-2 التدريبات الإثرائيّة

قطرا متوازي الأضلاع

قطر متوازي الأضلاع في بعض الرسوم يبدو على شكل منصّف لزاويتين متقابلتين، فمتى يكون ذلك صحيحًا؟

1) إذا كان $\overline{PR}$ قطرًا في متوازي الأضلاع $SRQP$، و $\overline{PR}$ منصّف لكلٍّ من $\angle QPS$ و $\angle QRS$،

فما نوع متوازي الأضلاع $PQRS$؟ برّر إجابتك.



$\angle QRS \cong \angle QPS$　زاويتان متقابلتان في متوازي الأضلاع.

$\angle QPR \cong \angle RPS$　تعريف منصف الزاوية.

$\angle QRP \cong \angle SRP$　تعريف منصف الزاوية.

$\angle QPR \cong \angle PRS$　زاويتان متبادلتان داخليًا.

$\angle RPS \cong \angle PRS$　خاصية التعدي.

$\overline{SP} \cong \overline{SR}$　عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين.

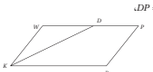
$\overline{SP} \cong \overline{RQ}$　ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع.

$\overline{PQ} \cong \overline{SR}$　ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع.

بما أن جميع الأضلاع متطابقة، إذن الشكل $SRQP$ معيّن.

2) إذا كان $\overline{KD}$ منصّف زاوية في متوازي الأضلاع $WPRK$، و $DP = 5$ ، $WD = 7$،

فأوجد WK و KR.



في $WPRK$ ▭ يكون $\overline{KR} \cong \overline{WP}$ ؛ لأنهما ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع.

$KR = WP$

$= WD + DP$

$= 7 + 5 = 12$

أيضًا

$\angle DWR \cong \angle WKD$　$\overline{KD}$ منصف لـ $\angle WKR$

$\angle DWR \cong \angle WDK$　نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا

$\angle WDK \cong \angle WKD$　خاصية التعدي

أي أن $\triangle WDK$ مثلث متطابق الضلعين. وعليه فإن: $WK = WD = 7$

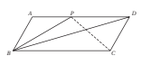
3) ارجع للسؤال 2، واكتب تخمينًا حول متوازي الأضلاع $WPRK$ ومنصّف الزاوية $\overline{KD}$.

$WPRK$ ليس معينًا و$\overline{KD}$ ليس قطرًا.

4) إذا كان $\overline{BD}$ قطرًا في متوازي الأضلاع $ABCD$، و $\overline{BP}$ منصّفًا للزاوية B،

و $CP = 5$ ، $BP = 6$ ، $PD = 7$، ومحيط ΔPCD يساوي 15،

فأوجد AB و BC.

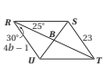


$AB = 4$, $BC = 10$

كتاب التمارين (7)　دون ضمن فوق

5 - 2 متوازي الأضلاع

جبر، استعمل $\square RSTU$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



1) $m\angle STU$　55°

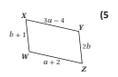
2) $m\angle RST$　125°

3) $m\angle TUR$　125°

4) b　6

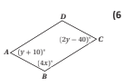
جبر، أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيات الأضلاع الآتية:

5)



$a = 3, b = 1$

6)



$x = 30, y = 50$

7)



$x = 18, y = 9$

8)



$x = 2, y = 4.5$

هندسة إحداثية، أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطري $\square PRYZ$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين :

9) $P(2, 3), R(1, -2), Y(-5, -7), Z(-4, -2)$　$(-1.5, -2)$

10) $P(2, 5), R(3, 3), Y(-2, -3), Z(-3, -1)$　$(0, 1)$

11) **برهان،** اكتب برهانًا حرًّا فيما يأتي :

المعطيات، $\square PQVU$ ، $\square PRST$.

المطلوب، $\angle V \cong \angle S$



البرهان: $PRST$, $PQVU$ متوازيا أضلاع. وبما أن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإن $\angle V \cong \angle P$، وكذلك $\angle P \cong \angle S$. وبما أن التطابق يحقق خاصية التعدي، فإن $\angle S \cong \angle V$.

12) **تصميم،** استعمل خالد متوازي الأضلاع المجاور لتصميم نمط من بلاط الأرصفة. إذا كان $m\angle 1 = 130°$ ، فأوجد كلًّا من $m\angle 2, m\angle 3, m\angle 4$.



$m\angle 2 = 50°, m\angle 3 = 130°, m\angle 4 = 50°$

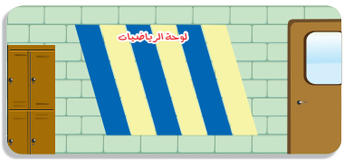
5-3 تمييز متوازي الأضلاع
Distinguishing Parallelogram

فيما سبق:
درستُ خصائص متوازي الأضلاع وطبّقتها.
(الدرس 2-5)

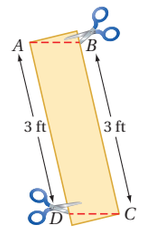
والآن:
- أتعرّف الشروط التي تؤكد أنّ شكلًا رباعيًا متوازي أضلاع وأطبّقها.
- أُبرهن على أنّ أربع نقاط في المستوى الإحداثي تشكل رؤوس متوازي أضلاع.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



قصّت فاطمة شرائح ورقية ملونة لتكون خلفية للوحة الرياضيات عند مدخل المدرسة. فسألتها صديقتها: كيف قصصتِ الشرائح دون استعمال المنقلة بحيث كان الضلعان العلوي والسفلي في كل منها متوازيين؟



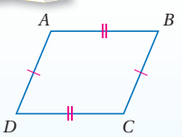
أجابت فاطمة: بما أن الضلعين الأيمن والأيسر للشريط متوازيان، فإننا نحتاج فقط للتأكد من أن الضلعين العلوي والسفلي قد تم قصّهما بطول متساوٍ حتى نضمن أن الشرائح سوف تشكل متوازيات أضلاع.

شروط متوازي الأضلاع: في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متوازيين، فإنّه متوازي أضلاع بحسب التعريف. ولكن ليس هذا هو الشرط الوحيد الذي يمكن استعماله لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

نظريات
شروط متوازي الأضلاع

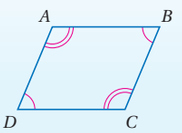
أضف إلى مطويتك

5.9 في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



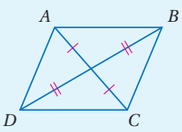
مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.

5.10 في الشكل الرباعي، إذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



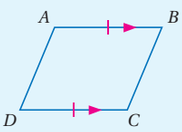
مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.

5.11 إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



مثال: إذا كان $\overline{AC}, \overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.

5.12 في الشكل الرباعي، إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AB} \parallel \overline{DC}$، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.

سوف تبرهن النظريتين 5.11, 5.10 في السؤالين 31, 29 على الترتيب، وتبرهن النظرية 5.12 في مثال 5

مصادر الدرس 5-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (31)	• تنويع التعليم، ص (31, 34)	• تنويع التعليم، ص (31, 34, 36)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (8)	• كتاب التمارين، ص (8)	• كتاب التمارين، ص (8)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

ملاحظات الدرس 5-3

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-3
تعرّف خصائص متوازي الأضلاع وتطبيقها.

الدرس 5-3
تعرّف الشروط التي تؤكد أن شكلًا رباعيًا متوازي أضلاع وتطبيقها.
إثبات أن أربع نقاط في المستوى الإحداثي تشكل رؤوس متوازي أضلاع.

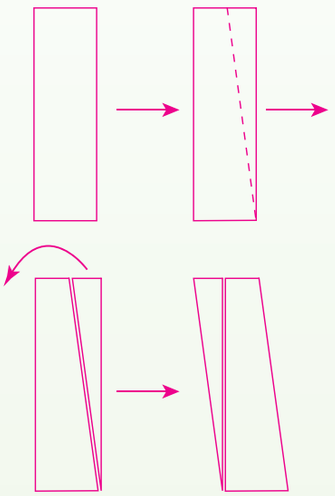
ما بعد الدرس 5-3
استعمال خصائص التشابه وتوسيعها لاستقصاء تخمينات حول المستطيلات وتبريرها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:
- هل كانت الأطوال الأصليّة لشرائح الورق أكبر من أو أصغر من أو تساوي 3 ft؟ أطوال شرائح الورق كانت في الأصل أكبر من 3 ft؛ لأن هناك جزءًا من طول الشريط سيقصّ ويطرح، مما يتطلب زيادة في طول الورقة عن 3 ft .
- قالت فاطمة أيضًا إنّه يُوجد قياس آخر يجب أن يكون متساويًا بين جميع شرائح الورق؛ وذلك من أجل التأكد من أن شرائح الورق تشكل متوازي أضلاع. فما القياس الذي أشارت إليه فاطمة؟ طول كل من الضلعين العلوي والسفلي يجب أن يكون متساويًا.

• إذا كان لدى فاطمة شريحة بطول 9 ft بالضبط من كل لون، فكيف يمكنها قصّ كل شريحة من الورق لتحصل على النتيجة نفسها؟ يمكنها قصّ مثلث من أحد الأطراف ولصقه في الطرف الآخر من الشريحة، بحيث يتم وضع ضلع المثلث المطابق لضلع الشريحة بجانب بعضهما البعض كما في الشكل التالي:



شروط متوازي الأضلاع

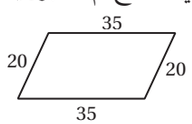
الأمثلة 3-1 تبيّن كيفية استعمال نظريات جديدة وهي عكس النظريات: 5.3, 5.4, 5.5 في الدرس 2-5 للتأكد من أن شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاع.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي أدناه متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

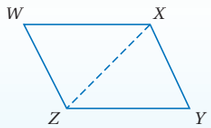


لكل زوج من الأضلاع المتقابلة الطول نفسه. لذلك فهما متطابقان. وإذا كان كل زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

إرشادات للمعلم الجديد

إرشاد: أكد على استعمال النظريات الواردة في الصفحة السابقة في البراهين. وفي هذا الدرس يتعلم الطلبة أنه لإثبات أن شكلًا رباعيًّا هو متوازي أضلاع، فإن عليهم إثبات أن واحدة فقط من هذه النظريات تنطبق عليه.

برهان نظريّة 5.9



اكتب برهاناً حرًّا للنظريّة 5.9

المعطيات: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$

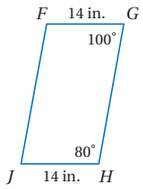
المطلوب: $WXYZ$ متوازي أضلاع.

البرهان:

ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{ZX}$ (قطر $\square WXYZ$) لتشكيل $\triangle XYZ$, $\triangle ZWX$. ومن المعطيات $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$. وكذلك $\overline{ZX} \cong \overline{XZ}$ بحسب خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ إذن $\triangle ZWX \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS. وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإنّ $\angle WXZ \cong \angle YXZ, \angle WZX \cong \angle YZX$. وهذا يعني أنّ $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$, $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا. وبما أن الأضلاع المتقابلة في $WXYZ$ متوازية، فإنه متوازي أضلاع بحسب التعريف.

مثال 1 تحديد متوازي الأضلاع

حدد ما إذا كانت المعطيات على الشكل الرباعي المجاور كافية ليكون متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.



الضلعان المتقابلان $\overline{FG}$, $\overline{JH}$ متطابقان؛ لأنهما متساويان في الطول. وبما أن $\angle GHJ$, $\angle FGH$ متحالفتان ومتكاملتان، فإنّ $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$. إذن فمن النظرية 5.12، يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

تحقق من فهمك

1A) 12 cm, 5 cm, 5 cm, 12 cm

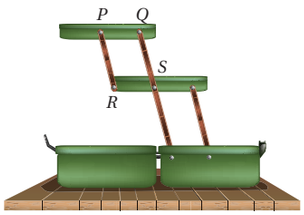
1B) 115°, 65°

1A) نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان.

1B) لا؛ المعطيات غير كافية لمعرفة هل هو متوازي أضلاع أم لا، حيث تشير قيم الزاويتين المتحالفتين إلى أن الضلعين المتقابلين متوازيان، لكن لا يوجد ما يدل على أنهما متطابقتان.

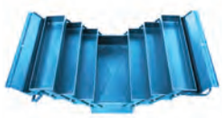
يمكنك استعمال شروط متوازي الأضلاع لإثبات علاقات من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال متوازي الأضلاع لإثبات علاقات



صندوق الأدوات: في الشكل المجاور، إذا كان $PQ = RS$, $PR = QS$، فبيّن لماذا تبقى الطبقتان العلوية والوسطى متوازيتين عند أي ارتفاع .

بما أن كلّ ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي $PQSR$ متطابقان، فإن $PQSR$ متوازي أضلاع بحسب النظرية 5.9. إذن $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$ ؛ لذا وبغض النظر عن ارتفاع الطبقتين، فستبقيان متوازيتين.



الربط مع الحياة

يضع الفنيون أدواتهم في صناديق ذات طبقات متداخلة تسهّل تنظيم الأدوات وتبقيها في متناول أيديهم.

تحقق من فهمك

2) لوحات: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وضّح لماذا يكون خطي القص أعلى وأسفل كل شريحة متوازيين. انظر ملحق الإجابات.

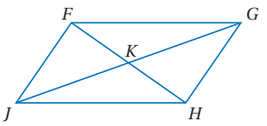
يمكنك استعمال الجبر مع شروط متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة التي تجعل شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاع.

تنبيه!

متوازي الأضلاع: في المثال 3، إذا كانت x تساوي 4، فإن y يجب أن تساوي 2.5 حتى يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع. وهذا يعني أنه إذا كانت x تساوي 4 و y تساوي 1 مثلًا، فلن يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

مثال 3 استعمال متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة

في الشكل المجاور: $FK = 3x - 1,\ KG = 4y + 3$، $JK = 6y - 2,\ KH = 2x + 3$. أوجد قيمتي x, y بحيث يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.



بناءً على النظرية 5.11، إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع؛ لذا أوجد قيمة x التي تجعل $\overline{FK} \cong \overline{KH}$؛ وقيمة y التي تجعل $\overline{JK} \cong \overline{KG}$.

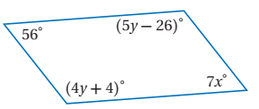
$FK = KH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3x - 1 = 2x + 3$	بالتعويض
$x - 1 = 3$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين
$x = 4$	بإضافة 1 إلى كلا الطرفين
$JK = KG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6y - 2 = 4y + 3$	بالتعويض
$2y - 2 = 3$	بطرح $4y$ من كلا الطرفين
$2y = 5$	بإضافة 2 إلى كلا الطرفين
$y = 2.5$	بقسمة كلا الطرفين على 2

إذن عندما تكون $y = 2.5,\ x = 4$، يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

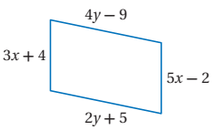
تحقق من فهمك

أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(3A)



(3B)



$x = 8, y = 30$ (3A

$x = 3, y = 7$ (3B

تعرفت شروط متوازي الأضلاع، وفيما يأتي ملخّص يوضح كيفيّة استعمال هذه الشروط لإثبات أنّ شكلًا رباعيًّا يمثّل متوازي أضلاع.

ملخص المفهوم إثبات أنّ شكلًا رباعيًّا يمثّل متوازي أضلاع

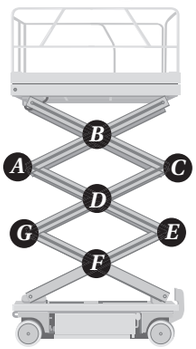
أضف إلى مطويتك

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا حقّق أيًّا من الشروط الآتية:

1) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. (التعريف)
2) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متطابقين. (النظرية 5.9)
3) إذا كانت كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتين. (النظرية 5.10)
4) إذا كان قطراه ينصّف كل منهما الآخر. (النظرية 5.11)
5) إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. (النظرية 5.12)

مثال إضافي

2 **رافعات:** تستعمل الرافعة المقصيّة عادة لبلوغ أماكن عمل مرتفعة بأمان. في الشكل أدناه $\angle A \cong \angle C$، و $\angle B \cong \angle D$. وضِّح لماذا ستبقى الزوايا المتحالفة متكاملة دائمًا بغض النظر عن ارتفاع المنصّة.



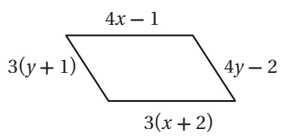
بما أنّ كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي $ABCD$ متطابقتان، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع بحسب النظرية 5.10. وتنص النظرية 5.5 على أن كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.

لذلك $m\angle A + m\angle B = 180°$ و $m\angle C + m\angle D = 180°$.

وبالتعويض $m\angle A + m\angle D = 180°$ و $m\angle C + m\angle B = 180°$.

مثال إضافي

3 أوجد قيمتي x, y بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



$x = 7; y = 5$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

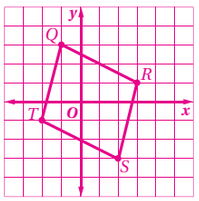
المتعلمون الفرديون: اطلب إلى الطلاب أن يختار كل واحد منهم شريكًا، وكلّف أحدهما برسم متوازي أضلاع في مستوى إحداثي، واطلب إلى شريكه إثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع. بدّل الأدوار وكرّر النشاط مرّة ثانية.

متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي

المثالان 4, 5 يبيّنان كيفية استعمال صيغة الميل في تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي متوازي أضلاع أم لا، وكذلك يمكن استعمال صيغتي المسافة بين نقطتين، ونقطة المنتصف في تحديد ما سبق.

مثالان إضافيان

4 هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $QRST$ الذي رؤوسه: $Q(-1, 3)$، $R(3, 1)$، $S(2, -3)$، $T(-2, -1)$. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أو لا، ثم برّر إجابتك باستعمال صيغة الميل.



ميل $\overline{QR}$ يساوي $\frac{1-3}{3-(-1)} = -\frac{1}{2}$

ميل $\overline{ST}$ يساوي $\frac{-3-(-1)}{2-(-2)} = -\frac{1}{2}$

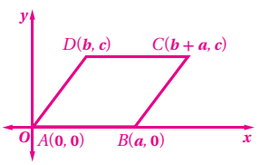
ميل $\overline{RS}$ يساوي $\frac{1-(-3)}{3-2} = 4$

ميل $\overline{TQ}$ يساوي $\frac{-1-3}{-2-(-1)} = 4$

إذن $QRST$ متوازي أضلاع بحسب التعريف.

5 اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية:
إذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقان فإنّه متوازي أضلاع.

ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في مستوى إحداثي بحيث يكون $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



استعمل الشكل الرباعي $A(0,0)$، $B(a,0)$، $C(b+a,c)$، $D(b,c)$.

البرهان:
بحسب التعريف يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية، استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

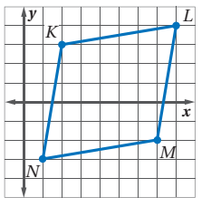
ميل كل من $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ يساوي الصفر. وبما أنّ $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ لهما الميل نفسه، و $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ لهما الميل نفسه، فإنّ $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

إذن الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؛ لأن الأضلاع المتقابلة متوازية.

متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي: يمكننا استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي متوازي أضلاع أم لا.

مثال 4 متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $KLMN$ الذي رؤوسه $K(2, 3)$, $L(8, 4)$, $M(7, -2)$, $N(1, -3)$. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك باستعمال صيغة الميل.



إذا كانت الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متوازية فإنه متوازي أضلاع.

ميل $\overline{KL}$: $\frac{4-3}{8-2} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{NM}$: $\frac{-2-(-3)}{7-1} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{KN}$: $\frac{-3-3}{1-2} = \frac{-6}{-1} = 6$

ميل $\overline{LM}$: $\frac{-2-4}{7-8} = \frac{-6}{-1} = 6$

بما أنّ الأضلاع المتقابلة لها الميل نفسه، فإنّ $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$, $\overline{LM} \parallel \overline{KN}$.
لذا فالشكل الرباعي $KLMN$ متوازي أضلاع بحسب التعريف.

إرشادات للدراسة
صيغة نقطة المنتصف: لبيان أنّ شكلًا رباعيًا يمثّل متوازي أضلاع، يمكنك استعمال صيغة نقطة المنتصف، فإذا كانت نقطتا المنتصف للقطرين متساويتين، فإنّ القطرين ينصّف كل منهما الآخر.

تحقق من فهمك

مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدِّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برِّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال:

4A) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$، صيغة المسافة. انظر الهامش.

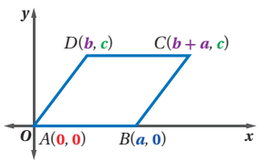
4B) $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$، صيغة نقطة المنتصف. انظر ملحق الإجابات.

درست في الفصل 3، أنّه يمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس المثلثات بمتغيرات. ثم استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لكتابة براهين إحداثيّة للنظريات. ويمكن عمل الشيء نفسه مع الأشكال الرباعيّة.

مثال 5 متوازي الأضلاع والبرهان الإحداثي

اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية :

في الشكل الرباعي، إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



الخطوة 1: ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في المستوى الإحداثي على أن يكون $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

- عيّن الرأس A عند النقطة $(0, 0)$.
- افترض أن طول $\overline{AB}$ يساوي a وحدة. فيكون إحداثيا B هما $(a, 0)$.
- بما أنّ القطع المستقيمة الأفقيّة متوازية دائمًا، فعيّن نقطتي طرفي $\overline{DC}$ على أن يكون لهما الإحداثي y نفسه وليكن c.
- بما أن المسافة من D إلى C تساوي أيضًا a وحدة، وبفرض أنّ الإحداثي x للنقطة D يساوي b ، يكون الإحداثي x للنقطة C يساوي $b + a$.

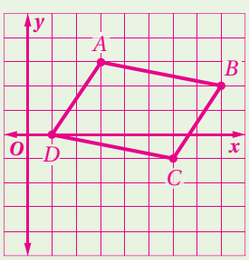
مراجعة المفردات
البرهان الإحداثي: هو برهان تُستعمل فيه أشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات مفاهيم هندسيّة.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى كل طالبين أن يشتركا معًا لعمل مدونة، يذكران فيها مع الشرح الطرائق المختلفة لإثبات أن شكلاً رباعيًّا ما هو متوازي أضلاع، واطلب إليهم العمل معًا لتحرير أعمالهم ومراجعتها ليتأكدوا من أنّها صحيحة وواضحة.

إجابات (تحقق من فهمك):

4A) إذا كانت الأضلاع المتقابلة لشكل رباعي متطابقة، فإنّه متوازي أضلاع.



$AB = \sqrt{26}$؛ $DC = \sqrt{26}$ ؛
$AD = \sqrt{13}$,
$BC = \sqrt{13}$.

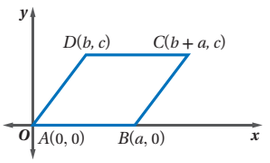
بما أنّ $AB = DC$ و $AD = BC$
فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
لذلك فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع بحسب النظرية 5.9.



تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت
(1596م - 1650م)
عالم رياضيات فرنسي، وهو أول من استعمل المستوى الإحداثي . وقيل إنّه فكّر أولًا بربط كل موقع في مستوى مع زوج من الأعداد.

الخطوة 2: استعمل الشكل الذي رسمته لكتابة برهان.



المعطيات: $ABCD$ شكل رباعي فيه $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

برهان إحداثي:

من التعريف يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية.

ومن المعطيات $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. يبقى أن نثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{AD}$: $\frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$ ميل $\overline{BC}$: $\frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

وبما أن $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ لهما الميل نفسه، فإنّ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ؛ لذا فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.

تحقق من فهمك

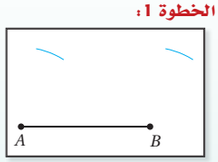
انظر ملحق الإجابات.

5) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ أضلاعه المتقابلة متطابقة.

إنشاءات هندسية

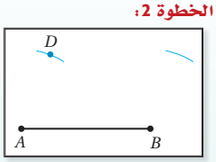
رسم متوازي أضلاع عُلم طولا ضلعين متتاليين فيه.

الخطوة 1:



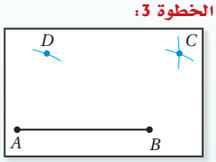
استعمل المسطرة لرسم $\overline{AB}$. ثم افتح الفرجار، وثبّته عند النقطة A، وارسم قوسًا فوقها. ثبّت الفرجار عند النقطة B، وبفتحة الفرجار نفسها ارسم قوسًا فوق B.

الخطوة 2:



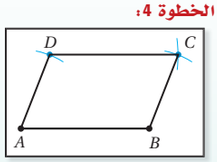
اختر نقطة على القوس الذي فوق A وسمِّها D.

الخطوة 3:



افتح الفرجار فتحة مساوية لِـ $\overline{AB}$، وثبّته عند النقطة D وارسم قوسًا يقطع القوس المرسوم من النقطة B، سمِّ نقطة التقاطع C.

الخطوة 4:

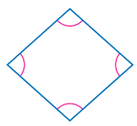


استعمل حافة المسطرة لرسم $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{CD}$.

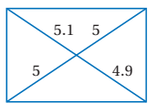
تأكد

المثال 1 حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

1) نعم؛ لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

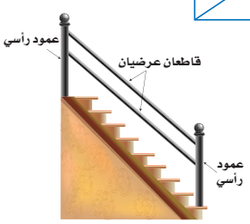


2) لا؛ لأن قطراه لا يتقاطعان في منتصفهما.



المثال 2

3) نجارة: صنع نجار دربزينًا لدَرَج يتكوّن من عمودين رأسيين؛ الأول مثبت فوق الدرجة الأولى، والثاني مثبت فوق الدرجة الأخيرة، ويصل بينهما قاطعان خشبيان كما في الشكل المجاور. كيف يمكن للنجار التحقق من أن القاطعين الخشبيين العرضيين متوازيان، وذلك بأقل عدد من مرات القياس، إذا علمت بأن الدرجتين الأولى والأخيرة مستويتان مع الأرض. **انظر ملحق الإجابات.**



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 8–1 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

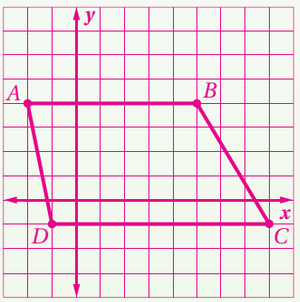
إجابات:

6) لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متوازيان.

ميل $\overline{AD}$ يساوي: $\frac{-1-4}{-1-(-2)} = -5$

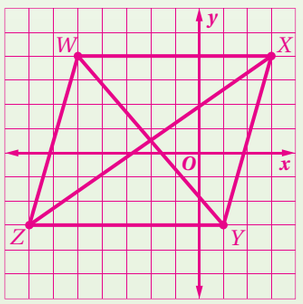
ميل $\overline{BC}$ يساوي: $\frac{-1-4}{8-5} = \frac{-5}{3}$

وبما أن ميل $\overline{BC} \neq$ ميل $\overline{AD}$، فإنّ $ABCD$ ليس متوازي أضلاع.



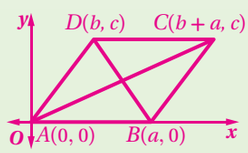
7) نعم؛ نقطة منتصف كل من $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$ هي $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

وبما أنّ القطرين ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ الشكل $WXYZ$ متوازي أضلاع.



8) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر.



البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AC}$

$= \left(\frac{0+(a+b)}{2}, \frac{0+c}{2}\right)$

$= \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

ونقطة منتصف $\overline{DB}$

$= \left(\frac{a+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right)$

$= \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

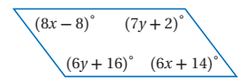
وبما أن لكل من $\overline{AC}$ وَ $\overline{DB}$ نقطة المنتصف نفسها، إذن $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	9-28، 37، 38، 40-53
ضمن ضمن المتوسط	9-29 فردي، 32، 35، 37، 38، 40-53
فوق فوق المتوسط	29–51، (اختياري: 52, 53)

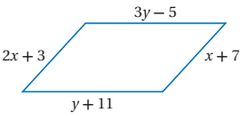
المثال 3 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(4)



$x = 11$، $y = 14$

(5)



$x = 4$، $y = 8$

المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

(6) $A(-2, 4), B(5, 4), C(8, -1), D(-1, -1)$ ، صيغة الميل.

(7) $W(-5, 4), X(3, 4), Y(1, -3), Z(-7, -3)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

(6–8) انظر الهامش.

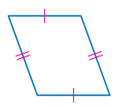
المثال 5 **(8)** اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإنّ قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

تدرب وحل المسائل

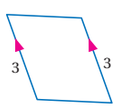
(9–14) انظر الهامش.

المثال 1 حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل مما يأتي كافية ليكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

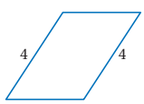
(9)



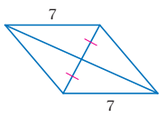
(10)



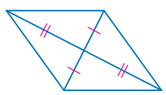
(11)



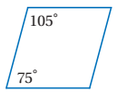
(12)



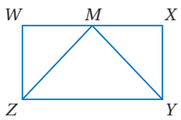
(13)



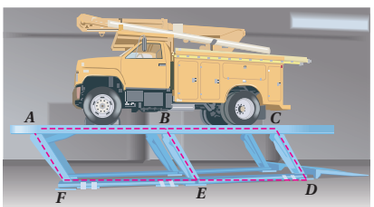
(14)



المثال 2 **(15)** **برهان:** إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، حيث $\angle W \cong \angle X$، M نقطة منتصف $\overline{WX}$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين. انظر ملحق الإجابات.

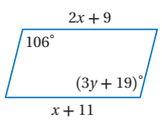


(16) **رافعات:** تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF, BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا. انظر ملحق الإجابات.

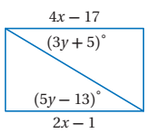


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

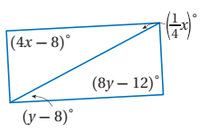
(17)



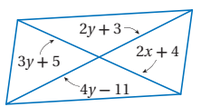
(18)



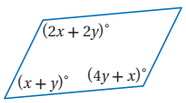
(19)



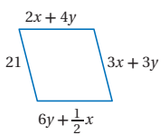
(20)



(21)



(22)



(17) $x = 2, y = 29$

(18) $x = 8, y = 9$

(19) $x = 30, y = 15.5$

(20) $x = 11, y = 7$

(21) $x = 40, y = 20$

(22) $x = 4, y = 3$

إجابات:

(9) نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين متطابقان .

(10) نعم؛ لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.

(11) لا؛ المعطيات غير كافية لمعرفة هل هو متوازي أضلاع أم لا، حيث يوجد ضلعان متقابلان متطابقان، لكن لا يوجد ما يدل على أنهما متوازيان.

(12) لا؛ المعطيات غير كافية لمعرفة هل هو متوازي أضلاع أم لا، حيث إنّ أحد قطريه ينصف الآخر، ولكن لا يوجد ما يدل على أن القطر الآخر ينصّفه. كما أنه يوجد ضلعان متقابلان متطابقان، ولكن لا يوجد ما يدل على أنهما متوازيان.

(13) نعم؛ لأن قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

(14) لا؛ المعطيات غير كافية لمعرفة هل هو متوازي أضلاع أم لا، حيث تشير قيم الزاويتين المتحالفتين إلى أن الضلعين المتقابلين متوازيان، لكن لا يوجد ما يدل على أنهما متطابقتان.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب تعيين النقاط $P(-4, -3), L(-1, 2), S(5, 1)$ في المستوى الإحداثي، واطلب إليهم تعيين نقطة رابعة T بحيث تصنع مع النقط الثلاث متوازي أضلاع، وأن يبرهنوا أن الشكل متوازي أضلاع باستعمال النظريات التي تعلموها في هذا الدرس. إحداثيات ممكنة للنقطة الرابعة $(2, -4)$. ويمكن إثبات ذلك باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين أو صيغة الميل.

إجابة ممكنة: ميل $\overline{PL}$ يساوي $\frac{5}{3}$ ، ميل $\overline{LS}$ يساوي $-\frac{1}{6}$ ، ميل $\overline{ST}$ يساوي $\frac{5}{3}$ ، ميل TP يساوي $-\frac{1}{6}$. وبما أنّ للأضلاع المتقابلة الميل نفسه، فإنّ $\overline{ST} \parallel \overline{PL}$ و $\overline{TP} \parallel \overline{LS}$ ، لذلك فالشكل $PLST$ متوازي أضلاع بحسب التعريف.

المثال 4

هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

23–29) انظر ملحق الإجابات.

23) $A(-3, 4)$، $B(4, 5)$، $C(5, -1)$، $D(-2, -2)$، صيغة الميل.

24) $J(-4, -4)$، $K(-3, 1)$، $L(4, 3)$، $M(3, -3)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $V(3, 5)$، $W(1, -2)$، $X(-6, 2)$، $Y(-4, 7)$، صيغة الميل.

26) $Q(2, -4)$، $R(4, 3)$، $S(-3, 6)$، $T(-5, -1)$، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

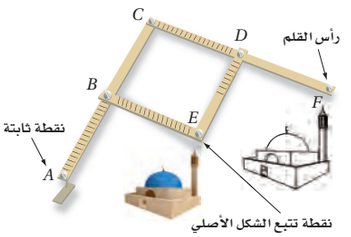
المثال 5

27) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

28) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإنّ جميع زواياه قوائم.

29) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.10.

30) المِنْسَاخ: استعن بمعلومات الربط مع الحياة إلى اليمين والشكل أدناه.





الربط مع الحياة

المِنْسَاخ هو أداة هندسية تستعمل لنسخ صورة أو مخطط وفق مقياس رسم معين.

a) إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{BE}$ ، $\overline{DF} \cong \overline{CD} \cong \overline{AB} \cong \overline{CF}$ ، $\overline{AC} \cong \overline{CF}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.

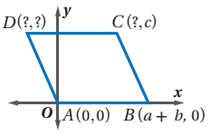
b) مقياس الرسم للشكل المنسوخ بالنسبة للشكل الأصلي هو نسبة CF إلى BE، فإذا كان $AB = 12\,\text{in}$, $DF = 8\,\text{in}$، وطول الشكل الأصلي $5.5\,\text{in}$، فما طول صورة الشكل المنسوخ؟

9.2 in تقريبًا

31) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.11 انظر ملحق الإجابات.

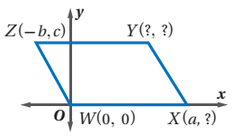
أوجد الإحداثيات المجهولة لرؤوس كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

32)



33) إجابة ممكنة:

$C(a, c)$, $D(-b, c)$



$Y(a - b, c)$, $X(a, 0)$



34) برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي شكل رباعي تشكّل متوازي أضلاع. انظر ملحق الإجابات.

35) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة سوف تستقصي إحدى خصائص المستطيل.

a) هندسيًّا: ارسم ثلاثة مستطيلات بأبعاد مختلفة وسمِّها $ABCD$, $MNOP$, $WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منها.

b) قِس طولي قطري كل مستطيل، ثم أكمل الجدول المجاور. انظر الهامش.

المستطيل	القطر	الطول
$ABCD$	$\overline{AC}$	3.3 cm
	$\overline{BD}$	3.3 cm
$MNOP$	$\overline{MO}$	2.8 cm
	$\overline{NP}$	2.8 cm
$WXYZ$	$\overline{WY}$	2.0 cm
	$\overline{XZ}$	2.0 cm

c) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول قطري المستطيل. انظر الهامش.

مراجعة المفردات

مقياس الرسم: هو نسبة تستعمل لتمثيل الأشياء التي تكون كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا عندما ترسم بحجمها الحقيقي. ويعطي المقياس نسبة تقارن بين قياسات الرسم أو النموذج وقياسات الأشياء الحقيقية.

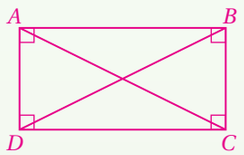
تنبيه لحل سؤال

المسطرة والفرجار: يتطلب السؤال 35 استعمال مسطرة وفرجار.

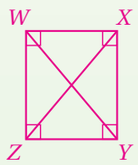
تمثيلات متعدّدة: في السؤال 35، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسيّة والجدول والوصف اللفظي لاستقصاء خصائص المستطيل.

إجابة:

35a) إجابة ممكنة:







35c) إجابة ممكنة: قطرا المستطيل متطابقان.

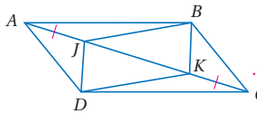
مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** يتقاطع قطرا متوازي أضلاع عند النقطة (0, 1). ويقع أحد رؤوسه عند النقطة (2, 4)، بينما يقع رأس آخر عند النقطة (3, 1). أوجد موقعي الرأسين الآخرين. **(−3, 1) و (−2, −2)**

37) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين النظريتين 5.9 و 5.3 . **انظر الهامش.**

38) **تبرير:** إذا كانت الزوايا المتناظرة في متوازيي أضلاع متطابقة، فهل يكون متوازيا الأضلاع متطابقين أحيانًا، أم دائمًا، أم لا يكونان متطابقين أبدًا؟ **انظر الهامش.**

39) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$. بيّن أن الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع. **انظر ملحق الإجابات.**



40) **اكتب:** استعمل العبارات الشرطية الثنائية "إذا وفقط إذا" في دمج كل من النظريات: 5.9 وَ 5.10 وَ 5.11 وَ 5.12 وعكسها. **انظر الهامش.**

تدريب على اختبار

41) إذا كان الضلعان $\overline{AB}, \overline{DC}$ في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأيّ المعطيات الآتية كافية لإثبات أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع؟ **B**

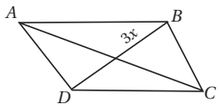
A $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

B $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

C $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

D $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

42) **إجابة قصيرة:** في الشكل الرباعي $ABCD$ أدناه، إذا كان $AC = 40, BD = \frac{3}{5}AC$، $\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$، فما قيمة x التي تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع؟ **4**



مراجعة تراكمية

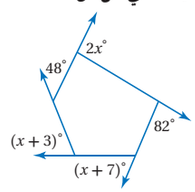
هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ***ABCD*** في كل من السؤالين الآتيين (الدرس 2-5)

43) $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$ **(1, 0.5)**

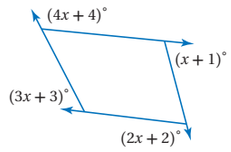
44) $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$ **(4.5, 1.5)**

أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية : (الدرس 1-5)

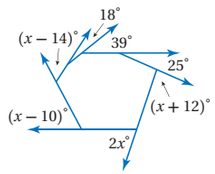
45) **55**



46) **35**



47) **58**



أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 1-5)

48) 140° **9**

49) 160° **18**

50) 168° **30**

51) 162° **20**

استعد للدرس اللاحق

استعمل الميل لتحديد ما إذا كان $\overline{XY}, \overline{YZ}$ متعامدتين أم لا في كل مما يأتي:

52) $X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$ غير متعامدتين

53) $X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$ غير متعامدتين

4 التقويم

تعلّم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقرة يوضحوا من خلالها كيف ساعدهم الدرس السابق حول متوازي الأضلاع في درس تمييز متوازي الأضلاع.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 3–5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (11)

إجابات:

37) إجابة ممكنة: النظريتان إحداهما عكس الأخرى، فرض النظرية 5.3 "الشكل ▱" وفرض النظرية 5.9 "الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقة". نتيجة النظرية 5.3 الأضلاع المتقابلة متطابقة ونتيجة النظرية 5.9 الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

38) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: يمكن أن يكون متوازيا الأضلاع متطابقين، ويمكن أن يكونا غير متطابقين؛ لأنه قد يكون لمتوازيي الأضلاع قياسات الزوايا نفسها، ولكن أطوال الأضلاع في أحدهما أكبر أو أصغر من الآخر.

40) - يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متطابقين.

- يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتين.

- يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان قطراه ينصف كل منهما الآخر.

- يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين.

تنويع التعليم

فوق

توسع: قدّم للطلاب متوازي أضلاع مرسومًا على مستوى إحداثي، إحداثيات رؤوسه (0, 0)، (2, 4)، (8, 4)، (6, 0)، ثم صل بين النقطتين (2, 4) و (5, 0)، وبين النقطتين (3, 4) و (6, 0)، وبين النقطتين (0, 0) و(6, 4)، وبين النقطتين (2, 0)و (8, 4). ما الشكل الناتج عن تقاطعات القطع المستقيمة الأربع؟ متوازي أضلاع



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 5

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

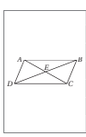
5-3 تدريبات إعادة التعليم

تمييز متوازي الأضلاع

شروط متوازي الأضلاع:

توجد عدّة طرق لإثبات أن شكلًا رباعيًا ما هو متوازي أضلاع.

	في الشكل الرباعي إذا:	إذا كان:
تعريف	فإنّ الشكل متوازي أضلاع.	كان كلّ ضلعين متقابلين متوازيين
5.9	فإنّ ABCD متوازي أضلاع.	كان كلّ ضلعين متقابلين متطابقين
5.10		كانت كلّ زاويتين متقابلتين متطابقتين
5.11		نصّف قطراه كلّ منهما الآخر
5.12		كان ضلعان متقابلان متطابقين ومتوازيين



مثال

أوجد قيمتي x و y، بحيث يكون الشكل الرباعيّ $FGHJ$ متوازي أضلاع.

يكون الشكل الرباعيّ $FGHJ$ متوازي أضلاع، إذا كان طولا كلّ ضلعين متقابلين فيه متساويين.



$FJ = GH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$4x - 2y = 2$	بالتعويض
$4(2) - 2y = 2$	بالتعويض عن $x = 2$
$8 - 2y = 2$	بالتبسيط
$-2y = -6$	بطرح 8 من كلا الطرفين
$y = 3$	بقسمة كلا الطرفين على (2)

$FG = JH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6x + 3 = 15$	بالتعويض
$6x = 12$	بطرح 3 من كلا الطرفين
$x = 2$	بقسمة كلا الطرفين على 6

تمارين

أوجد قيمتي x و y، في كلّ مما يأتي، بحيث يكون الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع:

(1)


$x = 7, y = 4$

(2)


$x = 5, y = 25$

(3)


$x = 31, y = 5$

(4)


$x = 5, y = 3$

(5)


$x = 15, y = 9$

(6)


$x = 30, y = 15$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

5-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

تمييز متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع في المستوى الاحداثي:

يمكنك استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف؛ لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعيّ في المستوى الإحداثيّ متوازي أضلاع أم لا.

مثال

مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-2,3), B(3,2), C(2,-1), D(-3,0)$، وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا.



الطريقة 1، استعمال صيغة الميل: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{2-(-1)}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$، وميل $\overline{AD}$: $m = \frac{3-0}{-2-(-3)} = \frac{3}{1} = 3$

وميل $\overline{AB}$: $m = \frac{2-3}{3-(-2)} = -\frac{1}{5}$، وميل $\overline{DC}$: $m = \frac{-1-0}{2-(-3)} = -\frac{1}{5}$

بما أنّ كلّ ضلعين متقابلين فيها الميل نفسه، فإنّ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$، إذن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع وفق التعريف.

الطريقة 2، استعمال صيغة المسافة بين نقطتين: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.

$AB = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ $\quad AD = \sqrt{(-2-(-3))^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$CD = \sqrt{(2-(-3))^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ $\quad BC = \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

بما أنّ كلّ ضلعين متقابلين متساويان في الطول، إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$، لذا فالشكل $ABCD$ متوازي أضلاع وفق النظرية 5.9

تمارين

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي، وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، مبرّرًا إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال: **انظر رسومات الطلاب**

1) $A(0,0), B(1,3), C(5,3), D(4,0)$ صيغة الميل.
نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي 3؛ لذا: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ وميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي 0. لذا: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$، ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان، إذن $ABCD$ متوازي أضلاع.

2) $D(-1,1), E(2,4), F(6,4), G(3,1)$ صيغة الميل.
نعم؛ ميل $\overline{DE}$ يساوي ميل $\overline{FG}$ ويساوي 1، لذا: $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$ وميل $\overline{EF}$ يساوي ميل $\overline{DG}$ ويساوي 0. لذا: $\overline{EF} \parallel \overline{DG}$، ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان، إذن $DEFG$ متوازي أضلاع.

3) $R(-1,0), S(3,0), T(2,-3), U(-2,-3)$
صيغة المسافة بين نقطتين: **لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين؛ لأن: $TU = \sqrt{26}$، $RS = 4$، وبما أن الضلعين متقابلان وغير متطابقين، إذن $RSTU$ ليس متوازي أضلاع.**

4) $A(-3,2), B(-1,4), C(2,1), D(0,-1)$
صيغة الميل والمسافة بين نقطتين:
نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي 1، لذا: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$، وميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي 1−، لذا: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$، ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان، إذن $ABCD$، متوازي أضلاع.

5) $S(-2,4), T(-1,-1), U(3,-4), V(2,1)$
صيغة الميل والمسافة بين نقطتين: **نعم**
أيضًا، $BC = 3\sqrt{2}$، $CD = 2\sqrt{2}$، $AB = 2\sqrt{2}$، $AD = 3\sqrt{2}$، وبما أن $AB = CD$، $BC = AD$، فإن $\overline{BC} \cong \overline{AD}$، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ إذن فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.

6) $F(3,3), G(1,2), H(-3,1), K(-1,4)$
صيغة نقطة المنتصف: **لا؛ لأن منتصف $\overline{FH}$ هي $(0, 2)$ أما منتصف $\overline{GK}$ فهي $(-2, \frac{5}{2})$**

تدريبات المهارات (18) — دون | ضمن

الاسم _____ التاريخ _____

5-3 تدريبات المهارات

تمييز متوازي الأضلاع

حدّد ما إذا كان كلّ شكلٍ رباعيٍّ فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا، وبرّر إجابتك.

(1)

نعم؛ فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

(2)

نعم؛ فيه كل زاويتين متقابلتين متطابقتين

(3)

لا؛ المعطيات غير كافية لمعرفة هل هو متوازي أضلاع أم لا، حيث إن أحد قطريه ينصّف الآخر، ولكن لا يوجد ما يدل على أنهما متوازيان.

(4)

لا؛ المعطيات غير كافية لمعرفة هل هو متوازي أضلاع أم لا، حيث إن أحد قطريه ينصّف الآخر، ولكن لا يوجد ما يدل على أن القطر الآخر ينصفه، كما أنه يوجد ضلعان متقابلان متطابقان، ولكن لا يوجد ما يدل على أنهما متوازيان.

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي، وحدّد ما إذا كان الشكل متوازي أضلاع أم لا، وبرّر إجابتك بالطريقة المحددة في السؤال.

5) $P(0,0), Q(3,4), S(7,4), Y(4,0)$ صيغة الميل.
نعم؛ بما أن ميلي $\overline{PY}$، $\overline{QS}$ متساويان ويساويان صفرًا، وميلي $\overline{YS}$، $\overline{PQ}$ متساويان ويساويان $\frac{4}{3}$، فإن: $\overline{PY} \parallel \overline{QS}$ و $\overline{YS} \parallel \overline{PQ}$. فالشكل متوازي أضلاع؛ لأن الأضلاع المتقابلة متوازية.

6) $Z(-1,-2), O(0,0), T(2,1), R(1,3), S(-2,1)$ صيغ المسافة بين نقطتين والميل.
نعم؛ بما أن: $SR = ZT = \sqrt{13}$ وميلي $\overline{SR}$ و $\overline{ZT}$ متساويين ويساوي $\frac{2}{3}$، فالشكل متوازي أضلاع؛ لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.

7) $N(-3,1), Y(-2,-3), R(3,3), W(2,5)$ صيغة نقطة المنتصف.
لا؛ ليس للطريقين نقطة المنتصف نفسها، حيث نقطة منتصف $\overline{WY}$ هي $(0, 1)$، أما نقطة منتصف $\overline{RN}$ فهي $(0, 2)$

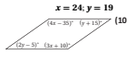
جبر، أوجد قيمتي x, y في كلّ مما يأتي، بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع:

(8)


$x = 24, y = 19$

(9)


$x = 3, y = 14$

(10)


$x = 45, y = 20$

(11)


$x = 17, y = 9$

12) إذا كانت إحداثيات ثلاثة من رؤوس متوازي أضلاع هي: $T(0,-3), S(2,1), R(-2,-1)$، فأوجد الإحداثيات الممكنة للرأس الرابع جميعها.
$(4,-1), (0,3), (-4,-5)$

تدريبات حل المسألة (19) — دون | ضمن | فوق

الاسم _____ التاريخ _____

5-3 تدريبات حل المسألة

تمييز متوازي الأضلاع

1) **توازن:** يوازن حمد وسعد وفهد ونهلة أنفسهم على جسم على شكل "X" يطفو على سطح الماء، وذلك بالجلوس في أربعة مواقع تشكّل رؤوسًا لمتوازي أضلاع كما في الشكل أدناه.



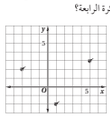
فهل يتعيّن أن يبعد الأشخاص الأربعة المسافة نفسها عن مركز الجسم، إذا كان لكلّ اثنين متقابلين الكتلة نفسها؟ وضّح إجابتك.

لا؛ يتعيّن أن تكون حمد وفهد على المسافة نفسها، وسعد ونهلة على المسافة نفسها، وليس شرطًا أن يكون بعد سعد ونهلة عن المركز مساويين لبعدي حمد وفهد.

2) **بوصلة:** وُضعت إبرتا بوصلتين متجاورتين على طاولة، إذا كان طول كلٍّ منهما 2 in وتُشيران نحو الشمال، فهل تشكّلان ضلعين في متوازي أضلاع؟

نعم

3) **عروض جوية:** يبين الرسم أدناه مواقع ثلاث طائرات من بين أربع تحلّق مشكّلة رؤوس متوازي أضلاع، فما الموقع الثلاثة الممكنة للطائرة الرابعة؟



(1, 7); (9, −1); (−7, −3)

4) **خرائط:** وضع خالد مستوى إحداثيًا فوق خريطة مدينته، فظهرت أركانها الأربعة كما في الشكل أدناه، فهل تشكّل الأركان الأربعة رؤوس متوازي أضلاع؟ وضّح إجابتك.



نعم؛ الأضلاع المتقابلة متطابقة.

5) **إطار صورة:** لدى نوال قطعتان من الخشب طول كلٍّ منهما 3 ft، وقطعتان أخريان طول كلٍّ منهما 4 ft، وتريد أن تصنع منها إطارًا خشبيًا لصورة على شكل متوازي أضلاع.

a) إذا ثُبتت القطع الأربع عند أطرافها، فما الترتيب الذي يتعيّن أن تثبت به القطع حتى يكوّن متوازي أضلاع؟
يتعيّن عليها ترتيبها بالتبادل 3، 4، 3، 4 أو 4، 3، 4، 3

b) ما عدد متوازيات الأضلاع التي يمكنها تكوينها بهذه القطع الأربع؟
عدد لا نهائي.

c) وضّح ما يمكن أن تفعله نوال لتحدد شكل متوازي الأضلاع بدقة.
إجابة ممكنة: يمكنها أن تحدد طول أحد القطرين.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 5

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (20)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

5-3 التدريبات الإثرائيّة

استقصاء شروط متوازي الأضلاع

وفق التعريف، يكون الشكل الرباعيّ متوازي أضلاع، إذا وفقط إذا كان كلّ ضلعين متقابلين متوازيين. ما الشروط الأخرى الكافية لإثبات أن شكلًا رباعيًا ما متوازي أضلاع غير شرط "توازي كلّ ضلعين متقابلين"؟ في هذا النشاط، ستستقصي عدة حالات ممكنة من خلال رسم أشكال رباعيّة تحقّق شروطًا معيّنة.

تذكّر أن أي شرط يبدو كافيًا حتى يكون شكلًا رباعيًا ما متوازي أضلاع، يجب إثبات صحته أولًا حتى يُعدّ صالحًا.

تفحّص كلًّا ممّا يأتي:

1) ارسم شكلًا رباعيًا فيه ضلعان متقابلان متطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
لا



2) ارسم شكلًا رباعيًا فيه كلُّ ضلعين متقابلين متطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
نعم



3) ارسم شكلًا رباعيًا فيه ضلعان متقابلان متوازيان والضلعان الآخران متطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع ؟
لا



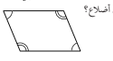
4) ارسم شكلًا رباعيًا فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
نعم



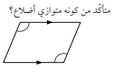
5) ارسم شكلًا رباعيًا فيه زاويتان متقابلتان متطابقتان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
لا



6) ارسم شكلًا رباعيًا فيه كلُّ زاويتين متقابلتين متطابقتان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
نعم



7) ارسم شكلًا رباعيًا فيه ضلعان متقابلان متوازيان وزاويتان متقابلتان متطابقتان. هل أنت متأكّد من كونه متوازي أضلاع؟
نعم



كتاب التمارين (8)　دون ضمن فوق

5-3 تمييز متوازي الأضلاع

حدّد ما إذا كانت المعطيات في كلٍّ ممّا يأتي كافية؛ ليكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا، وبرّر إجابتك.

1)

نعم؛ لأن القطرين ينصّف كل منهما الآخر.

2)

لا؛ المعطيات غير كافية لمعرفة هل الشكل متوازي أضلاع أم لا، حيث يوجد ضلعان متقابلان متوازيان، لكن لا يوجد ما يدل على أنهما متطابقان.

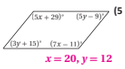
3)

نعم؛ لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان .

4)

لا؛ المعطيات غير كافية لمعرفة هل هو متوازي أضلاع أم لا، حيث تشير قيم الزاويتين المتحالفتين إلى أن الضلعين المتقابلين متوازيان، لكن لا يوجد ما يدل على أنهما متطابقان

جبر، أوجد قيمتي x ، y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع:

5)

$x = 20, y = 12$

6)

$x = -6, y = 13$

7)

$x = -3, y = 2$

8)

$x = -2, y = -5$

هندسة إحداثيّة، مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في السؤالين الآتيين. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

انظر إجابات الطلاب.

9) **أتفحّص،** يتكون النمط في الشكل المجاور من متوازيات أضلاع متطابقة. كيف يمكن التحقق من أنها متوازيات أضلاع؟
إجابة ممكنة: بالتحقق من أن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.



10) $P(-5, 1), S(-2, 2), F(-1, -3), T(2, -2)$؛ صيغة الميل نعم

11) $R(-2, 5), O(1, 3), M(-3, -4), Y(-6, -2)$؛ صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين نعم

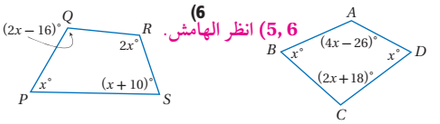
الفصل 5 اختبار منتصف الفصل

الدروس 5-1 إلى 5-3

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعات المحدبة الآتية : (الدرس 5-1)

1) الخماسي $540°$
2) السباعي $900°$
3) ذو 18 ضلعًا $2880°$
4) ذو 23 ضلعًا $3780°$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين: (الدرس 5-1)

5) 

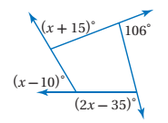
6)

5, 6) انظر الهامش.

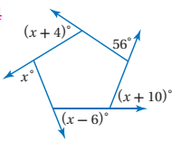
أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه الداخلية في كل مما يأتي : (الدرس 5-1)

7) $720°$ 6
8) $1260°$ 9
9) $1800°$ 12
10) $4500°$ 27

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين : (الدرس 5-1)

11) 

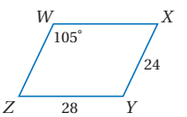
71

12) 

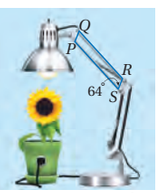
74

استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يأتي : (الدرس 5-2)

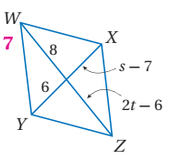
13) $m\angle WZY$ $75°$
14) WZ 24
15) $m\angle XYZ$ $105°$



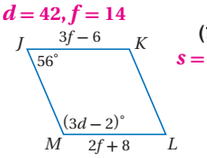
16) **إنارة:** استعمل مقبض الإنارة العلوي الذي يشكل متوازي أضلاع في إيجاد $m\angle p$ في $\square PQRS$. (الدرس 5-2)
$116°$



جبر: أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين : (الدرس 5-2)

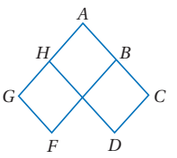
17) 

$s = 13, t = 7$

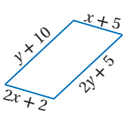
18) 

$d = 42, f = 14$

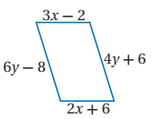
19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 5-2)
المعطيات: $\square HACD$, $\square GFBA$ انظر ملحق الإجابات
المطلوب: $\angle F \cong \angle D$



أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع : (الدرس 5-3)

20) 

$x = 3, y = 5$

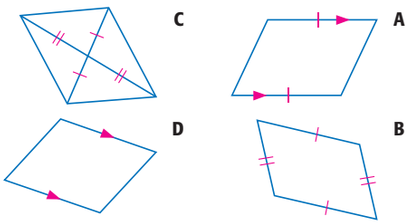
21) 

$x = 8, y = 7$

22) **طاولات:** لماذا يبقى سطح طاولة كي الثياب في الصورة أدناه موازيًا لأرضية الغرفة دائمًا؟ (الدرس 5-3) انظر ملحق الإجابات



23) **اختيار من متعدّد:** أيّ الأشكال الرباعية الآتية ليس متوازي أضلاع؟ (الدرس 5-3) D



هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي متوازي أضلاع. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. (الدرس 5-3) 24, 25) انظر ملحق الإجابات.

24) $A(-6, -5), B(-1, -4), C(0, -1), D(-5, -2)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $Q(-5, 2), R(-3, -6), S(2, 2), T(-1, 6)$، صيغة الميل.

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إليهم مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم التكويني

اختبار منتصف الفصل، ص (13)

المطويات متابعة المطويات

شجّع الطلاب قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي دوّنوها في مطوياتهم حول الدروس 1–5 إلى 3–5.

إجابات:

5) $m\angle A = 158°, m\angle B = 46°,$
$m\angle C = 110°, m\angle D = 46°$

6) $m\angle P = 61°, m\angle Q = 106°,$
$m\angle R = 122°, m\angle S = 71°$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس 5-3 , 5-2 , 5-1.		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).
	تدريبات المهارات ، ص (8, 13, 18).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-4

استعمال خصائص متوازي الأضلاع وتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

الدرس 5-4

تعرّف خصائص المستطيل وتطبيقها.

تحديد ما إذا كان متوازي أضلاع مستطيلًا.

ما بعد الدرس 5-4

استعمال التبرير الاستنتاجي لإثبات صحة عبارة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- كيف يمكنك البدء بعمل خلفية لو كنت أحمد؟

إجابة ممكنة: أبدأ برسم مستطيل بأن أقيس 80 in إلى الأعلى من أسفل الجدار. ثم 36 in عرضيًّا وبزاوية قائمة، ثم أعود ثانية إلى أسفل الجدار، ثم أقوم بطلاء المستطيل.

- ماذا سيعمل أحمد للتأكد من أنّ الخلفية مستطيلة؟

إجابة ممكنة: التأكد من أنّ أركان الخلفية زوايا قوائم. التأكد من أنّ جانبي الخلفية متساويان في الطول، والتأكد من أن حافّة الخلفية العلوية وحافتها السفليّة متساويتان في الطول.

مصادر الدرس 5-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (39)	• تنويع التعليم، ص (39, 43)	• تنويع التعليم، ص (39, 43)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (9)	• كتاب التمارين، ص (9)	• كتاب التمارين، ص (9)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

5-4 المستطيل Rectangle

فيما سبق:
درستُ استعمال خصائص متوازي الأضلاع وتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.
(الدرس 5-2)

والآن:
- أتعرّف خصائص المستطيل وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع مستطيلًا.

المفردات:
المستطيل
rectangle

www.obeikaneducation.com

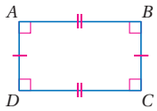


لماذا؟

أحمد هو الطالب المسؤول عن عرض لوحات الرياضيات في يوم النشاط المدرسي. ولعمل خلفية مميزة يعرض عليها لوحات الرياضيات، قام بطلاء جزء من جدار على شكل مستطيل يبدأ طوله من أسفل الجدار ويمتد للأعلى، وكان طوله 80 in، وعرضه 36 in. كيف يمكنه أن يتحقق من أنّ الجزء الذي قام بطلائه مستطيل؟

خصائص المستطيل: المستطيل هو متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم. ونجد من ذلك أنّ للمستطيل الخصائص الآتية :

- الزوايا الأربع قوائم.
- كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- القطران ينصِّف كل منهما الآخر.



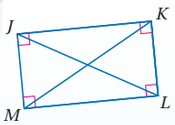
المستطيل $ABCD$

وبالإضافة إلى ذلك، قطرا المستطيل متطابقان، كما توضح النظرية الآتية:

نظرية 5.13 قطرا المستطيل

أضف إلى مطويتك

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإن قطريه متطابقان.

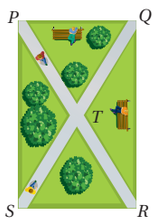


مثال: إذا كان $\square JKLM$ مستطيلًا ، فإنّ $\overline{JL} \cong \overline{MK}$.

سوف تبرهن النظرية 5.13 في السؤال 33 .

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال خصائص المستطيل

حدائق: حديقة مستطيلة الشكل تحتوي على ممرين كما في الشكل المجاور. إذا كان $PR = 200$ m، فأوجد QT.



$\overline{QS} \cong \overline{PR}$	قطرا المستطيل متطابقان
$QS = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$QS = 200$	بالتعويض

وبما أن $PQRS$ مستطيل، لذا فإن قطريه ينصِّف كل منهما الآخر؛ لذا

$QT = \frac{1}{2} QS$

$QT = \frac{1}{2}(200) = 100$ بالتعويض

تحقق من فهمك

استعن بالشكل في المثال 1.

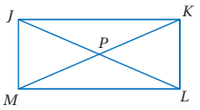
1A) إذا كان $TS = 120$ ، فأوجد PR. **240**

1B) إذا كان $m\angle PRS = 64°$، فأوجد $m\angle SQR$. **26°**

يمكنك استعمال خصائص المستطيل والجبر لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 2 استعمال خصائص المستطيل والجبر

جبر: الشكل الرباعي $JKLM$ مستطيل. إذا كان $m\angle KJL = (2x+4)^\circ$ و $m\angle JLK = (7x+5)^\circ$، فأوجد قيمة x.



بما أن $JKLM$ مستطيل، فإن زواياه الأربع قوائم؛ إذن $m\angle MLK = 90^\circ$.

وبما أن $JKLM$ المستطيل متوازي أضلاع، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطر متطابقة.

لذا فإن $\angle KJL \cong \angle JLM$ ، ومن ذلك $m\angle JLM = m\angle KJL$.

$m\angle JLM + m\angle JLK = m\angle MLK$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle KJL + m\angle JLK = 90^\circ$	بالتعويض
$(2x+4)^\circ + (7x+5)^\circ = 90^\circ$	بالتعويض
$(9x+9)^\circ = 90^\circ$	بجمع الحدود المتشابهة
$9x^\circ = 81^\circ$	بطرح 9 من كلا الطرفين
$x = 9$	بقسمة كلا الطرفين على 9

تحقق من فهمك

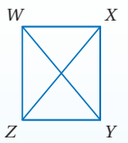
2) استعن بالشكل في المثال 2. إذا كان $MK = 5y+1$, $JP = 3y-5$، فأوجد قيمة y. **11**

إثبات أنّ متوازي أضلاع يكون مستطيلًا: عكس النظرية 5.13 صحيح أيضًا.

نظرية 5.14

أضف إلى مطويتك

إذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنّه مستطيل.

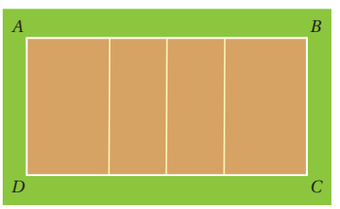


مثال: في $\square WXYZ$ ، إذا كان $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$، فإنّ $\square WXYZ$ مستطيل.

سوف تبرهن هذه النظرية في السؤال 34 .

مثال 3 من واقع الحياة إثبات علاقات في المستطيل

كرة طائرة: أنشأ نادٍ رياضي ملعبًا لكرة الطائرة، وللتأكد من أنه يحقق المواصفات المطلوبة، قاس المشرفون أطوال أضلاع الملعب وقطريه، فإذا كان $AB = 60$ ft, $BC = 30$ ft, $CD = 60$ ft, $AD = 30$ ft , $BD = 67$ ft ، $AC = 67$ ft ، فكيف يمكنهم التحقق من أنه مستطيل.



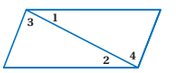
بما أن $AB = CD, BC = AD, AC = BD$، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{BC} \cong \overline{AD}, \overline{AC} \cong \overline{BD}$. وبما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{BC} \cong \overline{AD}$، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. ولأن $\overline{AC}, \overline{BD}$ قطران متطابقان في $\square ABCD$، فإنّ $\square ABCD$ مستطيل.

إرشادات للدراسة

الزوايا القوائم: تذكّر من النظرية 5.6 أنّه إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

إرشادات للدراسة

الزاويتان المتبادلتان داخليًّا بالنسبة لقطر: درست في نظرية 2.1 (الزاويتان المتبادلتان داخليًّا) أنّه إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإنّ كلّ زاويتين متبادلتين داخليًّا متطابقتان، وينطبق هذا على الزاويتين المتبادلتين بالنسبة لقطر متوازي الأضلاع.



مثال:

$\angle 4 \cong \angle 3, \angle 2 \cong \angle 1$



الربط مع الحياة

كرة الطائرة هي رياضة جماعية يتنافس فيها فريقان، لكل منهما ستة لاعبين، أما الكرة المستخدمة في هذه اللعبة، فهي متوسطة الحجم وأصغر من كرة القدم وأخف منها وزنًا.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون: ارسم مستطيلًا على أرضية مبلطة باستعمال شريط لاصق، واستعمل الخيط للتحقق من أن الشكل الذي رسمته مستطيل من خلال قياس طولي قطريه.

خصائص المستطيل

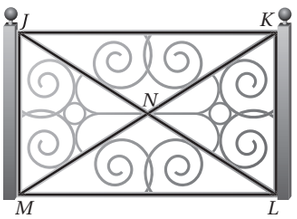
المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية استعمال خصائص المستطيل ونظرياته لإيجاد قيم مجهولة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

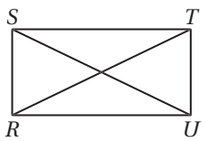
مثالان إضافيان

1 بوابات: دُعّمت بوابة حديقة مستطيلة الشكل بدعامتين قطريتين لتثبيتها. فإذا كان $LN = 6.5$ ft، فأوجد KM.



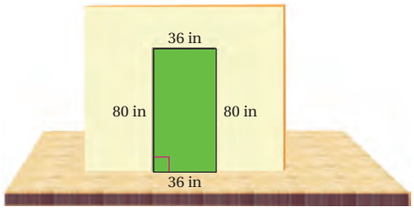
$KM = 13$ ft.

2 جبر: الشكل الرباعي $RSTU$ مستطيل. إذا كان $m\angle RTU = (8x-4)^\circ$ و $m\angle STR = (3x+6)^\circ$ فأوجد قيمة x. **8**



تحقق من فهمك

3) **تصميم:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. قاس أحمد أبعاد المنطقة التي قام بطلائها كما في الشكل أدناه. وباستعمال زاوية النجارين تحقق من أن الزاوية عند الركن الأيسر السفلي قائمة. فهل يمكنه استنتاج أن المنطقة مستطيلة الشكل؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش.





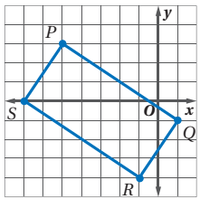
الربط مع الحياة

زاوية النجارين:
عبارة عن ضلع خشبي سميك ومسطرة معدنية مثبتة معه بحيث يصنعان زاوية 90°، وتُصنع من المعدن أو الخشب، وتستخدم لقياس وتحديد الزوايا القائمة، ورسم خطوط عمودية على الأحرف.

يمكنك أيضًا استعمال خصائص المستطيل لإثبات أنّ شكلًا رباعيًّا مرسومًا في المستوى الإحداثي عُلمت إحداثيات رؤوسه هو مستطيل.

مثال 4 المستطيل والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $PQRS$ هي $P(-5, 3), Q(1, -1), R(-1, -4), S(-7, 0)$. فهل $PQRS$ مستطيل؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.



الخطوة 1: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحدد ما إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، وذلك بالتحقق من أن أضلاعه المتقابلة متطابقة.

$$PQ = \sqrt{(-5-1)^2 + [3-(-1)]^2} = \sqrt{52}$$

$$RS = \sqrt{[-1-(-7)]^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{52}$$

$$PS = \sqrt{[-5-(-7)]^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$QR = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [-1-(-4)]^2} = \sqrt{13}$$

بما أن أضلاع $PQRS$ المتقابلة متساوية الطول، فإنّها متطابقة؛ لذا فإن $PQRS$ متوازي أضلاع.

الخطوة 2: هل قطرا $PQRS$ ▱ متطابقان؟

$$PR = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + [3-(-4)]^2} = \sqrt{65}$$

$$QS = \sqrt{[1-(-7)]^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{65}$$

بما أن للقطرين الطول نفسه، فإنّهما متطابقان؛ لذا فإن $PQRS$ ▱ مستطيل.

إرشادات للدراسة

المستطيل ومتوازي الأضلاع:
كل مستطيل متوازي أضلاع، ولكن ليس كل متوازي أضلاع مستطيلًا.

تحقق من فهمك

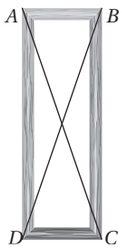
4) إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $J(-10, 2), K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$. فهل $JKLM$ مستطيل؟ استعمل صيغة الميل. لا؛ لأن الضلعين $\overline{JK}$ و $\overline{ML}$ غير متوازيين.

إثبات أنّ متوازي الأضلاع يكوّن مستطيلًا

المثالان 3, 4 يبيّنان كيفية إثبات أنّ متوازي الأضلاع يكوّن مستطيلًا باستعمال النظرية 5.14.

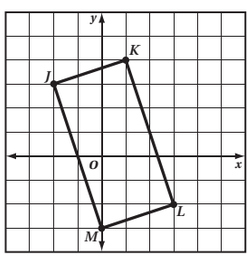
مثالان إضافيان

3 **تطريز:** يشُد بعض الخياطين القماش الذي يطرزون عليه رسومًا جميلة فوق أُطر خشبيّة فيسهّل عملهم، مما يتيح لهم التطريز بدقة كبيرة. ومن أجل التأكد من أن الإطار مستطيل الشكل يقيس الخياط قبل مد القماش أضلاع الإطار وأقطاره. إذا كان $AB = 12$ in، $BC = 35$ in، $CD = 12$ in، $DA = 35$ in، $BD = 37$ in و $AC = 37$ in، وضحّ كيف يمكن للخياط التأكد من أنّ الإطار مستطيل.



بما أن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$؛ فإنّ، $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أنّ $\overline{BD}$ وَ $\overline{AC}$ قطران متطابقان في $ABCD$▱؛ فإنّ $ABCD$▱ مستطيل.

4 **هندسة إحداثية:** رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $J(-2, 3)$، $K(1, 4)$، $L(3, -2)$، $M(0, -3)$. حدّد ما إذا كان $JKLM$ مستطيلًا باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين.



بما أن $JK = ML = \sqrt{10}$؛ فإنّ $JM = KL = \sqrt{40}$، $JKLM$ متوازي أضلاع. ولأنّ $KM = JL = \sqrt{50}$، فإن $JKLM$ مستطيل.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا في مدونة الفصل فقرة توضح طريقتين مختلفتين لإثبات أنّ متوازي أضلاع مستطيل.

إجابة (تحقق من فهمك):

3) نعم؛ بما أنّ الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإنّ المنطقة التي قام بطلائها تشكل متوازي أضلاع. وإذا كانت احدى زوايا متوازي أضلاع قائمة فإنّ جميع الزوايا قائمة. وبما أنّ الزاوية السفلى إلى اليسار قائمة فإن جميع الزوايا قائمة، لذلك وبحسب التعريف، تكون المنطقة مستطيلة الشكل.

تأكد

المثال 1 **زراعة:** الشكل المجاور يبيّن بوّابة مخزن حبوب مستطيلة الشكل، فيها الدعامتان المتقاطعتان تقويان دفة البوّابة، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.

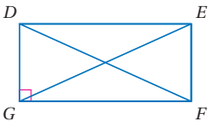
إذا كان $PS = 7\text{ ft}$, $ST = 3\frac{13}{16}\text{ ft}$, $m\angle PTQ = 67°$،

فأوجد كلًّا مما يأتي :



1) QR 7 ft
2) SQ $7\frac{5}{8}$ ft
3) $m\angle TQR$ 33.5°
4) $m\angle TSR$ 56.5°

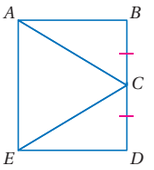
المثال 2 **جبر:** استعن بالمستطيل ***DEFG*** المبيَّن جانبًا.



5) إذا كان $EG = x + 5$, $FD = 3x - 7$، فأوجد EG. 11

6) إذا كان $m\angle DFG = (x + 12)°$, $m\angle EFD = (2x - 3)°$، فأوجد $m\angle EFD$. 51°

المثال 3 7) **برهان:** إذا كان $ABDE$ مستطيلًا، و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$، فأثبت أنّ $\overline{AC} \cong \overline{EC}$. انظر الهامش.



المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

8) $W(-4, 3), X(1, 5), Y(3, 1), Z(-2, -2)$ ، صيغة الميل. انظر الهامش.

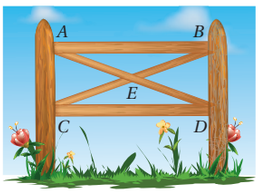
9) $A(4, 3), B(4, -2), C(-4, -2), D(-4, 3)$ ، صيغة المسافة. انظر ملحق الإجابات.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **سياج:** سياج مستطيل الشكل تُستعمل فيه دعائم متقاطعة لتقوية السياج.

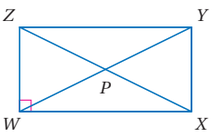
إذا كان $AB = 6\text{ ft}$, $AC = 2\text{ ft}$, $m\angle CAE = 65°$،

فأوجد كلًّا مما يأتي :



10) BD 2 ft
11) CB 6.3 ft تقريبًا
12) $m\angle DEB$ 50°
13) $m\angle ECD$ 25°

المثال 2 **جبر:** استعن بالمستطيل ***WXYZ*** المبيَّن جانبًا.



14) إذا كان $WX = x + 4$, $ZY = 2x + 3$، فأوجد WX. 5

15) إذا كان $WP = 2x + 11$, $PY = 3x - 5$، فأوجد ZP. 43

16) إذا كان $m\angle WYX = (2x + 5)°$, $m\angle ZYW = (2x - 7)°$، فأوجد $m\angle ZYW$. 39°

17) إذا كان $PY = 2x + 5$, $ZP = 4x - 9$، فأوجد ZX. 38

18) إذا كان $m\angle XZW = (5x - 12)°$, $m\angle XZY = (3x + 6)°$، فأوجد $m\angle YXZ$. 48°

19) إذا كان $m\angle WZX = (x - 9)°$, $m\angle ZXW = (x - 11)°$، فأوجد $m\angle ZXY$. 46°

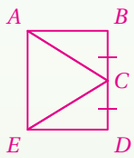
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 9–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

7) **المعطيات:** $ABDE$ مستطيل؛ $\overline{BC} \cong \overline{DC}$.

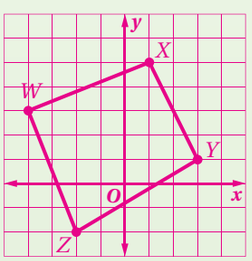


المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{EC}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $ABDE$ مستطيل؛ $\overline{BC} \cong \overline{DC}$	1) معطيات
2) $ABDE$ متوازي أضلاع.	2) تعريف المستطيل
3) $AB \cong DE$	3) الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة
4) $\angle B$ و $\angle D$ قائمتان.	4) تعريف المستطيل
5) $\angle B \cong \angle D$	5) جميع الزوايا القائمة متطابقة
6) $\triangle ABC \cong \triangle EDC$	6) نظرية التشابه SAS
7) $\overline{AC} \cong \overline{EC}$	7) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

8) لا؛ ميل $\overline{WX}$ يساوي $\frac{2}{5}$ ، وميل $\overline{YZ}$ يساوي $\frac{3}{5}$ ، وبما أن ميليهما غير متساويان وهما ضلعان متقابلان غير متوازيين، فإنّ $WXYZ$ ليس متوازي أضلاع؛ لذلك $WXYZ$ ليس مستطيلًا.

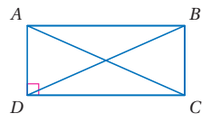


تنويع الواجبات المنزلية

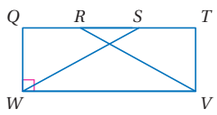
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	10-25 ، 40-51
ضمن ضمن المتوسط	11-31 فردي ، 32 ، 33-39 فردي ، 40-51
فوق فوق المتوسط	26-48 ، (اختياري: 49-51)

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي: **25–20)** انظر ملحق الإجابات.

20) **المعطيات:** $ABCD$ مستطيل.
المطلوب: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$



21) **المعطيات:** $QTVW$ مستطيل.
$\overline{QR} \cong \overline{ST}$
المطلوب: $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$



المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثِّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. انظر ملحق الإجابات.

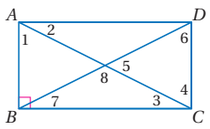
22) $W(-2, 4), X(5, 5), Y(6, -2), Z(-1, -3)$ ، صيغة الميل.

23) $J(3, 3), K(-5, 2), L(-4, -4), M(4, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

24) $Q(-2, 2), R(0, -2), S(6, 1), T(4, 5)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $G(1, 8), H(-7, 7), J(-6, 1), K(2, 2)$ ، صيغة الميل.

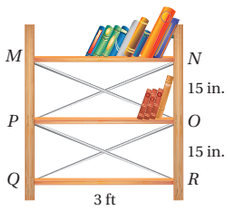
في المستطيل $ABCD$، إذا كان $m\angle 2 = 40°$ ،
فأوجد كلًّا مما يأتي :



26) $m\angle 1$ 50° **27)** $m\angle 7$ 40° **28)** $m\angle 3$ 40°

29) $m\angle 5$ 80° **30)** $m\angle 6$ 50° **31)** $m\angle 8$ 100°

32) **مكتبات:** أضاف زيد رفًّا جديدًا لمكتبته ودعائم معدنية متقاطعة كما في الشكل المجاور . كم يجب أن يكون طول كل من الدعائم المعدنية بحيث تكون الرفوف عمودية على الجانبين؟ وضّح إجابتك.
(إرشاد: $12\text{in} = 1\text{ft}$) انظر الهامش.



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات النظرية في كل من السؤالين الآتيين : **33، 34)** انظر ملحق الإجابات.

33) النظريّة 5.13 **34)** النظريّة 5.14

35) **رياضة:** قام سلمان بعمل التخطيط الخارجي لملعب كرة قدم. وضِّح كيف يمكنه التحقق من أن الملعب مستطيل الشكل باستعمال شريط القياس فقط. انظر ملحق الإجابات.



الربط مع الحياة

حددت رابطة كرة القدم الدولية (IFAP) الأبعاد القياسية لملعب كرة القدم في البطولات الرسمية الدولية فكانت 105m طولا، و 68m عرضًا.

36) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

a) هندسيًّا: ارسم ثلاثة متوازيات أضلاع كل منها أضلاعه الأربعة متطابقة وسمِّها $ABCD$, $MNOP$, $WXYZ$. ثم ارسم قطري كل منها وسمِّ نقطة تقاطعهما R. انظر الهامش.

b) جدوليًّا: استعمل المنقلة لقياس الزوايا وأكمل الجدول الآتي .

$WXYZ$		$MNOP$		$ABCD$	
$\angle XRY$	$\angle WRX$	$\angle NRO$	$\angle MRN$	$\angle BRC$	$\angle ARB$
90°	90°	90°	90°	90°	90°

c) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول قطري متوازي الأضلاع المتطابق الأضلاع. انظر الهامش.

تنبيه لحل سؤال

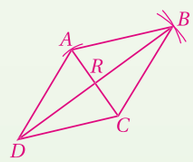
المنقلة والفرجار والمسطرة: يتطلب السؤال 36 استعمال الفرجار والمسطرة والمنقلة.

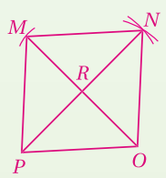
تمثيلات متعدّدة: في السؤال 36، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية والجدول والوصف اللفظي لاستقصاء خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

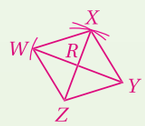
إجابات:

32) 3.25 ft
إجابة ممكنة : حتى تكون الزوايا قوائم يجب أن تكون أطوال الدعائم الحديدية متساوية . وبما أن طول الرف معلوم، والمسافة بين الرفوف معلومة، فيمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الدعامة الحديدية.

36a) إجابة ممكنة:

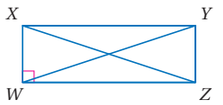






36c) إجابة ممكنة: إذا كانت الأضلاع الأربعة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإن قطريه متعامدان.

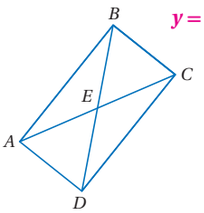
جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبيَّن جانبًا.



37) إذا كان $XW = 3, WZ = 4$، فأوجد YW. **5**

38) إذا كان $XY = 8, ZY = 6$، فأوجد WY. **10**

مسائل مهارات التفكير العليا



39) تحدَّ: في المستطيل $ABCD$، إذا كان $m\angle EAB = (4x + 6)^\circ$، $m\angle EBC = 60^\circ$, $m\angle DEC = (10 - 11y)^\circ$، فأوجد قيمة كل من x, y. **$x = 6$، $y = -10$**

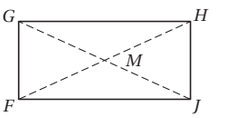
40) اكتشف الخطأ: قالت بسمة: إنّ أيّ مثلثين حادَّي الزوايا ومتطابقين يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. وقالت شيماء: إنّ المثلثين القائمي الزاوية المتطابقين هما فقط اللذان يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك. **انظر الهامش.**

41) مسألة مفتوحة: اكتب معادلات أربعة مستقيمات بحيث تكون نقاط تقاطعها رؤوس مستطيل. تحقق من إجابتك باستعمال الهندسة الإحداثيّة. **انظر ملحق الإجابات.**

42) اكتب: وضّح لِمَ تُعدّ جميع المستطيلات متوازيات أضلاع، بينما لا تُعد جميع متوازيات الأضلاع مستطيلات. **انظر الهامش.**

تدريب على اختبار

43) في الشكل الرباعي $FGHJ$، إذا كان $FJ = -3x + 5y$، $FM = 3x + y, GH = 11, GM = 13$، فما قيمة كل من x, y اللتين تجعلان $FGHJ$ مستطيلًا؟ **A**



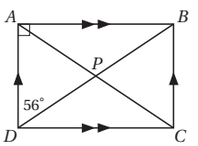
A $x = 3, y = 4$

B $x = 4, y = 3$

C $x = 7, y = 8$

D $x = 8, y = 7$

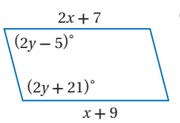
44) إجابة قصيرة: ما قياس $\angle APB$؟ **112°**



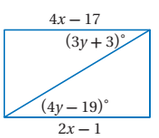
مراجعة تراكمية

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع: (الدرس 3-5)

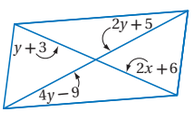
45) **$x = 2$، $y = 41$**



46) **$x = 8$، $y = 22$**



47) **$x = 2$، $y = 7$**



48) هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3), B(6, 2), C(4, -2), D(-1, -1)$ (الدرس 2-5) **(2.5, 0.5)**

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

49) $(4, 2), (2, -5)$ **$\sqrt{53}$**

50) $(0, 6), (-1, -4)$ **$\sqrt{101}$**

51) $(-4, 3), (3, -4)$ **$7\sqrt{2}$**

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس 1–5 إلى 4–5. وكتابة ما توصلوا إليه في صورة تخمين عن قطري المعين أو المربع. يبين الدرس 4–5 أنه إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا فإنّ القطرين متطابقان ولأن الدرس 4–5 يركز على طول القطر، فإنّ الخطوة التالية هي التركيز على الزوايا الناتجة عن تقاطع القطرين. ومن التخمينات الممكنة أن قطري المعين أو المربّع متعامدان.

4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب أن يوضّحوا طريقة كتابة برهان ذي عمودين لإثبات أن متوازي الأضلاع الذي قطراه متطابقان مستطيل.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: للسؤال 40 يجب أن يدرك الطلاب أنّ أي مثلثين حادّي الزوايا ومتطابقين يمكن أن يرتّبا ليشكلا متوازي أضلاع. ولأن زوايا المستطيل قائمة فإن أي مثلثين قائمي الزاوية ومتطابقين يمكن أن يُرتّبا ليشكلا مستطيلًا.

إجابات:

40) شيماء؛ إجابة ممكنة: عندما يرتّب مثلثان متطابقان ليشكلا شكلًا رباعيًّا فإنّ زاويتين من زوايا الشكل الرباعي ناتجتان من رأس منفرد لمثلث. ولكي يكون الشكل الرباعي مستطيلًا يجب أن تكون إحدى الزوايا في المثلثين المتطابقين قائمة.

42) إجابة ممكنة: كل المستطيلات تكون متوازيات أضلاع؛ لأنه بناءً على تعريف المستطيل يكون كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. ومتوازي الأضلاع الذي تكون زواياه قوائم يكون مستطيلًا. لذا تكون بعض متوازيات الأضلاع مستطيلات، وأما بعضها الآخر الذي زواياه ليست قوائم فلا تكون مستطيلات.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 5

دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) — دون

5-4 تدريبات إعادة التعليم

المستطيل

خصائص المستطيل:

المستطيل شكل رباعيّ زواياه الأربع قوائم، وبما أن الزوايا المتقابلة متطابقة فهو متوازي أضلاع أيضًا.

وتتوافر فيه خصائص متوازي الأضلاع وهي: الأضلاع المتقابلة متوازية، والأضلاع المتقابلة متطابقة، والزوايا المتحالفة متكاملة، والقطران ينصّف كلٌّ منهما الآخر.

بالإضافة إلى الخصائص الآتية:

تعريف	جميع الزوايا الأربع قوائم.	$\angle RUT, \angle SRU, \angle TSR, \angle UTS$ قوائم.
5.13	القطران متطابقان.	$\overline{TR} \cong \overline{US}$

- جميع الزوايا الأربع قوائم. $\angle RUT, \angle UTS, \angle TSR, \angle SRU$ قوائم.
- القطران متطابقان. $\overline{TR} \cong \overline{US}$

مثال 1 إذا كان الشكل الرباعيّ $RUTS$ أعلاه، مستطيلًا، وكان: $RT = 7x - 2$، $US = 6x + 3$، فأوجد قيمة x.

بما أن قطري المستطيل متطابقان؛ إذن:

$US = RT$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6x + 3 = 7x - 2$	بالتعويض
$3 = x - 2$	بطرح $6x$ من كلا الطرفين
$5 = x$	بإضافة 2 إلى كلا الطرفين

مثال 2 إذا كان الشكل الرباعيّ $RUTS$ أعلاه، مستطيلًا، وكان: $m\angle STR = (8x + 3)^\circ$، و $m\angle UTR = (16x - 9)^\circ$، فأوجد $m\angle STR$.

بما أن $\angle UTS$ زاوية قائمة،

فإن: $m\angle STR + m\angle UTR = 90^\circ$ زاوية قائمة

$(8x + 3)^\circ + (16x - 9)^\circ = 90^\circ$ بالتعويض

$(24x - 6)^\circ = 90^\circ$ بالتبسيط

$(24x)^\circ = 90^\circ$ بإضافة 6 إلى كلا الطرفين

$x = 4$ بقسمة كلا الطرفين على 24

إذن: $m\angle STR = 8x + 3 = 8(4) + 3 = 35^\circ$

تمارين

استند من المستطيل $ABCD$ المجاور لحل الأسئلة 1–8:



1) إذا كان: $AE = 36$، و $CE = 2x - 4$، فأوجد قيمة x. **20**

2) إذا كان: $CE = 4y + 6$، و $BE = 6y + 2$، فأوجد قيمة y. **2**

3) إذا كان: $BC = 24 - 5y$، و $AD = 1$، فأوجد قيمة y. **5**

4) إذا كان: $m\angle BEA = 62^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$. **59°**

5) إذا كان: $m\angle AED = (12x)^\circ$، و $m\angle BEC = (10x + 20)^\circ$، فأوجد $m\angle AED$. **120°**

6) إذا كان: $AC = 7y + 3$، و $BD = 8y - 4$، فأوجد BD. **52**

7) إذا كان: $m\angle DBC = (10x)^\circ$، و $m\angle ACB = (4x^2 - 6)^\circ$، فأوجد $m\angle ACB$. **30°**

8) إذا كان: $AB = 8y$، و $BC = 6y$، فأوجد BD بدلالة y. **10y**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) — دون

5-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المستطيل

إثبات أن متوازي الأضلاع يكون مستطيلًا:

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا فإن قطريه متطابقان، وعكس هذه النظرية صحيح أيضًا، فإذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنه مستطيل.

وفي المستوى الإحداثيّ، يمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين وصيغة الميل وخصائص القطرين لتحدّد ما إذا كان شكل ما مستطيلًا أم لا.

مثال في المستوى الإحداثيّ، مثّل الشكل الرباعيّ $ABCD$ الذي رؤوسه: $A(-3,0), B(-2,3), C(4,1), D(3,-2)$، ثم حدّد ما إذا كان $ABCD$ مستطيلًا أم لا، وبرّر إجابتك.



الطريقة 1، استعمال صيغة الميل، $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{3-0}{-2-(-3)} = \frac{3}{1} = 3$، وميل $\overline{AD}$: $m = \frac{-2-0}{3-(-3)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

وميل $\overline{CD}$: $m = \frac{-2-1}{3-4} = \frac{-3}{-1} = 3$، وميل $\overline{BC}$: $m = \frac{1-3}{4-(-2)} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

بما أن كلّ ضلعين متقابلين في الشكل الرباعيّ متوازيان، فإنه متوازي أضلاع، ولمّا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة، فإن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم؛ أي أنه مستطيل.

الطريقة 2، استعمال صيغة المسافة بين نقطتين: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$AB = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$ $\quad BC = \sqrt{(-2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40}$

$CD = \sqrt{(4-3)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{10}$ $\quad AD = \sqrt{(-3-3)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{40}$

بما أن كلّ ضلعين متقابلين متطابقان، فإن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

$BD = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{50}$ $\quad AC = \sqrt{(-3-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{50}$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع قطراه متطابقان، إذن هو مستطيل.

تمارين

هندسة إحداثية: في المستوى الإحداثيّ، مثّل الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي، وحدّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. **انظر رسومات الطلاب.**

1) $A(-3,1), B(-3,3), C(3,3), D(3,1)$ صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ $\overline{AB} = \sqrt{40}$ ، $BD = \sqrt{40}$ ، $AB = 2, BC = 6, CD = 2, DA = 6, AC = \sqrt{40}$ الأضلاع المتقابلة متطابقة والقطران متطابقان.

2) $A(-3,0), B(-2,3), C(4,5), D(3,2)$ صيغة الميل.

لا؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي 3، وميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{1}{3}$ ، بين المثالان أن ضلعين متتاليين ليسا متعامدين؛ أي أنه ليس كل زواياه قوائم.

3) $A(-3,0), B(-2,2), C(3,0), D(2,-2)$ صيغة المسافة بين نقطتين.

لا؛ $AC = 6, BD = \sqrt{32}$ ، القطران ليسا متطابقين.

4) $A(-1,0), B(0,2), C(4,0), D(3,-2)$ صيغة الميل.

نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي 2، وميل $\overline{AD}$ يساوي $-\frac{1}{2}$، وميل $\overline{CD}$ يساوي 2، وميل $\overline{BC}$ يساوي $-\frac{1}{2}$، وبما أن كلّ ضلعين متقابلين متوازيان، والأضلاع المتتالية متعامدة، فإن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم؛ أي أنه مستطيل.

تدريبات المهارات (23) — دون ضمن

5-4 تدريبات المهارات

المستطيل

جبر، استند من المستطيل $ABCD$ المجاور لحل الأسئلة 1–8.



1) إذا كان: $AC = 2x + 13$، و $DB = 4x - 1$، فأوجد DB. **27**

2) إذا كان: $AC = x + 3$، و $DB = 3x - 19$، فأوجد AC. **14**

3) إذا كان: $AE = 3x + 3$، و $EC = 5x - 15$، فأوجد AC. **60**

4) إذا كان: $DE = 6x - 7$، و $AE = 4x + 9$، فأوجد DB. **82**

5) إذا كان: $m\angle DAC = (2x + 4)^\circ$، و $m\angle BAC = (3x + 1)^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$. **52°**

6) إذا كان: $m\angle BDC = (7x + 1)^\circ$، و $m\angle ADB = (9x - 7)^\circ$، فأوجد $m\angle BDC$. **43°**

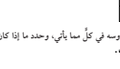
7) إذا كان: $m\angle ABD = (7x - 31)^\circ$، و $m\angle CDB = (4x + 5)^\circ$، فأوجد $m\angle ABD$. **53°**

8) إذا كان: $m\angle BAC = (x + 3)^\circ$، و $m\angle CAD = (x + 15)^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$. **39°**

9) **برهان**، اكتب برهانًا ذا عمودين

المعطيات: الشكل $RSTV$ مستطيل، و U نقطة منتصف $\overline{VT}$.

المطلوب: $\Delta RUV \cong \Delta SUT$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $RSTV$ مستطيل	1) معطى.
2) $\angle T$ و $\angle V$ قائمتان	2) تعريف المستطيل.
3) $\angle T \cong \angle V$	3) جميع الزوايا القوائم متطابقة.
4) U نقطة منتصف $\overline{VT}$	4) معطى.
5) $\overline{VU} \cong \overline{TU}$	5) تعريف نقطة المنتصف.
6) $\overline{VR} \cong \overline{TS}$	6) الأضلاع المتقابلة في المستطيل متطابقة.
7) $\Delta RUV \cong \Delta SUT$	7) المسلمة SAS.

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. **انظر رسومات الطلاب.**

10) $S(3,0), R(2,4), Q(-4,2), P(-2,-3)$ صيغة الميل.

لا؛ ميل $\overline{SR}$ يساوي 4–، وميل $\overline{RQ}$ يساوي $\frac{1}{3}$ ، بين المثالان أن ضلعين متتاليين ليسا متعامدين؛ أي أنه ليس كل زواياه قوائم.

11) $M(-4,-1), L(2,2), K(0,6), J(-6,3)$ صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ $ML = 3\sqrt{5}$ ، $KJ = 3\sqrt{5}$ ، $LK = 2\sqrt{5}$ ، $MJ = 2\sqrt{5}$ وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان؛ إذن الشكل $SRQP$ متوازي أضلاع، و $MK = \sqrt{65}$ ، $LJ = \sqrt{65}$ متوازي أضلاع قطراه متطابقان؛ إذن هو $SRQP$ مستطيل.

12) $U(3,-1), T(4,1), X(-3,2), V(-2,4)$ صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ $YX = \sqrt{5}$ ، $UT = \sqrt{5}$ ، $XU = 3\sqrt{5}$ ، $YT = 3\sqrt{5}$ ، وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان؛ إذن الشكل $YXUT$ متوازي أضلاع، و $XT = 5\sqrt{2}$ ، $YU = 5\sqrt{2}$ ، وبما أن $YXUT$ متوازي أضلاع قطراه متطابقان؛ إذن هو مستطيل.

تدريبات حل المسألة (24) — دون ضمن فوق

5-4 تدريبات حلّ المسألة

المستطيل

1) إطار صورة، صنع حمدٌ الإطار المستطيل المبيّن أدناه، ثم قاس المنصفين $\overline{BD}$ و $\overline{AC}$ لكي يتأكّد من أن الإطار مستطيل، ما العلاقة بين هاتين المنصفين إذا كان الإطار مستطيلًا؟ **يتعين أن تكونا متساويتين.**

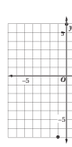


2) مكتبات، في الشكل أدناه، خزانة كتب تتكون من لوحين خشبيّين عموديّين وخمسة ألواح أفقية، فهل واجهة كل قسم من أقسام الخزانة الناتجة عن تقاطع الألواح الأفقية واللّوحين العموديين تشكل مستطيلًا؟ وضّح إجابتك.



نعم؛ كل زاوية من الزوايا الأربع لكل واحد من واجهات الأقسام الأربعة ناتجة عن تقاطع مستقيم أفقي ومستقيم رأسي، فهي زاوية قائمة. وعليه، فإن واجهة كل قسم من الأقسام الأربعة مستطيل؛ لأن زواياه الأربع قوائم.

3) مسح الأراضي، يحدّد مسّاح أراضٍ رؤوس قطعة أرض مستطيلة، ثلاثة رؤوس منها مبيّنة في الشكل أدناه. ما إحداثيات الرأس الرابع؟ **$(-6, 3)$**

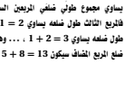


4) برك سباحة، يُصمّم ماجد بركة سباحة في المستوى الإحداثي، فهل البركة مستطيلة؟ وضّح إجابتك.



نعم؛ إجابة ممكنة؛ ميل كلّ من الضلعين الطويلين يساوي 3، وميل كل من الضلعين القصيرين يساوي $-\frac{1}{3}$ ؛ إذن فكل زوج من الأضلاع متوازيان، والأضلاع القصيرة تُعامد الأضلاع الطويلة؛ لأن حاصل ضرب الميلين يساوي 1– ؛ إذن فالزوايا الأربع قوائم.

5) تعامد، كوّن خالد النمط الآتي مستعملًا 6 مربعات، وقد كتب طول ضلع كل مربع داخله.



a) كم مستطيلًا يمكن تكوينه باستعمال الأضلاع الظاهرة في هذا الشكل؟ **11**

b) إذا أراد خالدٌ أن يوّسع هذا النمط بإضافة مستطيل آخر، أضلاعه متساوية الطول لتكوين مستطيل أكبر، فما الأطوال الممكنة لأضلاع المستطيل الذي يمكنه إضافته؟

13 وحدة؛ لأن طول ضلع كل مربع، ابتداء من المربع الثالث يساوي مجموع طولي ضلعي المربعين السابقين له مباشرة، فالمربع الثالث طول ضلعه يساوي $2 = 1 + 1$ ، والرابع طول ضلعه يساوي $3 = 2 + 1$ ، ... وهكذا؛ أي أن طول ضلع المربع المضاف سيكون $13 = 8 + 5$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 5

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (25)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

5-4 التدريبات الإثرائية

المحيط الثابت والمساحة الثابتة للمستطيل:

في هذا النشاط ستستقصي أن المستطيل الذي محيطه ثابت (معلوم) لا يعني أن يُعدّ له ثابتان؛ فقد يوجد أكثر من مستطيل له المحيط نفسه وبُعداه مختلفان. وستربط ذلك بالمساحة؛ لتستنتج أن المستطيل المعلوم المحيط ومساحته أكبر ما يمكن سيكون مربعًا، كما ستستقصي أن المستطيل المعلوم المساحة ومحيطه أقل ما يمكن سيكون مربعًا أيضًا.

المحيط الثابت

يريد سليمان أن يُحوط قطعة مستطيلة الشكل من حديقة بيته بسياج، فاشترى 200 ft منه.

1) أكمل الجدول المجاور بأعداد كلية؛ ليبان أبعاد القطع المستطيلة الخمس التي سيُستعمل في إحاطتها بالسياج كلّه، ثم أوجد مساحة كلّ قطعة.

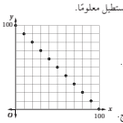
المحيط (ft)	الطول (ft)	العرض (ft)	المساحة $(ft)^2$
200	80	20	1600
200	70	30	2100
200	60	40	2400
200	50	50	2500
200	45	55	2475

2) هل القطع المستطيلة الخمس لها المساحة نفسها؟ وإلّا فما مساحة القطعة الكبرى؟

لا؛ القطعة التي أبعادها 50×50 لها أكبر مساحة.

3) اكتب قاعدةً لإيجاد أبعاد المستطيل الذي له أكبر مساحةٍ ممكنةٍ، عندما يكون محيط المستطيل معلومًا.

المستطيل ذو المساحة الأكبر لمحيط معلوم يكون مربعًا.



4) ليكن x يمثّل طول مستطيل وy يمثّل عرضه، اكتب علاقةً تربط بين x وy لجميع المستطيلات التي مُحيطُها 200 ft، ثم مثّل هذه العلاقة في المستوى الإحداثيّ المجاور.

$x + y = 100$ أو $2x + 2y = 200$

أراد سليمان أن يضع سياجًا حول قطعة مستطيلة أخرى مساحتها $100\ ft^2$، وقبل أن يذهب لشراء السياج، كوّن سليمان جدولًا لتحديد أبعاد القطعة المستطيلة التي سيُحوّطها بالسياج.

5) **المساحة الثابتة:** أكمل الجدول بأعداد كلية؛ لإيجاد الأبعاد الممكنة للقطع المستطيلة الخمس التي مساحتها $100\ ft^2$

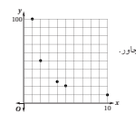
المساحة $(ft)^2$	الطول (ft)	العرض (ft)	طول السياج (ft)
100	1	100	202
100	2	50	104
100	4	25	58
100	5	20	50
100	10	10	40

6) يُريد سليمان أن يكون ثمن شراء السياج أقلّ ما يمكن، ساعده على إيجاد أبعاد القطعة التي تكلفة سياجها أقلّ ما يمكن؟

10 ft × 10 ft

7) اكتب قاعدةً لإيجاد أبعاد المستطيل ذي المحيط الأصغر، عندما تكون مساحة المستطيل معطاة.

المستطيل الذي محيطه أقل ما يمكن، ومساحته معلومة يكون مربعًا.



8) افرض أن x يمثّل طول المستطيل وy يمثّل عرضه. اكتب علاقةً تربط بين x وy للمستطيل الذي مساحته $100\ ft^2$، ثم مثّل هذه العلاقة في المستوى الإحداثيّ المجاور.

$xy = 100$

كتاب التمارين (9)　دون ضمن فوق

5 - 4 المستطيل

مقاولات، يبين الشكل المجاور طاولة واجهتها مستطيلة الشكل، فيها دعامتان متطابقتان ومتساويتان، وينصف كل منهما الآخر إذا كان $m\angle CED = 115^\circ$ ، $BE = 6.5\ ft$ فأوجد كلًّا مما يأتي:



1) AD　13 ft

2) $m\angle EDB$　57.5°

3) $m\angle ABE$　32.5°

جبر، استعن بالمستطيل **RSTU** المبيَّن جانبًا، ثم أجب.



4) إذا كان $UZ = x + 21$ ، $ZS = 3x - 15$، فأوجد US.　78

5) إذا كان $RT = 5x + 8$ ، $RZ = 4x + 1$، فأوجد ZT.　9

6) إذا كان $m\angle RUS = (5x - 4)^\circ$ ، $m\angle SUT = (3x + 6)^\circ$، فأوجد $m\angle SUT$.　39°

7) إذا كان $m\angle UTR = (2x - 44)^\circ$ ، $m\angle SRT = (x + 9)^\circ$، فأوجد $m\angle UTR$.　62°

8) **منتزهات،** قرّر مجلس بلدية تخصيص قطعة أرض مستطيلة الشكل وسط المدينة لتكون منتزهًا. هل تكفي معرفة أن كل ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان؛ للتحقق من أن قطعة الأرض مستطيلة؟ وضّح إجابتك.

لا؛ لا يمكن أن نستنتج أكثر من كون الشكل متوازي أضلاع.

هندسة إحداثية، مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، وحدّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. انظر إجابات الطلاب.

9) $B(-4, 3), G(-2, 4), H(1, -2), L(-1, -3)$ ، صيغة الميل.

نعم؛ إجابة ممكنة: كل ضلعين متقابلين متوازيان، وكل ضلعين متجاورين متعامدان.

10) $N(-4, 5), O(6, 0), P(3, -6), Q(-7, -1)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ إجابة ممكنة: كل ضلعين متقابلين متطابقان، والقطران متطابقان.

11) $C(0, 5), D(4, 7), E(5, 4), F(1, 2)$ صيغة الميل.

لا؛ إجابة ممكنة: الضلعان المتجاوران غير متعامدين.

في المستطيل **GHJK** ، إذا كان $m\angle 1 = 37^\circ$، فأوجد كلًّا مما يأتي:



12) $m\angle 3$　37°

13) $m\angle 5$　53°

14) $m\angle 6$　106°

15) $m\angle 7$　74°

5-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-5

استعمال خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أو / و مستطيلًا.

الدرس 5-5

تعرّف خصائص المعين والمربّع وتطبيقها.

تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا أو معينًا أو مربعًا.

ما بعد الدرس 5-5

تعرّف خصائص شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية وتطبيقها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- صف قياسات أطوال الأضلاع في كل شكل من الأشكال الرباعية المحددة باللون الأحمر في الألماسة؟ أطوال أضلاع كل شكل منها متساوية.
- لماذا يمكن أن يصنّف كل من المعين والمربع أيضًا على أنه متوازي أضلاع متطابق الأضلاع؟ لأن الأضلاع الأربعة في كل منهما متطابقة والأضلاع المتقابلة متوازية.
- بأي طريقة يمكنك تصنيف المعين والمربّع؟ المعين متوازي أضلاع أضلاعه متطابقة، والمربع معين زواياه قائمة.

5-5

المعيّن والمربع
Rhombus and Square

فيما سبق:

درستُ تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أو مستطيلًا.

(الدرس 4-5)

والآن:

- أتعرّف خصائص المعيّن والمربّع وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا أو معيّنًا أو مربعًا.

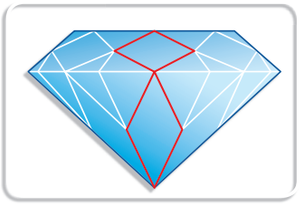
المفردات:

المعيّن
rhombus

المربّع
square

www.obeikaneducation.com

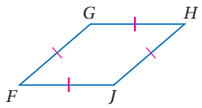
لماذا؟



تصمم الألماسات باستعمال أنماط متكررة من الأشكال الهندسية. إذا صمم فنان الألماسة المجاورة، بحيث تكوّنت من أنماط متكررة من مثلثات وأشكال رباعية، كيف يمكن تحديد نوع الأشكال الرباعية المحددة باللون الأحمر في الألماسة؟

إجابة ممكنة: بقياس الزوايا المتقابلة وقياس أطوال الأضلاع المتقابلة.

خصائص المعيّن والمربّع:



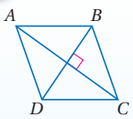
المعيّن هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة. وللمعيّن جميع خصائص متوازي الأضلاع علاوة على الخاصيتين الواردتين في النظريتين الآتيتين :

نظريات

أضف إلى مطويتك

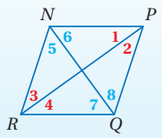
قطرا المعيّن

5.15 إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا، فإنّ قطريه متعامدان.



مثال: إذا كان $\square ABCD$ معيّنًا، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

5.16 إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا فإنّ كل قطر فيه ينصّف كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما.



مثال: إذا كان $\square NPQR$ معيّنًا، فإنّ

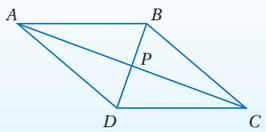
$\angle 1 \cong \angle 2 , \angle 3 \cong \angle 4 , \angle 5 \cong \angle 6 , \angle 7 \cong \angle 8$

سوف تبرهن النظرية 5.16 في السؤال 28

برهان

نظريّة 5.15

أكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.15



المعطيات: $ABCD$ معيّن.

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

البرهان:

بما أنّ $ABCD$ معيّن، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ بحسب التعريف.

وبما أن المعيّن متوازي أضلاع، وقطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ $\overline{BD}$ ينصّف $\overline{AC}$ عند P؛ لذا فإن $\overline{AP} \cong \overline{PC}$. وكذلك $\overline{BP} \cong \overline{BP}$ بحسب خاصية الانعكاس؛ إذن $\triangle CPB \cong \triangle APB$ بحسب SSS.

وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة، فإنّ $\angle APB \cong \angle CPB$.

وكذلك $\angle CPB , \angle APB$ متجاورتان على مستقيم، والزاويتان المتطابقتان المتجاورتان على مستقيم تكونان قائمتين. وبما أن $\angle APB$ قائمة، فإن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

مصادر الدرس 5-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (47)	• تنويع التعليم، ص (47, 48, 51)	• تنويع التعليم، ص (48, 51)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (10)	• كتاب التمارين، ص (10)	• كتاب التمارين، ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

خصائص المعين والمربّع

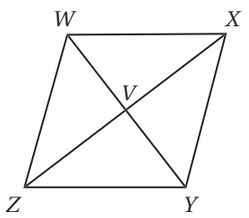
المثال 1 يبيّن كيفية استعمال خصائص المعين جبريًّا.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 استعن بالمعين WXYZ أدناه للإجابة عما يأتي:



a) إذا كان $m\angle WZX = 39.5°$، فأوجد $m\angle ZYX$.

$m\angle ZYX = 101°$

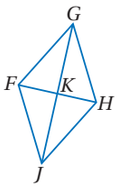
b) جبر: إذا كان $WX = 8x - 5$ و $WZ = 6x + 3$، فأوجد قيمة x. 4

إرشادات للمعلم الجديد

المربّع: بما أن المربع هو متوازي أضلاع ومستطيل ومعين، فإن جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين تنطبق على المربّع.

مثال 1 استعمال خصائص المعيّن

استعن بالمعيّن $FGHJ$ المبيَّن جانبًا.



a) إذا كان $m\angle FJH = 82°$، فأوجد $m\angle KHJ$.

بما أن $FGHJ$ معيّن، فإنّ القطر $\overline{JG}$ ينصِّف $\angle FJH$.

لذا فإن $m\angle KJH = \frac{1}{2}\, m\angle FJH$. $m\angle KJH = \frac{1}{2}(82°) = 41°$ إذن

وبما أن قطري المعيّن متعامدان، فإنّ $m\angle JKH = 90°$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

$m\angle KJH + m\angle JKH + m\angle KHJ = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$41° + 90° + m\angle KHJ = 180°$	بالتعويض
$131° + m\angle KHJ = 180°$	بالتبسيط
$m\angle KHJ = 49°$	بطرح $131°$ من كلا الطرفين

b) جبر: إذا كان $JH = 5x - 2$ ، $GH = x + 9$ ، فأوجد قيمة x.

$\overline{GH} \cong \overline{JH}$	تعريف المعين
$GH = JH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 9 = 5x - 2$	بالتعويض
$9 = 4x - 2$	بطرح x من كلا الطرفين
$11 = 4x$	بجمع 2 لكلا الطرفين
$2.75 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 4

تحقق من فهمك

استعن بالمعيّن $FGHJ$ أعلاه.

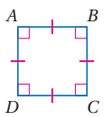
1A) إذا كان $FG = 13, FK = 5$، فأوجد KJ. 12

1B) جبر: إذا كان $m\angle JFK = (6y + 7)°$, $m\angle KFG = (9y - 5)°$، فأوجد قيمة y. 4

إرشادات للدراسة

المربّع والمعيّن: كل مربّع معيّن، ولكن ليس كل معيّن مربعًا، وكل مربع مستطيل وليس كل مستطيل مربعًا.

المربّع هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم. تذكّر أن متوازي الأضلاع الذي زواياه الأربع قوائم يكون مستطيلًا، ومتوازي الأضلاع الذي أضلاعه الأربعة متطابقة يكون معيّنًا؛ لذا فعندما يكون متوازي الأضلاع معيّنًا وإحدى زواياه قائمة فإنّه يكون مربّعًا أيضًا، وعليه فإن المربع هو متوازي أضلاع ومستطيل ومعيّن.

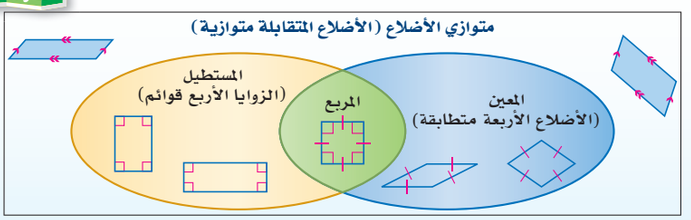


المربع $ABCD$

ويلخص شكل فن الآتي العلاقة بين متوازي الأضلاع والمعيّن والمربّع والمستطيل.

ملخص المفهوم متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك



جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيّن تنطبق على المربّع. فمثلًا قطرا المربع ينصّف كل منهما الآخر (متوازي أضلاع)، وهما متطابقان (مستطيل)، ومتعامدان (معيّن).

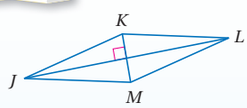
إثبات أنّ الشكل الرباعي معيّن أو مربع: تُحدِّد النظريات الآتية الشروط الكافية للمعيّن والمربّع.

نظريات

الشروط الكافية للمعيّن والمربّع

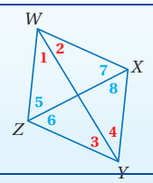
أضف إلى مطويتك

5.17 إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنّه معيّن. (عكس النظرية 5.15)



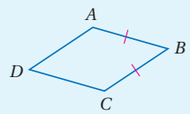
مثال: إذا كان $JKLM$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{JL} \perp \overline{KM}$، فإنّ $\square JKLM$ معيّن.

5.18 إذا نصَّف قطر متوازي أضلاع كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما، فإن متوازي الأضلاع يكون معيّنًا. (عكس النظرية 5.16)



مثال: إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، وكانت $\angle 4 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 1$، أو $\angle 8 \cong \angle 7$, $\angle 6 \cong \angle 5$، فإنّ $\square WXYZ$ معيّن.

5.19 إذا كان ضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع متطابقين فإنه معيّن.



مثال: إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، فإنّ $\square ABCD$ معيّن.

5.20 إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعيّنًا فإنه مربّع.

سوف تبرهن النظريات **5.17** إلى **5.20** في الأسئلة **32–29** على الترتيب.

تنبيه!

أخطاء شائعة

يخطئ البعض فيستعمل النظريات **5.17, 5.18, 5.19** مع أي شكل رباعي، وهذا غير صحيح؛ لأن هذه النظريات تكون صحيحة فقط إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

يمكنك استعمال خصائص المعيّن والمربع في البراهين.

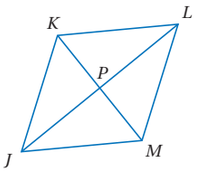
إرشادات للدراسة

المثلثات المتطابقة

بما أن للمعيّن أربعة أضلاع متطابقة، فإن كلًّا من قطريه يقسمه إلى مثلثين متطابقي الضلعين ومتطابقين. وإذا رُسم القطران فإنهما يقسمان المعيّن إلى أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة.

مثال 2

استعمال خصائص المعيّن والمربّع في البراهين



اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $JKLM$ متوازي أضلاع.

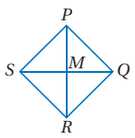
$\triangle JKL$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $\square JKLM$ معيّن.

برهان حرّ:

بما أنّ $\triangle JKL$ متطابق الضلعين، فإنّ $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ بحسب التعريف، وهذان الضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع $JKLM$، لذا وبحسب النظرية 5.19، يكون $\square JKLM$ معيّنًا.

تحقق من فهمك



2) اكتب برهانًا حرًّا. انظر الهامش.

المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصّف لِـ $\overline{PR}$.

$\overline{PR}$ عمود منصّف لِـ $\overline{SQ}$.

$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.

إثبات أنّ الشكل الرباعي معيّن أو مربّع

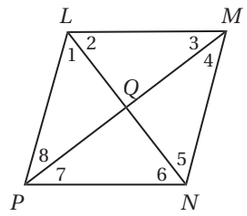
تبيّن الأمثلة 2-4 كيفية استعمال خصائص المعين أو المربع في البراهين.

مثال إضافي

2 اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $LMNP$ متوازي أضلاع، $\angle 2 \cong \angle 1$

المطلوب: $LMNP$ معين.



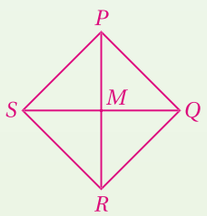
$\overline{LN}$ تنصّف $\angle L$ و $\angle N$؛ لذلك وبحسب النظرية 5.18 يكون $LMNP$ معينًا.

إجابة (تحقق من فهمك):

2) المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصّف لِـ $\overline{PR}$، $\overline{PR}$ عمود منصّف لِـ $\overline{SQ}$.

$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.



البرهان:

بما أنّ $\overline{SQ}$ عمود منصّف لِـ $\overline{PR}$ فإنّ $\overline{SQ} \perp \overline{PR}$ و $\overline{MP} \cong \overline{MR}$ بحسب التعريف. وبما أنّ $\overline{PR}$ عمود منصّف لِـ $\overline{SQ}$، فإن $\overline{MS} \cong \overline{QM}$. وبما أن القطرين ينصِّف كل منهما الآخر، فالشكل $PQRS$ متوازي أضلاع، وحيث إن القطرين متعامدان، يكون الشكل معيّنًا. وبما أن $\triangle RMS$ متطابق الضلعين، فإن $\overline{MS} \cong \overline{MR}$ بحسب التعريف. وبالتعويض تكون $\overline{MS} \cong \overline{MP}$، إذن وبحسب تعريف التطابق وخاصية التعدّي يكون $MS=MP=QM=MR$. ومن مسلمة جمع القطع المستقيمة ينتج أن، $MS + MQ = SQ$ و $MP + MR = PR$. وبالتعويض يكون $MS + MS = SQ$ و $MS + MS = PR$، إذن $SQ = PR$. لذلك وبحسب تعريف التطابق يكون $\overline{PR} \cong \overline{SQ}$. ولأنّ القطرين متطابقان فإن $\square PQRS$ مستطيل. ولأنّ $\square PQRS$ مستطيل ومعين، فإنّه مربّع.

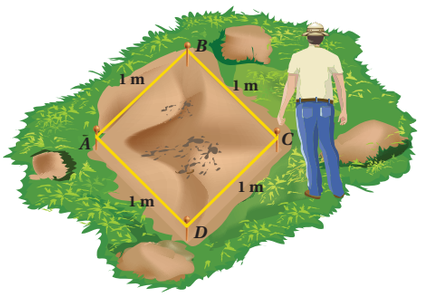


الربط مع الحياة

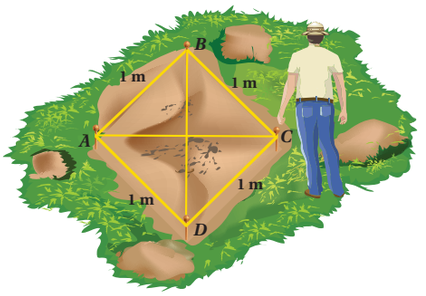
علم الآثار هو دراسة أعمال الإنسان في العصور القديمة كي يزودنا بمعلومات حول حياته ونشاطاته. وساعد اكتشاف الإنسان للكتابة منذ 5000 عام تقريبًا على فهم أسرار أزمنة ما بعد هذا التاريخ.

مثال 3 من واقع الحياة — **استعمال المعيّن والمربع**

علم الآثار: مفتاح الكشف الناجح عن الآثار هو وضع خريطة دقيقة لموقع البحث. كيف يمكن لعالم الآثار في الصورة أدناه أن يتحقق من أن منطقة بحثه هي مربع طول ضلعه **1 m** مستعملًا الحبل وشريط القياس فقط؟

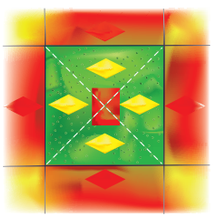


طول كل من أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ يساوي 1 m. وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أن أضلاع $ABCD$ المتتالية متطابقة فإنّه معيّن. وإذا استطاع عالم الآثار بيان أنّ $ABCD$ ▱ مستطيل أيضًا فإنّه بحسب النظرية 5.20، يكون مربعًا.



إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل؛ لذا يمكن لعالم الآثار استعمال الحبل لقياس طولي القطرين، فإذا وجدهما متساويين، فإن $ABCD$ ▱ يكون مربّعًا.

تحقق من فهمك



3) خياطة: خاطت كوثر غطاء طاولة باستعمال قطع ملونة من القماش كما في الرسم المجاور.

A) رسمت كوثر قطري كل من القطع الصفراء فوجدت أنهما متعامدان، هل يمكنها استنتاج أن كل قطعة صفراء معيّن؟ وضّح إجابتك.

B) إذا كانت الزوايا الأربع للقطعة الخضراء متساوية القياس، والضلعان الأيسر والسفلي متساويي الطول، فهل يمكنها استنتاج أن القطعة الخضراء مربّع؟ وضّح إجابتك.

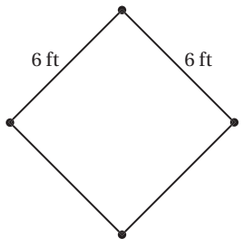
استعملت في الفصل 3 الهندسة الإحداثيّة لتصنيف المثلثات. ويمكن استعمال الهندسة الإحداثية لتصنيف الأشكال الرباعية أيضًا.

3A) لا؛ لا يمكن التوصل لهذا الاستنتاج إلا إذا علمت أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

3B) نعم؛ إذا كانت الزوايا الأربع متطابقة، فسيكون قياس كل واحدة منها $360° \div 4$ أو $90°$، وعليه تكون الزوايا المتقابلة متطابقة، وتكون القطعة الخضراء متوازي أضلاع. وإذا كان قياس كل زاوية $90°$، فإن للشكل الرباعي أربع زوايا قوائم، وعليه تكون القطعة الخضراء مستطيلًا، وإذا كان الضلعان المتتاليان متطابقين، فستكون أيضًا معيّنًا، وعليه بحسب نظرية 5.20 فإن القطعة الخضراء ستكون مربعًا.

مثال إضافي

3 **بستنة:** يقيس هاني حدود حوض أزهار جديد. ويرغب في أن يكون مربّعًا. لذا وضع أوتاد الأركان بحيث يبعد بعضها عن بعض 6 ft. ما الذي يحتاج إلى معرفته أيضًا ليكون متأكّدًا من أن الحوض مربّعًا؟



بما أنّ الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإنّ الحوض متوازي أضلاع. ولأن الأضلاع المتجاورة متطابقة، فإنّ الحوض معين.
ويحتاج هاني إلى معرفة ما إذا كان القطران متطابقين. فإذا كانا كذلك، فالحوض مستطيل. وبحسب النظرية 5.20 فإن الحوض مربّع.

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لإنتاج تسجيل مرئي يصفون فيه خصائص المعين والمربّع. وتأكد من أنهم ذكروا جميع خصائص هذين الشكلين بما في ذلك الخصائص المشتركة مع متوازي الأضلاع.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيّون: قد لا يُدرك بعض الطلاب أن قطري المعين متعامدان، لذا قسِّم الطلاب إلى مجموعات، ثم اطلب إلى كل مجموعة أن يقصّوا أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة، وتأكد من أن مثلثات كل مجموعة تختلف عن مثلثات المجموعات الأخرى، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يضعوا المثلثات متجاورة بحيث تلتقي رؤوس الزوايا القائمة للمثلثات الأربعة لتشكل معينًا. وأخيرًا اطلب إلى كل مجموعة عرض نتيجتها على طلاب الصف.

مثال 4 تصنيف الأشكال الرباعيّة باستعمال الهندسة الإحداثيّة

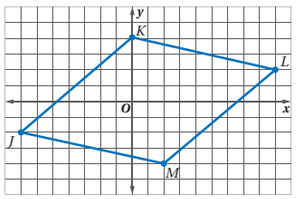
هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(-7,-2)$، $K(0,4)$، $L(9,2)$، $M(2,-4)$ معيّنًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

افهم:

المعطيات: $\square JKLM$ إحداثيات رؤوسه: $J(-7,-2)$، $K(0,4)$، $L(9,2)$، $M(2,-4)$.

المطلوب: إثبات أن $\square JKLM$ هو معين أو مستطيل أو مربع.

عيّن الرؤوس على المستوى الإحداثي وصل بينها.



يظهر من الرسم أن أضلاع $\square JKLM$ متطابقة. ولكنّ زواياه ليست قوائم؛ لذا يبدو أنّه معيّن وليس مربّعًا أو مستطيلًا.

خطط: إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل. وإذا كانا متعامدين فإنّه معيّن. وإذا كانا متطابقين ومتعامدين فإنه مستطيل ومعيّن؛ أيّ أنّه مربّع.

حل: أولًا: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$KM = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$JL = \sqrt{[9-(-7)]^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$$

بما أن $2\sqrt{17} \neq 4\sqrt{17}$، فإن القطرين ليسا متطابقين؛ لذا $\square JKLM$ ليس مستطيلًا. وبما أنه ليس مستطيلًا فإنّه ليس مربّعًا أيضًا.

ثانيًا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدين.

ميل $\overline{KM}$: $\frac{-4-4}{2-0} = \frac{-8}{2} = -4$

ميل $\overline{JL}$: $\frac{2-(-2)}{9-(-7)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

وبما أن حاصل ضرب الميلين يساوي -1، فإن القطرين متعامدان؛ لذا فإن $\square JKLM$ معيّن.

تحقق:

$$JK = \sqrt{[4-(-2)]^2 + [0-(-7)]^2} = \sqrt{85}$$

$$KL = \sqrt{(9-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{85}$$

لذا فإن $\square JKLM$ معيّن بحسب النظرية 5.20 .

ميل $\overline{JK}$ يساوي $\frac{4-(-2)}{0-(-7)}$ أو $\frac{6}{7}$، وميل $\overline{KL}$ يساوي $\frac{2-4}{9-0}$ أو $-\frac{2}{9}$

وبما أن حاصل ضرب هذين الميلين لا يساوي -1، فإن الضلعين المتتاليين $\overline{JK}$ و $\overline{KL}$ غير متعامدين؛ لذا فإن $\angle JKL$ ليست قائمة؛ إذن $\square JKLM$ ليس مستطيلًا ولا مربّعًا. ✓

تحقق من فهمك

4) حدِّد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(5,0), K(8,-11), L(-3,-14), M(-6,-3)$، معيّنًا أو مستطيلًا أو مربّعًا ؟ اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

إرشادات للدراسة

تمثيل الشكل بيانيًا: عند تحليل شكل رباعي باستعمال الهندسة الإحداثيّة، مثّله بيانيًا لمساعدتك على وضع تخمين؛ ثم تحقق من تخمينك جبريًا.

4) مربع ومعيّن ومستطيل؛ إجابة ممكنة: لأن قطريه متطابقان ومتعامدان.

مثال إضافي

4 حدّد ما إذا كان متوازي الأضلاع $ABCD$ معينًا أو مستطيلاً أو مربّعًا، حيث $A(-2,-1)$، $B(-1,3)$، $C(3,2)$ ، $D(2,-2)$. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

$AC = \sqrt{34}$ ، و $BD = \sqrt{34}$ ، وميل $\overline{AC}$ يساوي $\frac{3}{5}$ ، وميل $\overline{BD}$ يساوي $-\frac{5}{3}$.
وبما أنّ $AC = BD$ فإنّ القطرين متطابقان. لذا فإن $\square ABCD$ مستطيل. وبما أن حاصل ضرب ميل $\overline{AC}$ في ميل $\overline{BD}$ يساوي -1، فإن القطرين متعامدان، لذا فإن $\square ABCD$ معين، وبالتالي فهو مربع.

تنويع التعليم

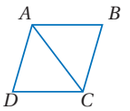
ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يتخيلوا أنهم يعملون في محل لإطارات الصور والمناظر، وأن أحد الزبائن طلب إطارًا من أربع قطع خشبيّة متطابقة. اكتب وصفًا يستعمل للتأكد من كون الإطار مربعًا بالاعتماد على القطرين.
إجابة ممكنة: قس القطرين. إذا كان القطران ينصف كل منهما الآخر، فإنّ الإطار متوازي أضلاع، وإذا كان للقطرين الطول نفسه، فإنه يكون مستطيلاً، ثم قِس الزوايا المتكونة من تقاطع القطرين، فإذا كان القطران متعامدين، فإنّ الإطار معين، وبالتالي فهو مربّع.

تأكـد

المثال 1

جبر: استعن بالمعين ***ABCD*** المبيَّن جانبًا.

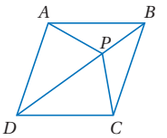


1) إذا كان $m\angle BCD = 114^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$. 57°

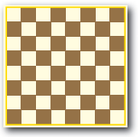
2) إذا كان $AB = 2x + 3$, $BC = x + 7$، فأوجد CD. 11

المثالان 2, 3

3) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنّه إذا كان $ABCD$ معيّنًا وكان $\overline{DB}$ قطرًا فيه، فإنّ $\overline{AP} \cong \overline{CP}$. انظر الهامش.



4) بلاط: تتكون الأرضية أدناه من 64 بلاطة مربعة متطابقة. استعمل هذ المعطيات لإثبات أن الأرضية نفسها مربّعة. انظر الهامش.



5) مستطيل ومعيّن ومربع؛ إجابة ممكنة: لأن الضلعين المتتاليين $\overline{QT}$, $\overline{RQ}$ متطابقان ومتعامدان.

6) لا شيء ؛ لأن قطريه غير متعامدين وغير متطابقين.

المثال 4

هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

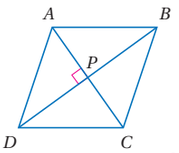
5) $Q(1, 2), R(-2, -1), S(1, -4), T(4, -1)$

6) $Q(-2, -1), R(-1, 2), S(4, 1), T(3, -2)$

تدرب وحل المسائل

المثال 1

جبر: استعن بالمعين ***ABCD*** المبيَّن جانبًا.



7) إذا كان $AB = 14$، فأوجد BC. 14

8) إذا كان $m\angle BCD = 118^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$. 59°

9) إذا كان $AP = 3x - 1$ و $PC = x + 9$، فأوجد AC. 28

10) إذا كان $m\angle ABC = (2x - 7)^\circ$ و $m\angle BCD = (2x + 3)^\circ$، فأوجد $m\angle DAB$. 95°

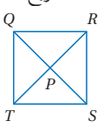
11) إذا كان $m\angle DPC = (3x - 15)^\circ$، فأوجد قيمة x. 35°

المثال 2

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي :

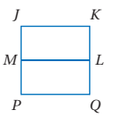
12) **المعطيات:** $QRST$ متوازي أضلاع. $\overline{TR} \cong \overline{QS}, m\angle QPR = 90^\circ$

المطلوب: $QRST$ مربّع. انظر ملحق الإجابات.

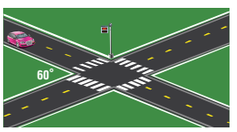


13) **المعطيات:** $JKQP$ مربّع. $\overline{ML}$ تنصّف كلًّا من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$.

المطلوب: $JKLM$ متوازي أضلاع. انظر ملحق الإجابات.

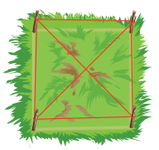


14) طرق: يتقاطع طريقان كما في الشكل. إذا كانت ممرّات المشاة لها الطول نفسه، فصنّف الشكل الرباعيّ المكوّن من هذه الممرات. ووضّح تبريرك. انظر الهامش .



المثال 3

15) زراعة: حدّد مزارع حقلًا بأوتاد وحبال كما في الشكل المجاور . إذا كانت أضلاع الشكل الرباعي المتشكل متساوية الطول، وقطراه متعامدين، فهل هذه المعلومات كافية كي تتحقق من أنّ الحقل مربع؟ وضِّح تبريرك. انظر الهامش .



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 6–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

3) المعطيات: $ABCD$ معين فيه $\overline{DB}$ قطر.

المطلوب: $\overline{AP} \cong \overline{CP}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $ABCD$ معين فيه $\overline{DB}$ قطر	1) معطى
2) $\angle ABP \cong \angle CBP$	2) قطرا المعين ينصّفان زواياه
3) $\overline{PB} \cong \overline{PB}$	3) خاصيّة الانعكاس
4) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$	4) تعريف المعين
5) $\triangle APB \cong \triangle CPB$	5) نظرية التشابه SAS
6) $\overline{AP} \cong \overline{CP}$	6) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

4) إجابة ممكنة: بما أن كل ضلع من أضلاع الأرضية طوله 8 بلاطات، وكل البلاطات متطابقة، فإنّ أطوال الأضلاع الأربعة للأرضية متساوية، ولأننا نعلم أن الأشكال الرباعية التي تكوّن أركان الأرضية مربّعة، فإن قياس كل زاوية عند رؤوس الأرضية يساوي 90°. لذلك فالأرضية مربّعة.

14) معين؛ إجابة ممكنة: بما أنَّ جانبي الطريق متوازيان، لذا فالشكل الرباعي متوازي أضلاع، ولأن ممرات المشاة لها الطول نفسه، فالشكل معين. وحيث إنَّ قياس الزاوية المتكوّنة بين الطريقتين 60°، لذا فقياس زاوية الشكل الرباعي المقابلة لها بالرأس 60° أيضًا مما يعني أن الشكل الرباعي ليس مستطيلًا ولا مربعًا.

15) لا؛ إجابة ممكنة: بما أنّ الأضلاع الأربعة للشكل الرباعي متطابقة وقطريه متعامدان، فإن الشكل الرباعي معين. وللتحقق من أن الحقل مربع يحتاج المزارع إلى إثبات أن القطرين متطابقان.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	7-19 ، 37 ، 38 ، 40-53
ضمن ضمن المتوسط	7-33 فردي ، 35-38 ، 40-53
فوق فوق المتوسط	20-50 ، (اختياري: 51-53)

تنبيه لحل سؤال

المسطرة والفرجار: يتطلب السؤال 36 استعمال المسطرة والفرجار.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 36، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسيّة والجدول والأوصاف اللفظية لاستقصاء خصائص شكل الطائرة الورقيّة.

المثال 4

16) معيّن ؛ لأن قطريه متعامدان، وليس مستطيلًا ولا مربعًا، لأن قطريه غير متطابقين.

17) معيّن ؛ لأن قطريه متعامدان، وليس مستطيلًا ولا مربعًا، لأن قطريه غير متطابقين.

18) لا شيء؛ لأن قطريه غير متطابقين وغير متعامدين.

19) مربع ومستطيل ومعيّن؛ لأن جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه قوائم.



الربط مع الحياة

الفسيفساء صور تُشكّل باستعمال أنماط من أحجار أو زجاج أو قرميد أو أي مواد أخرى. والفسيفساء في الصورة أعلاه فسيفساء إغريقيّة قديمة من الصخر البلوري (الكوارتز). استعمل الإغريق قطعًا صغيرة أو أشكالًا منتظمة من المواد منذ 200 سنة قبل الميلاد بدلًا من الصخر البلوري في أعمال الفسيفساء.

هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان $\square JKLM$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

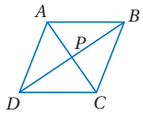
16) $J(-4,-1), K(1,-1), L(4,3), M(-1,3)$

17) $J(-3,-2), K(2,-2), L(5,2), M(0,2)$

18) $J(-2,-1), K(-4,3), L(1,5), M(3,1)$

19) $J(-1,1), K(4,1), L(4,6), M(-1,6)$

في المعين $ABCD$، إذا كان $PB = 12, AB = 15, m\angle ABD = 24^\circ$، فأوجد كلًّا مما يأتي :



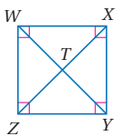
20) AP 9

21) CP 9

22) $m\angle BDA$ 24°

23) $m\angle ACB$ 66°

في المربع $WXYZ$، إذا كان $WT = 3$، فأوجد كلًّا مما يأتي :



24) ZX 6

25) XY $3\sqrt{2}$

26) $m\angle WTZ$ 90°

27) $m\angle WYX$ 45°

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل مما يأتي : 28–32) انظر ملحق الإجابات.

28) النظريّة 5.16

29) النظريّة 5.17

30) النظريّة 5.18

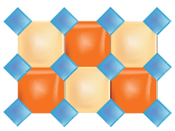
31) النظريّة 5.19

32) النظريّة 5.20

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة في كل من السؤالين الآتيين : 33, 34) انظر ملحق الإجابات.

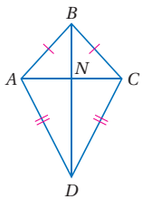
33) قطرا المربّع متعامدان.

34) تشكّل القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع مستطيل معيّنًا.



35) **تصميم:** يتكون نمط الفسيفساء المبين جانبًا من قطع ثمانيّة منتظمة وأخرى رباعيّة. صنِّف الأشكال الرباعيّة في النمط، ووضِّح تبريرك. انظر ملحق الإجابات.

36) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة إحدى خصائص شكل الطائرة الورقيّة، وهو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة والمتطابقة.



a) هندسيًّا: ارسم قطعةً مستقيمةً، ثم افتح الفرجار وثبته عند أحد طرفيها وارسم قوسًا فوقها، ومن دون تغيير فتحة الفرجار، ثبّت رأس الفرجار عند الطرف الآخر للقطعة المستقيمة، وارسم قوسًا يقطع القوس السابق. غيِّر فتحة الفرجار وارسم قوسين أسفل القطعة المستقيمة كما فعلت سابقًا.

استعمل المستطرة وصل بين طرفَي القطعة والأقواس، وسينتج لك شكل طائرة ورقية سمّها $ABCD$. ثم كرِّر ذلك مرتين، وسمِّ شكلي الطائرتين الورقيتين $PQRS$, $WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منهما، ولتكن نقطة تقاطع قطري كل منها N. انظر ملحق الإجابات.

b) جدوليًّا: استعمل مسطرة لقياس المسافة من N إلى كل رأس. وسجِّل النتائج في جدول على النحو الآتي.

الشكل	المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأقصر		المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأطول	
$ABCD$	0.8 cm	0.8 cm	0.9 cm	1.5 cm
$PQRS$	1.2 cm	1.2 cm	0.3 cm	0.9 cm
$WXYZ$	0.2 cm	0.2 cm	1.1 cm	0.4 cm

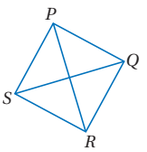
c) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول قطري شكل الطائرة الورقيّة.

إجابة ممكنة: القطر الأطول في شكل الطائرة الورقية ينصّف القطر الآخر.

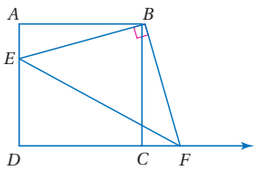
50 الفصل 5 الأشكال الرباعية

مسائل مهارات التفكير العليا

37) اكتشف الخطأ: في الشكل الرباعي $SRQP$ المبيَّن جانبًا، $\overline{PR} \cong \overline{QS}$.
قال محمد: إن الشكل مربّع. بينما قال إبراهيم: إنه معيّن.
هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.



38) تبرير: حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خطأً؟ ثم اكتب عكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي، وحدِّد قيمة الصواب لكل منها. وضّح تبريرك.
إذا كان الشكل الرباعي مربّعًا، فإنّه مستطيل. **انظر ملحق الإجابات.**



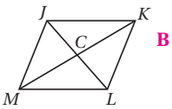
39) تحدَّ: مساحة المربّع $ABCD$ المجاور تساوي 36 وحدة مربّعة. ومساحة $\triangle EBF$ تساوي 20 وحدة مربّعة. إذا كانت $\overline{EB} \perp \overline{BF}$، وطول $\overline{AE}$ يساوي وحدتين، فأوجد طول $\overline{CF}$. **2**

40) مسألة مفتوحة: أوجد إحداثيات رؤوس مربّع قطراه محتويان في المستقيمين $y = x$, $y = -x + 6$. وضّح تبريرك.

41) اكتب: قارن بين جميع خصائص الأشكال الرباعيّة الآتية :
متوازي الأضلاع، المستطيل، المعيّن، المربّع. **انظر ملحق الإجابات.**

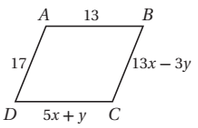
تدريب على اختبار

42) في المعين $JKLM$، إذا كان $CK = 8$ ، $JK = 10$، فأوجد JC. **B**



A 4 **B** 6
C 8 **D** 10

43) جبر: ما قيمة كل من x , y بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع؟ **C**

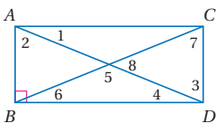


A $x = 3, y = 2$
B $x = \frac{3}{2}, y = -1$
C $x = 2, y = 3$
D $x = 3, y = -1$

مراجعة تراكمية

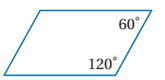
في المستطيل $ABDC$، إذا كان $m\angle 1 = 38°$. فأوجد كلًّا من القياسات الآتية : (الدرس 4-5)

44) $m\angle 2$ **52°** **45)** $m\angle 5$ **104°** **46)** $m\angle 6$ **38°**

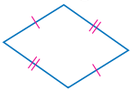


حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك. (الدرس 3-5) **47–49) انظر الهامش.**

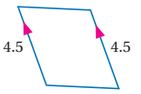
47)



48)



49)



50) قياسات: قال مروان: إنّ الحديقة الخلفيّة لمنزله على شكل مثلث أطوال أضلاعه 22 ft, 23 ft, 45 ft.
فهل ترى أنّ هذه القياسات صحيحة؟ وضّح تبريرك. (الدرس 4-5) **انظر الهامش.**

استعد للدرس اللاحق

حل كل معادلة مما يأتي :

51) $\frac{1}{2}(5x + 7x - 1) = 11.5$ **2**

52) $\frac{1}{2}(10x + 6x + 2) = 7$ $\frac{3}{4}$

53) $\frac{1}{2}(12x + 6 - 8x + 7) = 9$ $\frac{5}{4}$

4 التقويم

تعلّم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يلاحظوا ملخص المفاهيم ويدرسوه، وأن يكتبوا استنتاجًا حول أوجه الشبه والاختلاف بين مفهوم المستطيل (في الدرس السابق) ومفهومي المعين والمربع (في الدرس الحالي).

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرسين 4–5 و 5–5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (12).

إجابات:

47) لا؛ الشكل لا يحقق أيًّا من شروط متوازي الأضلاع.

48) نعم؛ كل ضلعين متقابلين متطابقان.

49) نعم؛ يوجد ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان.

50) لا؛ تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين لمثلث يجب أن يكون أكبر من طول الضلع الثالث. وبما أنّ $45 = 23 + 22$ ، فإنّ أطوال أضلاع حديقة منزل مروان لا يمكن أن تكون 22 ft، 23 ft، و45 ft.

37) كلاهما خطأ ؛ إجابة ممكنة : بما أنهما لا يعلمان أن أضلاع الشكل الرباعي متطابقة ، فلا يمكن استنتاج أن الشكل مربع أو معيّن.

40) إجابة ممكنة: $(0, 0), (6, 0), (0, 6), (6, 6)$ ؛ القطران متعامدان، لذا فإن أي أربع نقاط تبعد البعد نفسه عن نقطة تقاطع القطرين تشكّل رؤوس مربع .

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا قصّة أطفال مبنيّة على الفكرة الآتية: المربّعات مجموعة خاصّة جدًّا؛ لأن شروط قبول عضو في "مجموعة المربعات" شروط مشدّدة جدًّا. وتتوسع مجموعة المربّعات بتسهيل شروط العضوية، وذلك بتقليل عدد الشروط الضرورية لعضوية المجموعة.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: للسؤال 37، يجب أن يدرك الطلاب أنه مع أن قطري المربع متطابقان، إلا أنّ هذه الحقيقة وحدها غير كافية لإثبات أن الشكل الرباعي مربّع. فقطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان، وجميع المستطيلات أقطارها متطابقة بحسب النظرية 5.14 .



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 5

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

5-5 تدريبات إعادة التعليم

المعين والمربع

خصائص المعين:

المعيّن هو شكل رباعيّ أضلاعه الأربعة متطابقة. وبما أنّ كلّ ضلعين متقابلين فيه متطابقان، فهو متوازي أضلاع أيضًا. وتتوافر فيه خصائص متوازي الأضلاع وهي: الأضلاع المتقابلة متوازية، والزوايا المتقابلة متطابقة، والزوايا المتحالفة متكاملة، وكذلك القطران ينصّف كلّ منهما الآخر، بالإضافة إلى الخصائص الآتية:

5.15	قطرا المعين متعامدان.	$\overline{MH} \perp \overline{RO}$
5.16	كلّ قطر فيه ينصّف كلًّا من الزاويتين اللّتين يصل بين رأسيهما.	$\overline{MH}$ ينصّف $\angle RMO$ و $\angle RHO$، $\overline{RO}$ ينصّف $\angle MRH$ و $\angle MOH$.



المربع يتوافر فيه جميع خصائص متوازي الأضلاع وجميع خصائص المعين، وزواياه الأربع قوائم، وقطراه متطابقان.



المربع $ABCD$

مثال في المعين $ABCD$ المجاور. إذا كان $m\angle BAC = 32°$، فأوجد قياس كلّ زاوية مرقّمة.

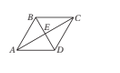


بما أنّ $ABCD$ معيّنٌ، فإنّ قطريه متعامدان و$\triangle ABE$ قائم الزاوية؛ لذا فإن: $m\angle 4 = 90°$،
و $m\angle 1 = 90° - 32° = 58°$. وبما أنّ كلّ قطر في المعين ينصّف الزاويتين اللتين يمرّ بهما،
فإنّ $m\angle 2 = m\angle 1 = 58°$ إذن $m\angle 2 = 58°$.

وبما أنّ المعيّن متوازي أضلاع، فإنّ الأضلاع المتقابلة فيه متوازية، وبما أنّ الزاويتين $\angle BAC$ و $\angle 3$ متبادلتان داخليًّا بين مستقيمين متوازيين، فإنّ $m\angle 3 = 32°$.

تمارين

جبر: استفد من المعيّن $ABCD$ المجاور للإجابة عن الأسئلة 8–1:



1) إذا كان: $m\angle ABD = 60°$، فأوجد $m\angle BDC$. **60°**
2) إذا كان: $AE = 8$، فأوجد AC. **16**
3) إذا كان: $AB = 26$ و $BD = 20$، فأوجد AE. **24**
4) أوجد $m\angle CEB$. **90°**
5) إذا كان: $m\angle CBD = 58°$، فأوجد $m\angle ACB$. **32°**
6) إذا كان: $AE = 3x - 1$ و $AC = 16$، فأوجد قيمة x. **3**
7) إذا كان: $m\angle CDB = (6y)°$ و $m\angle ACB = (2y + 10)°$، فأوجد قيمة y. **10**
8) إذا كان: $AD = 2x + 4$ و $CD = 4x - 4$، فأوجد قيمة x. **4**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

5-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المعين والمربع

إثبات أن الشكل الرباعي معين أو مربع:

تحدد النظريات الآتية الشروط الكافية لتحديد ما إذا كان متوازي الأضلاع معينًا أو مربعًا.



5.17	إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متعامدين فإنه معيّن.	إذا كان: $\overline{WY} \perp \overline{ZX}$، فإن $WXYZ \square$ معينًا
5.18	إذا نصّف قطرا متوازي أضلاع كلًّا من الزاويتين اللتين يصلان رأسيهما، فإن متوازي الأضلاع يكون معينًا.	إذا كان: $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4, \angle 5 \cong \angle 6$، فإن $WXYZ \square$ معينًا
5.19	إذا كان ضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع متطابقين فإنه معيّن.	إذا كان: $\overline{YZ} \cong \overline{XY}$، فإن $WXYZ \square$ معينًا
5.20	إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعينًا فإنه مربع.	

مثال حدد ما إذا كان متوازي الأضلاع $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$A(-3,-3)$، $B(1,1)$، $C(5,-3)$، $D(1,-7)$ معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه، ووضّح إجابتك. مثل $ABCD \square$ في المستوى الإحداثي، ثم أوجد $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$

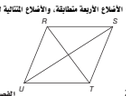


$AC = \sqrt{(-3-5)^2 + (-3-(-3))^2} = \sqrt{64} = 8$ ، $BD = \sqrt{(1-1)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{64} = 8$
القطران متطابقان؛ إذن فمتوازي الأضلاع $ABCD$ مستطيل. والآن، أوجد ميل كلٍّ من $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$.
ميل $\overline{AC}$: $m = \frac{-3-(-3)}{-3-5} = \frac{0}{-8} = 0$ ؛ $\overline{AC}$ مستقيم أفقي.
ميل $\overline{BD}$: كمية غير معرفة $\leftarrow m = \frac{1-(-7)}{1-1} = \frac{8}{0}$ ؛ $\overline{BD}$ مستقيم رأسي.
وبما أن المستقيمين (الأفقي والرأسي) متعامدان دائمًا، فإن قطري متوازي، الأضلاع $ABCD$ متعامدان؛ ولذلك فهو معيّن ومستطيل، وبالتالي فهو مربع.

تمارين

هندسة إحداثية: حدّد ما إذا كان $ABCD \square$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلّ مما يأتي معينًا أو مربعًا أو مستطيلًا أو مربعًا، اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضّح إجابتك.

1) $A(0,2)$، $B(2,A)$، $C(4,2)$، $D(2,0)$ — **مستطيل، معين، مربع. الأضلاع الأربعة متطابقة، والأضلاع المتتالية متعامدة.**
2) $A(-2,1)$، $B(1,3)$، $C(3,1)$، $D(2,-1)$ — **مستطيل. الأضلاع المتتالية متعامدة.**
3) $A(-2,-1)$، $B(0,2)$، $C(2,-1)$، $D(0,-4)$ — **معين. الأضلاع الأربعة متطابقة، والأضلاع المتتالية ليست متعامدة.**
4) برهان، اكتب برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: في متوازي الأضلاع $RSTU$، $\overline{RS} \cong \overline{ST}$
المطلوب: $RSTU$ معيّن.



إجابة سؤال 4

العبارات	المبررات
1) $RSTU$ متوازي أضلاع.	1) معطيات.
$\overline{RS} \cong \overline{ST}$	
2) $\overline{RS} \cong \overline{UT}$، $\overline{RU} \cong \overline{ST}$	2) تعريف متوازي الأضلاع
3) $\overline{UT} \cong \overline{RS} \cong \overline{ST} \cong \overline{RU}$	3) بالتعويض
4) $RSTU$ معين	4) تعريف المعين

تدريبات المهارات (28) — دون ضمن

الاسم _____ التاريخ _____

5-5 تدريبات المهارات

المعين والمربع

جبر: استفد من المعين $DKLM$ المجاور للإجابة عن الأسئلة 7–1.



1) إذا كان: $DK = 8$، فأوجد KL. **8**
2) إذا كان: $m\angle DML = 82°$، فأوجد $m\angle DKM$. **41°**
3) إذا كان: $m\angle KAL = (2x - 8)°$، فأوجد قيمة x. **49°**
4) إذا كان: $DA = 4x - 5$ و $AL = 3$، فأوجد DL. **24**
5) إذا كان: $m\angle DKL = (3x + 2)°$ و $m\angle KLM = (3x - 2)°$، فأوجد $m\angle MDK$. **88°**
6) إذا كان: $DM = 5y + 2$ و $DK = 3y + 6$، فأوجد KL. **12**
7) برهان، اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$ مستطيل، و W, X, Z نقاط منتصف $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{BC}$ على الترتيب، و $\triangle WXY$، و $\triangle WZY$ مثلثان متطابقا الضلعين، و $\overline{WY}$ قاعدة مشتركة بينهما.
المطلوب: إثبات أن الشكل $WXYZ$ معيّن.
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	1) ضلعان متقابلان في مستطيل.
2) W, X, Z نقاط منتصف $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{DC}$ على الترتيب	2) معطى
3) $\overline{AX} \cong \overline{DZ}$	3) نصفا ضلعين متقابلين.
4) $\angle WAX \cong \angle WDZ$ قائمتان	4) زوايا المستطيل قائمة.
5) $\overline{AW} \cong \overline{DW}$	5) نقطة المنتصف قسمت القطعة المستقيمة جزأين متطابقين.
6) $\triangle WAX \cong \triangle WDZ$	6) SAS
7) $\overline{WX} \cong \overline{WZ}$	7) نتيجة تطابق $\triangle WAX$، $\triangle WDZ$
8) $\triangle WXY$، $\triangle WZY$ متطابقان، الأضلاع، ويشتركان في القاعدة $\overline{WY}$	8) معطى
9) $\overline{WX} \cong \overline{YX}$، $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$	9) ساقا مثلثين متطابقا الضلعين.
10) $\overline{YX} \cong \overline{WX}$، $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$	10) خاصية التعدي للمتطابقين 9، 7
11) الشكل الرباعي فيه 4 أضلاع متطابقة	11) $WXYZ$ معين

هندسة إحداثية: حدّد ما إذا كان $QRST \square$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا، واكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه، ووضّح إجابتك.

8) $T(-1,5)$، $S(-1,1)$، $R(3,1)$، $Q(3,5)$ — **معين. ومستطيل. ومربع؛ جميع الأضلاع متطابقة والقطران متطابقان ومتعامدان.**
9) $T(\ 11,4)$، $S(\ 1,4)$، $R(5,12)$، $Q(\ 5,12)$ — **معين ؛ جميع الأضلاع متطابقة والقطران متعامدان وغير متطابقين.**
10) $T(-8,10)$، $S(2,5)$، $R(4,-6)$، $Q(-6,-1)$ — **معين ؛ جميع الأضلاع متطابقة والقطران متعامدان وغير متطابقين.**
11) $T(-2,6)$، $S(-10,2)$، $R(-6,-8)$، $Q(2,-4)$ — **متوازي أضلاع فقط؛ الأضلاع المتتالية متطابقة، لكن القطرين غير متطابقين وغير متعامدين.**

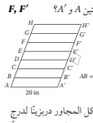
تدريبات حل المسألة (29) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

5-5 تدريبات حلّ المسألة

المعين والمربع

1) رفوف الأطباق، الشكل أدناه يمثل المنظر الجانبي لرفّ أطباق، والذي يبدو على شكل متوازي أضلاع، إذا كانت المسافات بين الرفوف متساوية، فما النقطتان الثابتان تشكّلان معينًا مع النقطتين A' و F؟ F, F'

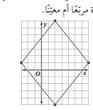


2) درج، يبيّن الشكل المجاور دريزينًا لدرج على شكل معينات متطابقة؛ إذا كان في المعين $ABCD$، إذا كان $m\angle A$ يساوي ضعف $m\angle B$، فأوجد $m\angle C$، $m\angle D$.



$m\angle C = 120°$
$m\angle D = 60°$

3) نوافذ، رُسمت نافذة في المستوى الإحداثيّ أدناه، حدّد ما إذا كانت النافذة مربعًا أم معيّنًا.



افترض أن إحداثيات رؤوس الشكل هي:
$A(7,1)$ ، $B(2,-5)$ ، $B(-3,1)$ ، $D(2,7)$
وميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي $\frac{6}{5}$؛ لذا: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
وميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي $\frac{6}{5}$؛ لذا: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$،
ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان؛ إذن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أن $AC = 10$ ، و $BD = 12$ قطران ليسا متطابقين، فإن $ABCD$ ليس مستطيلًا. وبما أنه ليس مستطيلًا، فإنه ليس مربعًا أيضًا. وبما أن ميل $\overline{AC}$ يساوي 0، وميل $\overline{BD}$ غير معرّف فإن القطرين متعامدان؛ لذا: فالشكل $ABCD \square$ معين.

4) مربعات، قصّت صفيّة مربّعًا على طول قُطره، فحصلت على أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة، ثم لصقت اثنين منها من جهة ضلعيهما الطويلين. بيّن أن الشكل الناتج مربع.

إجابة ممكنة: بما أن أضلاع الشكل الرباعي الناتج متطابقة؛ لأن كلًّا منها هو نصف قطر من قطرَي المربع الكبير المتطابقين، والذين ينصّف كلٌّ منهما الآخر والمتعامدين أيضًا. كما أن قياس كل زاوية من زوايا الشكل الرباعي الناتج هي زاوية قائمة؛ لأن زاويتين منها هما زاويتا القطرين المتعامدين. والزاويتان الأخريان هما من المثلثات الناتجة القائمة، أو التي زاوية كلٍّ منها عن القائمة ($90° = 45° + 45°$) $45°$ مما يجعله مربعًا.

5) تصميم، استعملت هدى 32 من المعيّنات المتطابقة؛ لتكوين تصميم يشبه الزهرة عند كلّ ركنٍ كما في الشكل المجاور.

a) ما قياسات زوايا المعيّنات المتطابقة المستخدمة في التصميم؟ وضح إجابتك.

إجابة ممكنة: $45°$، $135°$، $45°$، $135°$؛ لأن مجموع قياسات الزوايا عند مركز كل ركن (تجمع 8 معينات) يساوي مجموع قياسات الزوايا عند نقطة $360°$؛ أي أن قياس كل زاوية من زوايا المعينات الثمانية حولها $45° = \frac{360°}{8}$ ، كلّ منها تقابل زاوية مساوية لها في القياس بحسب تعريف المعين؛ أي أن قياس كلّ من الزاويتين الأخريين في المعين هو:
$$\frac{360° - (45° - 45°)}{2} = 135°$$

b) ما أنواع الأشكال الرباعية المتّحدة والشكل الرباعي الذي يتوسّط التصميم؟ وضح إجابتك.

جميعها مربعات؛ بما أن شمول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي الذي يتوسط التصميم، يتكون من ضلعين من أضلاع معينين متطابقين، فمثل أضلاعه متطابقة. وبما أن كل زاوية من زواياه هي زاوية من تجمع زوايا عند نقطة يكون قياسها: $90° = (135° + 135°) - 360°$؛ أي أن الشكل مربع. كذلك بما أن طول ضلع كل شكل رباعي من الأشكال المتّحدة يساوي طول ضلع المعين. كذلك فيه زاويتان متطابقتان قياس كل منهما $90°$ ، حيث إنها زاوية من تجمع زوايا عند نقطة يكون قياسها $90° = (135° + 135°) - 360°$ ؛ أي أن كل شكل رباعي منها هو مربع.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 5

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

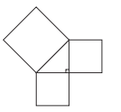
التدريبات الإثرائية (30)　ضمن فوق

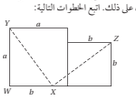
الاسم _____ التاريخ _____

5-5 التدريبات الإثرائية

ألغاز على نظرية فيثاغورس

تصف نظرية فيثاغورس العلاقة بين طولَي الساقين والوتر في أي مثلث قائم الزاوية، بحيث يكون مجموع مساحتَي المربعين المنشأين على الساقين يساوي مساحة المربع المنشأ على الوتر. ويمكنك تكوين لغز التبليط لتوضيح نظرية فيثاغورس بلعبة مشابهة للعبة تانجرام باستعمال خمس قطع، وذلك برسم مربعين متلاصقين، بحيث يمثل طول ضلع كلٍّ منهما طول ساق من ساقَي المثلث، وطول الضلع المكوّن من المربعين بعد قصّهما بطريقة معينة، يمثل طول وتر المثلث القائم؛ أي أن مساحة المربع المكوّن من القطع الخمس تساوي مجموع مساحتَي المربعين، واللغز المبيّن أدناه مثال على ذلك. اتبع الخطوات التالية:





انظر إجابات الطلاب.

1) أنشئ مربّعًا بدقّة، واكتب عليه طول ضلعه a، ثم أنشئ مربّعًا صغيرًا عن يمين المربع الأول، طول ضلعه b على صورة الشكل أعلاه. يتعيّن أن تكون القاعدتان متجاورتين وعلى استقامة واحدة.

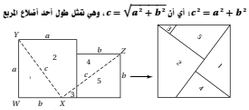
2) عيّن النقطة X على بُعد b وحدةً من الحافّة اليسرى للمربّع الكبير (W)، ثم ارسم قطعتين مستقيمتين؛ الأولى من الرأس العلوي الأيسر للمربّع الأكبر (Y) إلى النقطة X، والثانية من الرأس العلويّ الأيمن للمربّع الأصغر (Z) إلى النقطة X.

3) قصّ القطع الخمس، ثم أعد ترتيبها لتشكّل مربّعًا كبيرًا، وارسم شكلًا يبيّن إجاباتك. **إجابة ممكنة؛ الشكل المعروض أدناه.**

4) تحقق من أن طول كلٍّ من أضلاع المربع يساوي $\sqrt{a^2+b^2}$.

وفق نظرية فيثاغورس في $\triangle YWX$

$c^2 = a^2 + b^2$، أي أن $c = \sqrt{a^2+b^2}$، وهي تمثل طول أحد أضلاع المربع الكبير.



كتاب التمارين (10)　دون ضمن فوق

5 - 5 المعيّن والمربع

في المعين $PRYZ$، إذا كان $m\angle YRZ = 67^\circ$ ، $RK = 5, RY = 13$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

1) KY　12

2) PK　12

3) $m\angle YKZ$　90°

4) $m\angle PZR$　67°

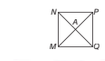
في المعين $MNPQ$، إذا كان $AP = 3$ ، $PQ = 3\sqrt{2}$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

5) AQ　3

6) $m\angle APQ$　45°

7) $m\angle MNP$　90°

8) PM　6





9) كرة الطائرة، يتقسم ملعب كرة الطائرة إلى قسمين متساويين كل منهما عبارة عن مربع. إذا قام أربعة من الأصدقاء بتخطيط ملعب كرة طائرة، فكيف يمكن التحقق من أن كلًّا من قسمي الملعب مربع الشكل باستخدام حبل وشريط قياس فقط.

إجابة ممكنة: يقومون بقياس أطوال أضلاعه، فإذا كانت أضلاعه متساوية فالشكل معين. ثم يقومون بقياس طولي القطرين، فإذا وجدوهما متساويين، فإن الشكل مربع.

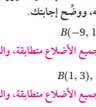


10) برهان، اكتب برهانًا ذا عمودين

المعطيات، $\triangle LGK = \triangle MJK$

$GHJK$ متوازي أضلاع

المطلوب، $GHJK$ معيّن



العبارات	المبررات
1) $\triangle LGK \cong \triangle MJK$	1) معطى
2) $GHJK$ متوازي أضلاع	2)
3) $\overline{KG} \cong \overline{KJ}$	3) تنصيف أحدهما الآخر
4) $\overline{KJ} \cong \overline{GH} \cong \overline{KG} \cong \overline{JH}$	4) كل ضلعين متطابقان في $\square$ لهما متطابقان
5) $\overline{KG} \cong \overline{JH} \cong \overline{GH} \cong \overline{JK}$	5) بالتعويض
6) $GHJK$ معين	6) بحسب تعريف المعين

هندسة إحداثية، حدّد ما إذا كان $\square BEFG$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه، ووضّح إجابتك.

11) $B(-9, 1), E(2, 3), F(12, -2), G(1, -4)$

معين ومستطيل ومربع، إجابة ممكنة: جميع الأضلاع متطابقة، والقطران متطابقان ومتعامدان.

12) $B(1, 3), E(7, -3), F(1, -9), G(-5, -3)$

معين ومستطيل ومربع، إجابة ممكنة: جميع الأضلاع متطابقة، والقطران متطابقان ومتعامدان.

13) $B(-4, -5), E(1, -5), F(-2, -1), G(-7, -1)$

معين، إجابة ممكنة: جميع الأضلاع متطابقة، والقطران متعامدان وغير متطابقين.

5-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-6

استعمال خصائص أنواع خاصة من متوازي الأضلاع.

الدرس 5-6

تعرّف خصائص شبه المنحرف وتطبيقها.

تعرّف خصائص شكل الطائرة الورقيّة وتطبيقها.

ما بعد الدرس 5-6

استعمال التبرير الاستنتاجي لإثبات صحة عبارة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- ما الخصائص التي تميِّز شبه المنحرف عن متوازي الأضلاع؟ لشبه المنحرف ضلعان فقط متوازيان.
- لماذا تكون منصات الوثب أكثر ثباتًا عندما تكون جوانبها على شكل شبه منحرف مما لو كان على شكل مستطيل؟ إحدى القاعدتين أكثر اتساعًا من الأخرى؛ لذلك تكون إمكانية ميلها عندما تكون على شكل شبه منحرف أقل مما لو كانت على شكل مستطيل بالارتفاع نفسه.
- انظر إلى صناديق القفز الأربع المتداخلة في الشكل. ما التخمينات التي يمكنك وضعها حول زوايا أشكال شبه المنحرف الظاهرة في المنظر الجانبي لكل صندوق؟ الزوايا المتناظرة لأشباه المنحرفات الأربع ستكون مطابقة لزوايا القاعدة العليا للشكل أدناه. لذلك فأشباه المنحرفات المكونة لأطراف صندوق القفز ستكون متشابهة.

مصادر الدرس 5-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (56)	• تنويع التعليم، ص (58, 56, 54)	• تنويع التعليم، ص (58, 54)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (13)	• كتاب التمارين، ص (13)	• كتاب التمارين، ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص أنواع خاصة من متوازي الأضلاع.

(الدرس 5-5)

والآن:

- أتعرّف خصائص شبه المنحرف وأطبّقها.
- أتعرّف خصائص شكل الطائرة الورقيّة وأطبّقها.

المفردات:

شبه المنحرف trapezoid

قاعدتا شبه المنحرف bases

ساقا شبه المنحرف legs of a trapezoid

زاويتا القاعدة base angles

شبه المنحرف المتطابق الساقين isosceles trapezoid

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف midsegment of a trapezoid

شكل الطائرة الورقيّة kite

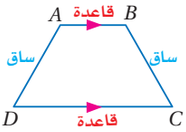
www.obeikaneducation.com

5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة
Trapezoid and Kite



لماذا؟

تستعمل في رياضات القفز، صناديق ذات أجزاء متداخلة مصنوعة من الإسفنج ذي الضغط العالي، وتتخذ منصّات وثب ودرجات صعود، وتمثّل جوانب كل من الأجزاء شبه منحرف.



خصائص شبه المنحرف: **شبه المنحرف** هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يُسميان **قاعدتي شبه المنحرف**. ويُسمّى الضلعان غير المتوازيين **ساقي شبه المنحرف**. و **زاويتا القاعدة** مكوّن كل منهما من قاعدة وأحد ضلعي الساقين. ففي شبه المنحرف $ABCD$ المبيَّن جانبًا، $\angle A, \angle B$ زاويتا القاعدة $\overline{AB}$، وكذلك $\angle C, \angle D$ زاويتا القاعدة $\overline{DC}$.

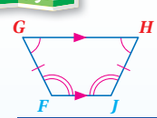
إذا كان ساقا شبه المنحرف متطابقين فإنه يسمى **شبه منحرف متطابق الساقين**.

نظريات

أضف إلى مطويتك

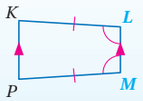
شبه المنحرف المتطابق الساقين

5.21 إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإنّ زاويتي كل قاعدة متطابقتان.



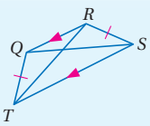
مثال: إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإنّ $\angle F \cong \angle J$, $\angle G \cong \angle H$.

5.22 إذا كانت زاويتا قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين، فإنّه متطابق الساقين.



مثال: إذا كان $KLMP$ شبه منحرف، فيه $\angle L \cong \angle M$ فإنه متطابق الساقين.

5.23 يكون شبه المنحرف متطابق الساقين، إذا وفقط إذا كان قطراه متطابقين.

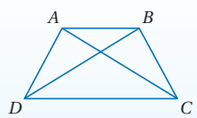


مثال: إذا كان شبه المنحرف $QRST$ متطابق الساقين، فإنّ $\overline{RT} \cong \overline{QS}$. وكذلك إذا كان $QRST$ شبه منحرف، فيه $\overline{RT} \cong \overline{QS}$ فإنه متطابق الساقين.

سوف تبرهن النظريات 5.23 , 5.22 , 5.21 في الأسئلة 19, 20, 21 على الترتيب.

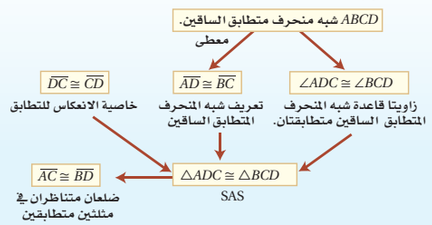
برهان

الحالة الأولى من النظريّة 5.23



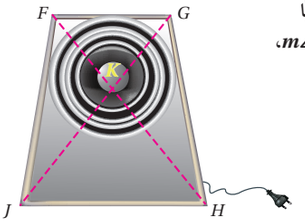
المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$



مثال 1 من واقع الحياة استعمال خصائص شبه المنحرف المتطابق الساقين

مكبرات الصوت: المنظر الأمامي لمكبِّر الصوت المبيّن جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $m\angle FJH = 85°$، $FK = 8\text{ in}, JG = 19\text{ in}$، فأوجد كلًّا مما يأتي :



a $m\angle FGH$

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ $\angle FJH$ و $\angle GHJ$ زاويتا قاعدة متطابقتان؛ لذا فإن $m\angle GHJ = m\angle FJH = 85°$.

وبما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف، فإنّ $\overline{JH} \parallel \overline{FG}$.

$m\angle FGH + m\angle GHJ = 180°$	نظرية الزاويتين المتحالفتين
$m\angle FGH + 85° = 180°$	بالتعويض
$m\angle FGH = 95°$	بطرح 85 من كلا الطرفين

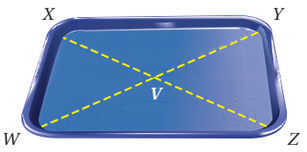
b KH

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ متطابقان.

$FH = JG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$FK + KH = JG$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$8 + KH = 19$	بالتعويض
$KH = 11\text{ in}$	بطرح 8 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

1) مطاعم: لاستغلال مساحة الطاولات المربعة، تستعمل في مطعمٍ أطباقٌ على شكل شبه منحرف كما في الشكل المجاور. إذا كان $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين، وكان $WV = 15\text{ cm}, m\angle YZW = 85°$، $VY = 10\text{ cm}$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

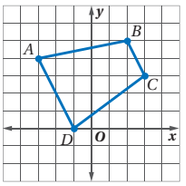


A $m\angle XWZ$ $85°$ **B** $m\angle WXY$ $105°$ **C** XZ 25 cm

يمكنك استعمال الهندسة الإحداثيّة لتحديد ما إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين أم لا.

مثال 2 شبه المنحرف المتطابق الساقين والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-3, 4), B(2, 5), C(3, 3), D(-1, 0)$. بيّن أن $ABCD$ شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضِّح إجابتك.



ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في مستوى إحداثي.

الخطوة 1: استعمل صيغة الميل لمقارنة ميلي الضلعين المتقابلين $\overline{BC}, \overline{AD}$ وكذلك الضلعين المتقابلين $\overline{AB}, \overline{DC}$. فالشكل الرباعي يكون شبه منحرف إذا كان فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيين.

إرشادات للدراسة

شبه المنحرف المتطابق الساقين: تكون زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين فقط إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين.



الربط مع الحياة

مكبّرات الصوت هي مضخّمات تُكثّف الأمواج الصوتية حتى تصبح مسموعة بدرجة أكبر. ويحتوي كل من المذياع والتلفاز والحاسوب مضخمات صوتية.

خصائص شبه المنحرف

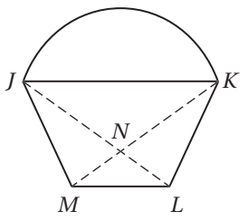
الأمثلة 1-3 تبيّن كيفية استعمال النظريات والخصائص لإثبات أو معرفة أن شكلًا هندسيًّا ما هو شبه منحرف، كذلك استعمالها في إيجاد قياسات مجهولة في شبه منحرف.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **سلّة:** كل جانب للسلّة المبيّنة أدناه شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $m\angle JML = 130°$ ، $KN = 6.7\text{ ft}$ و $MN = 3.6\text{ ft}$، فأوجد كل قياس مما يلي:



a $m\angle MJK$ $50°$

b JL 10.3 ft

إرشادات للمعلم الجديد

شبه المنحرف: يستعمل في المطاعم أطباق على شكل شبه منحرف؛ لاستغلال مساحات الطاولات المربعة أو المستطيلة الشكل.

الدرس 6-5 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية 53

مثال إضافي

2 **هندسة إحداثية:** رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(5, 1)$، $B(-3, -1)$، $C(-2, 3)$، $D(2, 4)$.
بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضِّح إجابتك.

الخطوة 1: ميل $\overline{AB}$ يساوي $\frac{1}{4}$،
ميل $\overline{CD}$ يساوي $\frac{1}{4}$،
ميل $\overline{AD}$ يساوي -1،
ميل $\overline{BC}$ يساوي 4،
وبما أن ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ متساويان، فإنّ $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$، وبما أن ميلي $\overline{AD}$ وَ $\overline{BC}$ غير متساويين، فإن $\overline{BC} \nparallel \overline{AD}$ أي أن ضلعين فقط في الشكل متوازيان. لذلك فالشكل الرباعي $ABCD$ شبه منحرف.

الخطوة 2: $BC = \sqrt{17}$،
$AD = 3\sqrt{2}$، وبما أن الساقين ليسا متطابقين فإن شبه المنحرف ليس متطابق الساقين.

تنبيه!

هندسة إحداثية: عند استعمال صيغة الميل أو المسافة بين نقطتين؛ انتبه إلى إشارات الأعداد، وتأكد أيضًا من استعمال قيم x و y بالترتيب الصحيح.

الضلعان المتقابلان $\overline{BC}$, $\overline{AD}$:

ميل $\overline{BC}$: $\frac{3-5}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{0-4}{-1-(-3)} = \frac{-4}{2} = -2$

بما أن ميلي $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ متساويان، فإنّ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

الضلعان المتقابلان $\overline{AB}$, $\overline{DC}$:

ميل $\overline{AB}$: $\frac{5-4}{2-(-3)} = \frac{1}{5}$

ميل $\overline{DC}$: $\frac{0-3}{-1-3} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

بما أنّ ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ ليسا متساويين، فإنّ $\overline{DC} \nparallel \overline{AB}$. وبما أن $ABCD$ فيه ضلعان فقط متوازيان، فإنّه شبه منحرف.

الخطوة 2: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي الساقين $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ وتحديد ما إذا كان شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

$$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$DC = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

بما أنّ $AB \neq DC$ ، فإنّ شبه المنحرف $ABCD$ ليس متطابق الساقين.

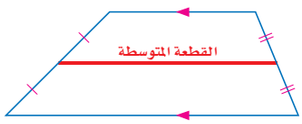
قراءة الرياضيات

رمز التوازي: تذكّر أنّ الرمز $\parallel$ يعني يوازي، والرمز $\nparallel$ يعني لا يوازي.

تحقق من فهمك

2) رؤوس الشكل الرباعي $QRST$ هي $Q(-8, -4)$, $R(0, 8)$, $S(6, 8)$, $T(-6, -10)$.
بيّن أن $QRST$ شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضِّح إجابتك. **شبه منحرف ليس متطابق الساقين**

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف هي قطعة مستقيمة تصل بين منتصفي ساقيه. وتبين النظرية الآتية العلاقة بين القطعة المتوسطة وقاعدتي شبه المنحرف.

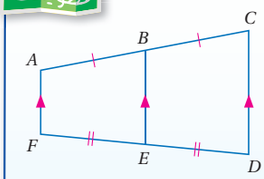


قراءة الرياضيات

القطعة المتوسطة: تسمى القطعة المتوسطة لشبه المنحرف أيضًا القطعة المنصّفة.

نظرية 5.24 نظريّة القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

أضف إلى مطويتك



القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًّا من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

مثال: **إذا كانت $\overline{BE}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $ACDF$، فإنّ $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$, $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$، $BE = \frac{1}{2}(AF + CD)$.**

سوف تبرهن النظريّة 5.24 في السؤال 25 .

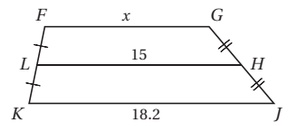
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: توجد عدّة كلمات تحمل أكثر من معنى في الرياضيات، فكلمة متوسط يمكن أن تطبّق في الهندسة أو الإحصاء، لذا اطلب إلى الطلاب مقارنة معاني "متوسط" عندما تطبق في المثلث وفي شبه المنحرف. واطلب إليهم أيضًا أن يكتبوا معنى كلمة متوسط لمجموعة من الأعداد؛ فالقطعة المتوسطة لمثلث أو شبه منحرف تربط بين نقطة منتصف قطعة مستقيمة ونقطة أخرى على الشكل، إلا أن الفرق بينهما هو أن القطعة المتوسطة لمثلث أحد طرفيها رأس المثلث، أما بالنسبة إلى شبه المنحرف فإنها تصل بين منتصفي الساقين، أما المتوسط لمجموعة من الأعداد فهو مجموعها مقسومًا على عددها.

مثال 3 من اختبار

في الشكل المجاور، $\overline{LH}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟



اقرأ سؤال الإختبار

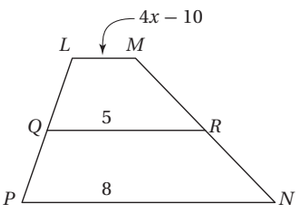
أُعطيت في السؤال طول القطعة المتوسطة لشبه المنحرف وطول إحدى قاعدتيه. ويطلب إليك إيجاد طول القاعدة الأخرى.

حل سؤال الاختبار

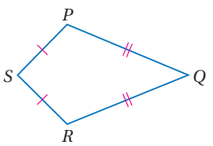
$LH = \frac{1}{2}(FG + KJ)$	نظرية القطعة المتوسطة لشبه المنحرف
$15 = \frac{1}{2}(x + 18.2)$	بالتعويض
$30 = x + 18.2$	بضرب كلا الطرفين في 2
$11.8 = x$	بطرح 18.2 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

3) في الشكل أدناه، $\overline{QR}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $LMNP$. ما قيمة x؟ **3**

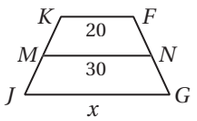


خصائص شكل الطائرة الورقيّة: **شكل الطائرة الورقيّة** هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة. وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين في شكل الطائرة الورقيّة ليسا متطابقين ولا متوازيين.



مثال إضافي

3 مثال من اختبار:
في الشكل أدناه، $\overline{MN}$ هي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟ 40



إرشادات للمعلم الجديد

شبه المنحرف: إذا عُرِّف شبه المنحرف على أنّه شكل رباعي فيه ضلعان على الأقل متوازيان، فإن متوازي الأضلاع يكون بحسب هذا التعريف حالة خاصّة لشبه المنحرف.

التعليم باستعمال التقنيات

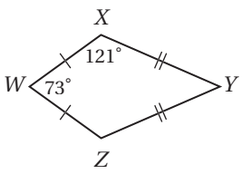
السبورة التفاعلية: أنشئ جدولًا من 7 أعمدة، وعنونها كالآتي: شكل رباعي، متوازي أضلاع، مستطيل، معين، مربع، شكل طائرة ورقية، شبه منحرف. اعرض أمثلة لكل منها على السبورة، واختر طلابًا لسحب كل شكل إلى العمود الذي يحمل الاسم الأكثر تحديدًا، وساعد الطلاب على تحديد العمود الأنسب إذا اعتقدوا أنّ شكلًا ما يمكن وضعه في أكثر من عمود.

خصائص شكل الطائرة الورقيّة

المثال 4 يبين كيفية استعمال النظريات والخصائص في إيجاد قياسات مجهولة في شكل الطائرة الورقية.

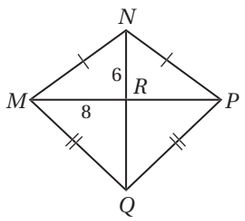
مثال إضافي

4 **a)** إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle XYZ$.



45°

b) إذا كان $MNPQ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد NP.



10

إرشادات للمعلم الجديد

شكل الطائرة الورقيّة: توجد خاصيتان إضافيتان لشكل الطائرة الورقيّة:

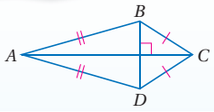
- القطر الذي يصل رأسي الزاويتين غير المتطابقتين يكون دائمًا عمودًا منصّفًا للقطر الذي يصل رأسي الزاويتين المتطابقتين.
- القطر الذي يصل رأسي الزاويتين غير المتطابقتين ينصّف كلًّا منهما.

نظريات

شكل الطائرة الورقيّة

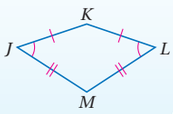
أضف إلى مطويتك

5.25 قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.



مثال: بما أن $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

5.26 يوجد في شكل الطائرة الورقية زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.



مثال: بما أن $JKLM$ شكل طائرة ورقيّة، فإنّ $\angle K \ncong \angle M$, $\angle J \cong \angle L$.

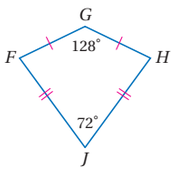
سوف تبرهن النظريتين **5.26** , **5.25** في السؤالين **22**, **23** على الترتيب.

يمكنك استعمال النظريتين أعلاه ونظرية فيثاغورس ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع لإيجاد القياسات المجهولة في شكل الطائرة الورقيّة.

مثال 4

استعمال خصائص شكل الطائرة الورقيّة

a) إذا كان $FGHJ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle F$.

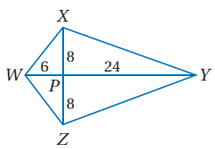


في شكل الطائرة الورقيّة زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، وبما أن $\angle J \ncong \angle G$ ، فإنّ $\angle F \cong \angle H$؛ لذلك $m\angle F = m\angle H$.

اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle F$.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H + m\angle J = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle F + 128° + m\angle F + 72° = 360°$	بالتعويض
$2m\angle F + 200° = 360°$	بالتبسيط
$2m\angle F = 160°$	بطرح 200 من كلا الطرفين
$m\angle F = 80°$	بقسمة كلا الطرفين على 2

b) إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد ZY .



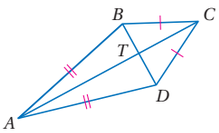
بما أن قطري شكل الطائرة الورقيّة متعامدان فإنهما يقسمانه إلى أربعة مثلثات قائمة الزاوية. استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد ZY ، وهو طول وتر المثلث القائم الزاوية $\triangle YPZ$.

$PZ^2 + PY^2 = ZY^2$	نظرية فيثاغورس
$8^2 + 24^2 = ZY^2$	بالتعويض
$640 = ZY^2$	بالتبسيط
$\sqrt{640} = ZY$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين
$8\sqrt{10} = ZY$	بالتبسيط

تحقق من فهمك

4A) إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقية، فيه: $m\angle BAD = 38°$, $m\angle BCD = 50°$ ، فأوجد $m\angle ADC$. **136°**

4B) إذا كان $TC = 8$, $BT = 5$ ، فأوجد CD. $\sqrt{89}$



الربط مع الحياة

أقصى سرعة مسجّلة لطائرة ورقيّة 120 mi/h.
وأقصى ارتفاع مسجّل لطائرة ورقيّة 12471 ft.



تنويع التعليم

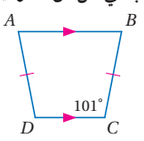
دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيّون: يمكن أن يتحقق الطلاب من الأضلاع المتطابقة وغير المتطابقة، وكذلك الزوايا المتطابقة وغير المتطابقة لشكل الطائرة الورقية. اطلب إلى الطلاب طي قطعة ورق من المنتصف، واطلب إليهم قصها بشكل قطريٍّ بأي طول مبتدئين من أحد طرفي خط الطي، وتكرار العملية مبتدئين من الطرف الآخر لخط الطي حتى الوصول إلى نهاية القص الأول. ويمكن الآن أن يقارن الطلاب بين الزوايا والأضلاع المتطابقة وغير المتطابقة في الشكل الناتج. وأخيرًا اطلب إلى الطلاب قص أشكال طائرات ورقية ذات قياسات مختلفة للتحقق من أن هذه الخصائص صحيحة دائمًا.

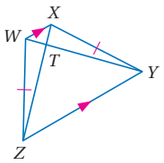
تأكد

المثال 1 أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle D$ **101°**



2) WT، إذا كان: $ZX = 20, TY = 15$ **5**

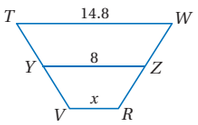


المثال 2 **هندسة إحداثيّة:** رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-4,-1), B(-2,3), C(3,3), D(5,-1)$.

3) بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف. $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$ ، $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ؛ إذن $ABCD$ شبه منحرف .

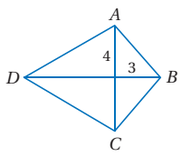
4) حدّد ما إذا كان $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين ؟ وضّح إجابتك.
شبه منحرف متطابق الساقين ؛ لأن $AB = 2\sqrt{5} = CD$

المثال 3 **5)** **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور: $\overline{YZ}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $TWRV$. أوجد قيمة x. **1.2**

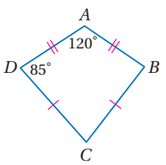


المثال 4 إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

6) AB **5**



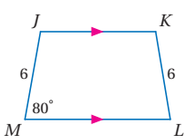
7) $m\angle C$ **70°**



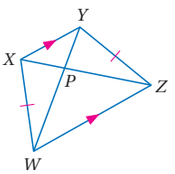
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

8) $m\angle K$ **100°**



9) PW، إذا كان: $XZ = 18, PY = 3$ **15**



المثال 2 **هندسة إحداثيّة:** بيّن أن الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين؟ **13–10)** انظر الهامش.

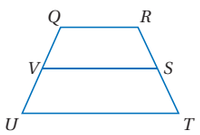
10) $A(-2,5), B(-3,1), C(6,1), D(3,5)$

11) $J(-4,-6), K(6,2), L(1,3), M(-4,-1)$

12) $Q(2,5), R(-2,1), S(-1,-6), T(9,4)$

13) $W(-5,-1), X(-2,2), Y(3,1), Z(5,-3)$

المثال 3 في الشكل المجاور، S,V نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRTU$.



14) إذا كان $UT = 22$, $QR = 12$ ، فأوجد VS. **17**

15) إذا كان $UT = 12$, $VS = 9$ ، فأوجد QR. **6**

16) إذا كان $VS = 11$, $RQ = 5$ ، فأوجد UT. **17**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 7–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزليّة للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

10) $ABCD$ شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $AB = \sqrt{17}$, $CD = 5$.

11) $JKLM$ شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $KL = \sqrt{26}$, $JM = 5$.

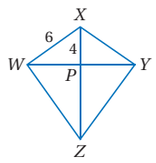
12) $QRST$ شبه منحرف متطابق الساقين؛ لأن $RS = 5\sqrt{2} = QT$.

13) $WXYZ$ شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $YZ = 2\sqrt{5}$, $WX = 3\sqrt{2}$.

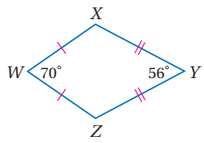
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	18-8 ، 47 ، 60-49
ضمن ضمن المتوسط	17-9 فردي ، 45–19 فردي ، 47 ، 60-49
فوق فوق المتوسط	57-19 ، (اختياري: 60-58)

المثال 4 إذا كان ***WXYZ*** شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل مما يأتي :



17) WP $2\sqrt{5}$

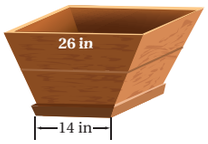


18) $m\angle X$ 117°

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريات الآتية : **28–33) انظر ملحق الإجابات**

19) النظريّة 5.21 **20)** النظريّة 5.22 **21)** النظريّة 5.23

22) النظريّة 5.25 **23)** النظريّة 5.26



24) نباتات: اشترى مشاري أصيصًا زراعيًّا أوجهه الأربعة على شكل شبه منحرف أبعاده كما في الشكل المجاور. إذا أراد مشاري وضع رف أفقي عند منتصف الأصيص؛ لتستند إليه النبتة، فكم يكون عرض هذا الرفّ؟ **20 in.**

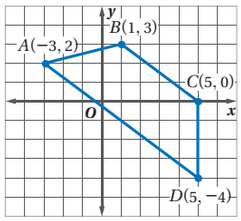


الربط مع الحياة

تمتاز الأصص الفخارية بالمسامية والتهوية وصرف المياه الزائدة، ما يسمح بنمو جيد للجذور، وهي من أفضل الأصص الزراعية.

25) برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا للنظريّة 5.24. **انظر ملحق الإجابات.**

26) هندسة إحداثيّة: استعن بالشكل الرباعي $ABCD$ المجاور.

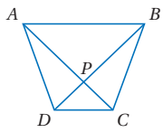


a) بيِّن أن $ABCD$ شبه منحرف. وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين. وضّح إجابتك. **انظر الهامش.**

b) هل القطعة المتوسطة محتواة في المستقيم الذي معادلته $y = -x + 1$؟ برّر إجابتك. **انظر الهامش.**

c) أوجد طول القطعة المتوسطة. **7.5 وحدات**

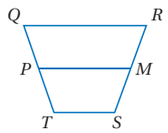
جبر: في الشكل المجاور، ***ABCD*** شبه منحرف. أوجد قيمة ***x*** بحيث يكون متطابق الساقين في كلٍّ ممَّا يأتي:



27) إذا كان $AC = 3x - 7$, $BD = 2x + 8$ **15**

28) إذا كان $m\angle ABC = (4x + 11)^\circ$, $m\angle DAB = (2x + 33)^\circ$ **11**

جبر: في الشكل المجاور، ***P*** , ***M*** نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف ***QRST*** .



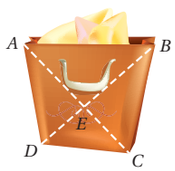
29) إذا كان $QR = 16, PM = 12, TS = 4x$ ، فأوجد قيمة x. **2**

30) إذا كان $TS = 2x, PM = 20, QR = 6x$ ، فأوجد قيمة x. **5**

31) إذا كان $PM = 2x, QR = 3x, TS = 10$ ، فأوجد PM. **20**

32) إذا كان $TS = 2x + 2, QR = 5x + 3, PM = 13$ ، فأوجد TS. **8**

تسوّق: الوجه الجانبي لحقيبة التسوّق المبيّنة جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $EC = 9$ in, $DB = 19$ in ، $m\angle EBC = 35^\circ$, $m\angle ABE = 40^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



33) AE **10 in** **34)** AC **19 in**

35) $m\angle BCD$ 105° **36)** $m\angle EDC$ 40°

إجابات:

26a) ميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{-3}{4}$،
ميل $\overline{AD}$ يساوي $\frac{-3}{4}$،
ميل $\overline{AB}$ يساوي $\frac{1}{4}$ ،
ميل $\overline{CD}$ قيمة غير معرّفة.
وبما أن ميلي $\overline{BC}$ وَ $\overline{AD}$ متساويان
فإن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$، وبما أن ميلي $\overline{AB}$
وَ $\overline{CD}$ غير متساويين، فإن $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$
أي أن ضلعين فقط متوازيان،
فالشكل $ABCD$ شبه منحرف،
ولكنه غير متطابق الساقين لأن
$AB = \sqrt{17}$ و $CD = 4$.

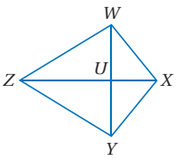
26b) لا؛ لأن هذا المستقيم لا يوازي
قاعدتي شبه المنحرف، حيث إن ميل
كل من القاعدتين $-\frac{3}{4}$، على حين
أن ميل المستقيم $y = -x + 1$
يساوي -1 .

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: تعلم الطلاب سابقًا بعض صيغ حساب المساحة. وبناءً على ذلك اطلب إليهم وصف كيف أن معرفة صيغة مساحة المستطيل كافية لاشتقاق صيغ مساحة المثلث والأشكال الرباعية الأخرى. ويمكنهم استعمال أمثلة لتوضيح تقسيم المضلعات، وإيجاد المساحات الجزئية والمساحات الكلية للمضلعات.

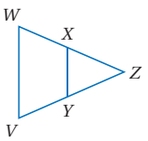
جبر: في الشكل المجاور، **WXYZ** شكل طائرة ورقيّة.



37) إذا كان $m\angle WXY = 120^\circ$, $m\angle WZY = (4x)^\circ$، $m\angle ZWX = (10x)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYX$. انظر الهامش.

38) إذا كان $m\angle WXY = (13x + 24)^\circ$, $m\angle WZY = 35^\circ$، $m\angle ZWX = (13x + 14)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYX$. **105°**

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.



39) **المعطيات:** $\angle W \cong \angle Z$, $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$، $\overline{WZ}$ تنصّف كلًّا من $\overline{ZV}$ و $\overline{XY}$.

المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين. انظر ملحق الإجابات.

40) طائرة ورقيّة: استعن بالطائرة الورقيّة في الشكل المجاور. اكتب باستعمال خصائص شكل الطائرة الورقية برهانًا ذا عمودين لبيان أنّ $\triangle MNR$ يطابق $\triangle PNR$. انظر الهامش.



41) أشكال فن: ارسم شكل فن يوضح جميع الأشكال الرباعيّة متضمنًا شبه المنحرف المتطابق الساقين، وشكل الطائرة الورقيّة وعموم الأشكال الرباعيّة التي لا أسماء خاصة لها. انظر ملحق الإجابات.

هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، أم متوازي أضلاع، أم مستطيلًا، أم مربعًا، أم معينًا، أم هو شكل رباعي فحسب؟ اختر أكثر المسمّيات تحديدًا، ووضّح إجابتك.

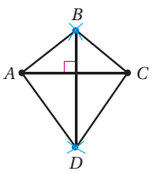
42) $A(-1, 4), B(2, 6), C(3, 3), D(0, 1)$

43) $W(-3, 4), X(3, 4), Y(5, 3), Z(-5, 1)$

42) متوازي أضلاع؛ إجابة ممكنة: لأن أضلاعه المتقابلة متطابقة، ولا توجد زوايا قوائم، وأضلاعه المتتالية غير متطابقة.

43) شكل رباعي ليس فيه أضلاع متوازية.

44) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة إحدى خصائص شكل الطائرة الورقيّة.



a) هندسيًّا: ارسم قطعة مستقيمة. وأنشئ عمودًا منصفًا لها لا تنصفه القطعة المستقيمة ولا تساويه طولًا. ثم صِلْ أطراف القطعتين المستقيمتين لتكوّن الشكل الرباعي $ABCD$ كما في الشكل المجاور. كرّر هذه العملية مرتين، وسمِّ الشكلين الرباعيين الجديدين $WXYZ$, $PQRS$. انظر الهامش.

b) جدوليًّا: انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول
$ABCD$	$\overline{AB}$	0.8 cm	$\overline{BC}$	0.8 cm	$\overline{CD}$	1.6 cm	$\overline{DA}$	1.6 cm
$PQRS$	$\overline{PQ}$	1.4 cm	$\overline{QR}$	1.4 cm	$\overline{RS}$	1.8 cm	$\overline{SP}$	1.8 cm
$WXYZ$	$\overline{WX}$	0.4 cm	$\overline{XY}$	0.4 cm	$\overline{YZ}$	1.5 cm	$\overline{ZW}$	1.5 cm

44c) إذا كان قطرا شكل رباعي متعامدين وليسا متطابقين، وأحدهما فقط ينصّف الآخر، فإن الشكل الرباعي هو شكل طائرة ورقيّة.

c) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول الشكل الرباعي الذي قطراه متعامدان وغير متطابقين، وأحدهما فقط ينصّف الآخر.

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل من العبارتين الآتيتين:

45) قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان. انظر ملحق الإجابات.

46) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف المتطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين. انظر ملحق الإجابات.

تنبيه لحل سؤال

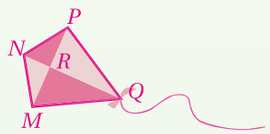
المسطرة: يتطلب السؤال 44 استعمال مسطرة.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 44، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسيّة والجدول والأوصاف اللفظيّة لاستقصاء خصائص شكل الطائرة الورقيّة.

إجابات:

40) المعطيات: $MNPQ$ شكل طائرة ورقيّة

المطلوب: $\triangle MNR \cong \triangle PNR$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $MNPQ$ شكل طائرة ورقيّة.	1) معطى
2) $\overline{NM} \cong \overline{NP}$, $\overline{MQ} \cong \overline{PQ}$	2) تعريف شكل الطائرة الورقية
3) $\overline{QN} \cong \overline{QN}$	3) خاصية الانعكاس
4) $\triangle NMQ \cong \triangle NPQ$	4) نظرية التشابه SSS
5) $\angle MNR \cong \angle PNR$	5) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
6) $\overline{NR} \cong \overline{NR}$	6) خاصيّة الانعكاس
7) $\triangle MNR \cong \triangle PNR$	7) SAS

37) $\angle ZWX \cong \angle ZYX$ (يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، نظرية 5.26)؛ لذا

$m\angle ZYX = m\angle ZWX = (10x)^\circ$

وعليه فإن: $m\angle ZWX + m\angle WXY + m\angle ZYX + m\angle WZY = 360^\circ$

(مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي)، وبالتعويض ينتج:

$(10x)^\circ + 120^\circ + (10x)^\circ + (4x)^\circ = 360^\circ$

$(24x)^\circ + 120^\circ = 360^\circ$

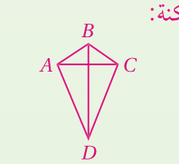
$x = 10$؛

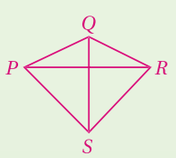
لذا $m\angle ZYX = (10x)^\circ$

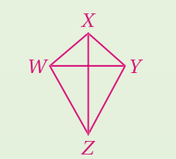
$= 10\ (10^\circ)$

$= 100^\circ$

44a) إجابة ممكنة:







4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب وصف كل نوع من الأشكال الرباعيّة التي درسوها في هذا الفصل، وأن يكتبوا فقرة توضّح الفرق بين متوازي الأضلاع وشبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة، وأن يميّزوا أيضًا بين المستطيل والمعين والمربّع.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 5–6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (12).

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 47، يجب أن يدرك الطلاب أنّ شكل الطائرة الورقيّة يحتوي زوجًا واحدًا فقط من الزوايا المتطابقة، وبما أن $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ و$\overline{CB} \cong \overline{CD}$، فإنّ $\angle B \cong \angle D$ وَ $m\angle A = 115°$، وبذلك تكون إجابة عادل هي الصحيحة.

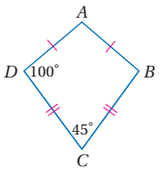
إجابات:

49) غير صحيحة أبدًا، أضلاع المربع الأربعة متطابقة، بينما لا يوجد ضلعان متقابلان في شكل الطائرة الورقية متطابقان.

51) كل منها شكل رباعي له أربعة أضلاع؛ لشبه المنحرف ضلعان فقط متقابلان متوازيان، وإذا كان الساقان متطابقين يكون شبه المنحرف متطابق الساقين، ويكون قطراه متطابقين وغير متعامدين.
أما شكل الطائرة الورقية، فتتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة، وقطرا شكل الطائرة الورقية غير متطابقين لكنهما متعامدان.

مسائل مهارات التفكير العليا

47) اكتشف الخطأ: أوجد كل من عادل وسعيد $m\angle A$ في شكل الطائرة الورقيّة $ABCD$ المجاور . هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضِّح إجابتك.



عادل	سعيد
$m\angle A = 115°$	$m\angle A = 45°$

عادل؛
$m\angle D = m\angle B$ ؛ لذا
$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360°$
$m\angle A + 100° + 45° + 100° = 360°$
أي أنّ: $m\angle A = 115°$

48) تحدٍّ: إذا كان الضلعان المتوازيان في شبه منحرف محتويين في المستقيمين $y = x + 4, y = x - 8$، فما معادلة المستقيم الذي يحتوي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف؟ $y = x - 2$

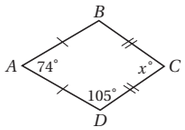
49) تبرير: هل العبارة "*المربع هو أيضًا شكل طائرة ورقيّة*" صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش.

50) مسألة مفتوحة: ارسم شبه المنحرف $ABCD$، وشبه المنحرف $FGHJ$ غير المتطابقين وفيهما $\overline{AC} \cong \overline{FH}$ و $\overline{BD} \cong \overline{GJ}$. انظر ملحق الإجابات.

51) اكتب: قارن بين خصائص كلٍّ من: شبه المنحرف وشبه المنحرف المتطابق الساقين وشكل الطائرة الورقيّة. انظر الهامش.

تدريب على اختبار

52) إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة، فما قياس $\angle C$؟ $76°$

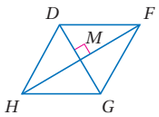


53) ما الشكل الذي يمكن أن يكون مثالًا مضادًا للتخمين الآتي؟ **D**
إذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإنه مستطيل .

A المربّع
B المعين
C متوازي الأضلاع
D شبه المنحرف المتطابق الساقين

مراجعة تراكمية

جبر: استعن بالمعين ***DFGH*** فيما يأتي: (الدرس 5-5)

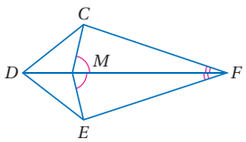


54) إذا كان $m\angle FGH = 118°$، فأوجد $m\angle MHG$. $31°$

55) إذا كان $MG = x + 6, DM = 4x - 3$، فأوجد DG. 18

56) إذا كان $HD = 15, HM = 12$، فأوجد MG. 9

57) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 5-3)



المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF$ ، $\angle CFM \cong \angle EFM$
المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$
انظر ملحق الإجابات.

استعد للدرس اللاحق

أوجد ميل القطعة المستقيمة المعطاة إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

58) $(x, 4y), (-x, 4y)$ 0

59) $(-x, 5x), (0, 6x)$ 1

60) $(y, x), (y, y)$ غير معرف



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 5

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

الاسم _____ التاريخ _____

5-6 تدريبات إعادة التعليم

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

خصائص شبه المنحرف:

شبه المنحرف شكل رباعيّ فيه ضلعان فقط متوازيان، يسمّى كلٌّ منهما **قاعدة شبه المنحرف**، ويُسمّى الضلعان غير المتوازيين **ساقي شبه المنحرف**. وإذا كان الساقان متطابقين، فإن شبه المنحرف يُسمّى **متطابق الساقين**.

5.21	إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإن زاويتي كل قاعدة متطابقتان.	إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإن: $\angle H \cong \angle J$, $\angle F \cong \angle G$
5.22	إذا كانت زاويتا قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين، فإنه يُسمّى متطابق الساقين.	إذا كانت $\angle H \cong \angle G$ فإن $FGHJ$ شبه المنحرف متطابق الساقين.
5.23	يكون شبه المنحرف متطابق الساقين، إذا وفقط كان قطراه متطابقين.	إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإن $\overline{FG} \cong \overline{JH}$، وإذا كان $\overline{FH} \cong \overline{JG}$، فإن $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين.

مثال بيّن أن الشكل الرباعي $ABCD$ الذي رؤوسه: $A(-3,-1), B(-1,3), C(2,3), D(4,-1)$ هو شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين أم لا، ووضح إجابتك.

ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{3-(-1)}{-1-(-3)} = \frac{4}{2} = 2$ ، ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{-1-(-1)}{4-(-3)} = -\frac{0}{7} = 0$

ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{3-3}{2-(-1)} = \frac{0}{3} = 0$ ، ميل $\overline{CD}$: $m = \frac{-1-3}{4-2} = -\frac{4}{2} = -2$

بما أن فيه ضلعين متوازيين فقط هما $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$، فإن الشكل $ABCD$ شبه منحرف.

$AB = \sqrt{(-3-(-1))^2+(-1-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ، $CD = \sqrt{(2-4)^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ولمّا كان $AB = CD$، فإنه شبه منحرف متطابق الساقين.

تمارين

أوجد القياس المطلوب في كلٍّ من السؤالين 1 و2:

1) $m\angle D$ **55°**

2) $m\angle L$ **140°**

هندسة إحداثية: بيّن أن الشكل الرباعيّ الممثلة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ ممّا يأتي شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين؟

3) $A(-1,1), B(3,2), C(1,-2), D(-2,-1)$ **$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$ ؛ لذا فإن $ABCD$ شبه منحرف، وبما أن $AB = \sqrt{17}$, $CD = \sqrt{10}$ فهو غير متطابق الساقين**

4) $J(1,3), K(3,1), L(3,-2), M(-2,3)$ **$\overline{LM} \parallel \overline{JK}$, $\overline{JM} \not\parallel \overline{KL}$ ؛ لذا فإن $JKLM$ شبه منحرف، وبما أن $JM = KL = 3$ فهو متطابق الساقين**

جبر: في الشكل المجاور M, N نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $HJKL$.

5) إذا كان: $HJ = 5, LK = 60$، فأوجد MN. **32.5**

6) إذا كان: $HJ = 18, MN = 28$، فأوجد LK. **38**

تدريبات إعادة التعليم (32) دون

الاسم _____ التاريخ _____

5-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

خصائص شكل الطائرة الورقية

شكل الطائرة الورقية هو شكل رباعيّ يتكون من زوجين متباينين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة، وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متطابقين في شكل الطائرة الورقية ليسا متطابقين ولا متوازيين.

5.25	قُطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.	بما أن $RMNP$ شكل طائرة ورقية، فإن $MP \perp RN$
5.26	في شكل الطائرة الورقية، يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين وغير متطابقين.	بما أن $RMNP$ شكل طائرة ورقية، فإن: $\angle M \cong \angle P$ ، و $\angle N \cong \angle R$

مثال 1 إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقية، فأوجد $m\angle Z$.

بما أن: $\angle Y \not\cong \angle W$، إذن: $\angle X \cong \angle Z$ ، و $m\angle X = m\angle Z$.

$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z + m\angle W = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع
$m\angle X + 60° + m\angle Z + 80° = 360°$	بالتعويض
$m\angle X + m\angle Z = 220°$	بالتبسيط
$m\angle X = 110°, m\angle Z = 110°$	بطرح $140°$ من كلا الطرفين

مثال 2 إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقية، فأوجد BC.

قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان، استعمل نظرية فيثاغورس لتجد الطول المطلوب.

$BP^2 + PC^2 = BC^2$

$5^2 + 12^2 = BC^2$

$169 = BC^2$

$13 = BC$

تمارين

الشكل $GHJK$ المجاور على شكل طائرة ورقية.

1) أوجد $m\angle JRK$. **90°**

2) إذا كان: $RK = 10, RJ = 3$، فأوجد JK. $\sqrt{109}$

3) إذا كان: $m\angle GHJ = 90°, m\angle GKJ = 110°$، فأوجد $m\angle HGK$. **80°**

4) إذا كان: $HJ = 7$، فأوجد HG. **7**

5) إذا كان: $HG = 7, GR = 5$، فأوجد HR. $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

6) إذا كان: $m\angle GHJ = 52°, m\angle GKJ = 95°$، فأوجد $m\angle HGK$. **106.5°**

تدريبات المهارات (33) دون ضمن

الاسم _____ التاريخ _____

5-6 تدريبات المهارات

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

أوجد القياس المطلوب في كلٍّ من الأسئلة 1–4:

1) $m\angle S$ **117°**

2) $m\angle M$ **38°**

3) $m\angle D$ **127°**

4) RH $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$

جبر: في الشكل المجاور S, T نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $HJKL$.

5) إذا كان: $HJ = 14, LK = 42$، فأوجد TS. **28**

6) إذا كان: $LK = 19, TS = 15$، فأوجد HJ. **11**

7) إذا كان: $HJ - 7, TS - 10$، فأوجد LK. **13**

8) إذا كان: $LK = 17, HJ = 9$، فأوجد TS. **13**

9) **هندسة إحداثية:** إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $EFGH$ هي: $H(-4,4), G(8,-5), F(5,0), E(1,3)$، فبيّن أن $EFGH$ شبه منحرف، وحدد ما إذا كان $EFGH$ شبه منحرف متطابق الساقين أم لا، ووضح إجابتك.

$\overline{EF} \parallel \overline{GH}$، ولكن $\overline{HE} \not\parallel \overline{FG}$، فهو شبه منحرف، وبما أن $EH = \sqrt{26}, FG = \sqrt{34}$ فهو غير متطابق الساقين

تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

5-6 تدريبات حلّ المسألة

شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

1) كيك، إذا كان قطر الطبقة العليا من كيكة فرح هو 10 in ، وقطر الطبقة السُّفلى منها هو 22 in ، كما في الشكل أدناه، فأوجد قطر الطبقة الوسطى منها. **16 in**

2) مسح الأراضي، صمّم مهندس ساحةً عامّةً على شكل طائرة ورقية؛ كي تعطي شعورًا بالاتساع. تظهر في المستوى الإحداثيّ أدناه ثلاثة أركان من الأركان الأربعة للساحة. إذا كان الركن الرابع يقع في الربع الأول من المستوى، فما إحداثيّاته؟ **(3, 1)**

3) لوحة فنية، صمّم فنان لوحةً فنيةً تتكوّن من مضلع ثمانيّ منتظم تُحيط به ثمانية أشكال متطابقة من شبه المنحرف المتطابق الساقين، أوجد قياس $\angle B$ في شبه المنحرف $ABCD$.

45°

4) مزرعة، زرع عبد العزيز **بيانيًا** من **الأشجار** لإحاطة مزرعته، فكانت على شكل **الطائرة الورقية المجاورة**. أوجد $m\angle F$.

95°

5) درج، صُنعت درجاتٌ في مسرح مدرسيّ كما في الشكل، بحيث يكون عددها 4 درجات، كلّ منها على شكل شبه منحرف، وبتكتك وضعها الواحد فوق الآخر لتكوين أشكال شبه منحرف مختلفة الارتفاعات، وجميع الدرجات لها الارتفاع نفسه. إذا وضعنا الدرجات الأربع جميعها، يكون عرض قمة الدرج 10 ft، وعرض قاعدة الدرج 20 ft .

a) إذا استعملت الدرجتان السفليتان فقط، فكم يكون عرض قمة الدرج؟ **15 ft**

b) كم قدمًا يكون عرض قمّة الدرج، إذا استعملت الدرجات الثلاث السفلى فقط؟ **12.5 ft**

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 5

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

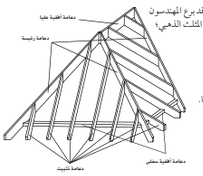
التدريبات الإثرائية (35)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

5-6 التدريبات الإثرائية

الأشكال الهندسية في أعمال الإنشاءات:

تُستعمل الأشكال الهندسية في الأعمال الإنشائية بصورةٍ مطّردة، وقد برع المهندسون (منذ القدم) في توظيف علاقات التوازن والنظريات الهندسية مثل المثلث الذهبي؛ لتحقيق التناغم والإبداع المعماري، وهو ما يعرف بهندسة الطبيعة.



1) يمثّل الشكل المجاور هيكل سقف تظهر فيه أشكال هندسيةٌ عدّةٌ، حدد الأشكال الآتية في الشكل وظلّل حوافّها.

انظر إجابات الطلاب

a) مثلث متطابق الضلعين.

b) مثلث مختلف الأضلاع.

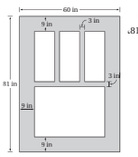
c) متوازي أضلاع.

d) مستطيل.

e) معيّن.

f) شبه منحرف.

2) يمثّل الشكل المجاور نافذةً، عرض الأجزاء الخشبيّة بين الألواح الزجاجيّة فيها 3 in، وعرض الإطار الخارجي 9 in، وبُعدا النافذة من الخارج 60 in في 81 in. إذا علمت أن لجميع الألواح الزجاجيّة العليا واللوح الزجاجي السفلي الطول نفسه، والألواح الزجاجيّة الثلاث العُليا متطابقة، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

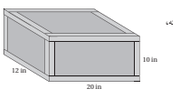


a) طول اللوح الزجاجيّ السفليّ. **42 in**

b) طول كلّ لوحٍ زجاجيٍّ. **30 in**

c) عرض كلّ من الألواح الزجاجيّة العُليا. **12 in**

3) دُعِّمت أحرف الصندوق المجاور بقطع من الألومنيوم لدعمه وتقويته، إذا كان طول الصندوق 20 in، وعرضه 12 in، وارتفاعه 10 in، فما طول قطع الألومنيوم التي استُعملت لدعم الصندوق؟



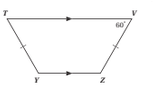
168 in

كتاب التمارين (11)　دون ضمن فوق

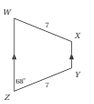
5 - 6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

أوجد القياس المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي:

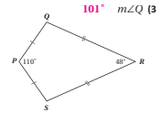
1) $m\angle T$ — **60°**



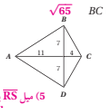
2) $m\angle Y$ — **112°**



3) $m\angle Q$ — **101°**



4) BC — $\sqrt{65}$



هندسة إحداثية: إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي ***RSTU*** هي: $R(-3,-3), S(5,1), T(10,-2), U(-4,-9)$.

5) أثبت أنّ $RSTU$ شبه منحرف.

6) حدّد ما إذا كان $RSTU$ شبه منحرف متطابق الساقين. وضح إجابتك.

ليس متطابق الساقين؛ لأن $RU = \sqrt{37}$, $ST = \sqrt{34}$

5) ميل $\overline{RS}$ يساوي $\frac{1}{2}$، وميل $\overline{TU}$ يساوي $\frac{1}{2}$، وميل $\overline{ST}$ يساوي $\frac{-3}{5}$، وميل $\overline{RU}$ يساوي 6، وبما أن ميل $\overline{RS}$ و $\overline{TU}$ متساويان، فإن $\overline{TU} \parallel \overline{RU}$، وبما أن ميلَي $\overline{ST}$ و $\overline{RU}$ غير متساويين، فإن $\overline{ST} \not\parallel \overline{RU}$، أي أنه يوجد ضلعان متوازيين فقط، إذن الشكل **RSTU** شبه منحرف.

7) **إنشاءات:** صُمّم الدرج المؤدي إلى مدخل بناية على شكل شبه منحرف متطابق الساقين، قاعدته الطويلة عند أسفله، وطولها 21 ft، وقاعدته القصيرة عند أعلاه، وطولها 14 ft. أوجد طول الدرجة عند منتصفه. **17.5 ft**

8) **نجارة:** يريد نجّار أن يضع لوحًا زجاجيًّا على السطح العلوي لمكتب على شكل شبه منحرف. إذا علم طولا قاعدتي سطح المكتب، فما القياسات الأخرى التي يحتاج معرفتها؛ بحيث يكون لوح الزجاج مطابقًا لسطح المكتب؟ إجابة ممكنة: قياس زاويتَي كلٍّ من القاعدتين.

جبر: في الشكل المجاور: ***Y,V*** نقطتا منتصفَي الساقين لشبه المنحرف ***FEDC*** .



9) إذا كان: $FE = 18$, $VY = 28$، فأوجد CD. **38**

10) إذا كان: $m\angle E = 125°$, $m\angle F = 140°$، فأوجد $m\angle D$. **55**

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

زوايا المضلع (الدرس 1-5)

- يعطى مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع محدب بالصيغة $S = (n - 2) \cdot 180°$، حيث n عدد الأضلاع .
- مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع محدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.

خصائص متوازي الأضلاع : (الدرسان 2-5 و 3-5)

- كل ضلعين متقابلين متطابقان.
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- إذا كانت إحدى الزوايا قائمة، فإنّ الزوايا الأخرى قوائم.
- القطران ينصّف كل منهما الآخر.
- قطره يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

خصائص المستطيل والمعين والمربع وشبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية (الدروس 4-5 إلى 6-5)

- للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع. وقطراه متطابقان. وزواياه الأربع قوائم.
- للمعين جميع خصائص متوازي الأضلاع. وجميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان، وينصفان زواياه.
- للمربع جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين.
- زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقتان، والقطران متطابقان أيضًا.
- قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان، ويوجد فيه زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسيّة

القطر (ص. 12)
متوازي الأضلاع (ص. 21)
المستطيل (ص. 38)
المعين (ص. 44)
المربّع (ص. 45)
شبه المنحرف (ص. 52)
قاعدتا شبه المنحرف (ص. 52)
ساقا شبه المنحرف (ص. 52)
زاويتا القاعدة (ص. 52)
شبه المنحرف المتطابق الساقين (ص. 52)
القطعة المتوسطة لشبه المنحرف (ص. 54)
شكل الطائرة الورقيّة (ص. 55)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحةً أو خاطئةً، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) زاويتا قاعدة شبه المنحرف متطابقتان. خاطئة، شبه المنحرف المتطابق الساقين

2) إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإنّ قطريه متطابقان. صحيحة

3) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف تصل بين رأسين غير متتالين فيه. خاطئة، القطر

4) قاعدة شبه المنحرف هي إحدى ضلعيه المتوازيين. صحيحة

5) قطرا المعين متعامدان. صحيحة

6) قطر شبه المنحرف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتي منتصفي ساقيه. خاطئة، القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

7) المستطيل يكون دائمًا متوازي أضلاع. صحيحة

8) الشكل الرباعي الذي فيه زوجٌ واحدٌ من الأضلاع المتوازية هو متوازي أضلاع. خاطئة، شبه المنحرف

9) المعين الذي إحدى زواياه قائمة مستطيل. صحيحة

10) ساق شبه المنحرف هو أحد ضلعيه غير المتوازيين. صحيحة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية : يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 10-1 فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (14) .

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

مراجعة: إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكِّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

20) $x = 5, y = 12$

21) $x = 37, y = 6$

22) إجابة ممكنة: إذا كانت الأضلاع المتقابلة متساوية في الطول، أو إذا كان زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقًا ومتوازيًا، فإنّ الشكل متوازي أضلاع. ويمكن أن يكون الشكل متوازي أضلاع أيضًا إذا كانت الزوايا المتقابلة متطابقة، أو إذا كان القطران ينصّف كل منهما الآخر.

مراجعة الدروس

5-1 زوايا المضلع (ص 19–12)

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدّبين الآتيين :

11) العشاري. **1440°**

12) ذو 15 ضلعًا. **2340°**

13) **زخرفة:** يمثِّل نموذج الزخرفة المجاور شكلًا سداسيًّا منتظمًا. أوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة. **720°**



أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي:

14) $135°$ **8**

15) $168°$ **30**

مثال 1

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع محدّب عدد أضلاعه **22** ضلعًا.

$S = (n-2)\cdot 180°$	بكتابة معادلة
$= (22-2)\cdot 180°$	بالتعويض
$= 20\cdot 180°$	بالطرح
$= 3600°$	بالضرب

مثال 2

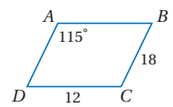
قياس زاوية داخليّة لمضلع منتظم **157.5**. أوجد عدد أضلاعه.

$157.5n = (n-2)\cdot 180°$	بكتابة المعادلة
$157.5°n = 180°n - 360°$	خاصيّة التوزيع
$-22.5°n = -360°$	بالطرح
$n = 16$	بالقسمة

إذن عدد أضلاع المضلع 16 ضلعًا.

5-2 متوازي الأضلاع (ص 28–21)

استعمل $\square ABCD$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



16) $m\angle ADC$ **65°**

17) AD **18**

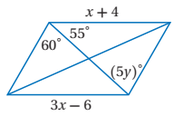
18) AB **12**

19) $m\angle BCD$ **115°**

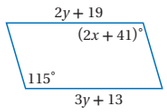
20، 21) انظر الهامش.

جبر: أوجد قيمتي y , x في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

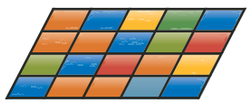
20)



21)

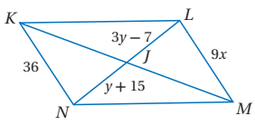


22) تصميم: ما المعطيات الضرورية لتحديد ما إذا كانت الأجزاء المكونة للنمط أدناه متوازيات أضلاع؟ انظر الهامش.



مثال 3

جبر: إذا كان $KLMN$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي :



a) x

$\overline{KN} \cong \overline{LM}$	الأضلاع المتقابلة في $\square$ متطابقة
$KN = LM$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$36 = 9x$	بالتعويض
$4 = x$	بالقسمة

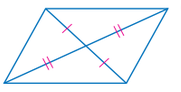
b) y

$\overline{NJ} \cong \overline{JL}$	قطرا $\square$ ينصّف كل منهما الآخر
$NJ = JL$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$y + 15 = 3y - 7$	بالتعويض
$-2y = -22$	بالطرح
$y = 11$	بالقسمة

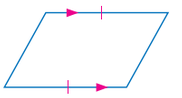
5-3 تمييز متوازي الأضلاع (ص 36–29)

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك. 23، 24) انظر الهامش.

23)



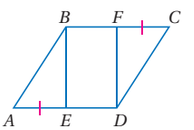
24)



25) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. انظر ملحق الإجابات.

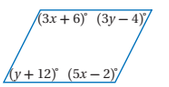
المعطيات: $\square ABCD$, $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $EBFD$ متوازي أضلاع.

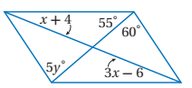


جبر: أوجد قيمتي y , x في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع. 26، 27) انظر الهامش.

26)

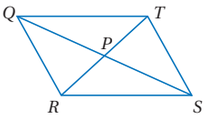


27)



مثال 4

إذا كان $TP = 4x + 2,\ QP = 6 - 2y,\ PS = 12 - 5y$، $PR = 6x - 4$، فأوجد قيمتي x, y بحيث يكون $QRST$ متوازي أضلاع.

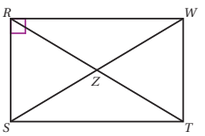


أوجد قيمة x بحيث تكون $\overline{TP} \cong \overline{PR}$ وقيمة y بحيث تكون $\overline{QP} \cong \overline{PS}$.

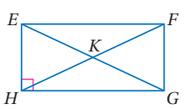
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$4x + 2 = 6x - 4$	بالتعويض
$-2x = -6$	بالطرح
$x = 3$	بالقسمة
$QP = PS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6 - 2y = 12 - 5y$	بالتعويض
$3y = 6$	بالطرح
$y = 2$	بالقسمة

5-4 المستطيل (ص 43–38)

28) **جبر:** الشكل الرباعي $RSTW$ مستطيل، إذا كان $RZ = (2x+5)\text{in}$، $SW = (5x-20)\text{in}$، فأوجد x؟ 30 in



جبر: استعن بالمستطيل $EFGH$ أدناه.



29) إذا كان $m\angle FEG = 57°$، فأوجد $m\angle GEH$. 33°

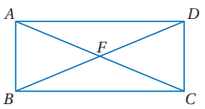
30) إذا كان $m\angle HGE = 13°$، فأوجد $m\angle FGE$. 77°

31) إذا كان $FK = 32\text{ ft}$، فأوجد EG. 64 ft

32) أوجد $m\angle HEF + m\angle EFG$. 180°

مثال 5

جبر: في المستطيل $ABCD$ أدناه، إذا كان $m\angle ADB = (4x+8)°,\ m\angle DBA = (6x+12)°$، فأوجد قيمة x.



بما أنّ $ABCD$ مستطيل، فإنّ $m\angle ABC = 90°$. وبما أن الأضلاع المتقابلة في المستطيل متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطرين متطابقة، فإنّ $\angle ADB \cong \angle DBC$ ، ومن تعريف التطابق $m\angle DBC = m\angle ADB$.

$m\angle DBC + m\angle DBA = 90°$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle ADB + m\angle DBA = 90°$	بالتعويض
$(4x + 8)° + (6x + 12)° = 90°$	بالتعويض
$10x° + 20° = 90°$	بالجمع
$10x° = 70°$	بالطرح
$x = 7$	بالقسمة

إجابات:

23) نعم، النظريّة 5.11

24) نعم، النظريّة 5.12

26) $x = 4, y = 8$

27) $x = 5, y = 12$

الفصل 5 دليل الدراسة والمراجعة 63

دليل التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 5 ، ص(8)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

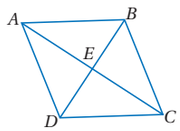
إجابات:

42a) إجابة ممكنة: ساقا كل شبه منحرف أجزاء من قطري المربّع. وقطرا المربّع ينصّفان الزوايا المتقابلة، لذلك فقياس كل زاوية قاعدة لشبه المنحرف يساوي 45°. فيه ضلعان فقط متوازيان، وزاويتا كل قاعدة متطابقتان.

42b) $16 + 8\sqrt{2} \approx 27.3$ in

5-5 المعين والمربع (ص 51–44)

جبر: في المعين $ABCD$ ، إذا كان $AB = 12, EB = 9$، $m\angle ABD = 55^\circ$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

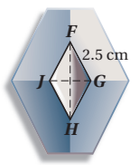


34) AE $3\sqrt{7}$

35) $m\angle BDA$ 55°

36) CE $3\sqrt{7}$

37) $m\angle ACB$ 35°



38) شعار: تتخذ شركة سيارات الشكل المجاور علامة تجارية لها. إذا كان شكل العلامة التجارية معينًا، فما طول $\overline{FJ}$؟ 2.5 cm

هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان $QRST$ ▱ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

39) $Q(12, 0), R(6, -6), S(0, 0), T(6, 6)$

40) $Q(-2, 4), R(5, 6), S(12, 4), T(5, 2)$

38) مستطيل ومعين ومربع؛ لأن الضلعين المتتاليين $\overline{RQ}, \overline{QT}$ متطابقان ومتعامدان.

39) معين ؛ إجابة ممكنة: لأن قطريه متطابقان ومتعامدان.

مثال 6

يتقاطع قطرا المعين $QRST$ عند النقطة P. استعمل المعطيات لإيجاد المطلوب في كل مما يأتي:

a) جبر: إذا كان $TS = 2x - 9, QT = x + 7$، فأوجد قيمة x.

$\overline{QT} \cong \overline{TS}$	تعريف المعين
$QT = TS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 7 = 2x - 9$	بالتعويض
$-x = -16$	بالطرح
$x = 16$	بالقسمة

b) إذا كان $m\angle QTS = 76^\circ$، فأوجد $m\angle TSP$.

بما أنّ $\overline{TR}$ تنصّف $\angle QTS$، فإنّ $m\angle PTS = \frac{1}{2} m\angle QTS$.

لذلك $m\angle PTS = \frac{1}{2}(76) = 38^\circ$، وبما أنّ قطري المعين متعامدان، فإنّ $m\angle TPS = 90^\circ$.

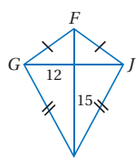
$m\angle PTS + m\angle TPS + m\angle TSP = 180^\circ$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$38^\circ + 90^\circ + m\angle TSP = 180^\circ$	بالتعويض
$128^\circ + m\angle TSP = 180^\circ$	بالجمع
$m\angle TSP = 52^\circ$	بالطرح

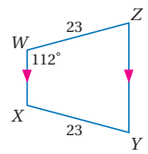
5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة (ص 60–52)

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

41) GH $3\sqrt{41}$

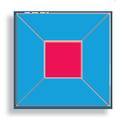
42) $m\angle Z$ 68°





a, b) انظر الهامش.

43) تصميم: استعن بقطعة البلاط المربعة الشكل المبينة جانبًا في السؤالين الآتيين:

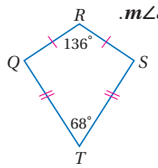


a) صف طريقة لتحديد ما إذا كانت أشكال شبه المنحرف الظاهرة في البلاطة متطابقة الساقين؟

b) إذا كان محيط البلاطة 48 in، ومحيط المربّع الأحمر 16 in، فما محيط أحد أشكال شبه المنحرف ؟

مثال 7

إذا كان $QRST$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle S$.



بما أنّ $\angle S \cong \angle Q$، فإنّ $m\angle Q = m\angle S$.

اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle S$.

$m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T = 360^\circ$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle S + 136^\circ + m\angle S + 68^\circ = 360^\circ$	بالتعويض
$2m\angle S + 204^\circ = 360^\circ$	بالتبسيط
$2m\angle S = 156^\circ$	بالطرح
$m\angle S = 78^\circ$	بالقسمة

الفصل 5 اختبار الفصل

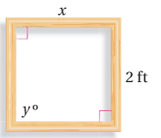
أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) السداسي 720°
2) ذو 16 ضلعًا 2520°

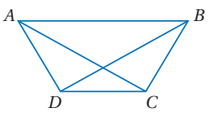
3) **فن:** تصنع جُمانة إطارًا لتبسط عليه قطعة قماش وترسم عليها بألوان زيتية. ثبتت جمانة أربع قطع من الخشب بعضها ببعض واعتقدت أنّها ستمثّل مربّعًا.

a) كيف يمكنها التحقق من أنّ الإطار مربع؟ انظر الهامش.

b) إذا كانت أبعاد الإطار كما في الشكل، فأوجد القياسات المجهولة. $x = 2$ ft ؛ $y = 90$



الشكل الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

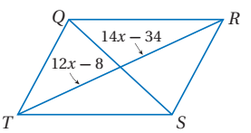


4) ما الزاوية التي تطابق $\angle C$؟ $\angle D$
5) ما الضلع الذي يوازي $\overline{AB}$؟ $\overline{DC}$
6) ما القطعة المستقيمة التي تطابق $\overline{AC}$؟ $\overline{BD}$

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه في كل مما يأتي:

7) 900° 7
8) 1980° 13
9) 2880° 18
10) 5400° 32

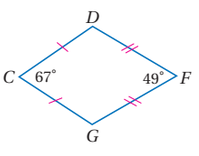
11) **اختيار من متعدّد:** إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟ C

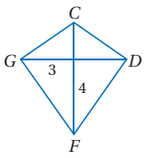


A 11
B 12
C 13
D 14

إذا كان $CDFG$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

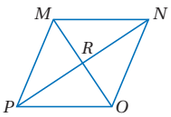
12) GF 5
13) $m\angle D$ 122°





جبر: استعن بالمعين $MNOP$ ، للإجابة عن الأسئلة الآتية:

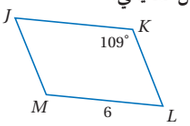
14) $m\angle MRN$ 90°
15) إذا كان $PR = 12$، فأوجد RN. 12
16) إذا كان $m\angle PON = 124°$، فأوجد $m\angle POM$. 62°



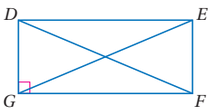
17) **إنشاءات:** تبني عائلة صالح ملحقًا للمنزل، وتركت فتحة لنافذة جديدة. فإذا قاس صالح الأضلاع المتقابلة فوجدها متطابقة. وقاس القطرين فوجدهما متطابقين، فهل يمكنه القول: إن فتحة النافذة تمثّل مستطيلًا؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش.

استعمل $\square JKLM$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي:

18) $m\angle JML$ 109°
19) JK 6
20) $m\angle KLM$ 71°



جبر: استعن بالمستطيل $DEFG$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:



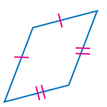
21) إذا كان $DF = 2(x+5) - 7$, $EG = 3(x-2)$، فأوجد EG. 21
22) إذا كان $m\angle EDF = (5x-3)°$, $m\angle DFG = (3x+7)°$، فأوجد $m\angle EDF$. 22°
23) إذا كان $DE = 14 + 2x$, $GF = 4(x-3) + 6$، فأوجد GF. 34

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك. 24، 25) انظر الهامش.

24)



25)



المعالجة: استعمل نتائج اختبار الفصل ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب.

تساعدك العبارة "إذا... فاختر..." في الجدول على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصدر لكل مستوى.

إجابات

3a) إجابة ممكنة: يجب أن تقيس أطوال القطع الخشبية، فإن وجدت طول كل قطعتين متقابلتين متساويًا، فالشكل متوازي أضلاع، وإن وجدت أن أطوال القطع جميعها متساوٍ فالشكل معين، ثم تقوم جمانة بقياس الزوايا عند الرؤوس، فإن كانت قائمة، فالشكل مربع.

17) إجابة ممكنة: بما أن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فالشكل متوازي أضلاع، وبما أن قطريه متطابقان، فالشكل مستطيل.

24) نعم؛ الزوايا المتقابلة متطابقة.

25) لا؛ الأضلاع المتقابلة ليست متطابقة.

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر أحد المصادر الآتية:	فاختر أحد المصدرين الآتيين:
الدروس: 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6	تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)
تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33)	
www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الهدف: تَعَلُّم كيفية تطبيق التعريفات والخصائص الهندسيّة لحل المسائل.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- كيف يمكن استعمال التعريفات والخصائص الهندسيّة لحل المسألة؟

إجابة ممكنة: تستعمل التعريفات والخصائص في إيجاد القيم المجهولة في المسألة.

- كيف تحدّد التعريفات والخصائص التي ستستعملها لحل المسألة؟

إجابة ممكنة: يمكن استعمال بعض الكلمات المفتاحية الواردة في المسألة مثل: "مجموع"، "محيط"، "قياس الزاوية"، "شكل رباعي" لتحدد ما إذا كنت سوف تستعمل تعريفًا أو خاصية لمساعدتك في حل المسألة.

- ما المعلومات الأخرى التي ستجمعها عندما تبدأ حل المسألة؟

إجابة ممكنة: يجب كتابة المعطيات في المسألة مثل قيمة ما أو قياس زاوية أو معادلة.

تطبيق التعريفات والخصائص



يتطلب حل كثير من المسائل الهندسيّة في الاختبارات تطبيق التعريفات والخصائص. استعمل هذه الصفحة والتي تليها للتدرّب على تطبيق التعريفات والخصائص عند حل أسئلة الهندسة ذات الإجابات المطولة.

استراتيجيات تطبيق التعريفات والخصائص

الخطوة 1

اقرأ نص السؤال بعناية.

- حدّد المطلوب في المسألة.
- ادرس الأشكال المعطاة في المسألة.
- **اسأل نفسك:** ما خصائص هذا الشكل التي يمكنني تطبيقها لحل المسألة؟

الخطوة 2

حل المسألة.

- حدّد التعريفات أو المفاهيم الهندسيّة التي يمكنك استعمالها لمساعدتك على إيجاد القيم المجهولة في المسألة.
- استعمل التعريفات وخصائص الأشكال لكتابة معادلة وحلها.

الخطوة 3

- تحقق من إجابتك.

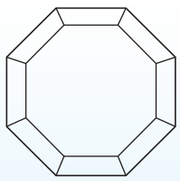
مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدِّد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.

يصنع خالد إطارًا خشبيًّا على شكل ثماني منتظم محيطه 288 cm.

a) ما طول كل لوح خشبي يشكّل ضلعًا للإطار؟

b) ما الزاوية التي سيُقطع بها كل لوح عند طرفيه الخارجيين حتى تتلاءم الألواح بعضها مع بعض وتشكل الإطار؟ وضِّح إجابتك.



a) طول كل ضلع من أضلاع الإطار أو طول كل لوح خشبي.

الخطوة 1: اقرأ المسألة بعناية، علمت أن الألواح ستشكل ثمانيًّا منتظمًا محيطه 288 cm. والمطلوب إيجاد طول كل لوح خشبي.

الخطوة 2: حل المسألة، لإيجاد طول كل لوح، اقسم المحيط على عدد الألواح.

$288 \div 8 = 36$

إذن طول كل لوح يجب أن يكون 36 cm.

الخطوة 3: تحقق من حلك بإيجاد محيط المضلع: محيط المضلع المنتظم = عدد الأضلاع × طول الضلع الواحد

$8 \times 36\,\text{cm} = 288\,\text{cm}$ ✓

b) قياس الزاوية التي سيقطع بها كل لوح عند طرفيه الخارجيين حتى تتلاءم الألواح وتشكل الإطار.

الخطوة 1: المطلوب إيجاد قياس الزاوية التي ستقطع بها الألواح عند أطرافها حتى يتلاءم بعضها مع بعض تمامًا.

الخطوة 2: حل المسألة، استعمل خاصيّة مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع المحدَّب لإيجاد قياس زاوية داخليّة للثماني المنتظم.

أوجد أولًا المجموع S لقياسات الزوايا الداخليّة.

$$S = (n-2) \cdot 180^\circ$$
$$= (8-2) \cdot 180^\circ$$
$$= 1080^\circ$$

إذن قياس الزاوية الداخليّة للثُّماني المنتظم يساوي $1080^\circ \div 8 = 135^\circ$. وبما أنّه سيُستعمل لوحان لتشكيل كل رأس للإطار، فإن كل طرف للألواح سيُقطع بزاوية قياسها $135^\circ \div 2 = 67.5^\circ$.

الخطوة 3: تحقق من حلك بالحل عكسيًّا

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم (n) الذي قياس زاويته الداخلية 135°.

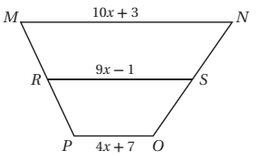
$$135^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$
$$135^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ$$
$$-45^\circ n = -360^\circ$$
$$n = 8$$ ✓

تمارين ومسائل

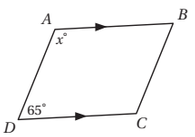
اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدِّد المطلوب . ثم استعمل المعطيات لحلها، وبيِّن خطوات حلك:

1) $\overline{RS}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $MNOP$.

ما طول $\overline{RS}$ ؟ **26** وحدة

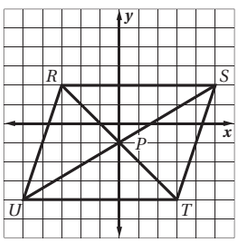


2) إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ، فأوجد قيمة x . **115**



3) استعن بالتمثيل البياني أدناه في كل من السؤالين الآتيين:

a, b) انظر الهامش.



a) هل ينصّف قطرا الشكل الرباعي $RSTU$ كل منهما الآخر؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتتحقق من إجابتك.

b) ما نوع الشكل الرباعي $RSTU$؟ وضّح إجابتك باستعمال خصائص هذا النوع من الأشكال الرباعيّة أو تعريفه.

4) ما مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للثُّماني المنتظم؟ **360°**

مثال إضافي

تدريب على اختبار:

صُمِّم إطارٌ على شكل سداسي منتظم محيطه 354 cm.

a) ما طول ضلع الإطار؟ 59 cm

b) ما قياس الزاوية المتكونة عند كل ركن من أركان الإطار؟ وضح إجابتك. 120°

3 التقويم

استعمل الأسئلة 1–4 لتقويم فهم الطلاب.

إجابات:

3a) نعم؛ بما أن $PS = \sqrt{34}$ ، $UP = \sqrt{34}$، $RP = 3\sqrt{2}$ ، $PT = 3\sqrt{2}$، فإن القطران ينصّف كل منهما الآخر.

3b) متوازي أضلاع؛ إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ الشكل متوازي أضلاع.

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة في كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

1) A اختار أول عبارة صحيحة.
B العبارة صحيحة والمطلوب عبارة ليست صحيحة.
C طبّق التعريف خطأ.
D صحيحة

2) A لم يختر المصطلح الأنسب.
B صحيحة
C استعمل التعريف استعمالًا خطأ.
D خمّن.

3) A أخطأ حسابيًّا.
B أخطأ حسابيًّا.
C أخطأ حسابيًّا.
D صحيحة

4) A استعمل صيغة خطأً.
B صحيحة
C استعمل صيغة خطأً.
D استعمل صيغة خطأً.

5) A أوجد الفرق بين قياس الزاوية و 90.
B صحيحة
C خمّن.
D افترض أن الزوايا متطابقة.

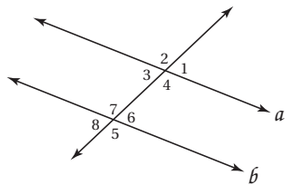
6) A أخطأ حسابيًّا.
B صحيحة
C أخطأ حسابيًّا.
D أخطأ حسابيًّا.

7) A فهم خاطئ للتعريف.
B فهم خاطئ للتعريف.
C صحيحة
D فهم خاطئ للتعريف.

أسئلة الاختيار من متعدد

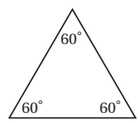
اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصائبة.

1) إذا كان $a \parallel b$ ، فأيّ العبارات الآتية ليست صحيحة؟ **D**



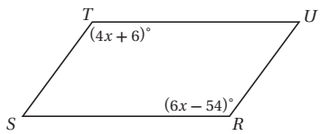
A $\angle 1 \cong \angle 3$ **C** $\angle 2 \cong \angle 5$
B $\angle 4 \cong \angle 7$ **D** $\angle 8 \cong \angle 2$

2) صنّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه. اختر المصطلح الأنسب. **B**



A حادّ الزوايا **C** منفرج الزاوية
B متطابق الزوايا **D** قائم الزاوية

3) أوجد قيمة x في متوازي الأضلاع $RSTU$. **D**

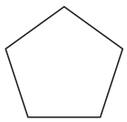


A 12 **C** 25
B 18 **D** 30

إرشادات للاختبار

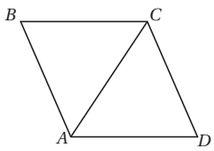
السؤال 3: استعمل خصائص متوازي الأضلاع لحل المسألة. كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

4) ما قياس كل زاوية داخلية في الخُماسي المنتظم؟ **B**



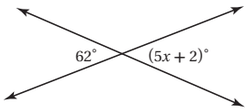
A 96° **C** 120°
B 108° **D** 135°

5) الشكل الرباعي $ABCD$ معين، فيه $m\angle BCD = 120^\circ$، أوجد $m\angle DAC$. **B**



A 30° **C** 90°
B 60° **D** 120°

6) ما قيمة x في الشكل أدناه؟ **B**



A 10 **C** 14
B 12 **D** 15

7) $\overline{AE}$ ، $\overline{DT}$ قطران للمستطيل $DATE$ يتقاطعان في S. إذا كان $AE = 40, ST = x + 5$ ، فما قيمة x؟ **C**

A 35 **C** 15
B 25 **D** 10

الفصل 5 اختبار تراكمي
الفصول 5-1

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلبة في الفصول 5–1 من خلال:

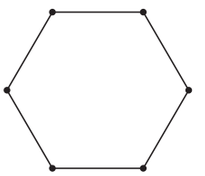
اختبار تراكمي: الفصول 5–1، ص (68–69)

الاختبار التراكمي: الفصول 5–1، ص (24–26)

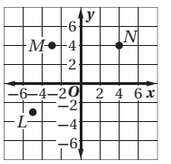
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) تشكِّل أعمدة خيمة رؤوس سداسي منتظم، ما قياس الزاوية المتكوّنة عند أيّ من أركان الخيمة؟ **120°**



9) ما إحداثيات الرأس الرابع لشبه المنحرف المتطابق الساقين $LMNJ$؟ بيّن خطوات الحل. **(6, −3)**



10) ماذا نسمي متوازي الأضلاع إذا كان قطراه متعامدين؟ وضّح إجابتك.
إجابة ممكنة: يكون معينًا .

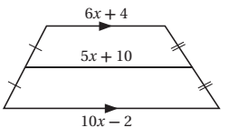
11) حدِّد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

المعطيات: إذا كان العدد يقبل القسمة على 9،
فإنّه يقبل القسمة على 3.
العدد 144 يقبل القسمة على 9.

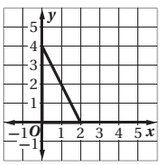
النتيجة: العدد 144 يقبل القسمة على 3.

إجابة ممكنة: النتيجة صحيحة ؛ قانون الفصل المنطقي .

12) أوجد قيمة x في الشكل أدناه. وقرّب الإجابة إلى أقرب عُشر إن كان ذلك ضروريًّا. **3**



13) ما إحداثيات مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أدناه؟ **(1, 2)**



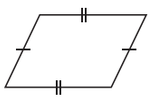
أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

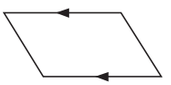
14) هل يمكنك إثبات أنّ كل شكل مما يأتي متوازي أضلاع؟ إذا لم تستطع ذلك، فاذكر المعطيات الإضافية التي ستحتاج إليها لإثبات أنه متوازي أضلاع. ووضّح تبريرك.

a–c) انظر الهامش.

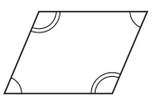
(a



(b



(c



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟															
إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس..	2-2	3-1	5-2	5-1	5-5	1-8	5-4	5-1	5-6	5-5	1-4	5-6	4-1	5-3

إجابات:

14a) نعم؛ الأضلاع المتقابلة متطابقة، لذا فالشكل متوازي أضلاع.

14b) لا؛ ضلعان متقابلان فقط متوازيان. عليك أن تبين أنّ:
1) الضلعين المتوازيين متطابقان أيضًا.
أو 2) الضلعين المتقابلين الآخرين متوازيان.

14c) نعم؛ الزوايا المتقابلة متطابقة، لذا فالشكل متوازي أضلاع.

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 6: حدِّد الأسئلة صفحة 71 واجبًا منزليًّا لتقويم مهارات الطلاب في المتطلبات السابقة للفصل القادم.

الدرس 1-5 ، ص (19):

44) $60°, 90°, 30°$؛ بحسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة، يكون مجموع قياسات الزوايا الداخليّة $720°$، وبما أن المضلع $QRSTVX$ منتظم فإنّ له 6 زوايا متطابقة. وقياس كل زاوية $120°$، لذلك $m\angle XVT = m\angle XQR = 120$ وكذلك $XQ = QR$. وبحسب نظرية المثلث المتطابق الضلعين، يكون $m\angle QXR = m\angle QRX$. وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمثلث $180°$، فإنّ $m\angle QXR + m\angle QRX + m\angle XQR = 180°$، وبالتعويض ينتج أن $a + a + 120° = 180°$، أي أن $2a = 60°$ ومنها $a = 30°$.

وبحسب مسلمة جمع الزوايا $m\angle QRS = m\angle QRX + m\angle XRS$، وبالتعويض، $m\angle XRS + 30° = 120°$. وبالطرح يكون $m\angle XRS = 90°$.

إذن $b = 90°$، وحسب (SAS) يكون $\triangle XVT \cong \triangle XQR$ و $\triangle XRS \cong \triangle XTS$ وفق المسلمة (SSS) وبناءً على مسلمة جمع الزوايا يكون $m\angle VXQ = m\angle VXT + m\angle TXS + m\angle SXR + m\angle RXQ$.

وبالتعويض $120° = 30° + m\angle TXS + m\angle SXR + 30°$،

إذن $m\angle TXS + m\angle SXR = 60°$ ، وبما أنّ $m\angle TXS = m\angle SXR$ ، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة، فإنّ $m\angle TXS = m\angle SXR = 30°$.

وفي $\triangle XTS$ ، $m\angle XTS + m\angle TSX + m\angle SXT = 180°$، وبالتعويض $180° = c + 30° + 90°$ ، إذن $c = 60°$.

الدرس 2-5 ، ص (26) :

25) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\square GKLM$	**1)** معطى
2) $GK \parallel \overline{ML}, \overline{GM} \parallel \overline{KL}$	**2)** الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية
3) $\angle G$ و $\angle K$ متكاملتان، $\angle K$ و $\angle L$ متكاملتان، $\angle L$ و $\angle M$ متكاملتان، $\angle M$ و $\angle G$ متكاملتان،	**3)** نظرية الزاويتين المتحالفتين

26) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\square WXYZ$	**1)** معطى
2) $WX \cong \overline{ZY}, \overline{WZ} \cong \overline{XY}$	**2)** الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة
3) $\angle ZWX \cong \angle XYZ$	**3)** الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة
4) $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$	**4)** SAS

27) ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{PR}$ (قطر $PQRS$) وسمّ الزوايا 1، 2، 3، 4 كما هو مبيّن

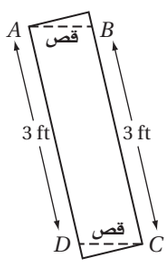
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\square PQRS$	**1)** معطى
2) $PQ \parallel \overline{SR}, \overline{PS} \parallel \overline{QR}$	**2)** الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية
3) $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$	**3)** نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
4) $PR \cong \overline{RP}$	**4)** خاصية الانعكاس
5) $\triangle QPR \cong \triangle SRP$	**5)** ASA
6) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{QR} \cong \overline{SP}$	**6)** العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة

28) البرهان: معطى أن $ACDE$ متوازي أضلاع. بما أنّ الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\overline{EA} \cong \overline{DC}$. ومن تعريف متوازي الأضلاع $\overline{EA} \parallel \overline{DC}$. ويكون $\angle AEB \cong \angle DCB$ و $\angle EAB \cong \angle CDB$ ؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا. إذن $\triangle EBA \cong \triangle CBD$ بحسب ASA. وعليه فإن $\overline{EB} \cong \overline{BC}$ وَ $\overline{BD} \cong \overline{AB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة، ومن تعريف منصّف القطعة المستقيمة فإن $\overline{EC}$ تنصّف $\overline{AD}$، و $\overline{AD}$ تنصّف $\overline{EC}$.

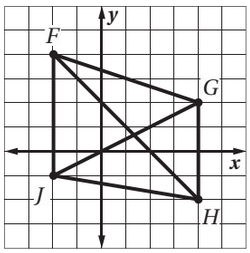
الدرس 3-5 ، ص (33-30) (تحقق من فهمك)

2)



بما أنّ $AD = BC$، فإنّ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. وحيث إنَّ أضلاع الشريط متوازية، لذلك تكون $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. إذن وبحسب النظرية 5.12، يكون الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع. ولأن الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية بحسب التعريف، فإنّ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

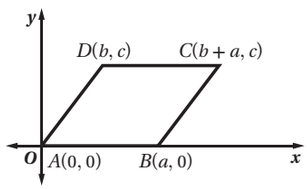
4B)



إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإنّه متوازي أضلاع، وينصف قطرا شكل رباعي كل منهما الآخر إذا كانت نقطتا منتصفيهما متطابقتين. نقطة منتصف القطر $\overline{FH}$ هي $(1, 1)$. ونقطة منتصف القطر $\overline{JG}$ هي $(1, 0.5)$. وبما أن نقطتي منتصفي القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ ليس لهما الإحداثيات نفسها، فإن الشكل الرباعي $FGHJ$ ليس متوازي أضلاع.

5) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$



برهان إحداثي:

$$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = a$$

$$DC = \sqrt{(b+a-b)^2 + (c-c)^2} = a$$

$$AD = \sqrt{(c-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{c^2 + b^2}$$

$$BC = \sqrt{(a-(b+a))^2 + (c-0)^2}$$

$$= \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{c^2 + b^2}$$

بما أنّ $AB = DC$ و $AD = BC$، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

الدرس 3-5 ، ص (36-34):

3) إجابة ممكنة: بما أن العمودين الرأسيين عموديان على الأرض، فهما متوازيان، فإذا قاس النجار المسافة بين القاطعين العرضيين على العمود الرأسي المثبت على الدرجة الأخيرة، وقاس المسافة نفسها على العمود الرأسي المثبت فوق الدرجة الأولى، فعند التوصيل بالقاطعين الخشبيين العرضيين يتكون شكل رباعي فيه ضلعان متطابقان ومتوازيان، وهما جزآن من العمودين الرأسيين. أي أن الشكل الرباعي سيكون متوازي أضلاع. وعليه فإن القاطعين الخشبيين العرضيين متوازيان بحسب تعريف متوازي الأضلاع.

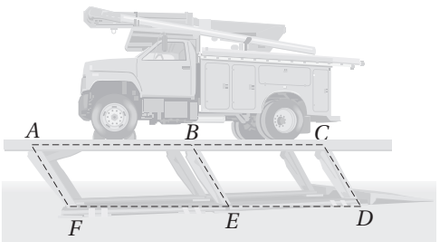
15) المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع فيه $\angle W \cong \angle X$ ، و M نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: ZMY مثلث متطابق الضلعين.

البرهان: بما أنّ $WXYZ$ متوازي أضلاع، فإنّ $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$. وبما أن M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فإنّ $\overline{MX} \cong \overline{WM}$. ومعطى أنّ $\angle W \cong \angle X$، لذلك وبحسب SAS ، فإنّ $\triangle ZWM \cong \triangle YXM$. ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة، فإن $\overline{ZM} \cong \overline{YM}$ ، إذن ZMY مثلث متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث متطابق الضلعين.

16) المعطيات: $ABEF$ متوازي أضلاع؛ $BCDE$ متوازي أضلاع.

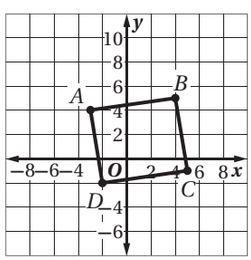
المطلوب: $ACDF$ متوازي أضلاع.



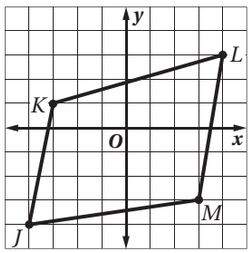
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $ABEF$ متوازي أضلاع؛ $BCDE$ متوازي أضلاع	**1)** معطيات
2) $\overline{AF} \parallel \overline{BE}, \overline{BE} \parallel \overline{CD}$	**2)** تعريف متوازي الأضلاع
3) $\overline{AF} \cong \overline{BE}, \overline{BE} \parallel \overline{CD}$	**3)** الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة
4) $\overline{AF} \cong \overline{CD}, \overline{AF} \parallel \overline{CD}$	**4)** خاصية التعدّي
5) $ACDF$ متوازي أضلاع.	**5)** إذا كان ضلعان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين، فإنّه متوازي أضلاع

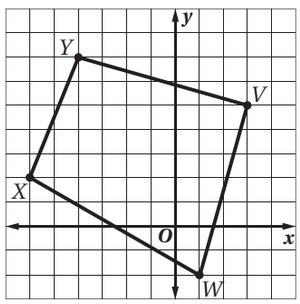
23) نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي $\frac{1}{7}$ ، لذلك $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. وبما أنّ ميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي -6 ، فإنّ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



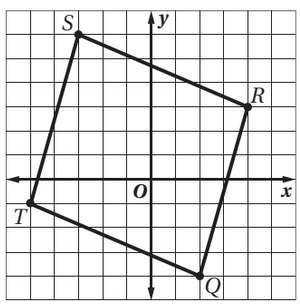
24) لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين.
$KL = \sqrt{53}$ ، $JM = 5\sqrt{2}$، وبما أن الضلعين متقابلان وغير متطابقين فإنّ $JKLM$ ليس متوازي أضلاع.



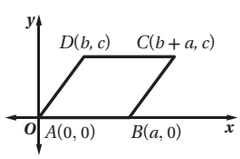
25) لا؛ إجابة ممكنة: يجب أن يكون فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين.
ميل $\overline{YV}$ يساوي $-\frac{2}{7}$ ، وميل $\overline{XW}$ يساوي $-\frac{4}{7}$ ، وميل $\overline{YX}$ يساوي $\frac{5}{2}$ ، وميل $\overline{VW}$ يساوي $\frac{7}{2}$. وبما أن ميل $\overline{YV}$ لا يساوي ميل $\overline{XW}$ ، وميل $\overline{YX}$ لا يساوي ميل $\overline{VW}$ ، فإنّ $VWXY$ ليس متوازي أضلاع.



26) نعم؛ إجابة ممكنة: يجب أن يكون فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. وبما أنّ
ميل $\overline{QR}$ يساوي ميل $\overline{ST}$ ويساوي $\frac{7}{2}$ ، فإن $\overline{ST} \parallel \overline{QR}$ ، ولأن $QR = ST = \sqrt{53}$ ، فإن $\overline{ST} \cong \overline{QR}$. إذن $QRST$ متوازي أضلاع.

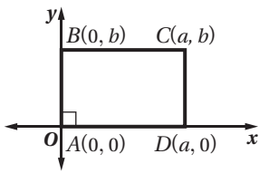


27) **المعطيات:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$
المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.



البرهان:
ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$
ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{0-0}{a-0} = 0$
ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$
ميل $\overline{CD}$: $m = \frac{c-c}{b+a-b} = 0$
لذلك $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، إذن وبحسب تعريف متوازي الأضلاع يكون $ABCD$ متوازي أضلاع.

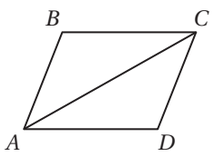
28) **المعطيات:** $ABCD$ متوازي أضلاع.
$\angle A$ زاوية قائمة.



المطلوب: $\angle D$ ، $\angle C$ ، $\angle B$ قوائم.

البرهان:
ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{b-b}{a-0} = 0$ ، ميل $\overline{CD}$: غير معرّف
ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{0-0}{a-0} = 0$ ، ميل $\overline{AB}$: غير معرّف
لذلك $\overline{BC} \perp \overline{CD}, \overline{CD} \perp \overline{AD}, \overline{AB} \perp \overline{BC}$.
إذن $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ قوائم.

29) **المعطيات:** $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$



المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

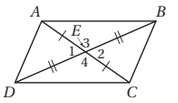
البرهان:
$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360°$. وبما أنّ
$\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$ فإنّ $m\angle A = m\angle C$ و $m\angle B = m\angle D$.
وبالتعويض $m\angle A + m\angle A + m\angle B + m\angle B = 360°$
إذن $2(m\angle A) + 2(m\angle B) = 360°$. وبقسمة كلا الطرفين على 2 ينتج $m\angle A + m\angle B = 180°$؛ لذا فإن الزاويتين المتحالفتين متكاملتان، و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. وبالمثل $2(m\angle A) + 2(m\angle D) = 360°$
أي أنّ $m\angle A + m\angle D = 180°$ ، إذن هاتان الزاويتان المتحالفتان متكاملتان، ومن عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين نجد أن:
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ، إذن الأضلاع المتقابلة متوازية، لذلك فالشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

30a) **المعطيات:** $\overline{AC} \cong \overline{CF}, \overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}, \overline{DF} \cong \overline{DE}$

المطلوب: $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.

البرهان: نعلم أنّ $\overline{AC} \cong \overline{CF}, \overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}, \overline{DF} \cong \overline{DE}$
إذن $AC = CF$ بحسب تعريف التطابق ، $AC = AB + BC$ و $CF = CD + DF$ بحسب مسلمة جمع القطع المستقيمة. وبالتعويض يكون $AB + BC = CD + DF$ ، وبما أنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن $AB = CD$ بحسب تعريف التطابق، وبالتعويض يكون $AB + BC = AB + DF$ وبحسب خاصية الطرح للمساواة $BC = DF$.
إذن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ بحسب تعريف التطابق، و $\overline{DF} \cong \overline{BC}$ بحسب خاصيّة التعدّي للتطابق.
وإذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع، إذن $BCDE$ متوازي أضلاع، ومن تعريف متوازي الأضلاع يكون $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.

31) المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{EB}$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$



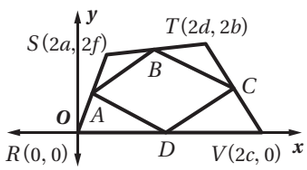
المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AE} \cong \overline{EC}, \overline{DE} \cong \overline{EB}$	**1)** معطيات
2) $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4$	**2)** الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
3) $\triangle ABE \cong \triangle CDE,$ $\triangle ADE \cong \triangle CBE$	**3)** SAS
4) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{CB}$	**4)** العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
5) $ABCD$ متوازي أضلاع	**5)** إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإنّه متوازي أضلاع

34) المعطيات: $RSTV$ شكل رباعي، والنقاط A, B, C, D منتصفات الأضلاع $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TV}$, $\overline{VR}$ على الترتيب.

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.



البرهان:

ارسم الشكل الرباعي $RSTV$ في المستوى الإحداثي، وسمِّ الإحداثيات كما هو مبين في الشكل (استعمال إحداثيات من مضاعفات العدد 2 سيجعل الحسابات أسهل) ومن صيغة نقطة المنتصف تكون إحداثيات النقاط A, B, C, D هي:

$$A\left(\frac{2a}{2}, \frac{2f}{2}\right) = (a, f)$$

$$B\left(\frac{2d+2a}{2}, \frac{2f+2b}{2}\right) = (d+a, f+b)$$

$$C\left(\frac{2d+2c}{2}, \frac{2b}{2}\right) = (d+c, b)$$

$$D\left(\frac{2c}{2}, \frac{0}{2}\right) = (c, 0).$$

أوجد ميل كل من $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$.

ميل $\overline{AB}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(f+b) - f}{(d+a) - a} = \frac{b}{d}$$

ميل $\overline{DC}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - b}{c - (d+c)} = \frac{-b}{-d} = \frac{b}{d}$$

ولأنّ ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ متساويان، فإنّ القطعتين المستقيمتين متوازيتان. استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد AB, DC .

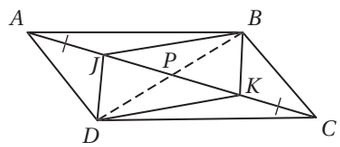
$$AB = \sqrt{(d+a-a)^2 + (f+b-f)^2} = \sqrt{d^2 + b^2}$$

$$DC = \sqrt{(d+c-c)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{d^2 + b^2}$$

إذن $AB = DC$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. لذلك $ABCD$ متوازي أضلاع؛ لأنّه إذا كان ضلعان متقابلان في شكل رباعي متوازيين ومتطابقين، فإنّه متوازي أضلاع.

39) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع و $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$.

المطلوب: $JBKD$ متوازي أضلاع.



البرهان:

ارسم $\overline{DB}$. بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع، فإنّ القطرين $\overline{DB}$ و $\overline{AC}$ ينصّف كل منهما الآخر بحسب النظرية 5.7. سمِّ نقطة تقاطعهما P. ومن تعريف نقطة المنتصف يكون $\overline{AP} \cong \overline{PC}$ ، إذن $AP = PC$. وبحسب مسلمة جمع القطع المستقيمة، فإن $AP = AJ + JP$, $PC = PK + KC$. وبالتعويض $AJ + JP = PK + KC$. وبما أنّ $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$ ، فإنّ $AJ = KC$ بحسب تعريف التطابق. وبالتعويض $KC + JP = PK + KC$. ومن خاصيّة الطرح يكون $JP = PK$. إذن ومن تعريف التطابق تكون $\overline{JP} \cong \overline{PK}$ ، إذن P نقطة منتصف $\overline{JK}$. وبما أنّ $\overline{JK}$ و $\overline{DB}$ تنصّف كل منهما الأخرى، وهما قطران للشكل الرباعي $JBKD$، فبحسب النظرية 5.11 يكون الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.

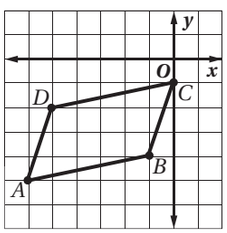
اختبار منتصف الفصل، ص (37) :

19) البرهان:

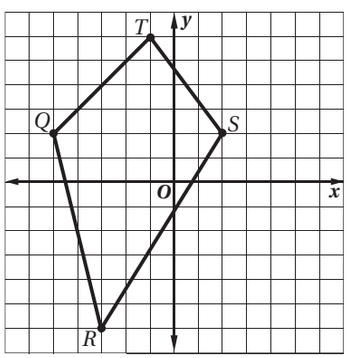
العبارات	المبررات
1) $\square HACD$, $\square GFBA$.	1) معطيات
2) $\angle F \cong \angle A, \angle A \cong \angle D$	2) الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة
3) $\angle F \cong \angle D$	3) خاصية التعدّي للتطابق

22) إجابة ممكنة: عُمل الساقان بحيث ينصف كل منهما الآخر، إذن فالشكل الرباعي المتكون من أطراف الساقين يكون دائمًا متوازي الأضلاع. لذلك فسطح الطاولة العلوي يبقى موازيًا لسطح الأرض.

24) نعم؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين. المسافة بين A و B تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين B و C تساوي $\sqrt{10}$. والمسافة بين C و D تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين D و A تساوي $\sqrt{10}$. وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.

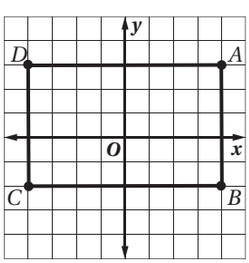


25) لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متوازيين، وبما أنّ ميل $\overline{QR}$ يساوي -4، وميل $\overline{TS}$ يساوي $-\frac{4}{3}$، فإن: ميل $\overline{QR}$ ≠ ميل $\overline{TS}$، وعليه فإنّ $QRST$ ليس متوازي أضلاع.



الدرس 4-5، ص (42-41) :

9) نعم؛ بما أن $AB = 5 = CD$, $BC = 8 = AD$. فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أنّ $AC = \sqrt{89} = BD$، فإنّ القطرين متطابقان. لذلك فالشكل $ABCD$ مستطيل.



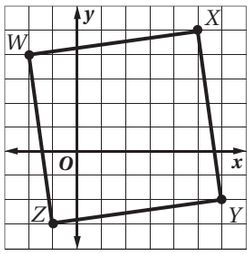
20) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $ABCD$ مستطيل.	1) معطيات
2) $ABCD$ متوازي أضلاع.	2) تعريف المستطيل
3) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	3) الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة
4) $\overline{DC} \cong \overline{CD}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	5) قطرا المستطيل متطابقان
6) $\triangle ADC \cong \triangle BCD$	6) SSS

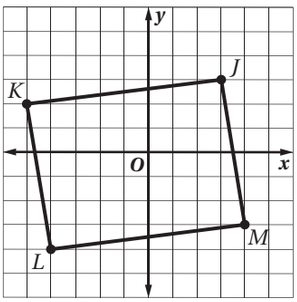
21) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $QTVW$ مستطيل؛ $\overline{QR} \cong \overline{ST}$.	1) معطيات
2) $QTVW$ متوازي أضلاع.	2) تعريف المستطيل
3) $\overline{WQ} \cong \overline{VT}$	3) الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة
4) $\angle Q$ و $\angle T$ قائمتان.	4) تعريف المستطيل
5) $\angle Q \cong \angle T$	5) جميع الزوايا القائمة متطابقة
6) $QR = ST$	6) تعريف تطابق القطع المستقيمة
7) $\overline{RS} \cong \overline{RS}$	7) خاصيّة الانعكاس للتطابق
8) $RS = RS$	8) تعريف تطابق القطع المستقيمة
9) $QR + RS = RS + ST$	9) خاصيّة الجمع للمساواة
10) $QS = QR + RS, RT = RS + ST$	10) مسلمة جمع القطع المستقيمة
11) $QS = RT$	11) بالتعويض
12) $\overline{QS} \cong \overline{RT}$	12) تعريف تطابق القطع المستقيمة
13) $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$	13) SAS

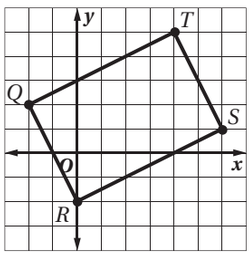
22) نعم؛ بما أنّ ميل $\overline{WX}$ يساوي ميل $\overline{YZ}$ ويساوي $\frac{1}{7}$، وميل $\overline{XY}$ يساوي ميل $\overline{ZW}$ ويساوي -7. فإنّ $WXYZ$ متوازي أضلاع. وبما أن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متجاورين يساوي -1، فإنّ الأضلاع المتجاورة متعامدة وتشكل زوايا قائمة. لذلك فالشكل $WXYZ$ مستطيل.



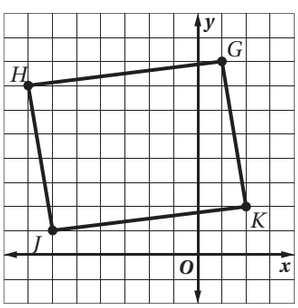
23) لا؛ بما أنّ $JK = \sqrt{65} = LM\,,\ KL = \sqrt{37} = MJ$، فإنّ $JKLM$ متوازي أضلاع، وبما أنّ $JL = \sqrt{98}\,,\ KM = \sqrt{106}$. فإنّ $KM \neq JL$، إذن فالقطران غير متطابقين. لذلك فالشكل $JKLM$ ليس مستطيلاً.



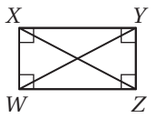
24) نعم؛ بما أنّ $QR = \sqrt{20} = ST\,,\ RS = \sqrt{45} = TQ$، فإنّ $QRST$ متوازي أضلاع. وبما أن $QS = \sqrt{65} = RT$، فإنّ القطرين متطابقان. إذن فالشكل $QRST$ مستطيل.



25) لا؛ بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي ميل $\overline{JK}$ ويساوي $\frac{1}{8}$، وميل $\overline{HJ}$ يساوي ميل $\overline{KG}$ ويساوي -6، فإنّ الشكل $GHJK$ متوازي أضلاع. وبما أن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متجاورين لا يساوي -1، فإنّ الأضلاع المتجاورة ليست متعامدة. لذلك فالشكل $GHJK$ ليس مستطيلًا.



33) **المعطيات:** $WXYZ$ مستطيل قطراه $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$.

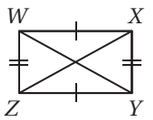


المطلوب: $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $WXYZ$ مستطيل قطراه $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$	**1)** معطيات
2) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$	**2)** الأضلاع المتقابلة للمستطيل متطابقة
3) $\overline{WZ} \cong \overline{WZ}$	**3)** خاصيّة الانعكاس للتطابق
4) $\angle XWZ$ و $\angle YZW$ قائمتان.	**4)** تعريف المستطيل
5) $\angle XWZ \cong \angle YZW$	**5)** جميع الزوايا القائمة متطابقة
6) $\triangle XWZ \cong \triangle YZW$	**6)** SAS
7) $WY \cong XZ$	**7)** العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

34) **المعطيات:** $WXYZ$ متوازي أضلاع و $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$



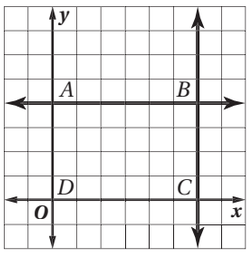
المطلوب: $WXYZ$ مستطيل.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $WXYZ$ متوازي أضلاع و $WY \cong XZ$	**1)** معطيات
2) $WX \cong YZ\,,\ XY \cong WZ$	**2)** كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
3) $\triangle WZX \cong \triangle XYW$	**3)** SSS
4) $\angle ZWX \cong \angle YXW$	**4)** (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة
5) $m\angle ZWX = m\angle YXW$	**5)** تعريف الزوايا المتطابقة
6) $\angle ZWX$ و $\angle YXW$ متكاملتان.	**6)** الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة
7) $m\angle ZWX + m\angle YXW = 180°$	**7)** تعريف الزاويتين المتكاملتين
8) $\angle ZWX$ و $\angle YXW$ قائمتان.	**8)** إذا كانت زاويتان متطابقتين ومتكاملتين، فإنّ كلًّا منهما قائمة
9) $\angle WZY$ و $\angle XYZ$ قائمتان.	**9)** إذا كانت إحدى زوايا متوازي أضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قائمة
10) $WXYZ$ مستطيل	**10)** تعريف المستطيل

35) إجابة ممكنة: يجب أن يقيس قطري الملعب والأضلاع. فإذا كان القطران متطابقين، وكل ضلعين متقابلين متطابقين، فإنّ الملعب مستطيل الشكل.

41) إجابة ممكنة: $x = 0$, $x = 6$, $y = 0$, $y = 4$



طول $\overline{AB}$ يساوي $0 - 6$ أو 6 وحدات. وطول $\overline{CD}$ يساوي $0 - 6$ أو 6 وحدات، ميل AB يساوي صفرًا، وميل DC يساوي صفرًا. وبما أنّ ضلعين للشكل الرباعي متوازيان ومتطابقان، فإنّه وبحسب النظرية 5.12، يكون متوازي أضلاع. ولأنّ $\overline{AB}$ أفقي و $\overline{BC}$ رأسي، فإنّ المستقيمين متعامدان، وقياس الزاوية التي يشكّلانها $90°$. وبحسب النظرية 5.6، فإذا كان لمتوازي أضلاع زاوية قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم. لذلك وبحسب التعريف يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا.

الدرس 5-5 ، ص (51-49) :

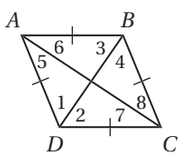
12) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $QRST$ متوازي أضلاع؛ $m\angle QPR = 90°$ ، $\overline{TR} \cong \overline{QS}$.	**1)** معطيات
2) $QRST$ مستطيل.	**2)** إذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين، فإنه مستطيل
3) $\angle QPR$ قائمة.	**3)** تعريف الزاوية القائمة
4) $\overline{QS} \perp \overline{TR}$	**4)** تعريف التعامد
5) $QRST$ معين	**5)** إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين، فإنه معين
6) $QRST$ مربّع.	**6)** النظرية 5.20؛ إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعينًا، فإنّه مربّع)

13) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $JKQP$ مربّع. $\overline{ML}$ تنصّف كلًّا من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$.	**1)** معطيات
2) $JKQP$ متوازي أضلاع.	**2)** جميع المربّعات متوازيات أضلاع
3) $JM \parallel \overline{KL}$	**3)** تعريف متوازي الأضلاع
4) $JP \cong \overline{KQ}$	**4)** الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة
5) $JP = KQ$	**5)** تعريف تطابق القطع المستقيمة
6) $JM = MP, KL = LQ$	**6)** تعريف المنصف
7) $JP = JM + MP$, $KQ = KL + LQ$	**7)** مسلمة جمع القطع المستقيمة
8) $JP = JM + JM$, $KQ = KL + KL$	**8)** خاصية التعويض
9) $JP = 2JM, KQ = 2KL$	**9)** بالتعويض
10) $2JM = 2KL$	**10)** خاصية الجمع للمساواة
11) $JM = KL$	**11)** خاصيّة القسمة للمساواة
12) $JM \cong \overline{KL}$	**12)** تعريف تطابق القطع المستقيمة
13) $JKLM$ متوازي أضلاع.	**13)** إذا وجد ضلعان متقابلان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين فإنّه متوازي أضلاع

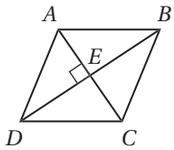
28) المعطيات: $ABCD$ معين.



المطلوب: إثبات أنّ كل قطر ينصّف زاويتين متقابلتين.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ معين. وبحسب تعريف المعين، يكون $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أنّ الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\angle ADC \cong \angle ABC$، و $\angle BCD \cong \angle BAD$. ولأنّ جميع أضلاع المعين متطابقة، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ وبحسب SAS، يكون $\triangle ADC \cong \triangle ABC$، إذن $\angle 6 \cong \angle 5$، و $\angle 8 \cong \angle 7$؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وكذلك $\triangle BCD \cong \triangle BAD$ بحسب SAS. ولذا $\angle 4 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 1$؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. ومن تعريف منصّف الزاوية، فإن كل قطر ينصّف زاويتين متقابلتين.

29) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع؛ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

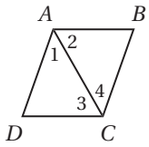


المطلوب: $ABCD$ معين.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع، وبما أن قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ $\overline{AE} \cong \overline{EC}$. وكذلك $\overline{BE} \cong \overline{BE}$ ؛ لأن تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية الانعكاس.

ونعلم أيضًا أنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. إذن $\angle AEB$ و $\angle BEC$ قائمتان بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين. إذن $\angle BEC \cong \angle AEB$؛ لأن جميع الزوايا القائمة متطابقة، لذلك $\triangle CEB \cong \triangle AEB$ بحسب SAS . إذن $\overline{CB} \cong \overline{AB}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وبما أنّ الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة. فإنّ $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ ، و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ ، إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AD}$ ؛ لأنّ تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي. وبما أنّ جميع أضلاع $\square ABCD$ متطابقة، فإنه معين بحسب التعريف.

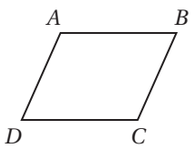
30) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، القطر $\overline{AC}$ ينصّف كلًّا من $\angle DAB$ و $\angle BCD$.



المطلوب: $\square ABCD$ معين.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع، وبما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، فإنّ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. وبحسب التعريف $\angle 2$ و $\angle 3$ متبادلتان داخليًا بالنسبة للضلعين المتوازيين $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$. ومن نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا متطابقتان، فإنّ $\angle 3 \cong \angle 2$، ولأنّ تطابق الزوايا يحقق خاصية التماثل، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$، ونعلم أن $\overline{AC}$ تنصّف كل من $\angle DAB$ و $\angle BCD$، إذن $\angle 2 \cong \angle 1$، و $\angle 4 \cong \angle 3$ بحسب التعريف. ومن خاصيّة التعدّي للتطابق يكون: $\angle 3 \cong \angle 1$، و $\angle 4 \cong \angle 2$، ومن عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين، يكون: $\overline{DC} \cong \overline{AD}$ ، و $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. ولأن $ABCD$ متوازي أضلاع، فإن $\overline{BC} = \overline{AD}$ ، ومن خاصية التعدي للتطابق نحصل على أنَّ: $\overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AB}$ وبما أن جميع أضلاع $\square ABCD$ متطابقة، فإنه معين بحسب التعريف.

31) المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع؛ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

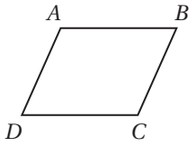


المطلوب: $ABCD$ معين.

البرهان: بما أنّ الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، و $\overline{CD} \cong \overline{AB}$. ونعلم أيضًا أن $\overline{BC} \cong \overline{AB}$. وبحسب خاصيّة التعدّي للتطابق تكون: $\overline{CD} \cong \overline{AB}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.

إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AD}$ ؛ لذلك $ABCD$ معين بحسب التعريف.

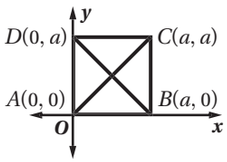
32) المعطيات: $ABCD$ مستطيل ومعين.



المطلوب: $ABCD$ مربّع.

البرهان: نعلم أنّ $ABCD$ مستطيل ومعين. إذن $ABCD$ متوازي أضلاع أيضًا؛ لأن جميع المستطيلات والمعينات متوازيات أضلاع. وبحسب تعريف المستطيل فإن $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ جميعها قوائم. وبحسب تعريف المعين، جميع الأضلاع متطابقة، لذلك $ABCD$ مربع؛ لأنّه متوازي أضلاع أضلاعه الأربعة متطابقة، وزواياه الأربع قوائم.

33) المعطيات: $ABCD$ مربّع.



المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{DB}$

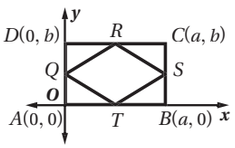
البرهان:

ميل $\overline{DB}$: $m = \dfrac{0-a}{a-0} = -1$

ميل $\overline{AC}$: $m = \dfrac{0-a}{0-a} = 1$

بما أنّ ميل $\overline{AC}$ يساوي سالب مقلوب ميل $\overline{DB}$، فإنهما متعامدان.

34) المعطيات: $ABCD$ مستطيل.



Q, R, S, T منتصفات أضلاع المستطيل.

المطلوب: $QRST$ معين.

البرهان:

إحداثيا نقطة المنتصف Q هما:

$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(0, \frac{b}{2}\right)$$

إحداثيا نقطة المنتصف R هما:

$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{2b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, b\right)$$

إحداثيا نقطة المنتصف S هما:

$$\left(\frac{a+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{2a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \left(a, \frac{b}{2}\right)$$

إحداثيا نقطة المنتصف T هما:

$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$QR=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$RS=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-b\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$ST=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$QT=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

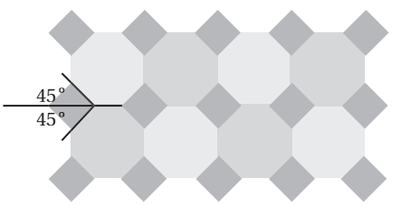
$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

بما أنّ $QR=RS=ST=QT$

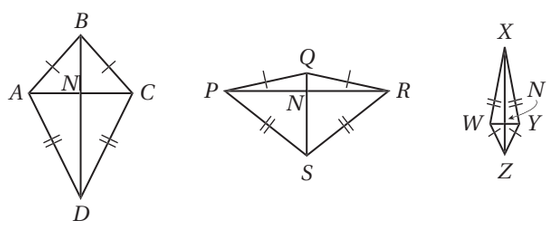
فإن $\overline{QR}\cong\overline{RS}\cong\overline{ST}\cong\overline{QT}$

إذن $QRST$ متوازي أضلاع؛ لأن كل ضلعين متقابلين متطابقان، وهو معين؛ لأن جميع أضلاعه متطابقة.

35) مربّعات؛ إجابة ممكنة: بما أن الثمانيات منتظمة، فإن الأضلاع متطابقة، وحيث أن الأشكال الرباعيّة تشترك مع الثمانيات في الأضلاع؛ لذا فإن الأشكال الرباعيّة معينات أو مربّعات. وزوايا رؤوس الأشكال الرباعية تتكون من الزوايا الخارجية لأضلاع الثمانيات المجاورة للرؤوس. ومجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لأي مضلع يساوي °360 دائمًا، ولأن الثماني المنتظم له 8 زوايا خارجية متطابقة، فإنّ قياس كل منها يساوي °45 ، وكما هو مبيّن في الشكل فإن قياس كل زاوية للأشكال الرباعية في النمط يساوي °45 + °45 أو °90، لذلك فالشكل الرباعي يكون مربّعًا.



36a) إجابة ممكنة:



38) صحيحة؛ إجابة ممكنة: بما أنّ المستطيل شكل رباعي زواياه الأربع قائمة، والمربّع مستطيل ومعين؛ فإنّ المربّع يكون مستطيلاً دائمًا.

العكس: إذا كان شكل رباعي مستطيلاً فإنّه مربّع. خطأ، إجابة ممكنة، المستطيل شكل رباعي زواياه الأربع قوائم، وأضلاعه المتقابلة متطابقة، وليست جميع أضلاعه متطابقة بالضرورة، إذن فهو ليس مربّعًا بالضرورة.

المعكوس: إذا كان الشكل الرباعي ليس مربّعًا فإنّه ليس مستطيلاً. خطأ؛ إجابة ممكنة: الشكل الرباعي الذي زواياه الأربع قائمة، وأضلاعه المتقابلة متطابقة ليس مربّعًا، ولكنه مستطيل.

المعاكس الإيجابي: إذا كان الشكل الرباعي ليس مستطيلاً، فإنّه ليس مربّعًا. صحيحة؛ إجابة ممكنة: إذا كان شكل رباعي ليس مستطيلاً، فإنّه ليس مربّعًا بحسب التعريف.

41) إجابة ممكنة:

متوازي الأضلاع: الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية ومتطابقة. والزوايا المتقابلة متطابقة. وقطراه ينصِّف كل منهما الآخر. وكل قطر يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.

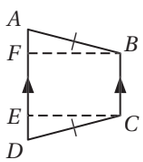
المستطيل: للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع، وزواياه الأربع قائمة، وقطراه متطابقان.

المعين: للمعين جميع خصائص متوازي الأضلاع، وجميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان وينصِّفان زوايا المعين.

المربع: للمربع جميع خصائص متوازي الأضلاع وخصائص المستطيل وخصائص المعين.

الدرس 6-5 ، ص (60 - 58) :

19) المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.



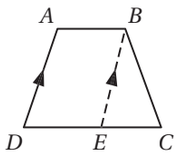
$\overline{BC}\parallel\overline{AD}, \overline{AB}\cong\overline{CD}$

المطلوب: $\angle A\cong\angle D, \angle ABC\cong\angle DCB$

البرهان: ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{BF}$ و $\overline{CE}$ بحيث يكون $\overline{BF}\perp\overline{AD}$، و $\overline{CE}\perp\overline{AD}$. وبما أنّ $\overline{BC}\parallel\overline{AD}$ ، والمسافة بين المستقيمين المتوازيين ثابتة، فإنّ $\overline{BF}\cong\overline{CE}$. وبما أن المستقيمين المتعامدين يشكِّلان زوايا قائمة، فإنّ $\angle BFA$ و $\angle CED$ قائمتان، إذن $\triangle BFA\cong\triangle CED$ بحسب حالة التطابق (HL). وبما أن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة، فإن $\angle A\cong\angle D$. وبما أنّ $\angle CBF$ و $\angle BCE$ قائمتان وجميع الزوايا القائمة متطابقة فإنّ $\angle CBF\cong\angle BCE$

ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة فإنَّ: $\angle ABF\cong\angle DCE$. إذن $\angle ABC\cong\angle DCB$ وفق مسلمة جمع الزوايا.

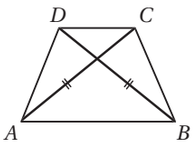
20) المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف فيه $\angle D \cong \angle C$.



المطلوب: إثبات أن $ABCD$ متطابق الساقين.

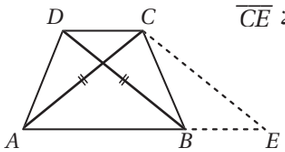
البرهان: ارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{EB}$ بحيث تكون $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$ وبذلك تكون $\angle BEC \cong \angle D$ بحسب مسلّمة الزاويتين المتناظرتين. ونعلم أنّ $\angle C \cong \angle D$، إذن وحسب خاصية التعدّي تكون $\angle BEC \cong \angle C$. إذن فالمثلث $\triangle EBC$ متطابق الضلعين، حيث $\overline{BC} \cong \overline{EB}$. ومن تعريف شبه المنحرف $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. وبما أن كل ضلعين متقابلين للشكل $ABED$ متوازيان فإنّه متوازي أضلاع. إذن: $\overline{EB} \cong \overline{AD}$، وحسب خاصية التعدّي، يكون $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. لذلك فشبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

21) المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف؛ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



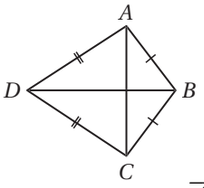
المطلوب: إثبات أنّ شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

البرهان: ارسم من الرأس C القطعة $\overline{CE}$ بحيث تكون $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$، وصل امتداد $\overline{AB}$ بحيث يتقاطع مع $\overline{CE}$ عند النقطة E، أي أنّ: $\overline{BE} \parallel \overline{DC}$



$\overline{CE} \parallel \overline{BD}$، وعليه فإن $BECD$ متوازي أضلاع، لذا $\overline{BD}, \overline{CE}$ متطابقان؛ لأنهما ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع وحيث $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ فإن $\overline{AC} \cong \overline{CE}$، أي أن $\triangle AEC$ متطابق الضلعين وعليه فإن $m\angle EAC \cong m\angle AEC$ من نظرية المثلث المتطابق الضلعين، كذلك $m\angle ABD \cong m\angle AEC$ من نظرية الزاويتين المتناظرتين حيث $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$ وَ $\overline{AC}$ قاطع لهما. وعليه فإن $m\angle BAC \cong m\angle ABD$ وفي المثلثين ABC و ABD ضلع مشترك AB، $\overline{AC} \cong \overline{BD}$، $m\angle ABD \cong m\angle BAC$ أي أن $\triangle ABD \cong \triangle ABC$ بحسب حالة التطابق (SAS)، وعليه فإن $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ لأنهما ضلعان متناظران في المثلثين المتطابقين، وهما كذلك ساقي شبه المنحرف $ABCD$. أي أن $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

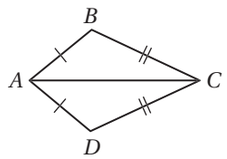
22) المعطيات: $ABCD$ شكل طائرة ورقية، فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{DC}$.



المطلوب: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

البرهان: تعلم أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{DC}$ إذن B و D كلاهما على بعدين متساويين من A و C. وإذا كانت نقطة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة، فإنها تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة. إذن فالمستقيم الذي يحوي النقطتين B و D عمود منصّف لـ $\overline{AC}$؛ لأنّه لا يوجد إلا مستقيم واحد فقط يمرّ في نقطتين مختلفتين. لذلك $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

23) المعطيات: $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة



المطلوب: $\angle B \cong \angle D$

$\angle BAD \ncong \angle BCD$

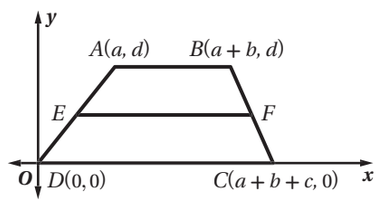
البرهان:

نعلم أنّ $\overline{AD} \cong \overline{AB}$، و $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ بحسب تعريف شكل الطائرة الورقيّة.

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ بحسب خاصيّة الانعكاس للتطابق، لذلك $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ بحسب حالة التطابق (SSS)، إذن $\angle B \cong \angle D$؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وإذا كان $\angle BAD \cong \angle BCD$، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع بحسب نظرية 5.10، وهذا يعني أن كل ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان، وهذا يتنافى مع تعريف شكل الطائرة الورقية التي فيها كل ضلعين متقابلين ليسا متطابقين ولا متوازيين. لذلك $\angle BAD \ncong \angle BCD$.

25) المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف، فيه $\overline{EF}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{EF} \parallel \overline{AB}, \overline{EF} \parallel \overline{DC}, EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$



البرهان:

بحسب تعريف القطعة المتوسطة لشبه المنحرف، فإن E هي نقطة منتصف $\overline{AD}$، و F نقطة منتصف $\overline{BC}$.

نقطة المنتصف E هي $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{d+0}{2}\right)$ أي $\left(\frac{a}{2}, \frac{d}{2}\right)$.

ونقطة المنتصف F هي $\left(\frac{a+b+a+b+c}{2}, \frac{d+0}{2}\right)$

أي $\left(\frac{2a+2b+c}{2}, \frac{d}{2}\right)$.

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفر، وميل $\overline{EF}$ يساوي صفرًا، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفرًا فإنّ $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$، و $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$.

$$AB = \sqrt{[(a+b)-a]^2 + (d-d)^2} = \sqrt{b^2} = b$$

$$DC = \sqrt{[(a+b+c)-0]^2 + (0-0)^2}$$

$$= \sqrt{(a+b+c)^2} = a+b+c$$

$$EF = \sqrt{\left(\frac{2a+2b+c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+2b+c}{2}\right)^2} = \frac{a+2b+c}{2}$$

$$\frac{1}{2}(AB+DC) = \frac{1}{2}[b+(a+b+c)]$$

$$= \frac{1}{2}(a+2b+c)$$

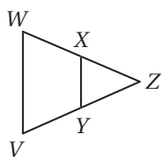
$$= \frac{a+2b+c}{2}$$

$$= EF$$

إذن $\frac{1}{2}(AB+DC) = EF$

39) المعطيات: $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}$ ، $\overline{XY}$ تنصّف كلًّا من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$، $\angle W \cong \angle ZXY$.

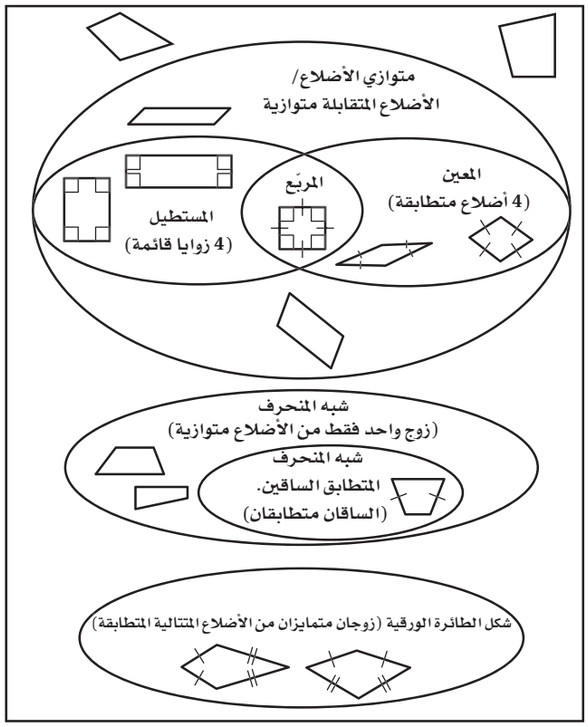
المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.



البرهان:

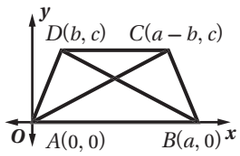
العبارات	المبررات
1) $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}$ ، $\overline{XY}$ تنصّف كلًّا من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$.	1) معطيات
2) $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}$	2) تعريف تطابق القطعة المستقيمة
3) $\frac{1}{2}WZ = \frac{1}{2}ZV$	3) خاصيّة الضرب للمساواة
4) $WX = VY$	4) تعريف نقطة المنتصف
5) $\overline{WX} \cong \overline{VY}$	5) تعريف تطابق القطع المستقيمة
6) $\angle W \cong \angle ZXY$	6) معطى
7) $\overline{XY} \parallel \overline{WV}$	7) عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين
8) $\overline{XY} \nparallel \overline{VY}$	8) امتدادهما يلتقي في z
9) $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.	9) تعريف شبه المنحرف المتطابق الساقين

41)



45) المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين، فيه $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{BD} \cong \overline{AC}$



البرهان:

$$DB = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$= \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$$

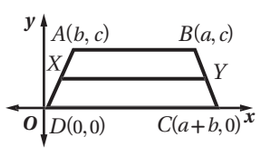
$$AC = \sqrt{((a-b)-0)^2 + (c-0)^2}$$

$$= \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$$

إذن $BD = AC$، ومن ذلك $\overline{BD} \cong \overline{AC}$

46) المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف، فيه $\overline{XY}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$, $\overline{XY} \parallel \overline{DC}$



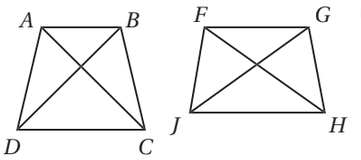
البرهان:

X نقطة منتصف $\overline{AD}$، وإحداثياتها $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

Y نقطة منتصف $\overline{BC}$، وإحداثياتها $\left(\frac{2a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

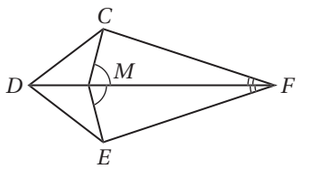
وبما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفرًا، وميل $\overline{XY}$ يساوي صفرًا، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفرًا، فإنّ $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$, $\overline{XY} \parallel \overline{DC}$،

50)



57) المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF, \angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle CMF \cong \angle EMF$, $\angle CFM \cong \angle EFM$	**1)** معطيات
2) $\overline{MF} \cong \overline{MF}$	**2)** خاصيّة الانعكاس للتطابق
3) $\triangle CMF \cong \triangle EMF$	**3)** ASA
4) $\overline{CM} \cong \overline{EM}$	**4)** العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
5) $\overline{DM} \cong \overline{DM}$	**5)** خاصيّة الانعكاس للتطابق
6) $\angle CMF$, $\angle DMC$ متكاملتان , $\angle DME$ $\angle EMF$ متكاملتان.	**6)** نظرية الزاويتين المتكاملتين
7) $\angle DMC \cong \angle DME$	**7)** نظرية تطابق المكملات
8) $\triangle DMC \cong \triangle DME$	**8)** SAS

دليل الدراسة والمراجعة ص (63) :

25) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\square ABCD$ ، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$	**1)** معطيات
2) $AE = CF$	**2)** تعريف تطابق القطع المستقيمة.
3) $BC \cong \overline{AD}$	**3)** الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.
4) $BC = AD$	**4)** تعريف تطابق القطع المستقيمة.
5) $BC = BF + CF$ ، $AD = AE + ED$	**5)** مسلمة جمع القطع المستقيمة.
6) $BF + CF = AE + ED$	**6)** بالتعويض
7) $BF + AE = AE + ED$	**7)** بالتعويض
8) $BF = ED$	**8)** خاصيّة الطرح.
9) $BF \cong \overline{ED}$	**9)** تعريف تطابق القطع المستقيمة.
10) $BF \parallel \overline{ED}$	**10)** تعريف متوازي الأضلاع.
11) الشكل الرباعي $EBFD$ متوازي أضلاع	**11)** إذا كان زوج من الأضلاع المتقابلة متوازيًا ومتطابقًا، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

الفصل 6

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (71)

	الدرس 1-6 — حصتان	الدرس 2-6 — حصتان
العنوان	**المضلعات المتشابهة**	**المثلثات المتشابهة**
الأهداف	• استعمال التناسب لتحديد المضلعات المتشابهة . • حل مسائل باستعمال خصائص المضلعات المتشابهة .	• تحديد المثلثات المتشابهة باستعمال مسلمة التشابه AA ونظريَّتي التشابه SAS , SSS . • استعمال المثلثات المتشابهة لحل المسائل.
المفردات	المضلعات المتشابهة معامل التشابه نسبة التشابه	
التمثيلات المتعددة	ص (78)	ص (87)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (12) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (13) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	آلة التصوير الرقمية، ص (73)	السبورة التفاعلية، ص (82)
تنويع التعليم	ص (73, 79)	ص (83, 87)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (89)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التشابه

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(9) حصص	(4) حصص	(13) حصة

الدرس 6-3 — حصتان	الدرس 6-4 — حصتان	توسع 6-4 — حصة واحدة
المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة	**عناصر المثلثات المتشابهة**	**معمل الهندسة: الكسريات**
• استعمال الأجزاء المتناسبة في المثلث. • استعمال الأجزاء المتناسبة في المستقيمات المتوازية.	• تعرُّف علاقات التناسب الخاصة بكلٍّ من منصِّفات الزوايا والارتفاعات والقطع المتوسطة المتناظرة في المثلثات المتشابهة واستعمالها. • استعمال نظرية منصِّف زاوية في مثلث.	• استقصاء ورسم الكسريات. • كتابة صيغ ترددية.
القطعة المنصفة في المثلث		الكسريات تكرار الأجزاء ذاتية التشابه صيغة ترددية
ص (97)		
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (14) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (15) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • المواد • ورقة منقطة مثلثيًا
السبورة التفاعلية، ص (91)	مدونة، ص (101)	
ص (93, 94, 98)	ص (101, 104)	

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (108–110)
- اختبار الفصل، ص (111)

الفصل 6 التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 6**	
	التهيئة للفصل 6 ، ص (71)	مخطط المعالجة، ص (71)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، كل مثالٍ	**مستوى المعالجة 1**
	تأكد	تدريبات المهارات، الفصول 5-1
	مسائل مهارات التفكير العليا	www.obeikaneducation.com
	مراجعة تراكمية	**مستوى المعالجة 2**
	أمثلة إضافية	تنويع التعليم
	تنبيه!	تنويع الواجبات المنزلية
	الخطوة 4، التقويم	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 5-1
	الاختبارات القصيرة ، ص(30, 31)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص(89)	**مستوى المعالجة 1**
	اختبار منتصف الفصل، ص(32)	تدريبات المهارات، الفصول 5-1
	www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com
		مستوى المعالجة 2
		تدريبات إعادة التعليم، الفصول 5-1
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص(110-108)	**مستوى المعالجة 1**
	اختبار الفصل، ص(111)	تدريبات المهارات، الفصول 5-1
	اختبار تراكمي، ص(115-112)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 2**
		تدريبات إعادة التعليم، الفصول 5-1
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 6**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص(39-34)	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 5-1
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص(41-40)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص(33)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص(42)	
	الاختبار التراكمي ، الفصول (6-1) ، ص(45-43)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

الفصل 6

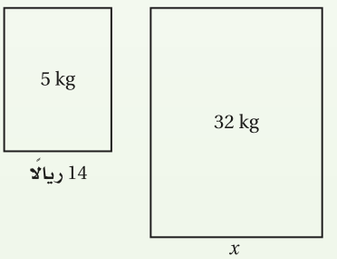
البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون: اطلب إلى الطلبة استعمال الانترنت لاستقصاء النسبة الذهبيّة، واطلب إليهم إحضار تفسيرات حول معناها، ولماذا سُمّيت بهذا الاسم، واطلب إليهم أن يعيّنوا مبانٍ وأعمالًا فنيّةً تحوي مستطيلات بنسبة ذهبيّة. ويمكنهم أن يعملوا ملصقًا أو عرضًا متعدد الوسائط لاكتشافاتهم.

المتعلمون البصريون / المكانيُّون: أعط كل طالب بطاقةً مرسومًا عليها مضلع، وبطاقة أخرى عليها صورة مكبرة أو مصغرة لذلك المضلع، ثم اطلب إليهم أن يحسبوا النسبة بين محيطات ومساحات المضلعات.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب أن يشرحوا إجابة السؤال الآتي باستعمال الكلمات والأمثلة.
"إذا علمت أن ثمن 5 kg من سلعةٍ ما هو 14 ريالًا، فكيف يمكنك استعمال التناسب لإيجاد ثمن 32 kg من تلك السلعة؟"



البديل 3 فوق المتوسط فوق

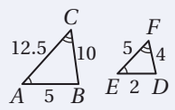
اطلب إلى الطلبة استعمال برمجيةٍ للرسم البياني أو ورقة رسم بيانيٍّ لرسم مخطط لأرضية مكتبة المدرسة، ثم اطلب إليهم قياس محيط المكان ومحيط كل شيءٍ داخله، وأن يعيِّنوا معامل التشابة (مقياس الرسم) ويكتبوه على رسوماتهم.

القراءة والكتابة بلغة الرياضيات

الدراسة

مهارة الدراسة

شجِّع الطلبة على كتابة ملاحظاتهم العملية عن العمليات، في أثناء دراستهم المفاهيم والخوارزميات الجديدة. فالملاحظات العملية تساعد الطلبة على حل مسائل باتباع خطوات حل المسألة، وذلك بكتابة الخطوات في العمود الأيمن، وحل المسألة في العمود الأيسر، فتصف ملاحظاتهم حول العمليات في الجدول المجاور كيفية تحديد ما إذا كان شكلان متشابهين أم لا، وهذا ما سيدرسه الطلبة في الدرس 1-6.

العمليّة	مثال
حدِّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. **الخطوة 1:** عيِّن الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة . **الخطوة 2:** حدّد ما إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة أم لا. **الخطوة 3:** حدّد ما إذا كانت الأضلاع المتناظرة متناسبة أم لا. **الخطوة 4:** إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة، أو كانت الأضلاع المتناظرة متناسبة، فإن الشكلين متشابهان.	 الزوايا المتناظرة: $\angle A$ و $\angle E$ ، $\angle C$ و $\angle F$ ، $\angle B$ و $\angle D$ $\angle A \cong \angle E; \angle C \cong \angle F$ (معطيات) $\angle B \cong \angle D$ (نظرية الزاوية الثالثة) والأضلاع المتناظرة: $\overline{AC}$ و $\overline{EF}$ ، $\overline{AB}$ و $\overline{ED}$ ، $\overline{BC}$ و $\overline{DF}$ $\frac{AB}{ED} = \frac{CB}{FD} = \frac{AC}{EF}$ $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{12.5}{5} = 2\frac{1}{2}$ المثلثان متشابهان أي أن: $\triangle ABC \sim \triangle EDF$

يسهم هذا النشاط وماشابهه في بناء استقلالية الطلاب من خلال استعمالهم الاستراتيجيات الخاصة بهم.

المحتوى الرياضي

الفصل 6

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 6

- حلّ مسائل من واقع الحياة، تشمل تلك التي تتضمن علاقات تناسب.
- وصف تأثير تغيّر الأبعاد تناسبيًّا.
- استعمال الرموز لتمثيل المتغيّرات والقيم غير المعروفة.
- البحث عن الأنماط وتمثيل التعميمات جبريًّا.

الفصل 6

- استعمال النسب لحل مسائل تتضمن أشكالًا متشابهة.
- تحديد المثلثات المتشابهة، واستعمال الأجراء المتناسبة منها في حل مسائل، وإيجاد قياسات مجهولة.

مابعد الفصل 6

- تمثيل الأنماط باستعمال المتتابعات والمتسلسلات الحسابيّة والهندسيّة.
- استعمال خصائص الدوالّ لتحليل المسائل وحلّها، والتوصل إلى تنبؤات .

ملخص الدروس

6-1 المضلّعات المتشابهة

يكون المضلعان متشابهين إذا كان لهما الشكل نفسه ، إلا أنهما قد يختلفان في الأبعاد. ويكون المضلعان متشابهين، إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة. وترتيب الرؤوس مهمٌّ؛ لأنّه يحدّد الزوايا والأضلاع المتناظرة .

عبارة التشابه	الزوايا المتطابقة	الأضلاع المتناظرة
$ABCD \sim EFGH$	$\angle A \cong \angle E$ $\angle B \cong \angle F$ $\angle C \cong \angle G$ $\angle D \cong \angle H$	$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$

والنسبة بين طولي ضلعين متناظرين لمضلّعين متشابهين تُسمّى معامل التشابه، كما أن النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين هي نفسها النسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة وتساوي نسبة التشابه.

6-2 المثلثات المتشابهة

يكون المثلثان متشابهين، إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة. ومع ذلك يمكن إثبات تشابه مثلثين من دون معرفة قياس كل زاويةٍ وكل ضلعٍ، حيث تنصّ مسلّمة التشابه بزاويتين (AA) على أنه إذا طابقت زاويتانِ في مثلثٍ زاويتين في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متشابهان.

وكذلك إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة، فإنّ المثلثين متشابهان (نظرية التشابه SSS).

وإذا كان طولا ضلعين لمثلثٍ متناسبين مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في مثلثٍ آخر، وكانت الزاويتان المحصورتان بينهما متطابقتين ، فإن المثلثين متشابهان (نظرية التشابه SAS) .

وتشابه المثلثات يحقق خاصية الانعكاس والتماثل والتعدّي، ويمكن استعمال خصائص المثلثات المتشابهة لحلّ مسائل من واقع الحياة باستعمال القياس غير المباشر.

6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

تنص نظريّة التناسب في المثلث، على أنّه إذا وازَى مستقيم أحد أضلاع مثلثٍ، وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين مختلفتين، فإنّه يقسم هذين الضلعين إلى قطعٍ مستقيمةٍ أطوالها متناسبة.

وعكس هذه النظرية صحيح أيضًا؛ أي أنه إذا قطع مستقيم ضلعين لمثلث وقسَّمَهما إلى قطع مستقيمة أطوالها المتناظرة متناسبة ، فإنّه يوازي الضلع الثالث، ويمكن أن تُوَسّع هاتان النظريتان لثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر. فإذا قطعت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر قاطعين، فإن المستقيمات المتوازية تقطّع القاطعين تناسبيًّا. وإذا قطعت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر قطعًا متطابقة من قاطع، فإنها تقطع قطعًا متطابقة من أيّ قاطع آخر.

وإحدى الحالات الخاصّة لمستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث هي القطعة المنصّفة. فالقطعة المنصفة هي قطعة مستقيمة طرفاها نقطتا منتصفَي ضلعَي المثلث، والقطعة المنصّفة توازي أحد أضلاع المثلث وطولها يساوي نصف طوله.

6-4 عناصر المثلثات المتشابهة

النسبة بين ارتفاعات مثلثين متشابهين هي نفسها النسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة، فإذا كان المثلثان متشابهين، فإنّ ارتفاعاتهما المتناظرة تكون متناسبةً مع أطوال الأضلاع المتناظرة. وفي الحقيقة، تسري هذه العلاقة على منصِّفات الزوايا والقطع المتوسطة أيضًا.

وتوجد علاقة أيضًا بين منصِّف زاوية مثلث والضلع المقابل لتلك الزاوية، فمنصّف إحدى زوايا مثلث، يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين النسبة بين طولَيهِما كالنسبة بين طولَي الضلعين الآخرين.

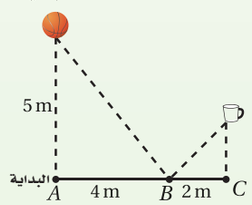
مشروع الفصل

مسار الارتداد:

يستعمل الطلبة ما تعلَّموه عن المثلثات المتشابهة؛ لتحديد مسار ارتداد كرة السلة عندما تقذف إلى جدارٍ بزاويةٍ ما.

(علمًا بأنه عندما تقذف كرة إلى حائط وترتد، فإن الزاويتين الناتجتين عند مسار الكرة والحائط تكونان متطابقتان).

- يشترك كل طالب مع زميل له في الصف للقيام بهذه التجربة، ويحتاجان من أجل القيام بذلك إلى كرة سلة، أو أي نوع من الكرات المشابهة، وعصًا طولها 1 m وكوب ورقيٍّ وشريطٍ لاصق وقلم تخطيط.
- عيّن على حائطٍ عمودي مستوٍ نقطةً قريبةً من الأرض (A) وسمها نقطة "البداية" .
- قس من النقطة (A) مسافة 4 m أفقيًّا وثبت شريطًا لاصقًا على الحائط وسمها (النقطة B).
- قس على نفس امتداد النقطة (B) مسافة 2 m، وثبت شريطًا لاصقًا على الحائط وسمها (النقطة C).
- ارجع إلى النقطة (A) وقس مسافة 5 m عموديًّا على الحائط كام في الشكل أدناه.



- كيف يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتشابهة؛ لتحديد الموقع الذي تضع عنده كوبًا ورقيًّا في الاتجاه العمودي على الحائط عند النقطة C، بحيث إنه عندما تقذف الكرة من نقطة البداية إلى النقطة B، سترتد عن الحائط وتصطدم بالكوب؟
- ماذا يحدث عندما تغير بُعد نقطة البداية عن الجدار؟
- سجّل نتائجك، واعمل رسمًا دقيقًا لتجربتك، واعرضه أمام الطلبة.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي.

التعريف: معامل التشابه هو النسبة بين طولي ضلعين متناظرين لمضلعين متشابهين.

التشابه Similarity



فيما سبق:
درستُ النسبة والتناسب وتطبيقاتهما الحياتية.

والآن:
- أتعرّف المضلعات المتشابهة، وأستعمل النسبة والتناسب لحل المسائل.

لماذا؟

تصميم: يتم تصميم بعض المجسمات والمباني لتشابه أشياء مشهورة بحيث يكون هناك تناسب بين الأطوال في تلك المجسمات ونظيراتها في الشكل الأصلي.

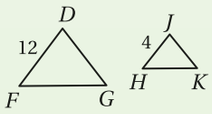
المطويات منظم أفكار

التشابه: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 6، مبتدئًا بثلاث أوراق من دفتر الملاحظات.

1. اطوِ كلًّا من الأوراق الثلاث من المنتصف.
2. قُصّ الأوراق على طول خط الطيّ.
3. قُصّ الجانب الأيسر لكل ورقة؛ لعمل شرائط فهرسة، ثم ثبّت الحافة اليمنى؛ بحيث تشكل الأوراق دفترًا.
4. اكتب عنوان الفصل على الصفحة الأولى، وأرقام الدروس على الأشرطة، وخصص الصفحة الأخيرة للمفردات الجديدة.



مثال: في الشكل الآتي، $\triangle DFG \sim \triangle JHK$



سؤال: ما معامل تشابه $\triangle DFG$ إلى $\triangle JHK$؟ $\frac{12}{4}$ أو 3

ما معامل تشابه $\triangle JHK$ إلى $\triangle DFG$؟ $\frac{4}{12}$ أو $\frac{1}{3}$

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضّح.

غرضها: يدوّن الطلبة ملاحظاتهم حول كل درسٍ من دروس هذا الفصل.

وظيفتها: يستعمل الطلبة مطوياتهم لكتابة ملاحظات وحل مسائل أثناء قراءة كل درس في هذا الفصل ، ثم اطلب إليهم أن يُسّجلوا أسئلتهم، وكلما تعلموا أكثر عن التشابه شجعهم على إيجاد إجابات لها. والتساؤل الذاتي يساعد الطلبة على التركيز في أثناء الدراسة.

وقت استعمالها: شجّع الطلبة أثناء دراستهم الفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (28, 29) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 6

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات الضرورية السابقة.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

(تستعمل مع الدروس 1–6 إلى 3–6)

حل كلًّا من المعادلات الآتية:

1) $\frac{3x}{8} = \frac{6}{x}$ 4 أو -4

2) $\frac{7}{3} = \frac{x-4}{6}$ 18

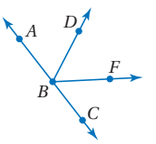
3) $\frac{x+9}{2} = \frac{3x-1}{8}$ -37

4) $\frac{3}{2x} = \frac{3x}{8}$ 2 أو -2

5) **تعليم:** نسبة عدد الطلاب إلى عدد المعلمين في مدرسة هي 17 إلى 1. إذا كان عدد طلاب المدرسة 1088 طالبًا، فما عدد المعلمين؟ 64 معلمًا

(تستعمل مع الدرس 3–6)

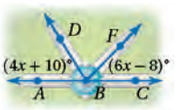
جبر: في الشكل أدناه، $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ نصفا مستقيمٍ متعاكسان، و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$. (مهارة سابقة)



6) إذا كان: $m\angle ABF = (3x-8)^\circ, m\angle ABD = (x+14)^\circ$، فأوجد $m\angle ABD$. 50°

7) إذا كان: $m\angle FBC = (2x+25)^\circ, m\angle ABF = (10x-1)^\circ$، فأوجد $m\angle DBF$. 64.5°

8) **حدائق:** يخطط مهندس لإضافة ممرات تصل إلى نافورةٍ كما هو مبيّن أدناه، إذا كان $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ نصفي مستقيمٍ متعاكسين و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$، فأوجد $m\angle FBC$. 64°



مراجعة سريعة

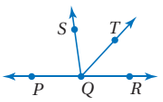
مثال 1

حل المعادلة: $\frac{4x-3}{5} = \frac{2x+11}{3}$.

$\frac{4x-3}{5} = \frac{2x+11}{3}$	المعادلة الأصليّة
$3(4x-3) = 5(2x+11)$	خاصية الضرب التبادلي
$12x - 9 = 10x + 55$	خاصيّة التوزيع
$2x = 64$	خاصية الجمع والطرح للمساواة
$x = 32$	خاصية القسمة للمساواة

مثال 2

في الشكل أدناه، $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$ نصفا مستقيم متعاكسان، و $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، إذا كان: $m\angle SQR = (6x+8)^\circ$، $m\angle TQR = (4x-14)^\circ$، فأوجد $m\angle SQT$.



بما أنّ $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، فإن:

$m\angle SQR = 2(m\angle TQR)$	تعريف منصّف الزاوية
$6x + 8 = 2(4x - 14)$	بالتعويض
$6x + 8 = 8x - 28$	خاصيّة التوزيع
$-2x = -36$	خاصية الطرح للمساواة
$x = 18$	خاصية القسمة للمساواة

وبما أنّ $\overrightarrow{QT}$ ينصّف $\angle SQR$، فإن:

$m\angle SQT = m\angle TQR$	تعريف منصّف الزاوية
$m\angle SQT = 4x - 14$	بالتعويض
$m\angle SQT = 58^\circ$	بالتعويض عن $x = 18$ والتبسيط

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. والعبارة "إذا ... فعد إلى"، في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،
فعد إلى	تدريبات المهارات، الفصل (1)، ص (43)
	www.obeikaneducation.com

المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فعد إلى	تدريبات إعادة التعليم، الفصل (1)، ص (41)
	www.obeikaneducation.com

6-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-1

استعمال التناسب لحل المسائل .

الدرس 6-1

استعمال التناسب لتحديد المضلعات المتشابهة.

حل مسائل باستعمال خصائص المضلعات المتشابهة.

ما بعد الدرس 6-1

استعمال أنماط عدديّة؛ للتوصل إلى تعميمات حول النسب في الأشكال المتشابهة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- في أيّ اتجاه كبّرت الصورة؟ أفقيًّا
- لماذا تشوّه الصورة عندما يتم تكبيرها لتملأ الشاشة؟ لأن عرض الشاشة أكبر من طولها، وذلك على العكس من الصورة.
- ما الطرق الأخرى التي يمكن أن تستعمل بها الصورة؛ لتملأ الشاشة من دون أن تتشوّه؟ إجابة ممكنة: يمكن استعمال نسخٍ متعدّدة للصورة لتملأ الشاشة.

إجابة (تحقق من فهمك):

1) الزوايا المتطابقة:

$\angle N \cong \angle U, \angle P \cong \angle V,$
$\angle Q \cong \angle S, \angle R \cong \angle T$

التناسب: $\frac{NP}{UV} = \frac{PQ}{VS} = \frac{QR}{ST} = \frac{RN}{TU}$

6-1 المضلعات المتشابهة
Similar Polygons

فيما سبق:
درستُ استعمال التناسب لحل المسائل.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل التناسب لتحديد المضلعات المتشابهة.
- أحل مسائل باستعمال خصائص المضلعات المتشابهة.

المفردات:
المضلعات المتشابهة
similar polygons
معامل التشابه
scale factor
نسبة التشابه
similarity ratio

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



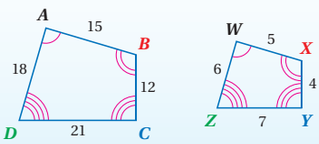

يزيّن بعض الأشخاص شاشات حواسيبهم باستعمال صور شخصية لهم، وذلك بوضع صورة بحجمها الأصلي في وسط الشاشة، أو بتكبيرها لتملأ الشاشة، إلّا أن الطريقة الثانية تُظهر الصورة مشوّهةً؛ لأن الصورة الأصلية والصورة الجديدة لا تكونان متشابهتين هندسيًّا.

تحديد المضلعات المتشابهة: المضلعات المتشابهة لها الشكل نفسه، ولكن ليس بالضرورة أن يكون لها القياسات نفسها.

مفهوم أساسي — المضلعات المتشابهة — أضف إلى مطويتك

يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

مثال: في الشكل أدناه، $ABCD$ يشابه $WXYZ$.



الزوايا المتطابقة:

$\angle A \cong \angle W, \angle B \cong \angle X, \angle C \cong \angle Y, \angle D \cong \angle Z$

التناسب:

$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW} = \frac{3}{1}$

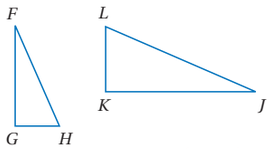
الرموز: $ABCD \sim WXYZ$

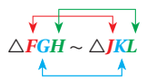
وكما هو الحال في عبارة التطابق، فإن ترتيب الرؤوس في عبارة التشابه مثل $ABCD \sim WXYZ$ مهمٌّ جدًّا؛ لأنّه يحدّد الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة.

مثال 1 — استعمال عبارة التشابه

إذا كان $\triangle FGH \sim \triangle JKL$ ، فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.

استعمل عبارة التشابه.





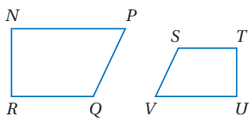
الزوايا المتطابقة: $\angle F \cong \angle J, \angle G \cong \angle K, \angle H \cong \angle L$

التناسب: $\frac{FG}{JK} = \frac{GH}{KL} = \frac{HF}{LJ}$

تحقق من فهمك

انظر الهامش

1) إذا كان $NPQR \sim UVST$ ، فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.



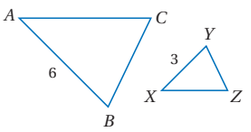
قراءة الرياضيات

الرمزان ≁ و ∽ :
يُقرأ الرمز ∽ يشابه، ويقرأ الرمز ≁ لايشابه، أو ليس مشابهًا لـ.

مصادر الدرس 6-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (73)	• تنويع التعليم ص (73, 79)	• تنويع التعليم ص (73, 79)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (12)	• كتاب التمارين ص (12)	• كتاب التمارين ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

النسبة بين طولي ضلعين متناظرين لمضلعين متشابهين تُسمّى **معامل التشابه** أو (عامل المقياس). ويعتمد معامل التشابه على ترتيب المقارنة.



ففي الشكل المجاور $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$

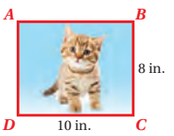
ومعامل تشابه $\triangle ABC$ إلى $\triangle XYZ$ يساوي $\frac{6}{3}$ أو 2

بينما معامل تشابه $\triangle XYZ$ إلى $\triangle ABC$ يساوي $\frac{3}{6}$ أو $\frac{1}{2}$

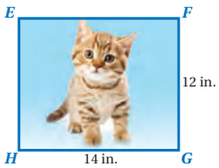
معامل التشابه بين مضلّعَين متشابهين يسمى **نسبة التشابه** أحيانًا

مثال 2 من واقع الحياة — تحديد المضلعات المتشابهة

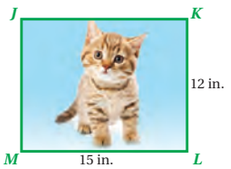
صور: يريد كمال أن يستعمل الصورة المستطيلة الشكل المجاورة خلفيّة لشاشة الحاسوب، ولكنه يحتاج لتغيير أبعادها، حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الصورتين المستطيلتين الآتيتين مشابهةً لها أم لا؟ وإذا كانت كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. وضّح إجابتك.



a)



b)



a) الخطوة 1: قارن الزوايا المتناظرة.

بما أن جميع زوايا المستطيل قوائم، والزوايا القوائم متطابقة، فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

الخطوة 2: قارن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$\frac{BC}{FG} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{DC}{HG} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

وحيث إن $\frac{5}{7} \neq \frac{2}{3}$، فإن الأضلاع المتناظرة غير متناسبة، وعليه فإنّ $ABCD \not\sim EFGH$

إذن فالصورتان غير متشابهتين.

b) الخطوة 1: بما أنّ $ABCD$, $JKLM$ مستطيلان، فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.

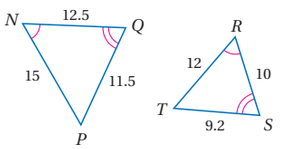
الخطوة 2: قارن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$\frac{BC}{KL} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{DC}{ML} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

وحيث إن $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$، فإن الأضلاع المتناظرة متناسبة، وعليه فإن $ABCD \sim JKLM$ ؛ إذن فالصورتان متشابهتان ومعامل تشابه $ABCD$ إلى $JKLM$ يساوي $\frac{2}{3}$

تحقق من فهمك

2) حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، ووضّح إجابتك.



إرشادات للدراسة

تناسب المستطيلات: لاختبار تناسب أضلاع مستطيلين، يكفي اختبار تناسب ضلعين متتالين من المستطيل الأول مع الضلعين المناظرين لهما في المستطيل الثاني؛ لأن المستطيل فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان.

2) نعم؛ $\triangle NQP \sim \triangle RST$؛ لأن $\angle N \cong \angle R, \angle Q \cong \angle S,$ $\angle P \cong \angle T$ بحسب نظرية الزاوية الثالثة؛ و $\frac{NQ}{RS} = \frac{QP}{ST} = \frac{PN}{TR}$. ومعامل التشابه $\frac{5}{4}$

إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحل: للتحقق من معامل التشابه، أوجد النسبة بين طولي ضلعين متناظرين آخرين.

استعمال عبارة التشابه

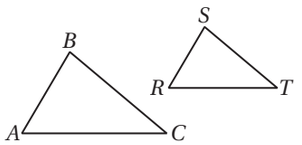
المثال 1 يبيّن كيفية استعمال عبارة التشابه لتحديد أزواج الزوايا المتطابقة، والتناسب بين الأضلاع المتناظرة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 إذا كان: $\triangle ABC \sim \triangle RST$، فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.



الزوايا المتطابقة:

$\angle A \cong \angle R, \angle B \cong \angle S, \angle C \cong \angle T$

التناسب: $\frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT}$

التعليم باستعمال التقنيات

آلة التصوير الرقميّة: اطلب إلى الطلاب التقاط صورة وطبع عدّة نسخ مختلفة القياسات منها (3 in×5 in, 4 in×6 in, 6 in×9 in, 8 in×10 in)

ثم اطلب إليهم قياس الصور واستعمال التناسب؛ لتحديد أيٍّ من هذه الصور تكون مستطيلات متشابهة، وأن يُحضِروا صورهم إلى الصف، ويبيِّنوا أن الصور غير المتشابهة قد تبدو مختلفةً عن بعضها.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

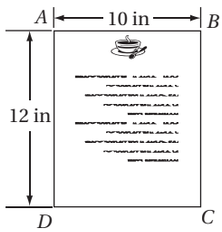
المتعلمون البصريون / المكانيّون: بيّن للطلاب كيف يحافظون على الاتساق والترتيب عند تحليل الأشكال للتحقّق من التشابه، فمثلًا الضلع المحصور بزاويتين في المضلع الأول، يناظر الضلع المحصور بالزاويتين المتطابقتين لهما في المضلع الثاني، وقد يختارون أن يقارنوا الجانب الأيمن في كلا الشكلين أولًا، ثم اعرض عليهم طرقًا لتنظيم عملهم، بحيث يكتبون الرؤوس المتناظرة بالترتيب الصحيح.

تحديد المضلعات المتشابهة

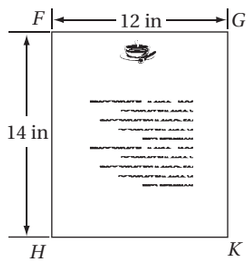
المثال 2 يبيّن كيفية استعمال المفاهيم الأساسيّة؛ لتحديد الأشكال المتشابهة.

مثال إضافي

2 **طعام:** يُعدّ ماجد قائمة طعام جديدة للمطعم الذي يعمل فيه. حدّد ما إذا كانت قائمتا الطعام في كل من a وَ b مشابهة لقائمة الطعام الأصليّة الموضحة بالشكل أدناه. وإذا كانتا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. ووضِّح إجابتك، علمًا بأنَّ قوائم الطعام مستطيلة الشكل.

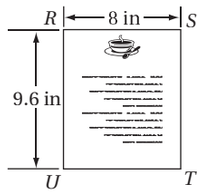


(a



لا؛ لأن: $\frac{AB}{FG} \neq \frac{AD}{FH}$.

(b



نعم؛ لأن $\frac{AB}{RS} = \frac{AD}{RU} = \frac{5}{4}$

إذن $ABCD \sim RSTU$

ومعامل التشابه هو $\frac{5}{4}$

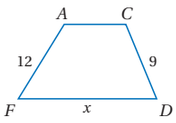
إرشادات للدراسة

التشابه والتطابق: إذا كان المضلعان متطابقين فإنهما متشابهان أيضًا. وتكون جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة، والنسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين هي 1:1 .

استعمال الأشكال المتشابهة: يمكنك استعمال معاملات التشابه والتناسبات، لحل مسائل تتضمن أشكالًا متشابهة.

مثال 3 استعمال الأشكال المتشابهة لإيجاد القيم المجهولة

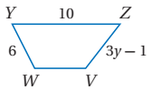
في الشكل المجاور، $ACDF \sim VWYZ$.



a) أوجد قيمة x .

استعمل أطوال الأضلاع المتناظرة لكتابة تناسب

$\frac{CD}{WY} = \frac{DF}{YZ}$	الأضلاع المتناظرة متناسبة
$\frac{9}{6} = \frac{x}{10}$	$CD = 9, WY = 6, DF = x, YZ = 10$
$9(10) = 6(x)$	خاصيّة الضرب التبادلي
$90 = 6x$	بالضرب
$15 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 6

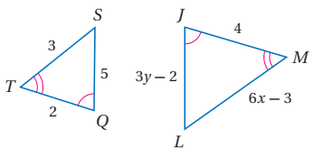


b) أوجد قيمة y .

$\frac{CD}{WY} = \frac{FA}{ZV}$	الأضلاع المتناظرة متناسبة
$\frac{9}{6} = \frac{12}{3y-1}$	$CD = 9, WY = 6, FA = 12, ZV = 3y - 1$
$9(3y-1) = 6(12)$	خاصية الضرب التبادلي
$27y - 9 = 72$	بالضرب
$27y = 81$	بإضافة 9 لكلا الطرفين
$y = 3$	بقسمة كلا الطرفين على 27

تحقق من فهمك

إذا كان $\triangle JLM \sim \triangle QST$، فأوجد قيمة المتغير في كلٍّ مما يأتي:



3A x 1.5

3B y 4

إرشادات للدراسة

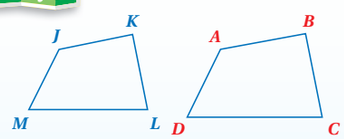
تحديد المثلثات المتشابهة: عندما تُعطى زوجين من الزوايا المتناظرة المتطابقة في مثلثين، تذكر أنّه يمكنك استعمال نظرية الزاوية الثالثة؛ لإثبات أن الزاويتين المتناظرتين الباقيتين متطابقتان أيضًا.

النسبة بين أيِّ طولين متناظرين في المضلعين المتشابهين تساوي معامل التشابه بينهما. ويؤدي هذا إلى النظرية الآتية حول محيطي المضلعين المتشابهين.

نظرية 6.1 محيطا المضلعين المتشابهين

أضف إلى مطويتك

إذا تشابه مضلعان، فإنّ النسبة بين محيطيهما تساوي معامل التشابه بينهما.



مثال: إذا كان $ABCD \sim JKLM$ ، فإنّ:

$$\frac{AB}{JK} = \frac{BC}{KL} = \frac{CD}{LM} = \frac{DA}{MJ} = \frac{AB + BC + CD + DA}{JK + KL + LM + MJ}$$

ستبرهن النظريّة 6.1 الخاصة بحالة المثلثات في السؤال 34

إرشادات للمعلم الجديد

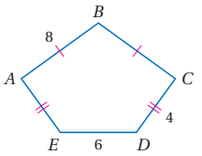
الألوان المختلفة: عند تحديد العناصر المتناظرة، استعمل ألوانًا مختلفةً؛ لرسم دوائر حول حروف الزوايا المتناظرة .

تنبيه !

المحيط:
تذكّر أن المحيط هو المسافة حول الشكل، وعندما تُريد إيجاد محيط مضلع، احرص على أن تجد مجموع أطوال جميع أضلاعه، وقد تستعمل قوانين هندسيّة؛ لإيجاد أطوال الأضلاع غير المعطاة.

مثال 4 استعمال معامل التشابه لإيجاد المحيط

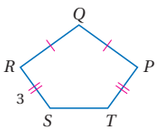
إذا كان $PQRST \sim ABCDE$ ، فأوجد معامل تشابه $ABCDE$ إلى $PQRST$ ومحيط كل مضلّع.



معامل تشابه $ABCDE$ إلى $PQRST$ يساوي $\frac{CD}{RS}$ أي $\frac{4}{3}$.

وبما أنّ: $\overline{BC} \cong \overline{AB}, \overline{AE} \cong \overline{CD}$ ،

فإنّ محيط $ABCDE$ يساوي $4 + 6 + 8 + 8 = 30$ أي 30 .



استعمل محيط $ABCDE$ ، ومعامل التشابه لكتابة تناسب.

افترض أن محيط $PQRST$ يساوي x .

$\frac{4}{3} = \frac{\text{محيط } ABCDE}{\text{محيط } PQRST}$ **النظرية 6.1**

$\frac{4}{3} = \frac{30}{x}$ **بالتعويض**

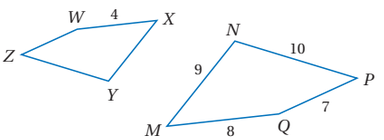
$(3)(30) = 4x$ **خاصية الضرب التبادلي**

$22.5 = x$ **بقسمة كلا الطرفين على 4**

إذن محيط $PQRST$ يساوي 22.5 .

تحقق من فهمك

4) إذا كان $MNPQ \sim XYZW$ ، فأوجد معامل تشابه $MNPQ$ إلى $XYZW$ ، ومحيط كل مضلع.

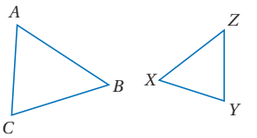


4) معامل التشابه = 2 ،
محيط $MNPQ$ يساوي 34 ،
محيط $XYZW$ يساوي 17

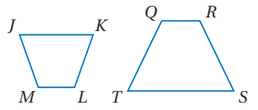
تأكد

المثال 1 اكتب جميع الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) $\triangle ABC \sim \triangle ZYX$ انظر الهامش

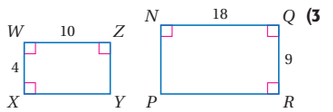


2) $JKLM \sim TSRQ$ انظر الهامش



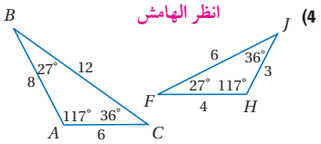
المثال 2 حدّد ما إذا كان المضلعان في كلٍّ من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وضِّح إجابتك.

3)



لا؛ لأن $\frac{NQ}{WZ} \neq \frac{QR}{WX}$

4) انظر الهامش



إجابات:

1) $\angle A \cong \angle Z, \angle B \cong \angle Y, \angle C \cong \angle X, \frac{AC}{ZX} = \frac{BC}{YX} = \frac{AB}{ZY}$

2) $\angle J \cong \angle T, \angle K \cong \angle S, \angle L \cong \angle R, \angle M \cong \angle Q, \frac{JM}{TQ} = \frac{ML}{QR} = \frac{KL}{SR} = \frac{JK}{TS}$

4) نعم، $\triangle ABC \sim \triangle HFJ$ ؛ لأنّ: $\angle A \cong \angle H, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle J, \frac{AB}{HF} = \frac{BC}{FJ} = \frac{CA}{JH}$ ، ومعامل التشابه: 2.

المحتوى الرياضي

المعرفة السابقة: تعلّم الطلاب في الفصل 3 أن كلًّا من الزوايا والأضلاع المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة. وفي هذا الدرس، أكّد لهم على أنّه إذا كان المضلعان متطابقين ، فإن معامل التشابه بينهما 1.

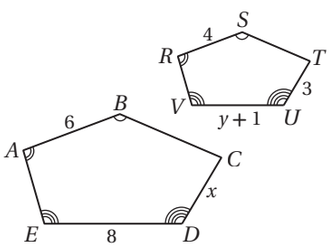
استعمال الأشكال المتشابهة

المثال 3 يبيّن كيفية استعمال معامل التشابه لإيجاد القيم المجهولة.

المثال 4 يبيّن كيفية استعمال معامل التشابه لإيجاد المحيط.

مثالان إضافيان

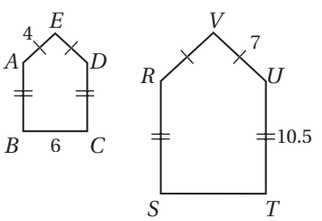
3 المضلعان الآتيان متشابهان.



a) أوجد قيمة x. $x = \frac{9}{2}$

b) أوجد قيمة y. $y = \frac{13}{3}$

4 إذا كان $ABCDE \sim RSTUV$ ، فأوجد معامل تشابه $ABCDE$ إلى $RSTUV$ ومحيط كل مضلع.



معامل التشابه: $\frac{4}{7}$ ، ومحيط $ABCDE$ يساوي 26 ، ومحيط $RSTUV$ يساوي 45.5

3 التدريب

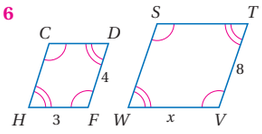
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 7–1؛ للتأكد من فهم الطلبة.

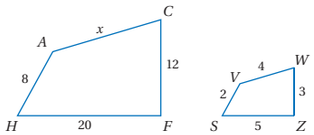
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم .

المثال 3 في كلٍّ ممَّا يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x .

5) 6

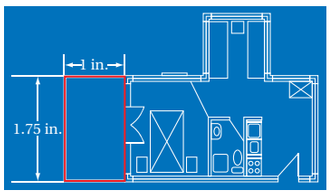


6) 16



المثال 4

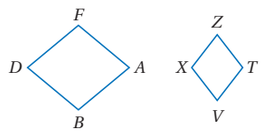
7) **تصميم:** في مخطط الشقّة المجاور، عرض الشّرفة 1 in وطولها 1.75 in. إذا كان طول الشّرفة الحقيقي 15 ft، فما محيطها؟ **47 ft تقريبًا**



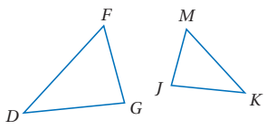
تدرب وحل المسائل

المثال 1 اكتب جميع الزوايا المتطابقة، ثم اكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة للمضلعين في كلٍّ ممَّا يأتي:

8) $ABDF \sim VXZT$ انظر الهامش

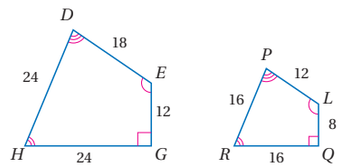


9) $\triangle DFG \sim \triangle KMJ$ انظر الهامش

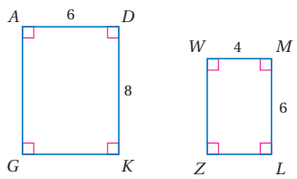


المثال 2 حدّد ما إذا كان المضلعان في كلٍّ ممَّا يأتي متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وإلّا فوضح السبب. انظر الهامش

10)



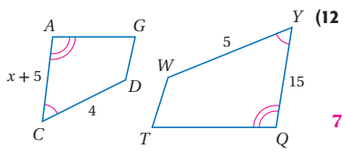
11)



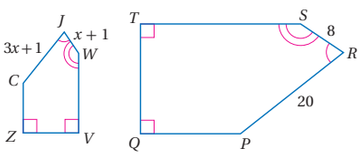
لا؛ لأن $\frac{AD}{WM} \neq \frac{DK}{ML}$

المثال 3 في كل مما يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x .

12) 7



13) 3



المثال 4

14) طول المستطيل $ABCD$ يساوي 20 m ، وعرضه 8 m. وطول المستطيل $QRST$ المشابه له يساوي 40 m. أوجد معامل تشابه المستطيل $ABCD$ إلى المستطيل $QRST$ ، ومحيط كل منهما. انظر الهامش

إجابات:

8) $\angle A \cong \angle V, \angle B \cong \angle X,$
$\angle D \cong \angle Z, \angle F \cong \angle T;$
$\frac{AB}{VX} = \frac{BD}{XZ} = \frac{DF}{ZT} = \frac{FA}{TV}$

9) $\angle D \cong \angle K, \angle F \cong \angle M, \angle G \cong \angle J;$
$\frac{DF}{KM} = \frac{FG}{MJ} = \frac{GD}{JK}$

10) نعم؛ لأن الأضلاع المتناظرة متناسبة
$\frac{LQ}{EG} = \frac{QR}{GH} = \frac{RP}{HD} = \frac{PL}{DE}$
$\frac{8}{12} = \frac{16}{24} = \frac{16}{24} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ ، كذلك
الزوايا المتناظرة متطابقة

$\angle Q \cong \angle G, \angle L \cong E, \angle P \cong \angle D,$
$\angle R \cong \angle H$ ومعامل التشابه يساوي $\frac{2}{3}$

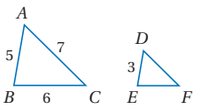
14) $\frac{1}{2}$؛ محيط $ABCD$ يساوي 56 m،
ومحيط $QRST$ يساوي 112 m .

تنويع الواجبات المنزلية

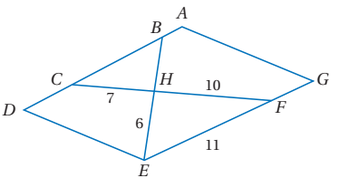
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	8-16 ، 39-56
ضمن ضمن المتوسط	9-17 فردي، 19-22 ، 23-33 فردي، 34-36 ، 39-56
فوق فوق المتوسط	17-54، (اختياري 55-56)

أوجد محيط المثلث المحدد في كلٍّ مما يأتي:

15) $\triangle DEF$ ، إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. **10.8**



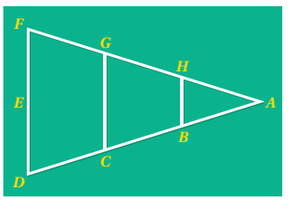
16) $\triangle CBH$ ، إذا كان $\triangle CBH \sim \triangle FEH$. **18.9**



17) إذا كان معامل التشابه بين مستطيلين متشابهين 1:2 ، ومحيط المستطيل الكبير 80 m ، فأوجد محيط المستطيل الصغير. **40 m**

18) إذا كان معامل التشابه بين مربّعين متشابهين 3:2، ومحيط المربع الصغير 50 ft ، فأوجد محيط المربع الكبير. **75 ft**

مثلثات متشابهة: في الشكل المجاور، المثلثات: AHB, AGC, AFD متشابهة وفيها: $\angle AFD \cong \angle AGC \cong \angle AHB$.



أوجد الأضلاع التي تناظر الضلع المُعطى أو الزوايا التي تطابق الزاوية المُعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية.

19) $\overline{AB}$ **$\overline{AC}, \overline{AD}$**

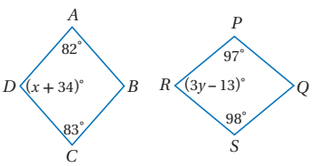
20) $\overline{FD}$ **$\overline{HB}, \overline{GC}$**

21) $\angle ACG$ **$\angle ABH, \angle ADF$**

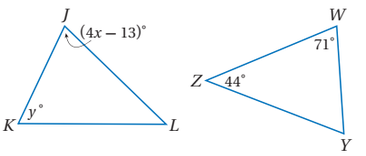
22) $\angle A$ **$\angle A$ موجودة في المثلثات الثلاثة**

أوجد قيمة كل متغيّر فيما يأتي:

23) $ABCD \sim QSRP$ **$x = 63, y = 32$**



24) $\triangle JKL \sim \triangle WYZ$ **$x = 21, y = 65$**



25) عرض الشرائح: إذا كانت أبعاد صورة على شريحة 13 in في $9\frac{1}{4}$ in ، ومعامل تشابه صور الشريحة إلى الصور المعروضة بواسطة جهاز العرض 1:4 ؛ فما أبعاد الصورة المعروضة؟ **37 in في 52 in**



الربط مع الحياة

يرى بعض التربويين أن نسبة 75% إلى 90% من معارف الشخص يتم الحصول عليها عن طريق الوسائل البصرية، ومن هنا جاءت أهمية استعمال جهاز عرض الشرائح في العملية التعليمية.

هندسة إحداثية: حدد ما إذا كانا المستطيلان ***ABCD*, *WXYZ*** المعطاة إحداثيات رؤوسهما في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا ؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه؛ وضّح إجابتك.

انظر الهامش

26) $A(-1, 5), B(7, 5), C(7, -1), D(-1, -1); W(-2, 10), X(14, 10), Y(14, -2), Z(-2, -2)$

27) $A(5, 5), B(0, 0), C(5, -5), D(10, 0); W(1, 6), X(-3, 2), Y(2, -3), Z(6, 1)$ **لا؛ لأن $\frac{BC}{XY} \neq \frac{AB}{WX}$**

إجابات:

26) $ABCD \sim WXYZ$ ؛ لأن:

$\angle A \cong \angle W, \angle B \cong \angle X,$

$\angle C \cong \angle Y, \angle D \cong \angle Z,$

$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW} = \frac{1}{2}$

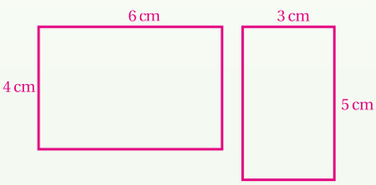
تنبيه لحل سؤال

مسطرة: السؤال 36 استعمال يتطلب مسطرةً.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 36، يستعمل الطلبة الرسوم الهندسيّة وجدولًا ووصفًا لفظيًّا؛ لاستقصاء تشابه المربعات.

إجابات:

38) إجابة ممكنة:



بما أن: $\frac{3}{4} \neq \frac{5}{6}$، فإن المستطيلان غير متشابهين.

39) بما أن الشكلين مستطيلان فالزوايا المتناظرة جميعها قائمة ومتساوية، كما أنه من المعطيات: $\frac{BC}{CE} = \frac{2}{3}$ وَ $\frac{LJ}{JA} = \frac{2}{3}$ ؛ أي أن: $\frac{BC}{CE} = \frac{LJ}{JA} = \frac{2}{3}$ أو $\frac{BC}{LJ} = \frac{CE}{JA}$ ، وهذا يعني أن الأضلاع المتناظرة في المستطيلين $BCEG, LJAW$ متناسبة؛ أي أن المستطيلين متشابهان.

40) يجب أن يكونا متشابهين؛ لأن الأضلاع المكوّنة لكل شكلٍ من الشكلين الرباعيَّين هي أضلاع مثلثات متساوية الأضلاع، والمثلثات المتساوية الأضلاع تكون متشابهة، حيث إن زواياها تكون متطابقة وقياساتها $60°$.

33–28) انظر ملحق الإجابات

حدّد ما إذا كان المضلعان في كلٍّ مما يأتي متشابهين دائمًا أو أحيانًا أو غير متشابهين أبدًا ؟ وضح إجابتك.

28) مثلثان منفرجا الزاوية

29) شبه منحرف ومتوازي أضلاع

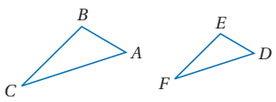
30) مثلثان قائما الزاوية

31) مثلثان متطابقا الضلعين

32) مثلث مختلف الأضلاع، ومثلث متطابق الضلعين

33) مثلثان متطابقا الأضلاع

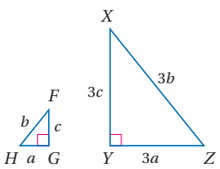
34) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 6.1 (في حالة المثلثات)



المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF, \frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

المطلوب: إثبات أن: $\frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle DEF} = \frac{m}{n}$ انظر ملحق الإجابات

35) **تغيير الأبعاد:** في الشكل المجاور، $\triangle FGH \sim \triangle XYZ$



a) بيِّن أن النسبة بين محيطي المثلثين هي النسبة نفسها بين أضلاعهما المتناظرة. $\frac{a}{3a} = \frac{b}{3b} = \frac{c}{3c} = \frac{a+b+c}{3(a+b+c)} = \frac{1}{3}$

b) إذا أضيف لطول كل ضلع 6 وحداتٍ، فهل المثلثان الجديدان متشابهان؟ لا؛ لم تعد الأضلاع متناسبة.

36) **تمثيلات متعدّدة:** في هذه المسألة ستكتشف تشابه المربّعات.

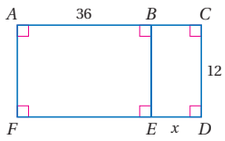
a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مربّعات مختلفة الأبعاد، وسمِّها $ABCD, PQRS, WXYZ$، وقس طول ضلع كل مربّع وسجّل الأطوال على المربعات. انظر ملحق الإجابات

b) **جدوليًّا:** احسب النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة لكل زوج مربعات فيما يأتي ودوّنها في جدول: $ABCD, PQRS$; $PQRS, WXYZ$; $WXYZ, ABCD$. هل كل مربعين من المربعات متشابهان؟ انظر ملحق الإجابات

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول تشابه جميع المربّعات. إجابة ممكنة: جميع المربعات متشابهة.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **تحدَّ:** في الشكل المجاور، ما قيمة (قيم) x التي تجعل $BEFA \sim EDCB$ ؟ 4

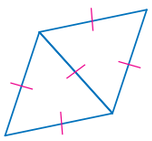


38) **إجابة مفتوحة:** أوجد مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية: انظر الهامش

"جميع المستطيلات متشابهة"

39) **برهان:** إذا كان المستطيل $BCEG$ فيه: $BC:CE = 2:3$ ، وكان المستطيل $LJAW$ فيه: $LJ:JA = 2:3$ فأثبت أن: $BCEG \sim LJAW$ انظر الهامش

40) **تبرير:** يمكن دمج مثلثين متساوِيَي الأضلاع متطابقين؛ لتكوينِ شكل رباعي كما في الشكل المجاور. إذا كوّنت شكلًا رباعيًّا آخر من مثلثين متساوِيَي الأضلاع متطابقين آخرين، فأيُّ العبارات التالية صحيحة حول الشكل المجاور، والشكل الذي كوّنته: يجب أن يكونا متشابهين، المجاور قد يكونا متشابهين، أو غير متشابهين. فسّر إجابتك. انظر الهامش



41) **تبرير:** ارسم مضلعين خماسيَّين منتظمين أطوال أضلاعهما مختلفة. هل المضلعان متشابهان؟ وهل كل مضلعين منتظمين ومتساوِيَين في عدد الأضلاع متشابهان؟ وضح إجابتك. انظر ملحق الإجابات

42) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المضلعات المتطابقة والمضلعات المتشابهة. انظر الهامش

42) إجابة ممكنة: يكون المضلعان متطابقين إذا كان لهما الأبعاد نفسها والشكل نفسه، وفي المضلعين المتطابقين تكون الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متطابقة. وعندما يكون المضلعان متشابهين فإن زواياهما المتناظرة تكون متطابقة وأضلاعهما المتناظرة تكون متناسبة. والمضلعات المتطابقة تكون متشابهة أيضًا؛ لأن الزوايا المتناظرة تكون متطابقة، والأضلاع المتناظرة تكون متناسبة.
ولا يكون المضلعان المتشابهان متطابقين، إلَّا إذا كانت النسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة تساوي 1.

تدريب على اختبار

43) إذا كان: $JKLM \cong PQRS$ ومعامل تشابه $PQRS$ إلى $JKLM$ يساوي 4:3 ، وكان $QR = 8\text{ cm}$ فما طول KL؟ **D**

A 24 cm **B** $10\frac{2}{3}$ cm **C** 8 cm **D** 6 cm

44) مستطيلان متشابهان. إذا كان معامل التشابه بينهما 3:5، ومحيط المستطيل الكبير 65 m ، فما محيط المستطيل الصغير؟ **B**

A 29 m **B** 39 m **C** 49 m **D** 59 m

مراجعة تراكمية

حل كل تناسب ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

45) $\frac{c-2}{c+3} = \frac{5}{4}$ **−23**

46) $\frac{2}{4y+5} = \frac{-4}{y}$ $-\frac{10}{9}$

47) $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{-4}{5}$ $\frac{-11}{14}$

48) هندسة إحداثية أوجد إحداثيات نقطة تقاطع قطري $\square JKLM$ الذي رؤوسه: $J(2, 5), K(6, 6), L(4, 0), M(0, -1)$. (الدرس 2-5) **(3, 2.5)**

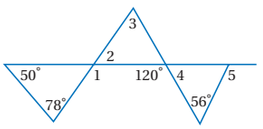
اكتب الفرض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشرٍ لكل عبارةٍ ممَّا يأتي: (الدرس 4-4)

49) إذا كان $3x > 12$ ، فإن $x > 4$. $x \le 4$

50) $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$ $\overline{PQ} \ncong \overline{ST}$

51) منصّف زاوية الرأس لمثلث متطابق الضلعين هو ارتفاع للمثلث أيضًا. منصّف زاوية الرأس لمثلث متطابق الضلعين، ليس ارتفاعًا للمثلث.

في الشكل المجاور، أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية. (الدرس 2-3)



52) $m\angle 1$ **128°**

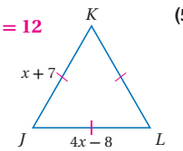
53) $m\angle 2$ **52°**

54) $m\angle 3$ **68°**

استعد للدرس اللاحق

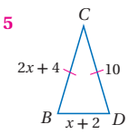
جبر أوجد قيمة x وطول كل ضلع في كلٍّ من المثلثين الآتيين: (الدرس 1-3)

55)



$x = 5, JK = JL = KL = 12$

56)



$x = 3, BC = 10, BD = 5$

4 التقويم

تعلّم لاحق: اطلب إلى الطلبة أن يتوقعوا كيف يمكن أن يساعدهم الدرس الحالي عن المضلّعات المتشابهة، على فهم الدرس الآتي عن المثلثات المتشابهة. وما أوجه التشابه فيهما؟ وما أوجه الاختلاف؟

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلبة الدرس 1–6 ، بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (30)

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلبة استعمال برمجية معالج النصوص (word) ، وأن يجرِّبوا المضلعات المختلفة التي تقدمها البرمجية، ثم اطلب إليهم أن يختاروا شكلًا ما ، وأن يكوّنوا شكلًا مشابهًا له، وذلك بأن ينسخوا الشكل الأصلي، ثم يغيّروا مقياس الشكل؛ ممَّا ينتج عنه شكل آخر مشابه. وللتحقق من التشابه، نضع الشكلين أحدهما على الآخر، بحيث ينطبق رأسان من رؤوسهما، فالزوايا المتناظرة يجب أن تكون متطابقة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 6

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

6-1 تدريبات إعادة التعليم

المضلعات المتشابهة

تحديد المضلعات المتشابهة:

المضلّعات المتشابهة لها الشكل نفسه، ولكن ليس بالضرورة أن يكون لها القياسات نفسها، ويكون المضلعان متشابهين، إذا وفقط إذا كانت زواياها المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة بنسبة تُسمّى معامل التشابه أو نسبة التشابه.

مثال 1 إذا كان $\Delta XYZ \sim \Delta ABC$، فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

الزوايا المتطابقة: $\angle A \cong \angle X,\ \angle B \cong \angle Y,\ \angle C \cong \angle Z$.

التناسب: $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$.

مثال 2 حدّد ما إذا كان المضلعان متشابهين أم لا. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ومعامل التشابه. ووضّح إجابتك.

الخطوة 1: قارن بين الزوايا المتناظرة.

$\angle S \cong \angle P,\ \angle X \cong \angle Q,\ \angle Y \cong \angle R,\ \angle Z \cong \angle S$

$\angle W \cong \angle P,\ \angle X \cong \angle Q,\ \angle Y \cong \angle R,\ \angle Z \cong \angle S$

الزوايا المتناظرة متطابقة.

الخطوة 2: قارن بين الأضلاع المتناظرة.

$\frac{WX}{PQ} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2},\ \frac{XY}{QR} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2},\ \frac{YZ}{RS} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2},\ \frac{ZW}{SP} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

بما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة، فإنّ $WXYZ \sim PQRS$، ومعامل التشابه للمضلّعين المتشابهين هو $\frac{3}{2}$.

تمارين

اكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين أطوال الأضلاع المتناظرة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\Delta DEF \sim \Delta GJH$

$\angle D \cong \angle G,\ \angle E \cong \angle J, \angle F \cong \angle H,\ \frac{DE}{GJ} = \frac{EF}{JH} = \frac{FD}{HG}$

2) $PQRS \sim TUWX$

$\angle P \cong \angle T, \angle Q \cong \angle U, \angle R \cong \angle W, \angle S \cong \angle X$

$\frac{PQ}{TU} = \frac{QR}{UW} = \frac{RS}{WX} = \frac{SP}{XT}$

حدّد ما إذا كان المضلعان في كلّ من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. ووضّح إجابتك.

3) $\angle L \ncong \angle E$؛ لا

4) $\frac{1}{2}$؛ $\Delta PQR \sim \Delta PST$، معامل التشابه

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

6-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المضلعات المتشابهة

استعمال الأشكال المتشابهة:

يمكنك استعمال معاملات التشابه والتناسبات؛ لحل مسائل تتضمن أشكالًا متشابهة.

مثال 1 إذا كان $\Delta GHJ \sim \Delta DEF$، فأوجد معامل تشابه ΔDEF إلى ΔGHJ، وطول $\overline{GH}$.

معامل التشابه هو $\frac{EF}{HJ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

احسب طول $\overline{HG}$ مستعملًا معامل التشابه

$\frac{2}{3} = \frac{DE}{GH}$	النسبة بين طولي ضلعين متناظرين تساوي معامل التشابه
$\frac{2}{3} = \frac{10}{GH}$	$DE = 10$
$2(GH) = 3(10)$	خاصية الضرب التبادلي
$GH = 15$	بقسمة كلا الطرفين على 2

مثال 2 إذا كان $ABCD \sim EFGH$، فأوجد معامل تشابه $ABCD$ إلى $EFGH$، وعيط كل مضلع.

معامل تشابه $ABCD$ إلى $EFGH$ يساوي $\frac{BC}{FG}$ ويساوي $\frac{6}{8}$، أي $\frac{3}{4}$

عيط $ABCD$ يساوي $40.5 - 13.5 + 12 + 9 + 6$

افرض أن عيط $EFGH$ يساوي x

النظرية 6.1 $\frac{3}{4} = \frac{\text{عيط } ABCD}{\text{عيط } EFGH}$

بالتعويض $\frac{3}{4} = \frac{40.5}{x}$

خاصية الضرب التبادلي $4(40.5) = 3x$

بقسمة كلا الطرفين على 3 $54 = x$

إذن عيط $EFGH$ يساوي 54

تمارين

في كلٍّ ممّا يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x.

1) $x = 6$

2) $x = 225$

3) $x = 15$

4) $x = 9$

5) إذا كان $ABCD \sim PQRS$، فأوجد معامل تشابه $ABCD$ إلى $PQRS$، ومحيط كلّ مضلّع.

معامل التشابه $\frac{4}{5}$؛ محيط $ABCD$ يساوي 68، ومحيط $PQRS$ يساوي 85

تدريبات المهارات (8) — دون ضمن

الاسم _____ التاريخ _____

6-1 تدريبات المهارات

المضلعات المتشابهة

1) إذا كان $ABCD \sim GHIJ$، فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة.

$\angle A \cong \angle G$
$\angle B \cong \angle H$
$\angle C \cong \angle I$
$\angle D \cong \angle J$

$\frac{AB}{GH} = \frac{BC}{HI} = \frac{CD}{IJ} = \frac{AD}{GJ}$

حدّد ما إذا كان المضلّعان في كلٍّ من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا. وإذا كانا كذلك؛ فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. ووضح إجابتك.

2) $\Delta ABC \sim \Delta DEF,\ \angle A \cong \angle D$
$\angle C \cong \angle F,\ \angle B \cong \angle E$
وفق نظرية الزاوية الثالثة؛
$\frac{3}{2} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$، معامل التشابه؛

3) المضلع $WXYZ \sim$ المضلع $PQRS$؛
$\angle W \cong \angle P, \angle X \cong \angle Q, \angle Y \cong \angle R, \angle Z \cong \angle S$،
$\frac{PQ}{WX} = \frac{QR}{XY} = \frac{RS}{YZ} = \frac{SP}{ZW}$
معامل التشابه؛ $\frac{3}{7.5}$

في كلٍّ ممّا يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x.

4) $x = 6.5$

5) $x = 7$

6) $x = 5$

7) $x = 13$

8) إذا كان $VRPT \sim GKNM$، فأوجد معامل تشابه $VRPT$ إلى $GKNM$.

معامل التشابه يساوي $\frac{3}{4}$،
محيط $VRPT$ يساوي 21،
محيط $GKUM$ يساوي 28

تدريبات حل المسألة (9) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

6-1 تدريبات حلّ المسألة

المضلعات المتشابهة

1) **مخططات**، يتكون المخطّط أدناه من أربعة مربّعات، إذا كانت المربّعات الثلاثة الصغيرة متطابقة، فما معامل تشابه المربّع الكبير إلى أحد المربّعات الصغيرة؟ **3:1**

2) **أجهزة التلفاز**، تصنع إحدى الشركات أجهزة تلفاز ذات شاشات كبيرة وأحجام مختلفة، إذا كانت جميع الشاشات مستطيلة الشكل ومتشابهة. وكان محيط شاشة قياسها 42 بوصة يساوي 144.4 بوصةً تقريبًا، فما محيط شاشة قياسها 46 بوصةً؟

158.2 in تقريبًا

3) **رياضة**، طول ملعب أولمبيٍّ لإحدى الألعاب الرياضية 60 m وعرضه 30 m، وطول ملعب محلّيٍّ للعبة نفسها 51 m وعرضه 25 m، فهل الملعبان متشابهان؟ برّر إجابتك.

نعم؛ النسبة بين البعدين الطويلين تساوي $\frac{20}{17}$، والنسبة بين البعدين القصيرين تساوي $\frac{20}{17}$

4) **رسم**، تريد سامية أن ترسم نجمةً رباعيّةً أبعادها مثلًا أبعاد النجمة في الشكل أدناه، ساعد سامية، وارسم على الشبكة الآتية نجمةً رباعيّةً أبعادها مثلًا أبعاد النجمة الظاهرة في الشكل.

5) **أحياء**، البراسيوم كائن حيّ صغير وحيد الخلية، والرسم أدناه تكبير لبراسيوم طوله الحقيقي 0.5 mm تقريبًا.

a) إذا أردت أن ترسم صورة للبراسيوم الأصليّ طولها 1 cm، فما معامل التشابه الذي تستعمله لتكبير البراسيوم؟ **1:100**

b) إذا أردت أن ترسم صورة للبراسيوم الأصليّ طولها 15 cm، فما معامل التشابه الذي تستعمله لتكبير البراسيوم؟ **1:1500**

c) ما القيمة التقريبية لمعامل التشابه الذي استعمل لتكبير البراسيوم في الصورة أعلاه؟ **1:180**

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر الدرس 1 - 6

دون المتوسط　ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

6-1 التدريبات الإثرائيّة

إنشاء مضلعات متشابهة:

يمكن تكبير المضلعات باستعمال ورق المربعات أو من دونها، وتكون الصورة الناتجة عن تكبير مضلع معطًى مشابهة للصورة الأصلية، وهذا يعني أن الزوايا المتناظرة متطابقة، والأضلاع المتناظرة متناسبة بنسبة تساوي معامل التكبير، ويمكن تعيين مركز التكبير داخل المضلع أو خارجه أو من نقطةٍ عليه.

وفيما يأتي أربع خطوات لإنشاء مضلّعٍ أطوال أضلاعه مثلا أطوال أضلاعِ مضلعٍ معلومٍ مشابه له.

الخطوة 1: اختر نقطةً داخل المضلّع أو خارجه وسمِّها O.

الخطوة 2: ارسم أنصاف مستقيماتٍ من O تمرّ برؤوس المضلّع.

الخطوة 3: تعيين صورة الرأس V، افتح الفرجار فتحةً تساوي OV، ثم عيّن نقطةً جديدةً V' على $\overrightarrow{OV}$، بحيث يكون $VV' = OV$، فيكون $OV' = 2(OV)$

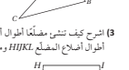
الخطوة 4: كرّر الخطوة 3 لكلّ رأسٍ من رؤوس المضلّع، ثم صِلِ النقاط X' و W' و V'؛ لتكوين المضلّع الجديد.

يبين الشكل أدناه إنشاءين لمضلّعين أطوال أضلاعهما مثلا أطوال أضلاع المضلع $VWXY$ وهما متشابهان له، لاحظ أن موقع النقطة O لا يؤثر في شكل المضلّع $V'W'X'Y'$ ولا في أبعاده.



انقل كلًّا من المضلّعين الآتيين، ثم أنشئ مضلّعًا مشابهًا أطوال أضلاعه مثلا أطوال أضلاع المضلّع المعطى. **انظر رسومات الطلاب**

1)



2)



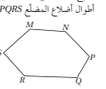
3) اشرح كيف تنشئ مضلّعًا أطوال أضلاعه ثلاثة أمثال أطوال أضلاع المضلع $HIJKL$ ومشابهًا له، ثم أنشئه.

انظر إجابات الطلاب



4) اشرح كيف تُنشئ مضلّعًا أطوال أضلاعه $1\frac{1}{2}$ مرّة من أطوال أضلاع المضلع $MNPQRS$ ومشابهًا له، ثم أنشئه.

انظر إجابات الطلاب

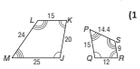


كتاب التمارين (12)　دون ضمن فوق

6 - 1 المضلعات المتشابهة

حدّد ما إذا كان المضلعان في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. ووضّح إجابتك.

1)



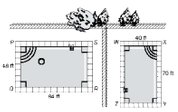
$JKLM \sim QRSP$؛
$\angle J \cong \angle Q, \angle K \cong \angle R,$
$\angle L \cong \angle S, \angle M \cong \angle P,$
$\frac{JK}{QR} = \frac{KL}{RS} = \frac{LM}{SP} = \frac{MJ}{PQ} = \frac{5}{3} = 1.67$

2)



$\triangle ABC \sim \triangle UVT; \angle A \cong \angle U,$
$\angle B \cong \angle V, \angle C \cong \angle T$
وفق نظرية الزاوية الثالثة،
$\frac{AB}{UV} = \frac{BC}{VT} = \frac{CA}{TU} = \frac{2}{3}$.

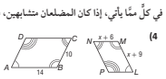
3) **برك سباحة:** يبين الشكل المجاور سطحَي بركتي سباحةٍ. أبعاد البركة $PQRS$ هي 48 ft في 84 ft. وأبعاد البركة $WXYZ$ هي 40 ft في 70 ft. هل البركتان متشابهتان؟ وإذا كانتا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه.



نعم؛ $PQRS \sim WXYZ$؛ ومعامل التشابه $\frac{6}{5}$

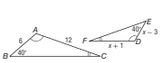
في كلٍّ ممّا يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x.

4)



$\frac{3}{2}$

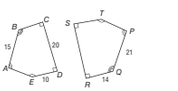
5)



7

6) **مضلعات خماسية:** إذا كان: $ABCDE \sim PQRST$، فأوجد معامل تشابه $ABCDE$ إلى $PQRST$، ومحيط كل مضلع.

معامل التشابه $\frac{5}{7}$؛ محيط $ABCDE = 65$؛
ومحيط $PQRST = 91$



1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-2

استعمال مسلمتي التطابق: SSS, SAS والنظرية AAS؛ لإثبات تطابق مثلثين.

الدرس 6-2

تحديد المثلثات المتشابهة باستعمال مسلّمة التشابه AA ونظريتَي التشابه SAS , SSS .

استعمال المثلثات المتشابهة لحل المسائل.

ما بعد الدرس 6-2

تبرير علاقات تشابه المثلثات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- ما العلاقة بين زوايا المثلثين المتشابهين؟ الزوايا متطابقة.
- هل المثلث الجديد الذي رسمه جميل يطابق المثلث الأصلي؟ لا؛ لأن أطوال الأضلاع ليست متساوية.
- نسخ جميل زاويتين من المثلث الأصلي، فهل الزاوية الثالثة هي نفسها في كلا المثلثين؟ ولماذا؟ نعم؛ نظرية الزاوية الثالثة.

6-2 المثلثات المتشابهة
Similar Triangles

فيما سبق:
درستُ استعمال المسلّمتين SSS, SAS والنظرية AAS لإثبات تطابق مثلثين.
(الدرس 3-4)

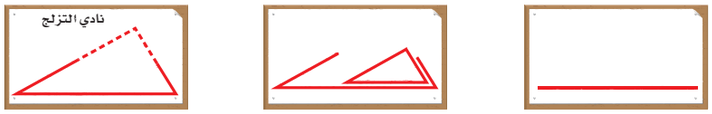
والآن:
- أحدّد المثلثات المتشابهة باستعمال مسلمة التشابه AA ونظريتَي التشابه SSS, SAS .
- استعمل المثلثات المتشابهة لحل المسائل.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



أراد خالد أن يرسم نسخة مشابهة لشعار نادي التزلُّج المجاور على مُلصقٍ كبيرٍ، فبدأ أولًا برسم قطعة مستقيمة أسفل المُلصق، ثم استعمل نسخةً من المثلث الأصلي لينسخ زاويتَي القاعدة، ثم مدّ الضلعين غير المشتركين للزاويتين.

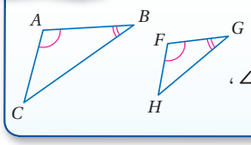


تحديد المثلثات المتشابهة: في الفصل الثالث تعلمت اختبارات تحديد ما إذا كان مثلثان متطابقين أم لا، ولتشابه المثلثات اختبارات أيضًا. والرسم السابق يبيّن أنه إذا طابقت زاويتان في مثلثٍ زاويتين في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متشابهان.

مسلمة 6.1 التشابه بزاويتين (AA)

أضف إلى مطويتك

إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر، فإن المثلثين متشابهان.

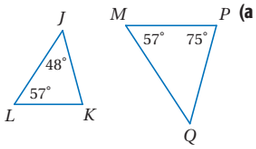


مثال: في المثلثين ABC , FGH ، إذا كانت: $\angle A \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle G$ ، فإن: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.

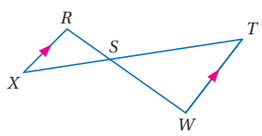
مثال 1 استعمال مسلمة التشابه AA

حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. ووضّح إجابتك.

(a)



(b)

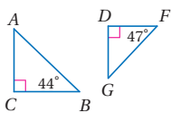


a) بما أنّ: $m\angle L = m\angle M$، إذن: $\angle M \cong \angle L$. ومن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث يكون: $m\angle K = 180° - 57° - 48° = 75°$ ؛ إذن $m\angle P = 75°$ ، وبما أنّ $\angle K \cong \angle P$ ؛ إذن $\triangle LJK \sim \triangle MQP$ وفق المسلمة AA .

b) $\angle RSX \cong \angle WST$ وفق نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس. ولأن $\overline{RX} \parallel \overline{TW}$ ، فإنّ $\angle W \cong \angle R$ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا؛ إذن $\triangle RSX \sim \triangle WST$ وفق المسلمة AA .

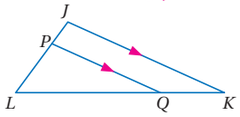
تحقق من فهمك

(1A)



لا ، لا يوجد زاويتان في أحد المثلثين مطابقتان لزاويتين في المثلث الآخر.

(1B)



نعم؛ $\angle L \cong \angle Q$, $\angle LJK \cong \angle LPQ$ ، إذن: $\triangle KLJ \sim \triangle QLP$

مصادر الدرس 6-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (83, 87)	• تنويع التعليم ص (83, 87)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (13)	• كتاب التمارين ص (13)	• كتاب التمارين ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

إرشادات للدراسة

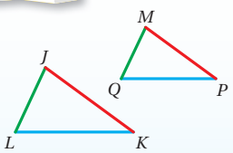
رسم الأشكال:
قد تساعدك إعادة رسم المثلثين المتشابهين، بحيث تظهر الأضلاع المتناظرة في الاتجاه نفسه.

يمكنك استعمال مسلمة التشابه AA لإثبات النظريتين الآتيتين:

نظريتان

أضف إلى مطويتك

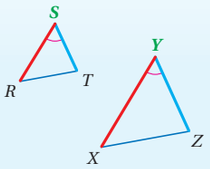
6.2 التشابه بثلاثة أضلاع (SSS)



إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان.

مثال: إذا كان: $\frac{JK}{MP}=\frac{KL}{PQ}=\frac{LJ}{QM}$ ، فإن $\triangle JKL \sim \triangle MPQ$.

6.3 التشابه بضلعين وزاوية محصورة (SAS)



إذا كان طولا ضلعين في مثلث ما متناسبين مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر وكانت الزاويتان المحصورتان بينهما متطابقتين، فإنّ المثلثين متشابهان.

مثال: إذا كان $\angle S \cong \angle Y, \frac{RS}{XY}=\frac{ST}{YZ}$ ، فإن $\triangle RST \sim \triangle XYZ$.

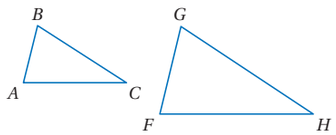
ستبرهن النظرية 6.3 في السؤال 17

برهان النظرية 6.2

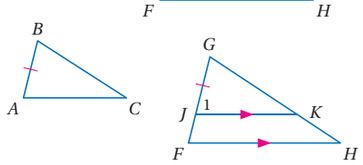
اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 6.2.

المعطيات: $\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{AC}{FH}$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$



البرهان:



عيّن النقطة J على $\overline{FG}$، بحيث يكون $JG = AB$.
ارسم $\overline{JK}$، بحيث يكون $\overline{JK} \parallel \overline{FH}$.
سمِّ $\angle GJK$ بالرمز $\angle 1$.

بما أنّ $\angle G \cong \angle G$ وفق خاصية الانعكاس،
و $\angle F \cong \angle 1$ وفق مسلمة الزاويتين المتناظرتين،
فإنّ، $\triangle GJK \sim \triangle GFH$ وفق مسلمة التشابه AA .

ومن تعريف المضلعات المتشابهة يكون: $\frac{JG}{FG}=\frac{GK}{GH}=\frac{JK}{FH}$.

وبالتعويض ينتج أن: $\frac{AB}{FG}=\frac{GK}{GH}=\frac{JK}{FH}$.

وبما أن: $\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{AC}{FH}$ ، إذن يمكننا استنتاج أنّ: $\frac{GK}{GH}=\frac{BC}{GH}, \frac{JK}{FH}=\frac{AC}{FH}$ ، وهذا يعني أن:
$GK = BC, JK = AC$ ، لذلك $\overline{GK} \cong \overline{BC}, \overline{JK} \cong \overline{AC}$.

ومن مسلّمة التطابق SSS ، يكون $\triangle JGK \cong \triangle ABC$.

ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن: $\angle 1 \cong \angle G, \angle A \cong \angle G, \angle B \cong \angle G$ ، وبما أن:
$\angle F \cong \angle 1$ ؛ إذن $\angle A \cong \angle F$ وفق خاصيةّ التعدّي؛ إذن ومن مسلمة التشابه AA ، يكون $\triangle ABC \sim \triangle FGH$.

المحتوى الرياضي

مقارنة: بيّن للطلبة أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين مسلّمات تطابق المثلثات ونظرياته في الفصل 3، ومسلمة التشابه ونظرياته في هذا الفصل، وأكّد على أنّه يكفي أن يكون زوجان من الزوايا المتناظرة في المثلثين متطابقين ليكون المثلثان متشابهين، إلّا أن أزواج الأضلاع المتناظرة الثلاث، يجب أن تكون متناسبة.

تحديد المثلثات المتشابهة

الأمثلة 1-3 تبيّن كيفيّة استعمال النظريات والمسلّمات لتحديد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا.

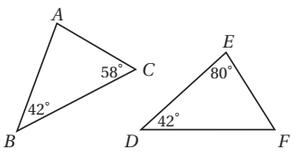
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقّق من فهمك" بعد كلّ مثال؛ للتحقّق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

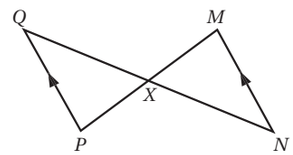
1 حدّد في كلٍّ مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

(a)



وفق نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث يكون $m\angle A = 80°$،
وبما أن: $\angle A \cong \angle E$,
$\angle B \cong \angle D$ ، فإن:
$\triangle ABC \sim \triangle EDF$ وفق مسلمة التشابه AA

(b)

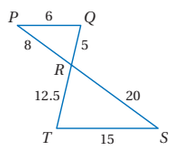


$\angle QXP \cong \angle NXM$ وفق نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس،
وبما أن $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$ ، فإن
$\angle Q \cong \angle N$ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا؛ إذن:
$\triangle QXP \sim \triangle NXM$ وفق مسلّمة التشابه AA .

مثال 2 استعمال نظريتَي التشابه SSS, SAS

حدّد في كلٍّ مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، و وضّح إجابتك.

(a

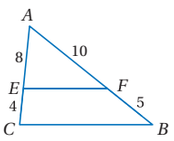


$\frac{PR}{SR}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ ، $\frac{PQ}{ST}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$\frac{QR}{TR}=\frac{5}{12.5}=\frac{50}{125}=\frac{2}{5}$ ؛

إذن $\triangle PQR \sim \triangle STR$ وفق نظرية التشابه SSS .

(b



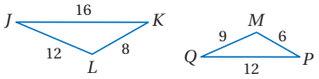
من خاصية الانعكاس $\angle A \cong \angle A$.

$\frac{AF}{AB}=\frac{10}{10+5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ ، $\frac{AE}{AC}=\frac{8}{8+4}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

بما أن طولَي الضلعين اللذين يحصران $\angle A$ في $\triangle AEF$ متناسبان مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في $\triangle ACB$ ، إذن $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ وفق نظرية التشابه SAS .

تحقق من فهمك

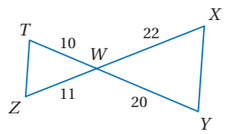
(2A $\triangle JLK \sim \triangle QMP$ ؛ نعم



وفق نظرية التشابه SSS ، حيث إن:

$\frac{JL}{QM}=\frac{LK}{MP}=\frac{JK}{QP}=\frac{4}{3}$

(2B $\triangle TWZ \sim \triangle YWX$ ؛ نعم



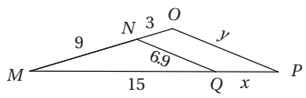
وفق نظرية التشابه SAS ، حيث إن:

$\angle W \cong \angle W$ ، $\frac{TW}{YW}=\frac{WZ}{WX}=\frac{1}{2}$

يمكنك أن تُقرّر أي الشروط كافية لإثبات تشابه مثلثين.

مثال 3 من اختبار

المثلثان MNQ, MOP في الشكل المجاور متشابهان، ماقيمة x؟



A 12 **B** 10 **C** 5 **D** 4

اقرأ سؤال الاختبار

في هذا السؤال تعلمْ، أنّ $\triangle MNQ \sim \triangle MOP$ ، ومطلوب منك إيجاد طول قطعة مجهولة.

حُل سؤال الاختبار

بما أنّ $\triangle MNQ \sim \triangle MOP$ ، فإن الأضلاع المتناظرة متناسبة أي أن $\frac{MN}{MO}=\frac{MQ}{MP}$ ، وبما أن

$MN=9, MO=12, MQ=15, MP=15+x$

اختبر كلًّا من بدائل الإجابة حتى تجد واحدًا منها يحقق التناسب $\frac{9}{12}=\frac{15}{15+x}$:

البديل A: إذا كان: $x=12$ فإن: $\frac{9}{12} \stackrel{?}{=} \frac{15}{15+12}$

$\frac{3}{4} \neq \frac{5}{9}$ ✗ غير صحيح

البديل B: إذا كان: $x=10$ فإن: $\frac{9}{12} \stackrel{?}{=} \frac{15}{15+10}$

$\frac{3}{4} \neq \frac{3}{5}$ ✗ غير صحيح

البديل C: إذا كان: $x=5$ فإن: $\frac{9}{12} \stackrel{?}{=} \frac{15}{15+5}$

$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ ✓ صحيح، إذن فإن إجابة السؤال هي **C**

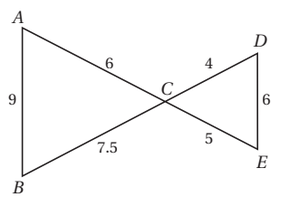
إرشادات للدراسة

الأضلاع المتناظرة: لتحديد الأضلاع المتناظرة لمثلثين، ابدأ بمقارنة أطول ضلعين ثم الضلعين التاليين لهما طولًا وأخيرًا أقصر ضلعين.

مثالان إضافيان

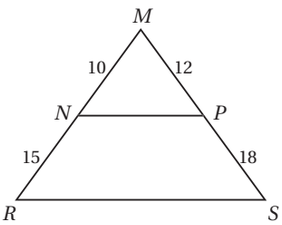
2 حدّد في كلٍّ مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

(a



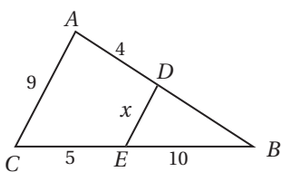
$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ وفق نظرية التشابه SSS ، حيث إنّ: $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EC}=\frac{AC}{DC}=\frac{3}{2}$

(b



$\triangle MNP \sim \triangle MRS$ وفق نظرية التشابه SAS ، حيث إنّ: $\frac{MN}{MR}=\frac{MP}{MS}=\frac{2}{5}$ ، $\angle M \cong \angle M$

3 في الشكل أدناه المثلثان ACB, DEB متشابهان، ما قيمة x ؟ B



A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعليّة: استعمل السبورة التفاعلية، وارسم مثلثين متشابهين وغير متطابقين، واستعملهما؛ لتبيِّن للطلاب تطابق زاويتين في أحدهما مع زاويتين في المثلث الآخر (المسلمة AA) ، وبيِّن لهم أن ذلك يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهان، ثم أوجد أطوال أضلاع كلٍّ من المثلثين، وبيِّن لهم أنها متناسبة.

تنبيه!

الزوايا المتطابقة: لا يمكن استعمال نظريّة التشابه SAS ، إلّا إذا كانت الزاوية محصورة بين الضلعين المتناظرين لكل مثلثٍ منهما.

تحقق من فهمك

3) في المثال السابق، ماقيمة y؟ **C**

A 5.2 **B** 8.4 **C** 9.2 **D** 20.7

استعمال المثلثات المتشابهة: تشابه المثلثات مثل تطابق المثلثات، يحقق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي.

نظرية 6.4 — **خصائص المثلثات المتشابهة**

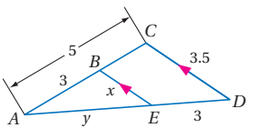
أضف إلى مطويتك

خاصيّة الانعكاس للتشابه:	$\triangle ABC \sim \triangle ABC$
خاصيّة التماثل للتشابه:	إذا كان $\triangle DEF \sim \triangle ABC$، فإنّ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
خاصيّة التعدّي للتشابه:	إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\triangle DEF \sim \triangle XYZ$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

ستبرهن النظرية 6.4 في السؤال 18

مثال 4 — **أجزاء المثلثات المتشابهة**

أوجد طول BE, AD في الشكل المجاور.



بما أنّ $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$، فإن: $\angle ADC \cong \angle AEB$, $\angle ACD \cong \angle ABE$؛ لأنّها زوايا متناظرة، ومن مسلمة التشابه AA، يكون $\triangle ACD \sim \triangle ABE$.

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$	تعريف المضلعات المتشابهة
$\frac{3}{5} = \frac{x}{3.5}$	$AC = 5, CD = 3.5, AB = 3, BE = x$
$(3.5) \cdot 3 = 5 \cdot x$	خاصية الضرب التبادلي
$2.1 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 5

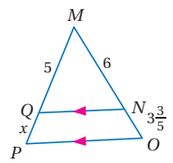
وعليه فإن BE يساوي 2.1

$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$	تعريف المضلعات المتشابهة
$\frac{5}{3} = \frac{y+3}{y}$	$AC = 5, AB = 3, AD = y+3, AE = y$
$5 \cdot y = 3(y+3)$	خاصية الضرب التبادلي
$5y = 3y + 9$	خاصية التوزيع
$2y = 9$	بطرح $3y$ من كلا الطرفين
$y = 4.5$	بقسمة كلا الطرفين على 2

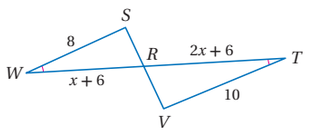
وعليه فإن: $AD = y + 3 = 7.5$

تحقق من فهمك أوجد كل طولٍ فيما يأتي.

(4A) QP, MP **3; 8**



(4B) WR, RT **8; 10**



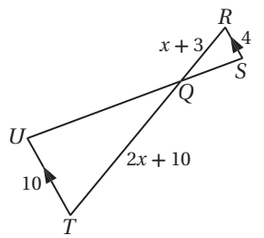
استعمال المثلثات المتشابهة

المثالان 5 , 4 يبيّنان كيفيّة استعمال خصائص المثلثات المتشابهة لإيجاد أطوالٍ غير معلومةٍ.

مثال إضافي

4 **جبر:** أوجد طول QT , RQ في الشكل أدناه.

$RQ = 8; QT = 20$

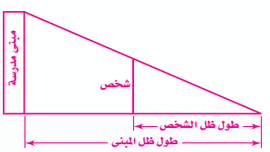


تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الاجتماعيون / الحركيون: اطلب إلى كل طالب أن يختار شريكًا له، وأن يعملا معًا لإيجاد ارتفاع مبنى المدرسة بقياس الظل واستعمال المثلثات المتشابهة. إجابة ممكنة: يقف الأول على بعد أفقي معلوم من مبنى المدرسة، ويقوم زميله مستعملًا شريط قياس بقياس طوله، وطول ظله، وقياس طول ظل مبنى المدرسة على الأرض في اللحظة نفسها، ثم يستعملان التشابه لإيجاد ارتفاع مبنى المدرسة.

$$\frac{\text{طول الشخص}}{\text{طول ظله}} = \frac{\text{ارتفاع مبنى المدرسة}}{\text{طول ظل مبنى المدرسة}}$$



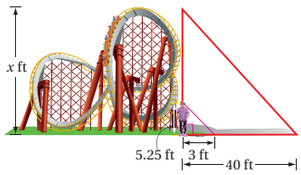
مثال 5 من واقع الحياة — القياس غير المباشر

أفعوانية: يريد تركي أن يقدِّر ارتفاع الأفعوانية في مدينة الألعاب، فلاحظ أنه عندما كان طول ظله **3 ft**، كان طول ظل الأفعوانية **40 ft**. إذا كان طول تركي **5 ft و 3 in**، فكم قدمًا ارتفاع الأفعوانية؟

افهم: **المعطيات:** طول ظل تركي 3 ft، وطول ظل الأفعوانية 40 ft، وطول تركي 5 ft وَ 3 in

المطلوب: ارتفاع لأفعوانية.

ارسم مخططًا توضيحيًّا. 5 ft و 3 in تساوي 5.25 ft.



خطط: في مسائل الظل، افترض أنّ الزاويتين المتكونتين من شعاعَي الشمس وأيّ جسمين رأسيين تكونان متطابقتين، وأن المثلث المتشكّل من الجسم والأرض وشعاع الشمس المارِّ بقمة الجسم قائم الزاوية، وبما أن هناك زوجين من الزوايا المتطابقة، فإنّ المثلثين القائِمَي الزاوية متشابهان وفق مسلمة التشابه AA؛ إذن يمكن كتابة التناسب الآتي:

$$\frac{\text{طول ظل تركي}}{\text{طول ظل الأفعوانية}} = \frac{\text{طول تركي}}{\text{ارتفاع الأفعوانية}}$$

حل: افترض أن ارتفاع الأفعوانية يساوي x وعوِّض القيم المعلومة.

$\frac{5.25}{x} = \frac{3}{40}$ بالتعويض

$3 \cdot x = 40(5.25)$ خاصّية الضرب التبادلي

$3x = 210$ بالضرب

$x = 70$ بقسمة كلا الطرفين على 3

إذن ارتفاع الأفعوانية يساوي 70 ft.

تحقق: طول ظل الأفعوانية يساوي 13.3 مرةً تقريبًا من طول ظل تركي. تحقق لترى ما إذا كان ارتفاع الأفعوانية يساوي 13.3 $\approx \frac{40}{3}$ مرّة من طول تركي، $13.3 \approx \frac{70 \text{ ft}}{5.25 \text{ ft}}$ ✓

تحقق من فهمك

5) بنايات: يقف منصور بجوار بناية، وعندما كان طول ظلّه 9 ft، كان طول ظل البناية 322.5 ft. إذا كان طول منصور 6 ft، فكم قدمًا ارتفاع البناية؟ **215 ft**

إرشادات للدراسة

تحويل الوحدات:

12 in = 1 ft

3 in = $\frac{3}{12}$ ft

= 0.25 ft

أي أن 5 ft وَ 3 in تساوي

5.25 ft

إرشادات لحل المسألة

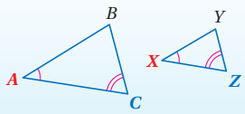
حدّد الإجابات المعقولة: عندما تحل مسألة، تحقق من معقوليّة إجابتك. في هذا المثال، طول ظل تركي أكبر بقليل من نصف طوله، وكذلك طول ظل الأفعوانية أكبر من نصف ارتفاعها بقليل؛ لذا فالإجابة معقولة.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

تشابه المثلثات

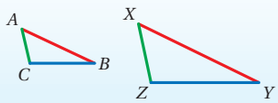
مسلمة التشابه AA



إذا كانت: $\angle A \cong \angle X, \angle C \cong \angle Z$

فإنّ: $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$

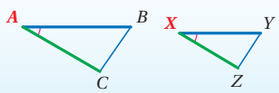
نظرية التشابه SSS



إذا كانت: $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$

فإنّ: $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

نظرية التشابه SAS

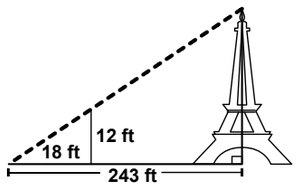


إذا كانت: $\angle A \cong \angle X, \frac{AB}{XY} = \frac{CA}{ZX}$

فإنّ: $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.

مثال إضافي

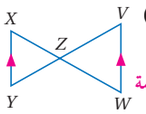
5 أبراج: أراد حمود أن يجد ارتفاع برج، فقاس طولَ ظلِّ عمود إنارة ارتفاعه 12 ft عند الساعة الثامنة صباحًا فوجده 18 ft، إذا كان طول ظلّ البرج في اللحظة نفسها، 243 ft. فما ارتفاع البرج؟ 162 ft



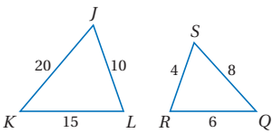
تأكـد

المثالان 1, 2 في كلٍّ ممَّا يأتي حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

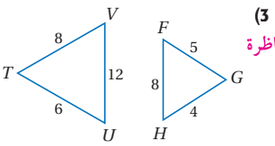
1) نعم؛ $\triangle YXZ \sim \triangle VWZ$ وفق مسلمة التشابه AA ، حيث إنّ: $\angle X \cong \angle W, \angle Y \cong \angle V$



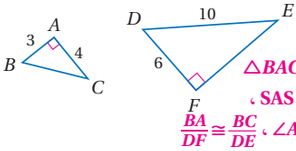
2) نعم؛ $\triangle JLK \sim \triangle SRQ$ وفق نظرية التشابه SSS، حيث إنّ: $\frac{JL}{SR} \cong \frac{LK}{RQ} \cong \frac{JK}{SQ}$



3) لا؛ الأضلاع المتناظرة ليست متناسبة

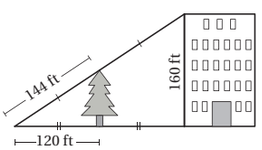


4) نعم؛ $\triangle BAC \sim \triangle DFE$ وفق نظرية التشابه SAS ، حيث إنّ: $\angle A \cong \angle F$ ، $\frac{BA}{DF} \cong \frac{BC}{DE}$



المثال 3

5) **اختيار من متعدّد:** استعمل الشكل أدناه في إيجاد ارتفاع الشجرة؟ **D**



A 264 ft

B 60 ft

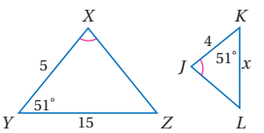
C 72 ft

D 80 ft

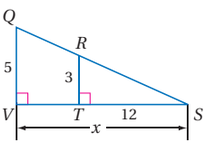
المثال 4

جبر: أوجد الطول المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

6) KL; $\triangle XYZ \sim \triangle JKL$; 12



7) VS; $\triangle QVS \sim \triangle RTS$; 20



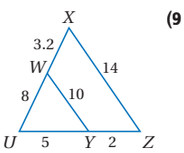
المثال 5

8) **اتّصالات:** طول ظلّ برج اتصالاتٍ في لحظةٍ معينةٍ 100 ft ، وبجواره لوحة تحذيرية مثبَّتة على عمودٍ طول ظله في اللحظة ذاتها 3 ft و 4 in ، إذا كان ارتفاع عمود اللوحة 4 ft و 6 in ، فما ارتفاع البرج؟ **135 ft**

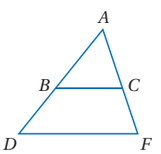
تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 في كلٍّ ممَّا يأتي، حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، وإلّا فحدّد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان؟ ووضّح إجابتك. **9–11)** انظر الهامش

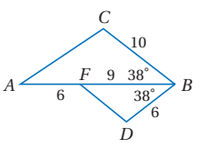
9)



10)



11)



3 التدريب

التقويم التكوينيّ

استعمل الأسئلة 8–1؛ للتحقق من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم .

إجابات:

9) نعم؛ $\triangle XUZ \sim \triangle WUY$
وفق نظرية التشابه SSS ، حيث إنَّ:
$\frac{XU}{WU} = \frac{UZ}{UY} = \frac{XZ}{WY}$

10) لا؛ يجب أن تكون $\overline{BC}, \overline{DF}$ متوازيتان حتى يكون $\triangle DAF \sim \triangle BAC$
وفق مسلمة التشابه AA ، حيث إنَّ:
$\frac{CB}{DB} = \frac{BA}{BF}$, $CBA \cong DBF$

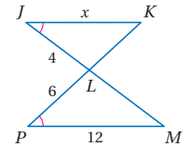
11) نعم؛ $\triangle CBA \sim \triangle DBF$
وفق نظرية التشابه SAS ، حيث إنَّ:
$\frac{CB}{DB} = \frac{BA}{BF}$, $\angle CBA \cong \angle DBF$

تنويع الواجبات المنزلية

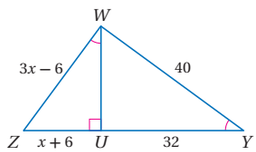
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	9-13 ، 16 ، 21 ، 27 ، 30-45
ضمن ضمن المتوسط	9-15 فردي ، 12 ، 16-19 ، 23-27 ، 30-45
فوق فوق المتوسط	17-41 ، (42-45 اختياري)

المثال 4 **جبر:** أوجد الطول المطلوب في كلٍّ مما يأتي:

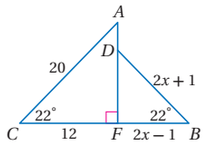
12) JK



13) WZ, UZ



14) DB, CB



12) $\triangle JLK \sim \triangle PLM$; 8

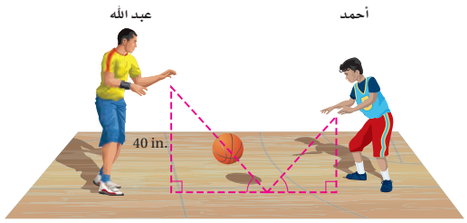
13) $\triangle WUZ \sim \triangle YUW$; 30, 18

14) $\triangle DFB \sim \triangle AFC$; 5, 15

المثال 5

15) رياضة: يقف أيمن بجوار مرمى كرة السلّة. إذا كان طول أيمن 5 ft و 11 in، وطول ظلّه 2 ft، وكان طول ظل مرمى كرة السلّة 4 ft و 4 in، فما ارتفاع المرمى تقريبًا؟ **12.8 ft** تقريبًا

16) رياضة: رمى عبد الله الكرة لترتَّد نحو أحمد، فارتطمت بسطح الأرض على بُعد $\frac{2}{3}$ المسافة بينهما، وكانت الزاويتان الناتجتان عن مسار الكرة وسطح الأرض متطابقتين. إذا رمى عبدالله الكرة من ارتفاع 40 in عن سطح الأرض، فعلى أيّ ارتفاعٍ سيلتقطها أحمد؟ **انظر الهامش**



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ ممَّا يأتي:

17) النظريّة 6.3

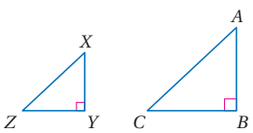
18) النظريّة 6.4

17–20) انظر ملحق الإجابات

19) المعطيات: $\triangle XYZ$ و $\triangle ABC$ قائما الزاوية

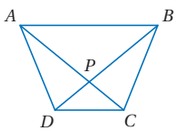
$\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC}$

المطلوب: إثبات أنّ $\triangle YXZ \sim \triangle BAC$



20) المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف.

$\frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA}$ **المطلوب:** إثبات أن

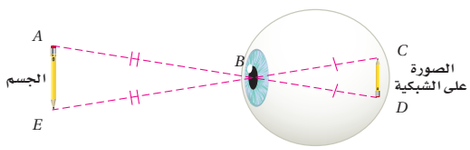




الربط مع الحياة

يحدث قصر النظر عندما تجمّع عدسة العين أشعة الضوء أمام الشبكية، ويحدث طول النظر عندما تجمّع عدسة العين أشعة الضوء خلف الشبكية.

21) رؤية: عندما ننظر إلى جسمٍ، فإن صورته تُسْقَطُ على الشبكيّة عبر البؤبؤ، وتكون المسافتان من البؤبؤ إلى أعلى الجسم وأسفله متساويتين، والمسافتان من البؤبؤ إلى أعلى الصورة وأسفلها على الشبكية متساويتين أيضًا. هل المثلثان المتكوّنان بين الجسم والبؤبؤ وبين البؤبؤ والصورة متشابهان؟ وضّح إجابتك. **انظر الهامش**



إجابات:

16) افترض أن أحمد سيلتقط الكرة على ارتفاع h ، وأن المسافة بين عبدالله وأحمد تساوي x ، فتكون الكرة قد ارتطمت على بعد $\frac{2}{3}x$؛ أي يكون بعدها الأفقي عن عبدالله $\frac{2}{3}x$، وعن أحمد $\frac{1}{3}x$، وبما أن المثلثين القائمين الناتجين مشابهان، وفق مسلمة التشابه AA، إذن يكون

$$\frac{40}{\frac{2}{3}x} = \frac{h}{\frac{1}{3}x}$$

أو $h = \frac{40(\frac{1}{3}x)}{\frac{2}{3}x} = 20$

21) نعم؛ إجابة ممكنة:

$\overline{AB} \cong \overline{EB}$, $\overline{CB} \cong \overline{DB}$,

إذن $\frac{AB}{CB} = \frac{EB}{DB}$ و $\angle ABE \cong \angle CBD$ ؛ لأن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان، لذلك $\triangle ABE \sim \triangle CBD$ وفق نظرية التشابه SAS .

هندسة إحداثيّة: إحداثيات رؤوس المثلثين $\triangle XYZ, \triangle WYV$ هي $X(-1,-9), Y(5,3), Z(-1,6), W(1,-5), V(1,5)$.

22) مثّل المثلثين بيانيًّا، وأثبت أنّ $\triangle XYZ \sim \triangle WYV$. انظر ملحق الإجابات

23) أوجد النسبة بين محيطي المثلثين. $\frac{3}{2}$

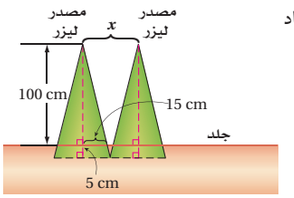
24) قياس: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle JKL$. وطول كل ضلع في $\triangle JKL$ يساوي نصف طول الضلع المناظر له في $\triangle ABC$، ومساحة $\triangle ABC$ تساوي $40\,in^2$، فما مساحة $\triangle JKL$؟ ما العلاقة بين مساحتي $\triangle ABC$، $\triangle JKL$، ومعامل التشابه بينهما؟ انظر ملحق الإجابات



الربط مع الحياة

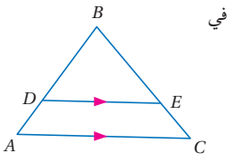
في بعض العلاجات الطبيّة تستعمل أشعة الليزر التي تلامس الجلد وتخترقه مكوّنة مثلثات متشابهة.

25) علاج: استعمل معلومات الربط بالحياة والشكل المجاور لإيجاد المسافة التي يجب أن تفصل بين مصدري أشعة الليزر حتى تكون المنطقتان المعالجتان المتطابقتان بكلٍ من المصدرين غير متداخلتين. 31.5 cm



26) تمثيلات متعدّدة: في هذه المسألة ستستقصي الأجزاء المتناسبة في مثلث.

a) هندسيًّا: ارسم $\triangle ABC$ وارسم $\overline{DE}$، بحيث تكون موازيةً لِـ $\overline{AC}$ كما في الشكل المجاور. انظر الهامش



b) جدوليًّا: قس الأطوال AD, DB, CE, EB وسجّلها في جدول، وأوجد النسبتين $\frac{AD}{DB}, \frac{CE}{EB}$ وسجّلهما في الجدول نفسه. انظر الهامش

c) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول القطع المستقيمة الناتجة عن مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين. إجابة ممكنة: القطع المستقيمة الناتجة عن مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين أطوالها متناسبة.

مسائل مهارات التفكير العليا

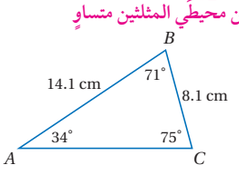
27) اكتب: بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين مسلمة التشابه AA، ونظرية التشابه SSS، ونظرية التشابه SAS. انظر الهامش

تحدٍّ: إذا كانت النسبة بين أطوال أضلاع مثلث هي 2:3:4 ومحيطه 54 in، فأجب عما يلي:

28) إذا كان طول أصغر أضلاع مثلثٍ آخر مشابه هو 16 in، فما طول كلٍّ من الضلعين الآخرين فيه؟ 24 in, 32 in

29) قارن النسبة بين محيطَي المثلثين ومعامل التشابه بينهما. ماذا تلاحظ؟ $\frac{54}{72} = \frac{3}{4}$؛ معامل التشابه والنسبة بين محيطَي المثلثين متساوٍ

30) تبرير: قياسات زوايا مثلثين متشابهين هي: $45°, 85°, 50°$. وأطوال أضلاع أحدهما 3, 4, 5.2 وحدات، وأطوال أضلاع المثلث الآخر x, x، $x + 1.8$، $x - 1.5$ وحدة، أوجد قيمة x. 6



31) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثًا مشابهًا لِـ $\triangle ABC$ المجاور، ووضح كيف تعرف أنّهما متشابهان. انظر ملحق الإجابات

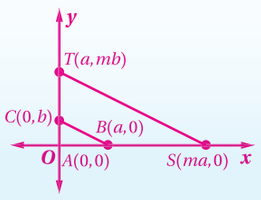
32) اكتب: اشرح طريقة يمكنك استعمالها لرسم مثلث يشابه مثلثًا معلومًا، وأطوال أضلاعه مِثْلَا أطوال أضلاع المثلث المعلوم. انظر ملحق الإجابات

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلبة رسم مثلث قائم الزاوية في مستوى إحداثي، وتسمية كل رأس بزوج مرتّب، ثم اطلب إليهم رسم مثلث آخر قائم الزاوية أكبر من الأول وأطوال أضلاعه متناسبة معه، ثم اطلب إليهم كتابة برهان إحداثي لبيان أن المثلثين متشابهان.

إجابة ممكنة:



$$\frac{AB}{AS} = \frac{a}{ma} = \frac{1}{m},\ m > 0$$
$$\frac{AC}{AT} = \frac{b}{mb} = \frac{1}{m}$$
$$\angle A \cong \angle A$$

بما أن طولي ضلعين في المثلث متناسبان مع طولي الضلعين المناظرين لهما في المثلث الآخر، والزاويتين المحصورتين متطابقتان فيتشابه المثلثان CAS وَ TAS، وفق نظرية التشابه SAS.

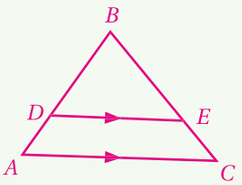
تنبيه لحلّ سؤال

المسطرة والمنقلة: السؤال 26 استعمال يتطلب مسطرة ومنقلة.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 26، يستعمل الطلبة رسومًا هندسيّة وجدولًا ووصفًا لفظيًّا؛ لاستقصاء الأجزاء المتناسبة في المثلث.

إجابات:

26a) إجابة ممكنة:



26b) إجابة ممكنة:

الأطوال		النسب	
AD	0.9 cm	$\frac{AD}{DB}$	$\frac{1}{2}$
DB	1.8 cm		
CE	1.1 cm	$\frac{CE}{EB}$	$\frac{1}{2}$
EB	2.2 cm		

27) إجابة ممكنة: مسلمة التشابه AA ونظرية التشابه SSS ونظرية التشابه SAS، كلّها اختبارات يمكن استعمالها لتحديد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا، وتستعمل مسلمة التشابه AA، عندما يكون معلومًا أن زوجين من زوايا المثلثين متطابقان، وتستعمل نظرية التشابه SSS، عندما تكون أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة. وتستعمل نظرية التشابه SAS، عندما يكون معلومًا أن طولَي ضلعين في أحد المثلثين متناسبان مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في المثلث الآخر، والزاوية المحصورة بينهما في كلا المثلثين متطابقة.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة أن يوضّحوا طريقة استعمال المثلثات المتشابهة؛ لإيجاد ارتفاع شجرةٍ طويلةٍ، ثم اطلب إليهم أن يسلّموا أوراقهم عند خروجك من غرفة الصف.

التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة الدرس 2–6، بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (30)

إجابات:

35) $\angle L \cong \angle E, \angle K \cong \angle D, \angle J \cong \angle C;$
$\frac{KL}{DE} = \frac{JK}{CD} = \frac{JL}{CE}$

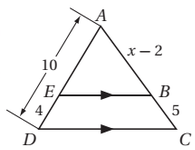
36) $\angle X \cong \angle R, \angle W \cong \angle Q,$
$\angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T;$
$\frac{WX}{QR} = \frac{ZY}{TS} = \frac{WZ}{QT} = \frac{XY}{RS}$

37) $\angle G \cong \angle P, \angle F \cong \angle M,$
$\angle J \cong \angle S, \angle H \cong \angle Q;$
$\frac{JH}{SQ} = \frac{GH}{PQ} = \frac{GF}{PM} = \frac{FJ}{MS}$

38) إجابة ممكنة: إذا كان في الشكل الرباعيّ ضلعان متوازيان ومتطابقان فإنه متوازي أضلاع.

تدريب على الاختبار المعياري

33) إجابة مطوّلة: في الشكل أدناه $\overline{EB} \parallel \overline{DC}$.



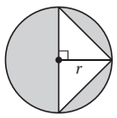
a) اكتب تناسبًا يمكن استعماله لإيجاد قيمة x.

$\frac{x-2}{x+3} = \frac{6}{10}$ (a

b) أوجد قيمة x وطول $\overline{AB}$.

9.5; 7.5 (b

34) جبر: أيٌّ مما يأتي يُمثل مساحة المنطقة المظلّلة؟ **D**



A πr^2

B $\pi r^2 + r^2$

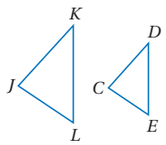
C $\pi r^2 + r$

D $\pi r^2 - r^2$

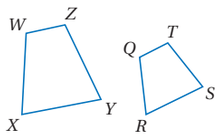
مراجعة تراكمية

اكتب جميع الزوايا المتطابقة ثم واكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة للمضلعين في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 6-1) **37–35) انظر الهامش**

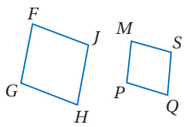
35) $\triangle JKL \sim \triangle CDE$



36) $WXYZ \sim QRST$



37) $FGHJ \sim MPQS$

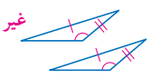


38) القطع الهندسية السبع: تتكون مجموعة القطع الهندسية السبع (Tangram) في الشكل المجاور من سبع قطع: مربع صغير، مثلثين صغيرين قائِمَي الزاوية ومتطابقين، مثلثين كبيرين قائِمَي الزاوية ومتطابقين، مثلث قائم الزاوية متوسط المقاس، وشكل رباعي. كيف يمكنك أن تتحقق من أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع؟ وضّح إجابتك. (الدرس 3-5) **انظر الهامش.**



حدّد المسلمة التي يمكن استعمالها؛ لإثبات تطابق المثلثين في كلٍّ ممَّا يأتي، واكتب "غير ممكن" في الحالة التي لا يمكنك فيها إثبات التطابق. (الدرس 4-3)

39) غير ممكن



40) غير ممكن



41) SSS



استعد للدرس اللاحق

حل كل تناسبٍ ممَّا يأتي:

42) $\frac{3}{4} = \frac{x}{16}$ 12

43) $\frac{x}{10} = \frac{22}{50}$ 4.4

44) $\frac{20.2}{88} = \frac{12}{x}$ 52.3 تقريبًا

45) $\frac{x-2}{2} = \frac{3}{8}$ 2.75



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 6

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

6-2 تدريبات إعادة التعليم

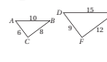
المثلثات المتشابهة

تحديد المثلثات المتشابهة:

فيما يأتي ثلاث طرق لبيان تشابه مثلثين.

6.1	نظرية مسلمة التشابه بزاويتين (AA)	زاويتان في المثلث الأول تطابقان زاويتين في المثلث الآخر.
6.2	نظرية التشابه بمثلثة أضلاع (SSS)	أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة.
6.3	نظرية التشابه بضلعين وزاوية (SAS)	طولا ضلعين في مثلث متناسبان مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر، والزاويتان المحصورتان متطابقتان.

مثال 1 حدّدا إذا كان المثلثان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.



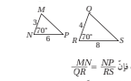
$\frac{AC}{DF}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

$\frac{BC}{EF}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

$\frac{AB}{DE}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

إذن $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ وفق نظرية التشابه SSS

مثال 2 حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.



لمّا كان $\frac{MN}{QR}=\frac{NP}{RS}$ ، فإنّ $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

ولمّا كان $m\angle N=m\angle R$ ، فإنّ $\angle N\cong\angle R$

إذن: $\Delta NMP \sim \Delta RQS$ وفق نظرية التشابه بـ SAS.

تمارين

في كلٍّ مما يأتي، حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، وألّا فحدّد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان، ووضّح إجابتك.

(1)



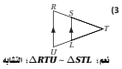
نعم؛ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ، التشابه بـ AA

(2)



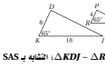
لا؛ $\frac{36}{24}\neq\frac{20}{18}$

(3)



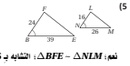
نعم؛ $\Delta RTU \sim \Delta STL$ ، التشابه بـ AA

(4)



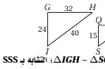
نعم؛ $\Delta KDJ \sim \Delta RPZ$ ، التشابه بـ SAS

(5)



نعم؛ $\Delta BFE \sim \Delta NLM$ ، التشابه بـ SAS

(6)



نعم؛ $\Delta IGH \sim \Delta SQR$ ، التشابه بـ SSS

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

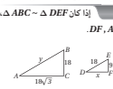
6-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المثلثات المتشابهة

استعمال المثلثات المتشابهة:

تَشابُهُ المثلثات مثل تطابقها، فهو يحقق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي، ويمكنك استعمال المثلثات المتشابهة لإيجاد القياسات المجهولة.

مثال 1 إذا كان $\Delta ABC \sim \Delta DEF$، فأوجد طول DF, AB.



$\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$ $\quad$ $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$

$\frac{18\sqrt{3}}{x}=\frac{18}{9}$ $\quad$ $\frac{y}{18}=\frac{18}{9}$

$18x=9\,(18\sqrt{3})$ $\quad$ $9y=324$

$x=9\sqrt{3}$ $\quad$ $y=36$

وعليه فإن $AB=36$ ، وعليه فإن $DF=9\sqrt{3}$

مثال 2 طول رجل 6 ft، وقد تزامن قياس طول ظلّه مع قياس طول ظل سارية علم، فأوجد أن طول ظله 1.5 ft، وطول ظلّ السارية 7 ft، فما طول سارية العلم؟



تصنع أشعة الشمس مثلثين متشابهين. افترض أن طول سارية العلم x قدمًا، فيكون:

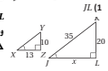
طول ظل الرجل / طول السارية	=	طول ظل السارية / كتابة التناسب
$\frac{6}{x}=\frac{1.5}{7}$		بالتعويض
$(1.5).\ x=6(7)$		خاصية الضرب التبادلي
$1.5x=42$		بالضرب
$x=28$		بقسمة كلا الطرفين على 1.5

إذن طول سارية العلم 28 ft

تمارين

جبر، أوجد الطول المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

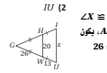
(1) JL



$\angle L\cong\angle L,\ \angle Z\cong\angle J$

ومن مسلمة التشابه AA، يكون $\Delta XYZ \sim \Delta JKL$؛ إذن $x=26$

(2) IU

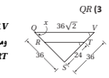


$\angle X\cong\angle X,\ \angle G\cong\angle G$ ؛ إذن $\frac{GH}{GI}=\frac{GW}{GU}$

$\Delta GIU \sim \Delta GHW$

وفق نظرية التشابه SAS؛ 30

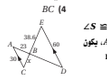
(3) QR



$\angle S\cong\angle S,\ \angle T\cong\angle V$

ومن مسلمة التشابه AA، يكون $\Delta SQV \sim \Delta SRT$؛ 12

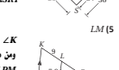
(4) BC



$\angle A\cong\angle D,\ \angle E\cong\angle C$

ومن مسلمة التشابه AA، يكون $\Delta BED \sim \Delta BCA$؛ 19.3

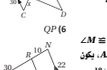
(5) LM



$\angle K\cong\angle M,\ \angle L\cong\angle K$

ومن مسلمة التشابه AA، يكون $\Delta KVM \sim \Delta LPM$؛ 18

(6) QP



$\angle F\cong\angle F,\ \angle R\cong\angle N$

ومن مسلمة التشابه AA، يكون $\Delta FRQ \sim \Delta FNP$؛ $10\frac{2}{3}$

(7) طولا عمودين رأسيين 0.45 m ، 2 m، فكم يكون طول ظل العمود الأطول (مقربًا إلى أقرب جزء من مئة)، عندما يكون طول ظل العمود الأقصر 0.85 m؟ 3.78 m تقريبًا.

تدريبات المهارات (13) — دون | ضمن

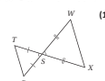
الاسم _____ التاريخ _____

6-2 تدريبات المهارات

المثلثات المتشابهة

في كلٍّ مما يأتي، حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، وألّا فحدد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان، ووضح إجابتك.

(1)



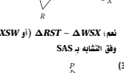
نعم؛ $\Delta RST \sim \Delta XSW$ (أو $\Delta RST \sim \Delta XSW$) وفق التشابه بـ SAS

(2)



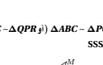
نعم؛ $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ (أو $\Delta ABC \sim \Delta QPR$) وفق التشابه بـSSS

(3)



نعم؛ $\Delta STU \sim \Delta JPM$ وفق التشابه بـ SAS

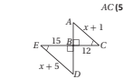
(4)



نعم؛ $\Delta SKM \sim \Delta RTQ$ وفق التشابه بـ AA

جبر، أوجد الطول المحدّد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

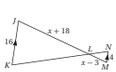
(5) AC



$\angle C\cong\angle C,\ \angle ABC\cong\angle DBE,\ \angle E\cong\angle E$

ومن مسلمة التشابه AA يكون $\Delta ABC \sim \Delta DBE$؛ 16

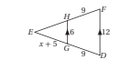
(6) JL



$\angle K\cong\angle K,\ \angle M\cong\angle M,\ \angle J\cong\angle K$

ومن مسلمة التشابه AA يكون $\Delta JKL \sim \Delta MNL$؛ 28

(7) EH



$\angle E\cong\angle E,\ \angle H\cong\angle F,\ \angle F\cong\angle E$

ومن مسلمة التشابه AA يكون $\Delta DEF \sim \Delta GEH$؛ 9

(8) VT



$\angle F\cong\angle F,\ \angle V\cong\angle S,\ \angle S\cong\angle V$

ومن مسلمة التشابه AA يكون $\Delta RST \sim \Delta UVT$؛ 5.4

تدريبات حل المسألة (14) — دون | ضمن | فوق

الاسم _____ التاريخ _____

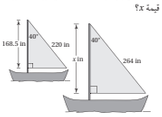
6-2 تدريبات حل المسألة

المثلثات المتشابهة

1) كراسي، يبيع محلّ للأثاث المنزليّ كراسي من النوع نفسه وبحجمين مختلفين: أحدهما للكبار والآخر للأطفال كما في الشكل أدناه، أوجد قيمة x، بحيث يكون المضلعان المحدّدان في الشكل متشابهين. 13.5 in



2) قوارب، يمثّل الرسم أدناه قاربين شراعيَّين يشاركان في سباق للقوارب، إذا علمت أن شراعيهما متشابهان، فما قيمة x؟



202.2 in

3) طلال، طول ظلّ برج بثّ إذاعيّ 8ft، وفي الوقت نفسه كان طول ظلّ عصا مثبّتة رأسيًّا 0.5ft. إذا كان ارتفاع العصا 3ft، فما ارتفاع البرج؟ 48 ft

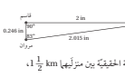
4) هندسة، رسمت آمنة مضلّعًا خماسيًّا منتظمًا، وبدأت تصل بين رؤوسه لتكوّن نجمةً خماسيّةً كما في الشكل أدناه، وبعد أن رسمت ثلاثة أقطار لفت انتباهها مثلثان في الشكل هما ΔABC و ΔBEC، فقد بدا لها أنهما متشابهان، أثبت أنها كذلك.



إجابة ممكنة: بما أن $m\angle ADB=108°$، فإن $m\angle DBA=36°$ (زاوية قاعدة في ΔABD المتطابق الضلعين). لذا: $m\angle ABC=72°$. وبالمثل فإن: $m\angle DCB=36°$، و $m\angle ACB=72°$.

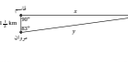
إذن $m\angle BEC=72°$، و $m\angle BAC=36°$، لذا: ΔABC و ΔBCE متشابهان وفق المسلمة AA.

5) قمم الجبال، أراد قاسم ومروان معرفة المسافة الواقعة بين قمّة الجبل ومنزل كلٍّ منهما، فقاما بقياس الزاويتين بين خطّي النظر من القمّة إلى منزل كلٍّ منهما بدقّة، ورسما الشكل الآتي:



إذا كانت المسافة الحقيقيّة بين منزليهما $1\frac{1}{2}$ km، فأجب عمّا يأتي:

a) ما المسافة الحقيقية من منزل قاسم إلى قمّة الجبل؟ مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من الكيلومتر.



12.2 km

b) ما المسافة الحقيقيّة من منزل مروان إلى قمّة الجبل؟ مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من الكيلومتر.

12.3 km

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر الدرس 2 - 6

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

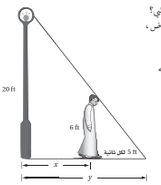
التدريبات الإثرائية (15)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

6-2 التدريبات الإثرائية

الظلال المتحركة:

هل راقبت يومًا ظلّك في الشارع ليلًا، ولاحظت كيف يتغيّر طوله وأنت تمشي؟ افترض أن رجلًا طوله 6 ft يقف أسفل مصباح ارتفاعه 20 ft عن سطح الأرض، وقد بدأ السير مبتعدًا عن المصباح بمعدّل 5 ft لكل ثانية.



1) إذا كان الرجل يمشي بمعدل 20 ft لكل ثانية، فكيف يتغيّر معدّل تحرّك ظلّه بالنسبة لحركة الرجل.

إجابة ممكنة: ظلّ الرجل يتحرك بسرعة أكبر من سرعة الرجل، أي يزداد طول الظل بمعدّل أكبر من زيادة سرعته.

2) كم يبعد الرجل عن المصباح بعد 8 ثوانٍ؟

40 ft

3) كم يبعد طرف ظلّه عن قاعدة المصباح بعد 8 ثوانٍ؟
استعمل المثلثات المتشابهة لحلّ هذه المسألة.

افترض أن x تساوي بعد الرجل عن قاعدة المصباح، و y تساوي بعد طرف ظل الرجل عن قاعدة المصباح،
x طول ظل الرجل $\frac{6}{20} = \frac{y-x}{y}$؛
57.14 ft

4) كم يبعد الرجل عن المصباح بعد 3 ثوانٍ أخرى؟ وكم يبعد طرف ظلّ الرجل عن قاعدة المصباح؟

55 ft;78.57 ft

5) كم قدمًا قطع الرجل في الثواني الثلاث؟ وكم قدمًا تحرّك طرف ظلّ الرجل في الثواني الثلاث؟

15 ft ; 21.43 ft

6) يتحرّك الرجل بمعدّل 5 ft لكل ثانية، فما معدّل تحرّك ظلّ الرجل؟ قارن بين هذا المعدّل والتخمين الذي وضعته في السؤال 1، وخمّن أيضًا لماذا كانت النتائج هكذا.

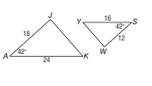
7.14 ft لكل ثانية؛ إجابة ممكنة: الجواب متّسق مع التخمين في السؤال 1. فظلّ الرجل يزداد طولًا كلما تحرك مبتعدًا عن عمود المصباح، فعندما كان بعد الرجل عن قاعدة المصباح 40 ft، كان طول ظله 17.14 ft. وعندما أصبح بعده 55 ft، صار طول ظله 21.43 ft

كتاب التمارين (13)　دون ضمن فوق

6 - 2 المثلثات المتشابهة

في السؤالين الآتيين، حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. وإلّا فحدد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان؟ وضّح إجابتك.

1)



نعم؛ $\triangle JAK \sim \triangle WSY$؛
وفق النظرية SAS، حيث إنّ: $\frac{JA}{WS} \cong \frac{AK}{SY}$ ، $\angle A \cong \angle S$

2)



لا؛ سيكون المثلثان متشابهان وفق النظرية SAS أو المسلمة AA إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$

جبر: أوجد الطول المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي:

3) LM, QP



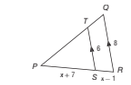
$\triangle LMN \sim \triangle PQN$; $ML = 12$; $QP = 8$

4) NL, ML



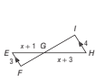
$\triangle JLN \sim \triangle KLM$; $LN = 21$; $LM = 14$

5) PS, PR



$\triangle TPS \sim \triangle QPR$; $PS = 12$; $PR = 16$

6) EG, HG



$\triangle EGF \sim \triangle HGI$; $EG = 6$; $HG = 8$

7) مساجد، طول ظل مئذنة مسجد 128 ft، وفي اللحظة ذاتها كان طول ظل عمود إنارة قرب المئذنة 8 ft.

a) إذا كان ارتفاع عمود الإنارة 5 ft و 3 in، فاكتب تناسبًا يمكن استعماله لإيجاد ارتفاع المئذنة.

إجابة ممكنة: إذا كان ارتفاع المئذنة $= x$، فإن $\frac{128}{8} = \frac{x}{5.25}$.

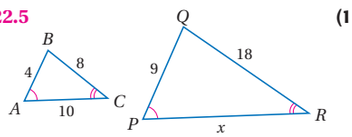
b) ما ارتفاع المئذنة؟ **84 ft**

اختبار منتصف الفصل

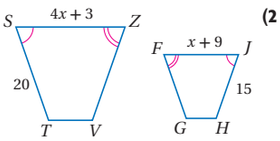
الدرسان 1-6 و 2-6

إذا كان المضلعان في كلٍّ من السؤالين الآتيين متشابهين، فأوجد قيمة x. (الدرس 1-6)

1) **22.5**



2) **3.4**



3) اختيار من متعدّد: إذا كانت المسافة بين الطائف والدمام على خريطة تساوي 98 cm، وكان مقياس رسم الخريطة 2.5 cm : 30 km، فما المسافة الحقيقية بينهما؟ (الدرس 1-6)

C

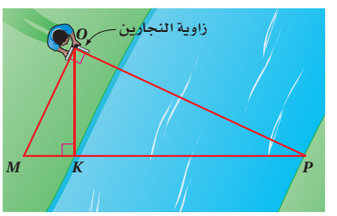
A 1211 km

B 964 km

C 1176 km

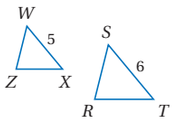
D 1031 km

4) قياس: يستعمل عبدالله زاوية النجارين لحساب KP عبر النهر كما في الشكل أدناه، إذا كان: $OK = 4.5\text{ ft}, MK = 1.5\text{ ft}$، فأوجد المسافة KP عبر النهر. (الدرس 2-6) انظر الهامش



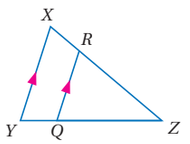
5) إذا كان: $\triangle SRT \sim \triangle WZX$، $ST = 6, WX = 5$، فأوجد محيط $\triangle WZX$

إذا كان محيط $\triangle SRT$ يساوي 18وحدة. (الدرس 1-6) **15 وحدة**

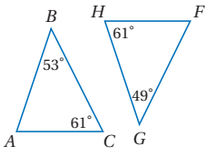


حدّد ما إذا كان المثلثان في السؤالين **6, 7** متشابهين أم لا، وإذا كانا متشابهين، فاكتب عبارة التشابه. وإلّا فحدد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان، وضح إجابتك. (الدرس 2-6)

6) نعم؛ $\triangle YXZ \sim \triangle QRZ$ وفق مسلمة التشابه AA، حيث إن: $\angle x \cong \angle R, \angle Y \cong \angle Q$

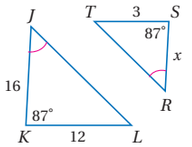


7) لا؛ الزوايا غير متطابقة، لذلك فالمثلثان غير متشابهين.

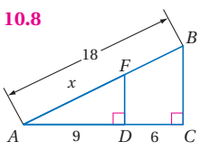


جبر أوجد الطول المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 2-6)

8) SR $\triangle JKL \sim \triangle RST$; 4



9) AF $\triangle ABC \sim \triangle AFD$; 10.8



التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يُجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إليهم مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم التكويني

اختبار منتصف الفصل، ص (32)

المطويات متابعة المطويات

شجّع الطلاب قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي دوّنوها في مطوياتهم حول الدرسين 6–1, 6–2.

إجابة:

4) نعم OKM, POM متشابهان وفق مسلمة التشابه AA، حيث إن $\angle K \cong \angle O, \angle M \cong \angle M$

وباستعمال نظرية فيثاغورس في $\triangle OKM$، يكون:

$$OM = \sqrt{(1.5)^2 + (4.5)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

ومن تشابه المثلثين يكون

$$\frac{MK}{OM} = \frac{OM}{PM}$$

$$\frac{1.5}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{2}}{1.5 + KP}$$

$$22.5 = 1.5\ (1.5 + KP)$$

$$KP = 13.5\text{ ft}$$ أي أن

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدرسين 6-1, 6-2.		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

6-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-3

استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن مثلثات متشابهة.

الدرس 6-3

استعمال الأجزاء المتناسبة في المثلث وفي المستقيمات المتوازية.

ما بعد الدرس 6-3

تعرّف علاقات التناسب بين منصفات الزوايا والارتفاعات والقطع المتوسطة المتناظرة في المثلثات المتشابهة واستعمالها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- صِفِ المسافة بين مستقيمين متوازيين. متساوية دائمًا.
- لماذا تظهر المسافة بين الحافّة العليا والحافّة السفلى للخزائن وكأنها تصغر؟ إجابة ممكنة : لأنه تم رسم المستقيمين المكوّنين للحافتين العليا والسفلى بحيث يقتربان من بعضهما.
- هل المستقيمان المكوّنان من الحافّة العُليا والحافّة السفلى للخزائن في الصورة متوازيان؟ نعم
- وهل تبدو كذلك في الصورة؟ ولماذا؟ لا تبدو كذلك؛ وذلك ليحقق الرسام خداع الأجسام البعيدة فتبدو أصغر من الأجسام القريبة إلى المشاهد بحيث تبدو عند نقطة بعيدة أن المستقيمين المتوازيين يلتقيان في النقطة.

6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة
Parallel Lines and Proportional Parts

فيما سبق:
درستُ استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن مثلثات متشابهة.
(الدرس 2-6)

والآن:
- أستعمل الأجزاء المتناسبة في المثلث.
- أستعمل الأجزاء المتناسبة في المستقيمات المتوازية.

المفردات:
القطعة المنصفة في المثلث
midsegment of a triangle

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



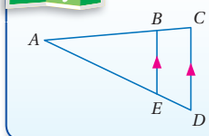
يستعمل رسّامو الصور المتحركة طرائق عدّة؛ لإضفاء خداع بصري على أعمالهم. كما يستعملون في الرسومات الثلاثية الأبعاد حقيقة كون الأجسام البعيدة تبدو أصغر من الأجسام القريبة إلى المشاهد. ولتحقيق هذا الخداع، يستعمل الرسّامون نظرية التناسب في المثلث.

الأجزاء المتناسبة في المثلث: عند رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، فإنّه يمكن إثبات أن المثلثين الناتجين متشابهان، وذلك باستعمال مسلمة التشابه AA، وبما أن المثلثين متشابهان، فإنّ أطوال أضلاعهما متناسبة.

نظريّة 6.5 نظريّة التناسب في المثلث

أضف إلى مطويتك

إذا وازى مستقيم ضلعًا من أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنّه يقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة.



مثال: إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$.

ستبرهن النظريّة 6.5 في السؤال 21

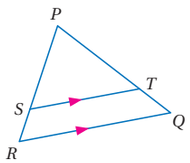
إرشادات للدراسة

التوازي:
إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين، فإن القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}, \overline{CD}$ متوازيتان؛ لأنهما جزء من المستقيمين $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ على الترتيب.
أي أنه إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

مثال 1 إيجاد طول ضلع

في $\triangle PQR$ ، إذا كان: $PT = 7.5, TQ = 3, SR = 2.5$ ، $\overline{ST} \parallel \overline{RQ}$ ، فأوجد PS .

استعمل نظريّة التناسب في المثلث.



$\frac{PS}{SR} = \frac{PT}{TQ}$	نظرية التناسب في المثلث
$\frac{PS}{2.5} = \frac{7.5}{3}$	بالتعويض
$PS \cdot 3 = (2.5)(7.5)$	خاصية الضرب التبادلي
$3PS = 18.75$	بالضرب
$PS = 6.25$	بقسمة كلا الطرفين على 3

تحقق من فهمك

1) في الشكل أعلاه، إذا كان: $PT = 15, SR = 5, PS = 12.5$ ، فأوجد TQ . 6

مصادر الدرس 6-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (94)	• تنويع التعليم ص (98 ,93, 94)	• تنويع التعليم ص (98 ,93, 94)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (14)	• كتاب التمارين ص (14)	• كتاب التمارين ص (14)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

الأجزاء المتناسبة في المثلث

الأمثلة 1-3 تبيّن كيفية استعمال النظريات المتضمنة للأجزاء المتناسبة للمثلثات لإيجاد قياسات غير معلومة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

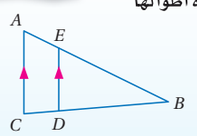
وعكس النظرّية 6.5 صحيح أيضًا، ويمكن إثباته باستعمال الأجزاء المتناسبة في المثلث ونظرية التشابه SAS .

نظريّة 6.6 عكس نظريّة التناسب في المثلث

أضف إلى مطويتك

إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة، فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث للمثلث.

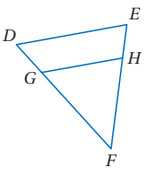
مثال: إذا كان $\frac{AE}{EB}=\frac{CD}{DB}$ ، فإن $\overline{ED}\parallel\overline{AC}$.



ستبرهن النظرية 6.6 في السؤال 22

مثال 2 تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين

في $\triangle DEF$ إذا كان: $DG=\frac{1}{3}GF,\ EH=3,\ HF=9$، فهل $\overline{DE}\parallel\overline{GH}$؟ وضح إجابتك.



يتعين عليك إثبات أنّ $\frac{DG}{GF}=\frac{EH}{HF}$ ، وذلك باستعمال عكس نظرية التناسب في المثلث.

$DG=\frac{1}{3}GF$	معطى
$\frac{DG}{GF}=\frac{1}{3}$	بقسمة كلا الطرفين على GF
$\frac{EH}{HF}=\frac{3}{9}$	بالتعويض $EH=3$ ، $HF=9$
$=\frac{1}{3}$	بالتبسيط

وبما أن:

$$\frac{DG}{GF}=\frac{EH}{HF}=\frac{1}{3}$$

بحسب عكس نظرية التناسب في المثلث، تكون $\overline{GH}\parallel\overline{DE}$

تحقق من فهمك

2) في الشكل أعلاه، إذا كان: $DG=\frac{1}{2}GF,\ EH=6,\ HF=10$ ، فهل $\overline{DE}\parallel\overline{GH}$ ؟

2) لا؛ لأن $DG=\frac{1}{2}GF$

أي $\frac{DG}{GF}=\frac{1}{2}$

أيضًا $\frac{EH}{HF}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

وبما أن $\frac{DG}{GF}\neq\frac{EH}{HF}$

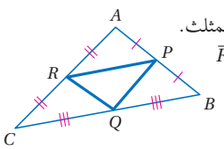
فهي لا تحقق عكس نظرية التناسب في المثلث، وتكون $\overline{DE}\nparallel\overline{GH}$

إرشادات للدراسة

مثلث القطع المنصفة: القطع المنصفة الثلاث في المثلث تشكل مثلثًا يُسمى مثلث القطع المنصّفة.

القطعة المنصّفة في المثلث هي قطعة مستقيمة طرفاها نقطتا منتصف ضلعين في المثلث. وفي كل مثلث ثلاث قطع منصّفة. فالقطع المنصّفة في $\triangle ABC$ هي $\overline{RP},\overline{PQ},\overline{RQ}$

ونظرية القطعة المنصّفة في المثلث هي حالة خاصّة من عكس نظرية التناسب في المثلث.

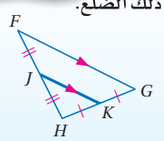


نظرية 6.7 نظريّة القطعة المنصّفة في المثلث

أضف إلى مطويتك

القطعة المنصفة في المثلث توازي أحد أضلاعه، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع.

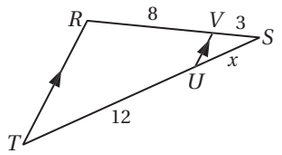
مثال: إذا كانت J,K نقطتَي منتصف $\overline{FH},\overline{HG}$ على الترتيب، فإن: $\overline{JK}\parallel\overline{FG},\ JK=\frac{1}{2}FG$.



ستبرهن النظرية 6.7 في السؤال 23

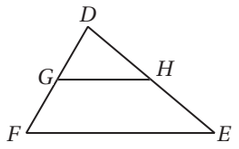
مثالان إضافيان

1 في $\triangle RST$، إذا كان $\overline{RT}\parallel\overline{VU}$ ، $SV=3,\ VR=8,\ UT=12$. فأوجد SU.



$4\frac{1}{2}$

2 في $\triangle DEF$، إذا كان $DH=18,\ HE=36,\ DG=\frac{1}{2}GF$. فهل $\overline{GH}\parallel\overline{FE}$ ؟ وضح إجابتك.



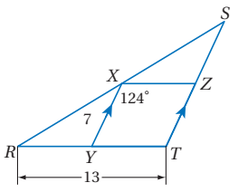
نعم؛ من المعلومات المعطاة، $\frac{DG}{GF}=\frac{DH}{HE}$. ولأن أطوال القطع المستقيمة متناسبة فإن $\overline{GH}\parallel\overline{FE}$.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم مثلثين متشابهين على السبورة، ثم اسحب المثلث الأصغر إلى أعلى المثلث الأكبر؛ لإظهار أن في المثلثين زوجًا من الأضلاع المتوازية. استعمل هذا الشكل وفكرة المثلثات المتشابهة؛ لمساعدتك على أن توضح للطلاب أن المستقيم الموازي لأحد أضلاع مثلثٍ، يقسم الضلعين الآخرين إلى قطعٍ مستقيمةٍ متناسبةٍ.

مثال 3 استعمال نظريّة القطعة المنصّفة في المثلث

في $\triangle RST$ ، إذا كانت $\overline{XY}, \overline{XZ}$ قطعتين منصّفتين، فأوجد كل قياس مما يأتي:



a XZ

نظرية القطعة المنصّفة في المثلث $XZ = \frac{1}{2}RT$

بالتعويض $XZ = \frac{1}{2}(13)$

بالتبسيط $XZ = 6.5$

b ST

نظرية القطعة المنصّفة في المثلث $XY = \frac{1}{2}ST$

بالتعويض $7 = \frac{1}{2}ST$

بضرب كلا الطرفين في 2 $14 = ST$

c $m\angle RYX$

$\overline{XZ}$ قطعة منصفة في $\triangle RST$ ، إذن $\overline{XZ} \parallel \overline{RT}$.

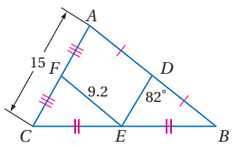
نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا $\angle RYX \cong \angle YXZ$

تعريف تطابق الزوايا $m\angle RYX = m\angle YXZ$

بالتعويض $m\angle RYX = 124°$

تحقق من فهمك

أوجد كل قياس مما يأتي معتمدًا على الشكل المجاور:

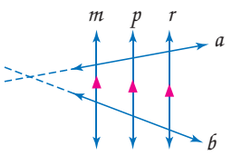


3A DE 7.5

3B DB 9.2

3C $m\angle FED$ 82°

الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية

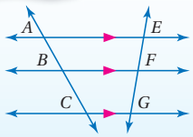


هناك حالة خاصّة أخرى لنظرية التناسب في المثلث تتضمن ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، يقطعها قاطعان. لاحظ أنّه إذا مُدَّ القاطعان a, b ، فإنّهما يصنعان ثلاثة مثلثاتٍ لها ثلاثة أضلاع متوازية.

نتيجة 6.1 الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية

أضف إلى مطويتك

إذا قطع قاطعان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، فإن أطوال أجزاء القاطعين تكون متناسبة.

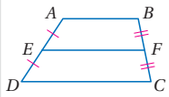


مثال: إذا كان: $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CG}$ ، وكان $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{EG}$ قاطعان لها، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$.

ستبرهن النتيجة 6.1 في السؤال 19

إرشادات للدراسة

القطعة المنصّفة: نظريّةُ القطعة المنصّفة في المثلث، تشبه نظريّة القطعة المنصّفة في شبه المنحرف، والتي تنصّ على أن القطعة المنصّفة في شبه المنحرف توازي القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولَي القاعدتين.



$\overline{EF} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

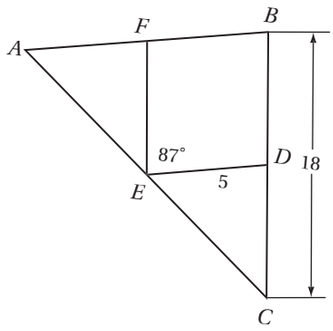
إرشادات للدراسة

تناسبات أخرى: في النتيجة 6.1 ، يمكن كتابة تناسبين آخرين للمثال:

$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}, \frac{AC}{BC} = \frac{EG}{FG}$

مثال إضافي

3 في الشكل أدناه: $\overline{EF}, \overline{DE}$ قطعتان منصفتان في $\triangle ABC$، أوجد كل قياسٍ ممَّا يأتي:



a AB 10

b FE 9

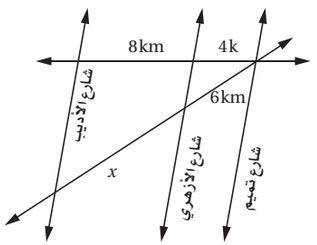
c $m\angle AFE$ 87°

الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية

المثالان 4, 5 يبيّنان كيفية استعمال نتيجة 6.1 ، ونتيجة 6.2 في هذا الدرس؛ لإيجاد أطوال القطع المستقيمة المتناسبة والمتطابقة غير المعلومة.

مثال إضافي

4 **خرائط:** في الشكل أدناه، الشوارع (تميم والأزهري والأديب) متوازية. ويبيّن الشكل المسافات بينها، أوجد قيمة x.



12km

المحتوى الرياضي

المستقيمات المتوازية: عكس النتيجة 6.2 صحيح أيضًا. فإذا قطعت ثلاثة مستقيمات أجزاء متطابقة من أيّ قاطع، فإنها تقطع قطعًا متطابقة على كل مستقيمٍ عموديٍّ على كلٍّ من المستقيمات، وهذا يبيّن أن المستقيمات الثلاثة على أبعاد متساوية فيما بينها؛ أي أنّها متوازية.



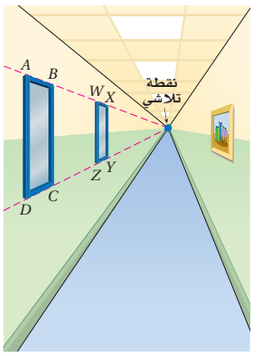
الربط مع الحياة

يستعمل الرسامون إيحاءات إدراكيّة متنوعة، تجعل الرسم الثنائي الأبعاد يبدو ثلاثي الأبعاد منها:

- الحجم: تبدو الأشياء البعيدة أصغر حجمًا.
- الوضوح: تبدو الأجسام القريبة أكثر وضوحًا.
- التفاصيل: تتضمن الأجسام القريبة تفاصيل دقيقة، في حين تتضمن الأجسام البعيدة معالم عامّة.

مثال 4 من واقع الحياة

استعمال القطع المتناسبة من قاطعين



رسم: ترسم مريم ممرًّا في منظورٍ ذي نقطة تلاشٍ واحدة، فاستعملت مريم الخطوط الإرشادية المبيّنة؛ لرسم نافذتين على الجدار الأيسر. إذا كانت القطع المستقيمة: $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{WZ}, \overline{XY}$ متوازية، وكان: $AB = 8\text{ cm}, DC = 9\text{ cm}, ZY = 5\text{ cm}$، فأوجد WX.

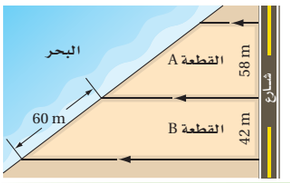
بما أن $\overline{XY} \parallel \overline{WZ} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$، إذن $\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$ وفق النتيجة 6.1.

$\frac{AB}{WX} = \frac{DC}{ZY}$	النتيجة 6.1
$\frac{8}{WX} = \frac{9}{5}$	بالتعويض
$WX \cdot 9 = 8 \cdot 5$	خاصيّة الضرب التبادلي
$9WX = 40$	بالتبسيط
$WX = \frac{40}{9} \approx 4.4\text{ cm}$	بقسمة كلا الطرفين على 9

تحقق: نسبة DC إلى ZY هي 9 إلى 5، وهي تقريبًا 10 إلى 5 أو 2 إلى 1.
وكذلك نسبة AB إلى WX هي 8 إلى 4.4 وهي تقريبًا 8 إلى 4 أو 2 إلى 1؛
إذن الإجابة معقولة. ✔

تحقق من فهمك

4) عقارات: واجهة قطعة الأرض هي طول حدِّها المحاذي لمعْلَم ما مثل شارع أو بحر أو نهر، أوجد طول الواجهة البحريّة للقطعة A إلى أقرب عُشر المتر. **82.9 m تقريبًا**

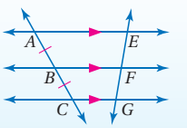


إذا كانت النسبة بين أطوال أجزاء القاطعين تساوي 1، فإن المستقيمات المتوازية تقطع أجزاءً متطابقة من القاطعين.

نتيجة 6.2 **الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية**

أضف إلى مطويتك

إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، وكانت أجزاؤه متطابقة، فإن أجزاء أي قاطع آخر لها تكون متطابقة.



مثال: إذا كان: $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$، وكان $\overline{AC}, \overline{EG}$ قاطعين لها، بحيث $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ فإن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$.

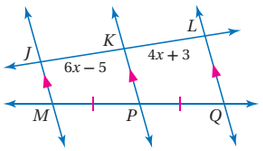
ستبرهن النتيجة 6.2 في السؤال 20

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون البصريّون: يمكن للطلبة المتفوقين أيضًا فنيًّا أن يستقصوا التفسير الرياضي لنقطة التلاشي (المثال 4). اطلب إلى الطلبة أن يرسموا رسمًا تُستعمل فيه نقطة تلاشٍ، وأن يذكروا المفاهيم الرياضية التي يتضمَّنها.

مثال 5 استعمال القطع المتطابقة من قاطعين



جبر: أوجد قيمة x.

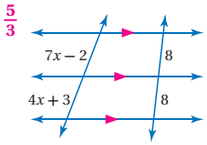
بما أنّ: $\overleftrightarrow{JM} \parallel \overleftrightarrow{KP} \parallel \overleftrightarrow{LQ}$, $\overline{MP} \cong \overline{PQ}$ ،
فإنّ $\overline{JK} \cong \overline{KL}$ وفق النتيجة 6.2.

$JK = KL$	تعريف التطابق
$6x - 5 = 4x + 3$	بالتعويض
$2x - 5 = 3$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$2x = 8$	بإضافة 5 للطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 2

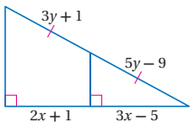
تحقق من فهمك

أوجد قيمة كلٍّ من x, y.

(5A) $\frac{5}{3}$



(5B) $x = 6, y = 5$



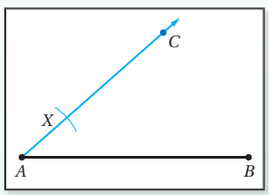
يمكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى جزأين متطابقين، برسم العمود المنصّف للقطعة المستقيمة، ولكن لا يمكن تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة برسم أعمدة منصّفة، ولعمل ذلك تستعمل المستقيمات المتوازية والنتيجة 6.2.

إنشاءات هندسية تقسيم قطعة مستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متطابقة

ارسم قطعة مستقيمة $\overline{AB}$، ثمّ استعمل النتيجة **6.2** ؛ لتقسيمها إلى **3** أجزاء متطابقة.

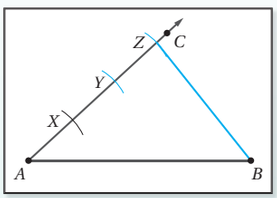


الخطوة 1:



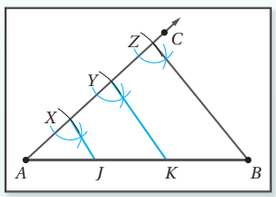
ارسم $\overrightarrow{AC}$، ثم ثبّت الفرجار عند A، وارسم قوسًا يقطع $\overrightarrow{AC}$ عند X.

الخطوة 2:



استعمل الفرجار بالفتحة نفسها؛ لتعيين النقطتين Z, Y، بحيث $\overline{AX} \cong \overline{XY} \cong \overline{YZ}$. ثم ارسم $\overline{ZB}$.

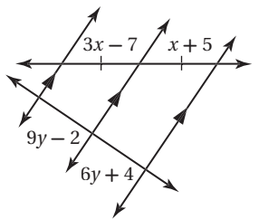
الخطوة 3:



أنشئ من X و Y مستقيمين يوازيان $\overline{ZB}$ كما درست سابقًا، وسمِّ نقطتي تقاطعهما مع $\overline{AB}$ بالحرفين J, K.

مثال إضافي

5 أوجد قيمة كل من x , y.



$x = 6; y = 2$

تنبيه!

ما المطلوب؟ انتبه إلى المطلوب في السؤال بدقّة. ففي المثال 5، مطلوب منك إيجاد قيمة x وليس أطوال القطع المستقيمة.

إرشادات للمعلم الجديد

رسم مستقيمين متوازيين: ذكِّر الطلاب بخطوات رسم مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم، ويمر بنقطة لا تقع عليه، باستعمال المسطرة والفرجار.

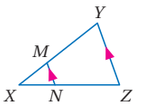
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيّون: اطلب إلى الطلبة استعمال خيطٍ وشريطٍ لاصقٍ وأرضيّة مبلّطة لتعيين قطع مستقيمة متطابقة بين مستقيمات متوازية رسمت باستعمال الشريط اللاصق على الأرضية. استعمل الخيط لبيان أنه إذا شكلت ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر قطعًا مستقيمة متطابقة على قاطع فإنها تشكّل قطعًا متطابقة على أي قاطع آخر.

تأكد

المثال 1 في $\triangle XYZ$ ، إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{YZ}$، فأجب عن السؤالين الآتيين:



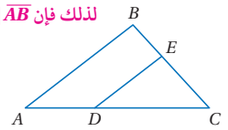
1) إذا كان: $NZ = 9, XN = 6, XM = 4$ ، فأوجد XY. **10**

2) إذا كان: $XY = 10, XM = 2, XN = 6$ ، فأوجد NZ. **24**

المثال 2

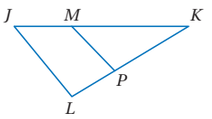
3) في $\triangle ABC$ ، إذا كان: $BC = 15, BE = 6, DC = 12, AD = 8$ ، فهل $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$؟ برّر إجابتك.

نعم؛ $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC} = \frac{2}{3}$، لذلك فإن $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.



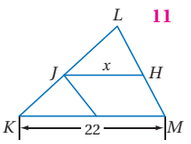
4) في $\triangle JKL$ ، إذا كان: $JK = 15, JM = 5, LK = 13, PK = 9$ ، فهل $\overline{JL} \parallel \overline{MP}$؟ برّر إجابتك.

لا؛ لأن $\frac{JM}{MK} \neq \frac{LP}{PK}$

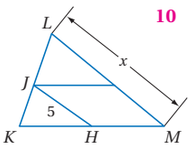


المثال 3 إذا كانت $\overline{JH}$ قطعة منصِّفة في $\triangle KLM$ ، فأوجد قيمة x في السؤالين الآتيين:

5) **11**



6) **10**



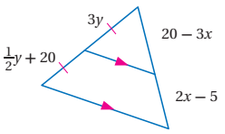
المثال 4

7) **خرائط:** الشارعان 3, 5 في الخريطة المجاورة متوازيان. إذا كانت المسافة بين الشارع 3 والمركز التجاري على امتداد شارع أبو عبيدة 3201 m ، فأوجد المسافة بين الشارع 5 والمركز التجاري على امتداد شارع الاتحاد، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر من المتر. **2360.3 m**

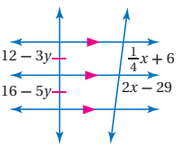


المثال 5 **جبر:** أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

8) $x = 5;\ y = 8$

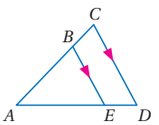


9) $x = 20;\ y = 2$



تدرب وحل المسائل

المثال 1 في $\triangle ACD$ ، إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$، فأجب عن السؤالين الآتيين:



10) إذا كان: $AE = 9, BC = 4, AB = 6$ ، فأوجد ED. **6**

11) إذا كان: $ED = 5, AC = 16, AB = 12$ ، فأوجد AE. **15**

3 التدريب

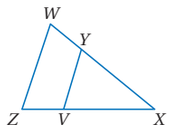
التقويم التكوينيّ

استعمل الأسئلة 9–1؛ للتحقّق من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	10-18 ، 35 ، 36 ، 38-53
ضمن ضمن المتوسط	11-33 فردي ، 35 ، 36 ، 38-53
فوق فوق المتوسط	17-48 ، (اختياري: 49-53)

المثال 2 حدّد ما إذا كان $\overline{ZW} \parallel \overline{VY}$ أم لا، وبرّر إجابتك في كلٍّ من السؤالين الآتيين:



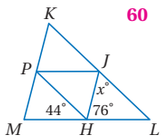
12) $ZX = 18, ZV = 6, WX = 24, YX = 16$ نعم؛ $\frac{ZV}{VX} = \frac{WY}{YX} = \frac{1}{2}$

13) $WX = 31, YX = 21, ZX = 4ZV$ لا؛ $\frac{ZV}{VX} \neq \frac{WY}{YX}$

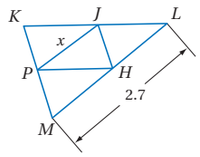
في $\triangle KLM$، إذا كانت $\overline{JH}, \overline{JP}, \overline{PH}$ قطعًا منصّفة، فأوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

المثال 3

14) 60



15) 1.35



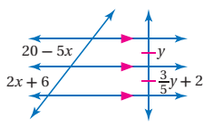
المثال 4

16) خرائط: المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد الطريق المرصوف 880 m. إذا كان طريق المشاة يوازي الطريق الترابي، فأوجد المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد منطقة الأشجار. **1100 m**

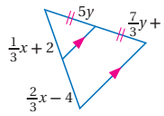


المثال 5 **جبر:** أوجد قيمة كل من x, y في السؤالين الآتيين:

17) $x = 2;\ y = 5$



18) $x = 18;\ y = 3$



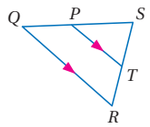
برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ مما يأتي: **21–19) انظر الهامش**

19) النتيجة 6.1 **20)** النتيجة 6.2 **21)** النظرية 6.5

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظريتين الآتيتين: **22, 23) انظر ملحق الإجابات**

22) النظرية 6.6 **23)** النظرية 6.7

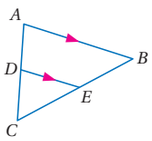
استعمل $\triangle QRS$ للإجابة عن السؤالين الآتيين:



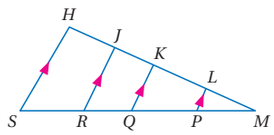
24) إذا كان: $ST = 8, TR = 4, PT = 6$، فأوجد QR. **9**

25) إذا كان: $QR = 12, SP = 4, PT = 6$، فأوجد SQ. **8**

26) إذا كان: $CE = t - 2, EB = t + 1$ $CD = 2, CA = 10$، فأوجد قيمة كلٍّ من t, CE. $t = 3, CE = 1$



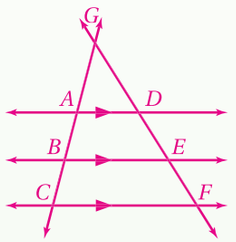
27) إذا كان: $LK = 4, MP = 3, PQ = 6, KJ = 2$ $RS = 6, LP = 2$، فأوجد قيمة كلٍّ من ML, QR, QK, JH $ML = 2, QR = 3, QK = 6, JH = 4$



إجابات:

19) المعطيات: $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$

المطلوب: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$



البرهان:

في $\triangle GBE$، $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$. ومن نظرية التناسب في المثلث، يكون $\frac{GA}{GD} = \frac{AB}{DE}$

وفي $\triangle GCF$، $\overline{BE} \parallel \overline{CF}$، ومن نظرية التناسب في المثلث، يكون $\frac{GB}{GE} = \frac{BC}{EF}$،

ولأن $\triangle GAD \sim \triangle GBE$ وفق مسلمة التشابه AA،

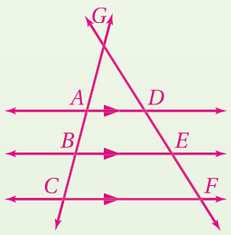
فإن $\frac{GA}{GD} = \frac{GB}{GE}$

وبالتعويض $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

أيّ أنَّ: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

20) المعطيات: $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}, \overline{AB} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{DE} \cong \overline{EF}$



البرهان:

من النتيجة 6.1، $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

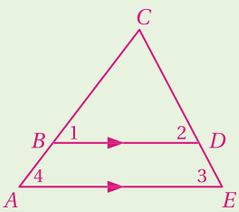
وبما أنّ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، فإنّ $AB = BC$ بحسب تعريف التطابق.

إذن $\frac{AB}{BC} = 1$؛ وبالتعويض $\frac{DE}{EF} = 1$

لذلك $DE = EF$، ومن تعريف التطابق يكون $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.

21) المعطيات: في $\triangle ACE$: $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$

المطلوب: $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$



البرهان: $\angle 2 \cong \angle 3, \angle 1 \cong \angle 4$؛ لأنها زوايا متناظرة، ومن مسلمة التشابه AA، يكون $\triangle ACE \sim \triangle BCD$

ومن تعريف المضلعين المتشابهين يكون $\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CD}$، ومن مسلمة جمع القطع المستقيمة:

$CA = BA + CB, CE = DE + CD$.

وبالتعويض $\frac{BA + CB}{CB} = \frac{DE + CD}{CD}$.

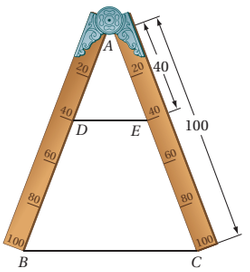
وبتوزيع البسط على المقام، يكون

$\frac{BA}{CB} + \frac{CB}{CB} = \frac{DE}{CD} + \frac{CD}{CD}$.

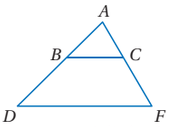
وبالتبسيط: $\frac{BA}{CB} + 1 = \frac{DE}{CD} + 1$.

وبطرح 1 من الطرفين ينتج $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD}$.

28) تاريخ الرياضيات: في القرن السادس عشر الميلادي، ابتكر جاليلو الفرجار لاستعماله في القياس كما في الشكل المجاور. ولرسم قطعة مستقيمةٍ طولها يساوي خُمسَي طول قطعةٍ معلومةٍ، اجعل نهايتَي ساقَي الفرجار عند طرفَي القطعة المعلومة، ثم ارسم قطعةً مستقيمةً بين علامتَي 40 على ساقَي الفرجار. بيِّن أن طول $\overline{DE}$ يساوي خُمسَي طول $\overline{BC}$. انظر ملحق الإجابات



أوجد قيمة x، بحيث يكون $\overline{BC} \parallel \overline{DF}$.



29) $AB = x + 5, BD = 12, AC = 3x + 1, CF = 15$ **3**

30) $AC = 15, BD = 3x - 2, CF = 3x + 2, AB = 12$ **6**

إنشاءات هندسية: أنشئ كل قطعة مستقيمة فيما يأتي وفق التعليمات التالية: **33–31)** انظر الهامش

31) قطعة مستقيمة مقسّمة إلى خمس قطع متطابقة.

32) قطعة مستقيمة مقسّمة إلى قطعتين النسبة بين طولَيهما 1 إلى 3.

33) قطعة مستقيمة طولها 11 cm، ومقسمة إلى أربع قطع متطابقة.

34) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستستكشف تناسباتٍ مرتبطةً بمنصفات زوايا المثلث.

a) هندسيًّا: ارسم ثلاثة مثلثات:
الأول حادّ الزوايا، وسمِّه ABC وارسم $\overrightarrow{BD}$ منصّفًا لِـ $\angle B$. والثاني منفرج الزاوية وسمِّه MNP، وارسم $\overrightarrow{NQ}$ منصّفًا لِـ $\angle N$، والثالث قائم الزاوية وسمِّه WXY، وارسم $\overrightarrow{XZ}$ منصّفًا لِـ $\angle X$.
انظر ملحق الإجابات

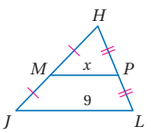
b) جدوليًّا: أكمل الجدول المجاور بالقيم المناسبة.

c) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما ضلع مثلث عند رسم منصّفٍ للزاوية المقابلة لذلك الضلع.

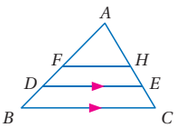
المثلث	الطول		النسبة	
ABC	AD	1.1 cm	$\frac{AD}{CD}$	1.0
	CD	1.1 cm		
	AB	2.0 cm	$\frac{AB}{CB}$	1.0
	CB	2.0 cm		
MNP	MQ	1.4 cm	$\frac{MQ}{PQ}$	0.8
	PQ	1.7 cm		
	MN	1.6 cm	$\frac{MN}{PN}$	0.8
	PN	2.0 cm		
WXY	WZ	0.8 cm	$\frac{WZ}{YZ}$	0.7
	YZ	1.2 cm		
	WX	2.0 cm	$\frac{WX}{YX}$	0.7
	YX	2.9 cm		

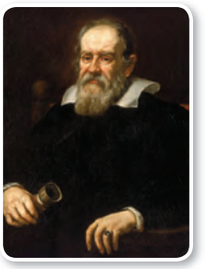
مسائل مهارات التفكير العليا

35) اكتشف الخطأ: يجد كلٌّ من أسامة وسلطان قيمة x في $\triangle JHL$، يقول أسامة: إنّ MP يساوي نصف JL؛ إذن x تساوي 4.5، ويقول سلطان: إن JL يساوي نصف MP؛ إذن x تساوي 18. فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح إجابتك.



36) تبرير: في $\triangle ABC$، إذا كان: $AF = FB, AH = HC$، $DA = \frac{3}{4}AB, EA = \frac{3}{4}AC$ فهل $DE = \frac{3}{4}BC$ دائمًا أو أحيانًا أو لا يساويه أبدًا؟ انظر ملحق الإجابات





تاريخ الرياضيات

جاليلو جاليلي
(1564 م إلى 1642 م)
ولد جاليلو جاليلي في إيطاليا، ودرس الفلسفة والفلك والرياضيات، وله إسهامات جوهرية في كلٍّ منها.

إرشادات للدراسة

إنشاءات هندسية:
تذكّر أن الفرجار والمسطرة غير المدرجة هما الأداتان الوحيدتان المستعملتان في الإنشاءات الهندسية.

34c) إجابة ممكنة: النسبة بين طولَي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما ضلع، مثلثٍ عند رسم منصّفٍ للزاوية المقابلة لذلك الضلع، تساوي النسبة بين طولَي الضلعين المجاورين للقطعتين على الترتيب.

35) أسامة؛ إجابة ممكنة: بما أنّ $\overline{MP}$ قطعة منصّفة، إذن: $MP = \frac{1}{2}JL$

تنبيه لحل أسئلة

مسطرة: الأسئلة 34 ,33 ,32 ,31: تتطلب استعمال مسطرة وفرجار.

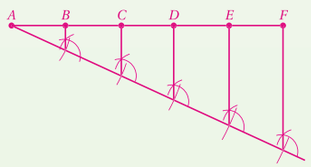
تمثيلات متعددة: في السؤال 34، يستعمل الطلاب رسومًا هندسية وجدولًا ووصفًا لفظيًّا؛ لاستقصاء تناسبات مرتبطة بمنصّفات زوايا المثلث.

تنبيه!

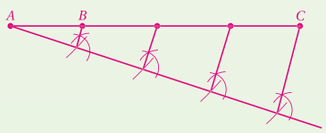
اكتشف الخطأ: في السؤال 35، يستعمل الطلبة الشكل للحكم على معقولية إجاباتهم. لقد عكَس سلطان موقع كلٍّ من القطعتين المتوازيتين في النظرية 6.7، وكان عليه ملاحظة أن JL أطول من MP.

إجابات:

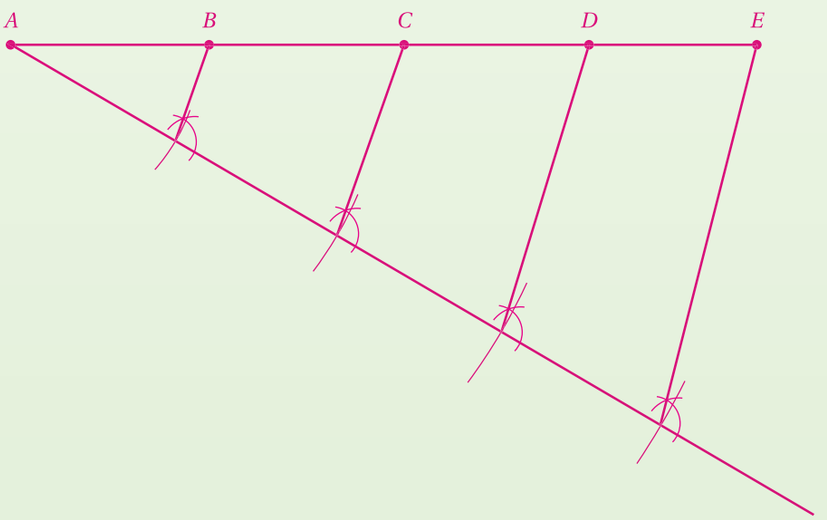
31) إجابة ممكنة:



32) إجابة ممكنة:



33) إجابة ممكنة:



4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب استعمل أسلوبهم الخاص، والرسم في كتابة نظرية الأجزاء المتطابقة من قاطعين لمستقيمات متوازية، ونظرية القطعة المنصّفة للمثلث، وكتابة مثال على كل منها.

التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة الدرس 3–6، بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (31)

إجابات:

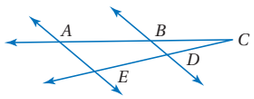
39) النظريتان تبحثان في قطع مستقيمة تقطع ضلعين في مثلث وتوازي الضلع الثالث، ونظرية القطعة المنصّفة للمثلث هي حالة خاصة من عكس نظرية التناسب في المثلث.

42) $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ وفق مسلمة التشابه AA حيث إن: $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$؛ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا؛ 6.25

43) $\triangle RSW \sim \triangle TRW$ وفق نظرية التشابه SAS حيث إنّ: $\angle RWT \cong \angle RWS$, $\frac{TW}{RW} \cong \frac{RW}{SW}$؛ 15, 20

44) $\triangle WXY \sim \triangle WZT$ وفق مسلمة التشابه AA حيث إن: $\angle Z \cong \angle X$, $\angle T \cong \angle Y$؛ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا؛ 7.5

37) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $AB = 4, BC = 4, CD = DE$

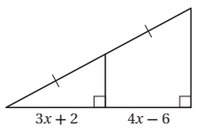
المطلوب: إثبات أن $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ انظر ملحق الإجابات

38) **مسألة مفتوحة:** ارسم ثلاث قطع مستقيمة أطوالها مختلفة a, b, c، ثم ارسم قطعةً رابعةً طولها d، بحيث يكون $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. انظر ملحق الإجابات

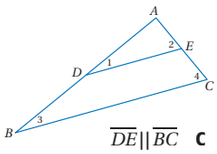
39) **اكتب:** قارن بين نظرية التناسب في المثلث ونظرية القطعة المنصّفة في المثلث. انظر الهامش

تدريب على اختبار

40) **إجابة قصيرة:** ما قيمة x؟ **8**



41) في $\triangle ABC$، إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة منصّفة، فأي العبارات التالية غير صحيحة؟ **A**



A $\angle 1 \cong \angle 4$

B $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

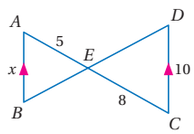
C $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

D $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

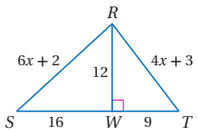
مراجعة تراكمية

جبر: اذكر النظرية أو المسلمة التي تبرر تشابه المثلثين، واكتب عبارة التشابه، ثم أوجد أطوال القطع المذكورة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-6) انظر الهامش

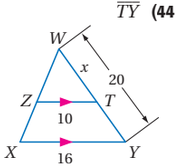
42) $\overline{AB}$



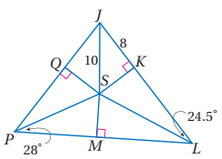
43) $\overline{RT}, \overline{RS}$



44) $\overline{TY}$



إذا كانت النقطة S مركز الدائرة الداخليةِ لِـ $\triangle JPL$، فأوجد كل قياسٍ ممَّا يأتي: (الدرس 1-4)



45) SQ **6**

46) QJ **8**

47) $m\angle MPQ$ **56°**

48) $m\angle SJP$ **37.5°**

استعد للدرس اللاحق

حُل كل تناسب مما يأتي:

49) $\frac{1}{3} = \frac{x}{2}$ **$\frac{2}{3}$**

50) $\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$ **6.7**

51) $\frac{2.3}{4} = \frac{x}{3.7}$ **2.1**

52) $\frac{x-2}{2} = \frac{4}{5}$ **3.6**

53) $\frac{x}{12-x} = \frac{8}{3}$ **8.7**

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: يقع خزّان الماء لمدينة ما عند النقطة A، وتشكل حدود المدينة مثلثًا رؤوسه النقطتان B, C وخزان الماء. إذا كانت النقطة D عند منتصف المسافة بين خزان الماء والنقطة B، والنقطة E عند منتصف المسافة بين خزّان الماء والنقطة C، والمسافة بين D و E تساوي 18.9 ميلًا، فما المسافة بين C و B؟ 37.8 ميلًا



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 6

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) دون

الاسم _____ التاريخ _____

6-3 تدريبات إعادة التعليم

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

الأجزاء المتناسبة في المثلث:

عند رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث، فإن المثلثين الناتجين يكونان متشابهين.

6.5	نظرية التناسب في المثلث، وعكسها: إذا وازى مستقيم ضلعًا من أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة، وعكس النظرية صحيح.	إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$ وإذا كان $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$، فإن $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$
6.6		
6.7	نظرية القطعة المنصِّفة في المثلث: القطعة المنصِّفة في المثلث توازي أحد أضلاعه، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع.	إذا كانت J ، K تنقطي منتصف $\overline{FH}$، $\overline{HG}$ على الترتيب، فإن: $\overline{JK} \parallel \overline{FG}$، $JK = \frac{1}{2} FG$

مثال 1

في $\triangle ABC$، إذا كانت $\overline{EF} \parallel \overline{CB}$ فأوجد قيمة x.

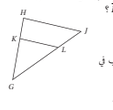


بما أن $\overline{EF} \parallel \overline{CB}$، إذن:

$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB}$	نظرية التناسب في المثلث
$\frac{18}{6} = \frac{x+22}{x+2}$	بالتعويض
$6x + 132 = 18x + 36$	خاصية الضرب التبادلي
$96 = 12x$	بالطرح
$8 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 12

مثال 2

في $\triangle GHJ$، إذا كان $HK = 5$, $KG = 10$ و $\overline{HJ} \parallel \overline{KL}$، فهل $JL = \frac{1}{2} LG$؟



مستعملًا عكس نظرية التناسب في المثلث، بيّن أنّ: $\frac{HK}{KG} = \frac{JL}{LG}$

$\frac{JL}{LG} = \frac{1}{2}$	تُعطى
$\frac{JL}{LG} = \frac{1}{2}$	بقسمة كلا الطرفين على LG
$\frac{HK}{KG} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	بالتعويض $HK = 5$, $KG = 10$، والتبسيط

وبما أنّ: $\frac{HK}{KG} = \frac{JL}{LG} = \frac{1}{2}$، فإن أطوال القطع متناسبة؛ إذن $\overline{HJ} \parallel \overline{KL}$.

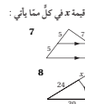
تمارين

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

1)  $x = 7$

2)  $x = 18$

3)  $x = 17.5$

4)  $x = 8$

5)  $x = 12$

6)  $x = 5$

7) في $\triangle ABC$ إذا كان: $AE = \frac{1}{4} EC$ ، $DC = 14$ ، $BD = 3.5$، فهل $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$؟ وضّح إجابتك.



نعم؛ لأن أطوال القطع متناسبة، حيث $\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{4}$، وباستعمال عكس نظرية التناسب في المثلث فإن $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) دون

الاسم _____ التاريخ _____

6-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

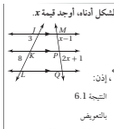
الأجزاء المتناسبة من قاطعين مستقيمات متوازية:

هناك حالة خاصة لنظرية التناسب في المثلث تتضمن ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، يقطعها قاطعان.

نتيجة 6.1	الأجزاء المتناسبة من قاطعين لمستقيمات متوازية: إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، فإن أطوال أجزاء القاطعين تكون متناسبة.	إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$، وكان $\overline{AC}$ ، $\overline{EG}$ قاطعين لهما، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$
نتيجة 6.2	الأجزاء المتطابقة من قاطعين لمستقيمات متوازية: إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، وكانت أجزاؤه متطابقة، فإن أجزاء أي قاطع آخر لها تكون متطابقة.	إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$، وكان $\overline{AC}$ ، $\overline{EG}$ قاطعين لهما بحيث $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، فإن $\overline{EF} \cong FG$

مثال 1

في الشكل أدناه، أوجد قيمة x.



بما أن: $\overleftrightarrow{LQ} \parallel \overleftrightarrow{KP} \parallel \overleftrightarrow{JM}$، إذن:

$\frac{JK}{KL} = \frac{MP}{PQ}$	النتيجة 6.1
$\frac{3}{8} = \frac{x-1}{2x+1}$	بالتعويض
$8x - 8 = 6x + 3$	خاصية الضرب التبادلي
$2x = 11$	بطرح $6x$ وإضافة 8 لكلا الطرفين
$x = 5.5$	بقسمة كلا الطرفين على 2

مثال 2

في الشكل أدناه، أوجد قيمة x.

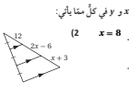


بما أن: $\overleftrightarrow{XU} \parallel \overleftrightarrow{YV} \parallel \overleftrightarrow{ZW}$، $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$، إذن $\overline{UV} \cong \overline{VW}$ وفق النتيجة 6.2

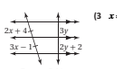
$UV = VW$	تعريف التطابق
$5x - 2 = 2x + 7$	بالتعويض
$3x = 9$	بطرح $2x$ وإضافة 2 لكلا الطرفين
$x = 3$	بقسمة كلا الطرفين على 3

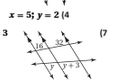
تمارين

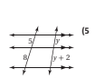
جبر: أوجد قيمة كلٍّ من x و y في كلٍّ ممّا يأتي:

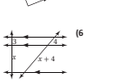
1)  $x = 8$

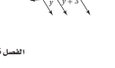
2) $x = 9$

3)  $x = 5$; $y = 2$

4)  $y = 3$

5)  $y = 3\frac{1}{3}$

6)  $x = 12$

7) 

تدريبات المهارات (18) دون ضمن

الاسم _____ التاريخ _____

6-3 تدريبات المهارات

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

1) في $\triangle JHI$، إذا كان $\overline{JL} = 6$ ، $\overline{KI} = 7$ ، $\overline{HI} \parallel \overline{KL}$، و $KH = 21$، فأوجد LI **18**

2) في $\triangle SRT$، إذا كان $\overline{UV} \parallel \overline{RT}$، $RU = 8$, $US = 14$, $TV = x - 1$, $VS = 17.5$، فأوجد قيمة x وطول $\overline{TV}$. **11 ; 10**

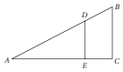




في كلٍّ من الأسئلة 3–5، حدّد ما إذا كان $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$، و برّر إجابتك.

3) $AD = 15$, $DB = 12$, $AE = 10$, $EC = 8$

نعم؛ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{5}{4}$



4) $BD = 9$, $BA = 27$, $CE = \frac{1}{3} EA$

لا؛ $\frac{BD}{DA} \neq \frac{CE}{EA}$

5) $AE = 30$, $AC = 45$, $AD = 2DB$

نعم؛ $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{1}$

إذا كانت $\overline{IH}$ قطعة منصّفة لـ $\triangle KLM$، فأوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة 6–8.

6)  **15**

7)  **18**

8)  **8**

جبر: أوجد قيمة كلٍّ من x و y في السؤالين الآتيين:

9)  **$x = 6$; $y = 6.5$**

10)  **$x = 2$; $y = 4$**

تدريبات حل المسألة (19) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

6-3 تدريبات حلّ المسألة

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

1) نجارة: يصنع جمال نموذجًا خشبيًّا على شكل حرف A كما في الشكل أدناه، ويريد أن يضيف دعامةً أفقيةً عند منتصف النموذج تكون موازيةً لسطح الأرض، فكم قدمًا سيكون طول هذه الدعامة؟ **4ft**



2) شوارع: في الشكل أدناه، الشارعان A و B متوازيان، أوجد قيمة x. **1.12 km**



3) نماذج: يمثل الشكل أدناه نموذجًا لمركز لياقة بدنية من طابقين، أوجد قيمة x. **$13\frac{1}{3}$ ft**



4) رجال الإنقاذ: عَلِقَ شخصٌ ما على شجرة مرتفعة، ويحاول رجال الإنقاذ إنزاله، إذا صعد رجل الإنقاذ إلى أعلى السلم، فكم مترًا يبعد عنه الشخص العالق بناءً على الشكل أدناه؟ **12.5 m**



5) الأجزاء المتساوية: لدى ماجد عصًا خشبيةً، يُريد أن يقسمها 9 أجزاء متساوية الأطوال، فوضع العصى على ورقة رسم بياني متساوية الأبعاد الأفقية والرأسية كما في الشكل أدناه.



a) وضّح كيف يمكنه استعمال ورقة الرسم البياني لتحديد المواقع التي يتعيّن عليه قصّ العصى عندها.

يمكنه قصّ العصى عند نقاط تقاطعه مع الخطوط الأفقية؛ لأن طرفيها ينطبقان على مستقيمين أفقيين يفصل بينهما 9 وحدات.

b) افترض أنّ ماجدًا يريد تقسيم العصى إلى 5 أجزاء متساوية مستعملًا ورقة الرسم البياني، فإنّا يمكنه أن يفعل؟

يمكنه أن يُدير العصى على أن ينطبق طرفاها على مستقيمين أفقيين يفصل بينهما 5 وحدات، ثم يقصّه بالطريقة نفسها.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 6

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (20)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

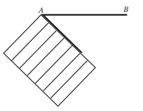
6-3 التدريبات الإثرائية

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتطابقة:

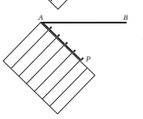
توجد نظريّة تنصّ على أنّه إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، وكانت أجزاؤه متطابقة، فإن أجزاء أيّ قاطع آخر لها تكون متطابقة، ويمكنك إثبات صحّة هذه النظريّة لأيّ عددٍ من المستقيمات المتوازية، وطريقة الرسم الآتية تستعمل هذه النظريّة لتقسيم قطعة مستقيمة إلى أجزاء متطابقة.

يُراد تقسيم $\overline{AB}$ إلى خمسة أجزاء متطابقة، ويمكنك عمل ذلك بدقّة عالية ودون استعمال مسطرة. وكلّ ما يتطلّبه العمل قرجار وقطعة ورق مسطّرة.

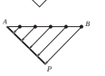
الخطوة 1: ضع طرف قطعة الورق عند النقطة A.



الخطوة 2: ارسم قطعةً مستقيمةً على طول حافّة الورقة، وعلى امتداد خمسة أسطر من النقطة A، ثمّ عيّن نقاط التقاء الأسطر مع هذه القطعة. وسمِّ النقطة الخامسة P.



الخطوة 3: ارسم $\overline{PB}$، ومن كلّ علامة على $\overline{AP}$، أنشئ مستقيمًا يوازي $\overline{BP}$، ستقطع هذه المستقيمات المتوازية $\overline{AB}$ في خمس نقاط وتقسمها إلى خمس قطع متطابقة.



استعمل قرجارًا وقطعة ورق مسطّرة؛ لتقسيم كلٍّ من القطعتين المستقيمتين الآتيتين إلى العدد المحدّد من الأجزاء المتطابقة.
انظر إجابات الطلاب.

1) ستّة أجزاء متطابقة.



2) سبعة أجزاء متطابقة.



كتاب التمارين (14)　دون ضمن فوق

6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

1) في ΔABC، إذا كان $AD = 24$، $AC \| DE$، $EB = 18$، $DB = 27$ فأوجد CE.



16

2) في ΔPRQ، إذا كان $PQ \| ST$، $SR = 12$، $QT = x + 6$، $TR = x - 4$، $PS = 27$، فأوجد QT و TR.



$QT = 18; TR = 8$

في السؤالين الآتيين، حدّد ما إذا كان $\overline{JK} \| \overline{NM}$ أم لا، وبرّر إجابتك.



3) $JN = 18, JL = 30, KM = 21, ML = 35$

لا، لأن $\frac{KM}{ML} \neq \frac{JN}{NL}$

4) $KM = 24, KL = 44, NL = \frac{5}{6}JN$

نعم؛ لأن $\frac{JN}{NL} = \frac{KM}{ML} = \frac{6}{5}$

إذا كانت $\overline{IH}$ قطعة منصّفة لـ ΔKLM، فأوجد قيمة x.

5)



11

6)



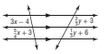
7

جبر: أوجد قيمتَي x ، y في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

7) **خرائط:** في الشكل المجاور: A ، B ، K ، W ، M خمسة شوارع. إذا كانت المسافة من W إلى A عبر K تساوي 820 m، وعبر M تساوي 660 m، وكانت المسافة بين B وَ A عبر M تساوي 280 m، فكم تكون المسافة بين B وَ A عبر K ؟ (افترض أن الشوارع A, B, W متوازية). **348 m تقريبًا**



8)



$x = 4, y = 9$

9)



$x = \frac{5}{2}, y = \frac{9}{4}$

1 التركيز

الترابط الرأسيّ

ما قبل الدرس 4-6

تعرّف التناسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة لمضلعين متشابهين.

الدرس 4-6

تعرّف علاقات التناسب الخاصة بكلٍّ من منصفات الزوايا والارتفاعات والقطع المتوسّطة المتناظرة في المثلثات المتشابهة واستعمالها.

استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث.

ما بعد الدرس 4-6

استعمال تشابه الأشكال في التحويلات الهندسية، وكتابة خصائصها، وإيجاد معامل التمدد عند رسم الصورة الناتجة عن التمدد.

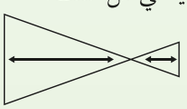
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلبة قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- إذا مُثِّلت المسألة بمثلثين متشابهين كما في الشكل أدناه فماذا يمثل الارتفاع المشار إليه في كل مثلث؟



ارتفاع المثلث الكبير هو بُعد النخلة عن عدسة الكاميرا، وارتفاع المثلث الصغير هو بُعد العدسة عن الفيلم.

- إذا كانت عدسة الكاميرا مرنة الحركة للأمام والخلف، فماذا يترتب على اقتراب المصور أكثر من النخلة؟ تقليل بُعد العدسة عن الفيلم.

6-4 عناصر المثلثات المتشابهة
Parts of Similar Triangles

فيما سبق:

درستُ أن أطوال الأضلاع المتناظرة لمضلعين متشابهين تكون متناسبة. (الدرس 6-1)

والآن:

- أتعرف علاقات التناسب الخاصة بكلٍّ من منصفات الزوايا والارتفاعات والقطع المتوسطة المتناظرة في المثلثات المتشابهة وأستعملها.
- أستعمل نظرية منصف زاوية في مثلث.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



في كاميرات التصوير الاحترافي تُستعمل أفلام بمعايير خاصة؛ للحصول على صور واضحة، وعند التقاط الصورة المجاورة، كانت المسافة بين النخلة وعدسة الكاميرا 6.16 m، وكان طول النخلة على الفيلم 35 mm، يمكن استعمال المثلثات المتشابهة لإيجاد طول النخلة الحقيقي.

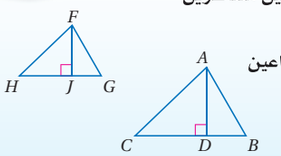
قطع مستقيمة خاصّة في المثلثين المتشابهين: تعلمت في الدرس **1-6**، أنّ أطوال الأضلاع المتناظرة في المضلعات المتشابهة، ومنها المثلثات، تكون متناسبة، ويمكن توسيع الفكرة إلى قطع مستقيمة أخرى في المثلثات.

نظريات

أضف إلى مطويتك

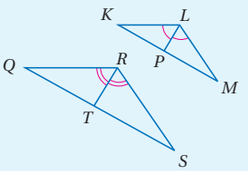
قطع مستقيمة خاصّة في المثلثين المتشابهين

6.8 إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولَي كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين طولَي كلّ ضلعين متناظرين.



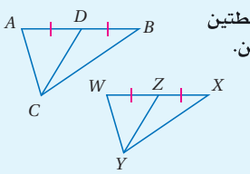
مثال: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FGH$، $\overline{AD}, \overline{FJ}$ ارتفاعين فإنّ $\frac{AD}{FJ} = \frac{AB}{FG}$.

6.9 إذا تشابه مثلثان، فإن النسبة بين طولَي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين.



مثال: إذا كان $\triangle KLM \sim \triangle QRS$، $\overline{LP}, \overline{RT}$ قطعتين منصفتين، فإن $\frac{LP}{RT} = \frac{LM}{RS}$.

6.10 إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولَي كل قطعتين متوسطتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين.



مثال: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle WXY$، $\overline{CD}, \overline{YZ}$ قطعتين متوسطتين فإنّ $\frac{CD}{YZ} = \frac{AB}{WX}$.

ستبرهن النظريتين 6.10 ,6.9 في السؤالين 15 ,14 على الترتيب

مصادر الدرس 4-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (101)	• تنويع التعليم ص (101, 104)	• تنويع التعليم ص (101, 104)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (15)	• كتاب التمارين ص (15)	• كتاب التمارين ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

قطع مستقيمة خاصّة في المثلثين المتشابهين

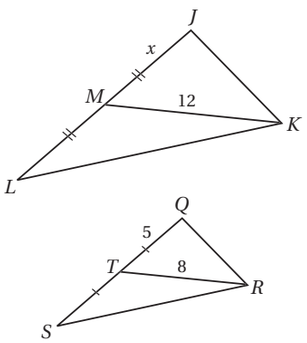
المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية استعمال القطع المستقيمة في المثلثين المتشابهين؛ لإيجاد قياسات مجهولة وحل مسائل.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 في الشكل أدناه $\triangle LJK \sim \triangle SQR$.
أوجد قيمة x .

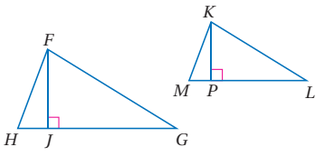


7.5

برهان النظرية 6.8

المعطيات: $\triangle FGH \sim \triangle KLM$ ، و $\overline{FJ}$, $\overline{KP}$ ارتفاعان.

المطلوب: $\frac{FJ}{KP} = \frac{HF}{MK}$



برهان حر:

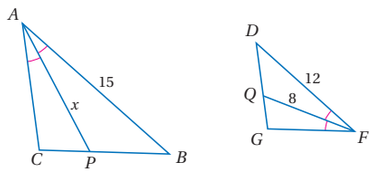
بما أن: $\triangle FGH \sim \triangle KLM$ ، إذن $\angle H \cong \angle M$ ، كما أن $\angle FJH \cong \angle KPM$ ؛ لأنهما زاويتان قائمتان ناتجتان عن ارتفاعين، وجميع الزوايا القوائم متطابقة؛ لذلك فإن

$\triangle HFJ \sim \triangle MKP$ بحسب مسلمة التشابه AA ؛ إذن $\frac{FJ}{KP} = \frac{HF}{MK}$ وفق تعريف المضلعين المتشابهين.

ويمكنك استعمال القطع المستقيمة الخاصة في المثلثات المتشابهة لإيجاد الأطوال المجهولة.

مثال 1 استعمال القطع الخاصّة في المثلثات المتشابهة

إذا كان $\triangle FDG \sim \triangle ABC$ في الشكل أدناه، فأوجد قيمة x .



$\overline{AP}, \overline{FQ}$ منصّفا زاويتين متناظرتين و $\overline{AB}, \overline{FD}$ ضلعان متناظران للمثلثين المتشابهين ABC, FDG .

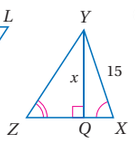
$\frac{AP}{FQ} = \frac{AB}{FD}$	النسبة بين طولَي القطعتين المستقيمتين المنصفتين لزاويتين متناظرتين في مثلثين متشابهين، تساوي النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين.
$\frac{x}{8} = \frac{15}{12}$	بالتعويض
$8 \cdot 15 = x \cdot 12$	خاصية الضرب التبادلي
$120 = 12x$	بالتبسيط.
$10 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 12

إرشادات للدراسة

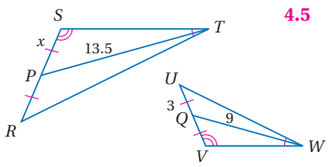
استعمال معامل التشابه:
يمكن حل المثال 1 أيضًا بإيجاد معامل التشابه بين $\triangle ABC, \triangle FDG$ أولًا ، وتكون النسبة بين طول القطعة المستقيمة المنصّفة لزاويةٍ في $\triangle ABC$ إلى طول القطعة المستقيمة المنصّفة للزاوية المناظرة لها في $\triangle FDG$ تساوي معامل التشابه هذا.

تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في المثلثين المتشابهين، في كل من السؤالين الآتيين:

(1A) 

12

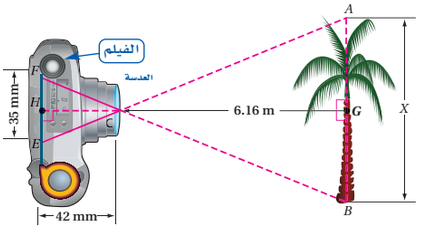
(1B) 

4.5

يمكنك استعمال القطع المستقيمة الخاصّة في المثلثات المتشابهة لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة — **استعمال المثلثات المتشابهة لحل المسائل**

تصوير: بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، يبين الرسم التوضيحي أدناه (الرسم ليس على القياس) موقع الكاميرا وطول الصورة والمسافة من عدسة الكاميرا إلى الفيلم. أوجد الارتفاع الحقيقي للنخلة.



افهم: **المعطيات:** المسافة بين النخلة وعدسة الكاميرا 6.16 m، وطول النخلة على الفيلم 35 mm، والمسافة بين العدسة والفيلم 42 mm.

المطلوب: الارتفاع الحقيقي للنخلة.

تكون النخلة وصورتها على الفيلم متوازيتين، ويكون $\overline{CH}$ و $\overline{CG}$ ارتفاعين في المثلثين $\triangle ABC, \triangle EFC$.

خطط: بما أنّ $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$، فإنّ: $\angle CBA \cong \angle CFE, \angle BAC \cong \angle CEF$ وفق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا؛ لذلك فإن $\triangle ABC \sim \triangle EFC$ وفق مسلمة التشابه AA. اكتب تناسبًا وحُلّه لإيجاد قيمة x.

حل:

$\frac{AB}{EF} = \frac{GC}{HC}$ — النظرية 6.8

$\frac{x\,\text{m}}{35\,\text{mm}} = \frac{6.16\,\text{m}}{42\,\text{mm}}$ — بالتعويض

$x\,(42) = 35\,(6.16)$ — خاصيّة الضرب التبادلي

$42x = 215.6$ — بالتبسيط

$x \approx 5.13$ — بقسمة كلا الطرفين على 42

إذن ارتفاع النخلة 5.13 m تقريبًا.

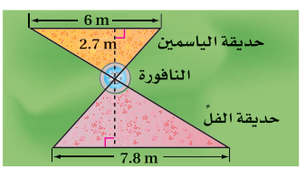
تحقق: نسبة طول الصورة إلى المسافة بين العدسة والفيلم هي 35:42 أو 5:6، ونسبة ارتفاع النخلة إلى المسافة بينها وبين العدسة هي: 6.16 : 5.13؛ أي 5:6 تقريبًا. ✓

الربط مع الحياة

طُرحت الكاميرات الرقمية في الأسواق لأول مرة عام 1994م، وكانت درجة وضوح الصورة 640 × 480 بكسل، وفي عام 2005 أمكن أخذ صورة بدرجة وضوح بلغت 2912 × 4368 بكسل بواسطة كاميرا أكثر وضوحًا لدرجة 12.8 مليون بكسل، وهي صورة أوضح كثيرًا مما تعرضه معظم الحواسيب، فظهرت شاشات حواسيب عالية الوضوح تسمى 4K.

تحقق من فهمك

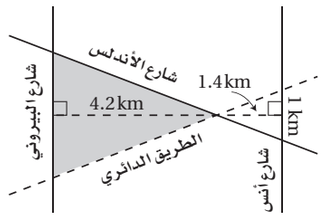
2) حدائق: في الشكل المجاور حديقتان بجوارهما نافورة، إذا كانت الحديقتان تشكلان مثلثين متشابهين، فأوجد المسافة من مركز النافورة إلى الضلع الأطول في حديقة الفُلّ. **3.51m**



مثال إضافي

2 شوارع: يبين الشكل أدناه جزءًا من خريطة أحد الأحياء، إذا علمت أن شارع أنس يوازي شارع البيروني، والشوارع الأخرى جميعها مستقيمة، فأوجد مساحة المنطقة المظللة.

$6.3\ \text{km}^2$



تنبيه!

قياسات الزوايا المتناظرة

لمثلثين متشابهين: من الأخطاء الشائعة، الاعتقاد بأنّ النسبة بين قياسات الزوايا المتناظرة لمثلثين متشابهين، هي النسبة نفسها بين أطوال الأضلاع المتناظرة. أكّدْ على أن الزوايا المتناظرة لمثلثين متشابهين، يجب أن تكون متطابقة.

التعليم باستعمال التقنيات

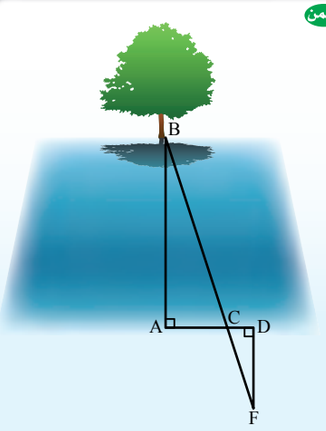
مدونة: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا في مدونة الفصل فقرةً توضح كيفية حساب عرض نهر باستعمال المثلثات المتشابة، وتوضيح إجاباتهم بالرسم.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريّون: اطلب إلى الطلاب قياس عرض نهر بالطريقة الآتية:

ثبِّت وتدًا عند النقطة A التي تقع مقابل الشجرة (النقطة B) على الضفة المقابلة، ووتدًا إضافيًّا عند النقطة C، بحيث يتعامد BA مع AC، وتقع النقطة C على بعد 20 m من النقطة A، ثم ثبِّت وتدًا إضافيًّا عند النقطة D على امتداد AC وتقع على بعد 5 m من النقطة C، ثم ثبِّت وتدًا آخر عند النقطة F التي تقع على امتداد الخط الواصل بين الشجرة والوتد C، بحيث يتعامد CD مع FD، وتقع النقطة F على بعد 6 m من النقطة D هل المثلثان ($\triangle DFC, \triangle ABC$) متشابهان؟ وما عرض النهر؟ نعم؛ وفق مسلمة التشابة AA، حيث إن $\angle D \cong \angle A, \angle ACB \cong \angle DCF$، عرض النهر 60 m

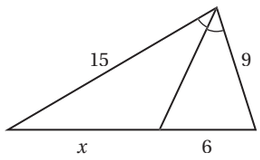


نظرية منصّف زاوية في مثلث

المثال 3 يبيّن كيفية استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث؛ لإيجاد قياساتٍ مجهولةٍ.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة x في الشكل أدناه.



10

المحتوى الرياضي

تناسبات أخرى في المثلثات

المتشابهة: اطلب إلى الطلاب تخمين قطع مستقيمة أخرى تكون النسبة بين أطوالها هي النسبة نفسها بين الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين، ثم اطلب إليهم أن يختبروا تخميناتهم .

نظريّة منصّف زاوية في مثلث: تعلمت أن منصّف زاوية هو نصف مستقيم يقسمها إلى زاويتين متجاورتين متطابقتين، وإضافة لذلك يقسم منصف الزاوية في مثلث الضلع المقابل وفق تناسبٍ مع الضلعين الآخرين.

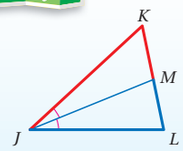
نظرية 6.11

منصّف زاوية في مثلث

أضف إلى مطويتك

منصف زاوية في مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين النسبة بين طولَيهِمَا تساوي النسبة بين طولَي الضلعين الآخرين.

مثال: إذا كانت $\overline{JM}$ منصّف زاوية في المثلث $\triangle JKL$



فإنّ $\frac{KM}{LM}=\frac{KJ}{LJ}$ ← القطعتان المشتركتان بالرأس K ← القطعتان المشتركتان بالرأس L

ستبرهن النظرية 6.11 في السؤال 19

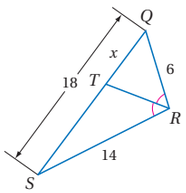
إرشادات للدراسة

التناسب: يمكن كتابة تناسبٍ آخر باستعمال نظريةِ منصّف زاوية في مثلث هو $\frac{KM}{KJ}=\frac{LM}{LJ}$

مثال 3

استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

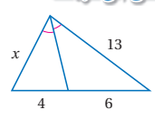


بما أنّ $\overline{RT}$ منصف زاوية في $\triangle QRS$ ، فيمكنك استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلث لكتابة تناسب.

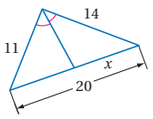
نظرية منصّف زاوية في مثلث	$\frac{QT}{ST}=\frac{QR}{SR}$
بالتعويض	$\frac{x}{18-x}=\frac{6}{14}$
خاصية الضرب التبادلي	$(18-x)(6)=x\cdot 14$
بالتبسيط	$108-6x=14x$
بإضافة $6x$ لكلا الطرفين	$108=20x$
بقسمة كلا الطرفين على 20	$5.4=x$

تحقق من فهمك

(3A) $8\frac{2}{3}$



(3B) 11.2



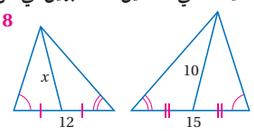
إرشادات للدراسة

المثلثات الناتجة عن منصّف زاوية في مثلث:
لا يرتبط التناسب في نظرية منصف زاويةٍ في مثلثٍ بتشابه مثلثين؛ إذ إن المثلثين الناشئين عن منصف زاويةٍ في مثلثٍ ليسا متشابهين في الحالة العامة، على الرغم من التناسب بين زوجين من أضلاعهما، ووجود زاوية في أحدهما مطابقة لزاوية في الآخر.
لكن المثلثين يتشابهان في حالة قسمة المثلث إلى مثلثين متطابقين.

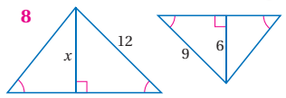
تأكـد

المثال 1 أوجد قيمة x في المثلثين المتشابهين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

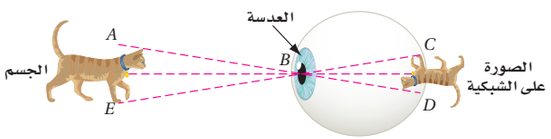
1)



2)

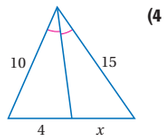


المثال 2 **3) صورة:** ارتفاع قطّة 10 in، وارتفاع صورتها على شبكيّة العين 7 mm، إذا كان $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ ، وكانت المسافة من بؤبؤ العين إلى الشبكيّة 25 mm، فكم تبعد القطة عن بؤبؤ العين مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة؟ **35.7 in تقريبًا**

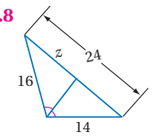


المثال 3 أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(4) **6**



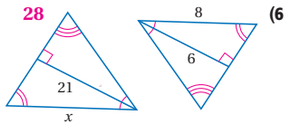
(5) **12.8**



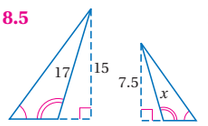
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد قيمة x في المثلثين المتشابهين في كلٍّ ممّا يأتي:

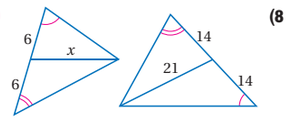
(6) **28**



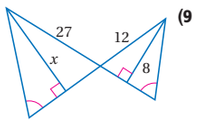
(7) **8.5**



(8) **9**

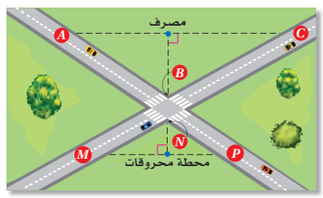


(9) **18**



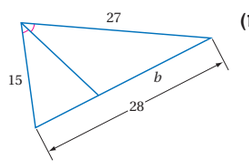
المثال 2 (10) **طرق:** يشكّل الطريقان المتقاطعان في الشكل أدناه مثلثين متشابهين، إذا كان $AC = 382\text{ ft}$، $MP = 248\text{ ft}$، وتبعد محطة المحروقات 50 ft عن التقاطع، فكم يبعد المصرف عن التقاطع مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عدد صحيح؟

77 ft تقريبًا

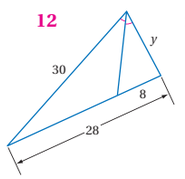


المثال 3 أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين. (لاحظ أن الأشكال ليست مرسومةً وفق مقياس رسم):

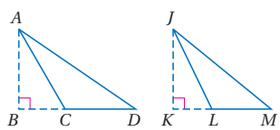
(11) **18**



(12) **12**



(13) **جبر** إذا كانت $\overline{AB}$, $\overline{JK}$ ارتفاعين، وكان:
$\triangle DAC \sim \triangle MJL$, $AB = 9$
$AD = 4x - 8$, $JK = 21$, $JM = 5x + 3$،
فأوجد قيمة x. **5**



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 5–1 للتحقّق من فهم الطلبة ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزليّة للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

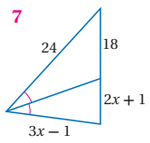
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	13-6 ، 22 ، 23 ، 25-37
ضمن ضمن المتوسط	17-7 فردي ، 18 ، 19 ، 21-23 ، 25-37
فوق فوق المتوسط	31-14 ، (اختياري: 32-37)

14) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظريّة 6.9 . انظر الهامش

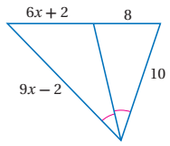
15) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 6.10 . انظر ملحق الإجابات

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

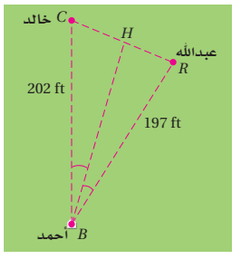
16) 7



17) 3



18) رياضة: تأمَّل المثلث المتشكل من المسارات بين أحمد وعبدالله وخالد في أثناء مباراة كرة قدم كما في الشكل المجاور. إذا ركل أحمد الكرة بمسار ينصف $\angle B$ في ΔCBR ، فأيهما أقرب إلى الكرة؛ عبد الله أم خالد؟ وضح إجابتك.



19, 20) انظر ملحق الإجابات

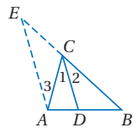
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

19) النظريّة 6.11

المعطيات: $\overline{CD}$ تنصف $\angle ACB$.

وبالرسم $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$.

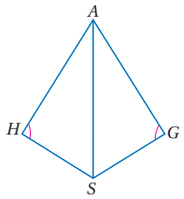
المطلوب: إثبات أن: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$



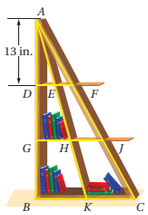
20) **المعطيات:** $\overline{AS}$ تنصف $\angle HAG$

$\angle H \cong \angle G$

المطلوب: إثبات أن: $\frac{HS}{GS} = \frac{AH}{AG}$



21) أثاث: يمثل الشكل المجاور خزانة كتب مثلثة الشكل، المسافة بين كل رفّين فيها تساوي 13 in، و $\overline{AK}$ قطعة متوسطة لِـ ΔABC . إذا كان $EF = 3\frac{1}{3}$ in ، فكم يكون BK؟ **10 in**

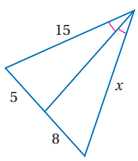


مسائل مهارات التفكير العليا

22) اكتشف الخطأ: يحاول كلٌّ من عبد الله وفيصل أن يجد قيمة x في الشكل المجاور.

فيقول عبد الله: لإيجاد قيمة x أحل التناسب $\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$ ، ويقول فيصل: لإيجاد قيمة x ، أحل التناسب $\frac{5}{x} = \frac{8}{15}$ ، أيٌّ منهما على صواب؟ وضح إجابتك.

عبد الله؛ وفق نظرية منصف زاوية في مثلث، التناسب الصحيح هو $\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$.



إرشادات للدراسة

التناسب: في التناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، إذا كان $a > c$ ، فإن $b > d$. والعكس صحيح أيضًا، إذا كان $b > d$ ، فإن $a > c$.

18) عبد الله؛ إجابة ممكنة:
بما أن مسار الكرة ينصف $\angle B$ ، فإن النسبة بين طولَي القطعتين اللتين تُسم إليهما الضلع المقابل للزاوية CBR تساوي النسبة بين طولَي الضلعين الآخرين.

أيّ $\frac{CH}{RH} = \frac{BC}{BR}$

وبالتعويض

$\frac{CH}{RH} = \frac{202}{197} \approx 1.03$

$\frac{197}{RH} = \frac{202}{CH}$

وحيث $197 < 202$

فإن $CH > RH$

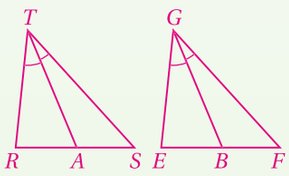
تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 22، يجب أن يتذكّر الطلبة من نظرية منصّف زاوية في مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين. وإذا تمَّت مقارنة طول قطعةٍ مستقيمةٍ بطول ضلع، فيجب أن تكونا في المثلث نفسه. حيث أخطأ فيصل حين قارن طول القطعة المستقيمة بطول الضلع في مثلثين مختلفين.

إجابات:

14) المعطيات: $\Delta RTS \sim \Delta EGF$ ، $\overline{TA}$, $\overline{GB}$ منصفا زاويتين.

المطلوب: $\frac{TA}{GB} = \frac{RT}{EG}$



البرهان: بما أن الزوايا المتناظرة في المثلثين المتشابهين تكون متطابقة، فإن: $\angle RTS \cong \angle EGF$, $\angle R \cong \angle E$.

ولأن $\angle RTS$, $\angle EGF$ نُصِّفتا، فإن

$2\,(m\angle RTA) = m\angle RTS$ ،

$2(m\angle EGB) = m\angle EGF$ ،

ولكن $m\angle RTS = m\angle EGF$

$2\,(m\angle RTA) = 2(m\angle EGB)$ ،

إذن: $m\angle RTA = m\angle EGB$

أي أن: $\angle RTA \cong \angle EGB$

وبحسب مسلمة التشابه AA ، يكون $\Delta RTA \sim \Delta EGB$

إذن $\frac{TA}{GB} = \frac{RT}{EG}$.

تنويع التعليم

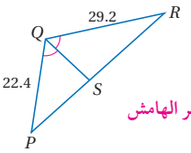
ضمن فوق

توسّع: نظّم الطلاب في مجموعات ثلاثيّة أو رُباعيّة متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم أن يرسموا مخطّطًا بمقياس رسم لحدود مدرستهم، واطلب إليهم أيضًا قياس محيط المدرسة بعدِّ الخطوات عند المشي حول المدرسة، ثم اطلب إليهم استعمال نسبة عدد الخطوات إلى عدد الوحدات التي سيستعملونها في مخططاتهم.

23) تبرير: أوجد مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية. وضِّح إجابتك.

"إذا كانت النسبة بين ارتفاع مثلثٍ وطول أحد أضلاعه تساوي النسبة بين الارتفاع وطول الضلع المناظرين لهما في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متشابهان". **انظر الهامش**

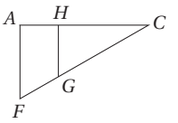
24) تحدٍّ: إذا كان محيط $\triangle PQR$ يساوي 94 وحدةً، و $\overline{QS}$ منصّف لِـ $\angle PQR$، فأوجد PS, RS. $PS \approx 18.4, RS \approx 24$



25) اكتب: بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين النظريّة 6.9 والنظرية 6.11. **انظر الهامش**

تدريب على اختبار

26) أيُّ الحقائق الآتية ليست كافيةً لإثبات أن المثلثين ACF و HCG متشابهان؟ **C**



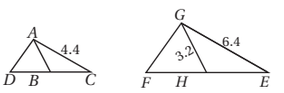
A $\overline{AF} \parallel \overline{HG}$

B $\frac{AC}{HC} = \frac{FC}{GC}$

C $\frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}$

D $\angle FAH$ و $\angle CHG$ قائمتان.

27) إجابة قصيرة: في الشكلين أدناه: $\overline{DB} \cong \overline{BC}, \overline{FH} \cong \overline{HE}$

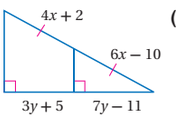


إذا كان: $\triangle ACD \sim \triangle GEF$، فأوجد AB. **2.2**

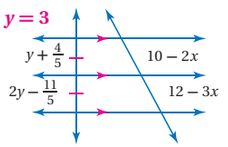
مراجعة تراكمية

جبر: أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ ممَّا يأتي. (الدرس 3-6)

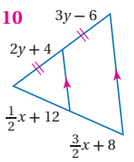
28) $x = 6; y = 4$



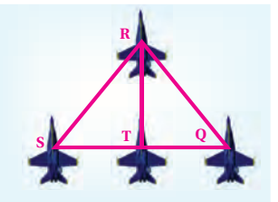
29) $x = 2; y = 3$



30) $x = 4; y = 10$



31) طائرات: في عرض للطائرات النفاثة، شكَّلت الطائرات تشكيلًا يبدو كمثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $\triangle SRT \cong \triangle QRT$، علمًا بأن T منتصف $\overline{SQ}$، و $\overline{SR} \cong \overline{QR}$. (الدرس 3-4) **انظر الهامش**



استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل نقطتين في كلٍّ ممَّا يأتي:

32) $E(-3, -2), F(5, 8)$ $\sqrt{164} \approx 12.8$

33) $A(2, 3), B(5, 7)$ 5

34) $C(-2, 0), D(6, 4)$ $\sqrt{80} \approx 8.9$

35) $W(7, 3), Z(-4, -1)$ $\sqrt{137} \approx 11.7$

36) $J(-4, -5), K(2, 9)$ $\sqrt{232} \approx 15.2$

37) $R(-6, 10), S(8, -2)$ $\sqrt{340} \approx 18.4$

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة أن يرسموا مثلثًا محيطه 24 cm، ثم اطلب إليهم أن يرسموا منصفًا لإحدى زواياه، واطلب إليهم أن يجدوا طول كلٍّ من القطعتين المستقيمتين التي انقسم إليها الضلع المقابل للزاوية التي تم تنصيفها، وأن يُسلِّموك إجاباتهم قبل خروجك من غرفة الصّف. انظر إجابات الطلاب.

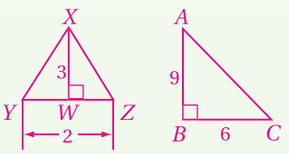
التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة الدرس 4–6، بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (31)

إجابات:

23)



$\frac{AB}{BC} = \frac{XW}{YZ}$،

ولكن $\triangle ABC$ لا يشابه $\triangle XYZ$

25) تتضمن كلتا النظريتين قطعةً مستقيمةً تنصف زاوية، ونسبًا متكافئةً. نظرية منصف زاوية في مثلث تنطبق على مثلث واحد، بينما تنطبق النظرية 6–9 على مثلثين متشابهين وبخلاف نظرية منصف الزاوية التي تجزِّئ الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين بنسبة مساوية للنسبة بين الضلعين الآخرين، فإن النظرية 6.9، تنصّ على أنه إذا تشابه مثلثان، فإن النسبة بين طولي القطعتين المنصّفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولي ضلعين متناظرين.

31) المعطيات: $\overline{SR} \cong \overline{QR}$، T نقطة منتصف $\overline{SQ}$

المطلوب: $\triangle SRT \cong \triangle QRT$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{SR} \cong \overline{QR}$، T نقطة منتصف $\overline{SQ}$	1) معطيات
2) $\overline{ST} \cong \overline{TQ}$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $\overline{RT} \cong \overline{RT}$	3) خاصيّة الانعكاس
4) $\triangle QRT \cong \triangle SRT$	4) SSS

1 التركيز

الهدف

استسقاء ورسم الكسريات.

كتابة صيغ ترددية.

المواد

- ورقة منقّطة مثلثيًّا.

إرشادات التدريس

ناقش مع الطلاب كيفيّة تحديد كلّ مرحلة كي يفهموا الطريقة. كل مرّة تُنصّف فيها أضلاع كل مثلث لتشكيل مثلث داخلي، تُعدّ مرحلةً واحدةً. اطلب إليهم أن يُسجّلوا عدد المثلثات في كل مرحلة، بحيث يمكنهم تحليل النمط في الأعداد.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

نظّم الطلاب في مجموعات رباعيّة متفاوتة القدرات، ثم اطلب إلى أحد الطلبة في كلّ مجموعة أن يرسم المثلثات، بينما يقوم طالب آخر بتحليل البيانات، وذلك بعدِّ المثلثات وتشكيل متتابعةٍ من الأعداد. واطلب إلى طالبٍ ثالثٍ أن يجد محيط كل مثلثٍ طالما استمر النشاط، ويكوّن الطالب الرابع متتابعةً من محيطات المثلثات. ستساعدهم هذه المتتابعة على ملاحظة أن المحيط يقترب من الصفر، كلّما زاد عدد المثلثات. اطلب إليهم أن يحلّوا السؤال 1.

واسأل:

- عند ضم ثلاثة من المثلثات الناتجة عن المرحلة الرابعة، فما المرحلة التي يمثلها الشكل الناتج؟ المرحلة 5

تدريب: اطلب إلى الطلبة حلّ الأسئلة 2–7.

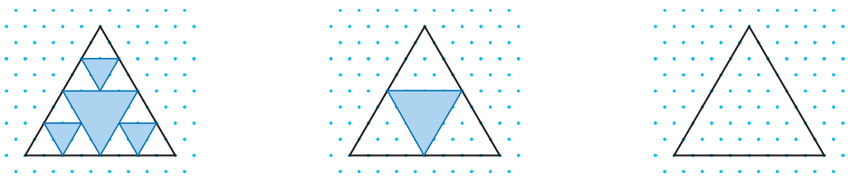
الكسريات أشكال هندسية تنتج باستعمال تكرار الأجزاء (iteraction)، **وتكرار الأجزاء** هو عمليّة تكرار النمط نفسه مرّةً تِلْوَ الأخرى، وتكون الكسريات **ذاتيّة التشابه**؛ أي أن الأجزاء الصغيرة للشكل لها الخصائص الهندسية نفسها للشكل الأصلي.

نشاط 1

البداية: ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع طول ضلعه 8 وحداتٍ في ورقة منقّطة.

المرحلة 1: صِلْ نقاط منتصفات أضلاع المثلث لتشكل مثلثًا آخر، وظلّل المثلث الداخلي.

المرحلة 2: كرّر العمليّة مع المثلثات الثلاثة غير المظلّلة، وصل نقاط منتصفات أضلاعها لتشكل ثلاثة مثلثات أخرى.



إذا كرّرت هذه العملية إلى مالانهاية، فإن الشكل الناتج يسمّى مثلث سيربنسكي.

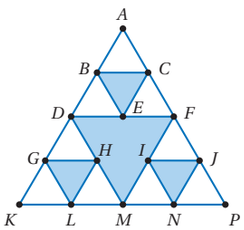
تحليل النتائج:

1) إذا استمررت في هذه العمليّة، فكم يكون عدد المثلثات غير المظلّلة في المرحلة 3؟ 27

2) ما محيط المثلث غير المظلّل في المرحلة 4؟ 1.5 وحدة

3) إذا استمررت في هذه العملية إلى مالانهاية، فماذا سيحصل لمحيط كل مثلثٍ غير مظلّل؟ سيقترب المحيط من الصفر.

4) **تحدٍّ:** استنادًا إلى الشكل المجاور، أكمل الآتي باستعمال برهان ذي عمودين: انظر ملحق الإجابات

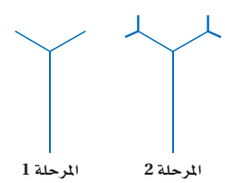


المعطيات: $\triangle KAP$ متطابق الأضلاع.

D, F, M, B, C, E منتصفات: $\overline{KA}, \overline{AP}, \overline{PK}, \overline{DA}, \overline{AF}, \overline{FD}$ على الترتيب.

المطلوب: $\triangle BAC \sim \triangle KAP$.

5) يمكن رسم شجرة كسريّة، برسم غصنين جديدين من نهاية كل غصن أصلي، بحيث يكون طول كل غصنٍ منها مساويًا ثلث طول الغصن السابق له. a–b) انظر الهامش

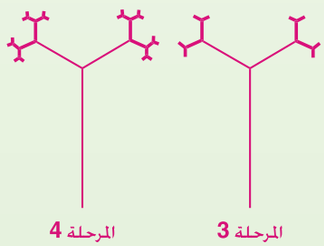


a) ارسم المرحلة 3 والمرحلة 4 للشجرة الكسريّة. ما العدد الكلّي للأغصان في المراحل الأربع جميعها؟ (لا تعدّ الساق)

b) اكتب عبارةً جبريةً يمكن استعمالها للتنبؤ بالعدد الكلّي للأغصان في نهاية كل مرحلة.

إجابات:

5a) المرحلة 2:1، المرحلة 6:2، المرحلة 14:3، المرحلة 30:4



5b) يمكن استعمال الأنماط للتنبؤ بالعدد الكلي للأغصان في نهاية كل مرحلة.

المرحلة	عدد الأغصان		النمط
1	2	2 (1)	$2(2^1-1)$
2	6	2 (3)	$2(2^2-1)$
3	14	2 (7)	$2(2^3-1)$
4	30	2 (15)	$2(2^4-1)$
5	62	2 (31)	$2(2^5-1)$
⋮	⋮	⋮	⋮
n			$2(2^n-1)$

أي أن العدد الكلي للأغصان في المرحلة n، العدد الكلّي للأغصان يساوي $2(2^n-1)$

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–7؛ للتحقق من فهم الطلبة معنى الكسريّات وتكرار الأجزاء، والصيغة الترددية، والشجرة الكسريّة.

من المحسوس إلى المجرّد

استعمل السؤال 12؛ لتوسعة ما لاحظه الطلبة جبريًّا.

جميع العمليات المكرّرة لا تتضمن رسوماتٍ لأشكال هندسيّة، فبعض العمليات المكرّرة، يمكن أن تترجَم إلى صيغٍ أو معادلات مشابهة للعبارة الجبرية التي كتبتها في السؤال 5 في الصفحة السابقة، وتسّمى هذه العبارات **صيغًا ترددية**.

نشاط 2

مثلث باسكال هو نمط عددي يبدأ كل صفٍّ فيه بالعدد 1، وينتهي بالعدد 1 أيضًا، وينتج كل حدٍّ من حدود الصفوف الأخرى عن جمع الحدّين الواقعين فوقه. أوجد صيغةً لمجموع حدود كل صف في مثلث باسكال بدلالة رقم هذا الصف.

الخطوة 1: اكتب الصفوف الخمسة الأولى من مثلث باسكال. **الخطوة 2:** أوجد مجموع حدود كل صفٍّ. **الخطوة 3:** أوجد نمطًا يعتمد على **رقم الصف**، ويمكن استعماله لإيجاد مجموع حدود كل صفٍّ.

الصف	مثلث باسكال	المجموع	النمط
1	1	1	$2^0 = 2^{1-1}$
2	1 1	2	$2^1 = 2^{2-1}$
3	1 2 1	4	$2^2 = 2^{3-1}$
4	1 3 3 1	8	$2^3 = 2^{4-1}$
5	1 4 6 4 1	16	$2^4 = 2^{5-1}$

تحليل النتائج:

6) اكتب صيغة للمجموع S لحدود الصف n لمثلث باسكال. $S = 2^{n-1}$

7) ما مجموع حدود الصف الثامن في مثلث باسكال؟ 128

تمارين:

اكتب صيغةً ترددية لِـ $F(x)$.

8) $F(x) = 2x - 1$

x	2	4	6	8	10
$F(x)$	3	7	11	15	19

9) $F(x) = x^2 - x$

x	0	5	10	15	20
$F(x)$	0	20	90	210	380

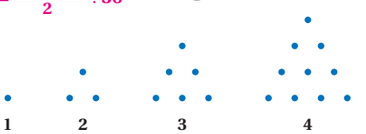
10) $F(x) = \frac{1}{x}$

x	1	2	4	8	10
$F(x)$	1	0.5	0.25	0.125	0.1

11) $F(x) = \sqrt{x} + 3$

x	4	9	16	25	36
$F(x)$	5	6	7	8	9

12) **تحدٍّ** يمثّل النمط أدناه متتابعة أعداد مثلثيّة. ما عدد النقاط في الحد الثامن في هذه المتتابعة؟ هل من الممكن كتابة صيغة ترددية يمكن استعمالها لتحديد عدد النقاط في العدد المثلّثي ذي الرقم n في هذه المتتابعة؟ وإذا كان ذلك ممكنًا فاكتب الصيغة، وإلّا فوضّح السبب. 36؛ $F(n) = \frac{n(n+1)}{2}$



توسع 6-4 معمل الهندسة: الكسريّات 107



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 6

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

6-4 تدريبات إعادة التعليم

عناصر المثلثات المتشابهة

قطع مستقيمة خاصة بالمثلثين المتشابهين:

إذا تشابه مثلثان، فإن الارتفاعات ومنصّفات الزوايا والقطع المتوسطة المتناظرة فيهما تكون متناسبة مع الأضلاع المتناظرة.

6.8	إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولَي كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين طولَي كلّ ضلعين متناظرين.	إذا كان: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$، $\overline{AD}$، $\overline{FJ}$ ارتفاعين فإنّ $\frac{AB}{FG} = \frac{AD}{FJ}$.
6.9	إذا تشابه مثلثان، فإن النسبة بين طولَي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين.	إذا كان: $\triangle KLM \sim \triangle QRS$، $\overline{RT}$، $\overline{TP}$ قطعتين منصفتين، فإن $\frac{LM}{RS} = \frac{LP}{RT}$.
6.10	إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولَي كل قطعتين متوسطتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين.	إذا كان: $\triangle ABC \sim \triangle WXY$، $\overline{VZ}$، $\overline{CD}$ قطعتين متوسطتين، فإن $\frac{AB}{WX} = \frac{CD}{VZ}$.

مثال إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x.

$\overline{BD}$، $\overline{YW}$ منصّفا زاويتين متناظرتين، و$\overline{AB}$، $\overline{XY}$ ضلعان متناظران في المثلثين المتشابهين ABC، XYZ.

النسبة بين طولَي القطعتين المنصفتين لزاويتين متناظرتين في مثلثين متشابهين تساوي النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين.

$\frac{BD}{WY} = \frac{AB}{XY}$

$\frac{24}{8} = \frac{10}{x}$ بالتعويض

$10x = 24\ (8)$ خاصية الضرب التبادلي

$10x = 192$ بالتبسيط

$x = 19.2$ بقسمة كلا الطرفين على 10

تمارين

جبر، أوجد قيمة x في المثلثين المتشابهين، في كلٍّ ممّا يأتي:

(1) 10

(2) 8

(3) 2.25

(4) 8.75

(5) 28

(6) 14

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22)　دون

الاسم _____ التاريخ _____

6-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

عناصر المثلثات المتشابهة

نظرية منصف زاوية في مثلث:

تعلمت أن منصّف زاوية هو نصف مستقيم يقسمها إلى زاويتين متجاورتين متطابقتين، وإضافةً لذلك يقسم منصف الزاوية في مثلثٍ الضلعَ المقابل وفق تناسب مع الضلعين الآخرين.

6.11	منصّف زاويةٍ في مثلثٍ يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين، النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولَي الضلعين الآخرين.	إذا كانت $\overline{LM}$ منصّف زاوية في المثلث $\triangle JKL$، فإنّ $\frac{KM}{LM} = \frac{KJ}{LJ}$ ← القطعتان المستقيمتان المشتركتان في الرأس K ← القطعتان المستقيمتان المشتركتان في الرأس L

مثال أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

بما أن $\overline{SU}$ منصّف زاوية في $\triangle RST$، فيمكنك استعمال نظرية منصّف زاوية في مثلثٍ لكتابة تناسب.

$\frac{RU}{TU} = \frac{RS}{TS}$ نظرية منصف زاوية في مثلث

$\frac{x}{20} = \frac{15}{30}$ بالتعويض

$30x = 20(15)$ خاصية الضرب التبادلي

$30x = 300$ بالتبسيط

$x = 10$ بقسمة كلا الطرفين على 30

تمارين

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

(1) 35

(2) 5

(3) 25.2

(4) 26

(5) 66

(6) $12\frac{5}{6}$

تدريبات المهارات (23)　دون ضمن

الاسم _____ التاريخ _____

6-4 تدريبات المهارات

عناصر المثلثات المتشابهة

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة 1–4، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة:

(1) 16.5

(2) 22

(3) 11

(4) 17.1

(5) إذا كان: $\overline{FJ}$، $\overline{SH}$ ارتفاعين، وكان $\triangle RST \sim \triangle EFG$؛ وكان: $SH = 6$، $ST = 5$، و $FJ = 7$؛ فأوجد FG. **8.4**

(6) إذا كان: $\overline{AD}$، $\overline{MQ}$ ارتفاعين، وكان $\triangle ABC \sim \triangle MNP$؛ وكان: $AB = 24$، $AD = 14$، $MQ = 10.5$، فأوجد MN. **18**

أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(7) $17\frac{1}{3}$

(8) 8.4

تدريبات حل المسألة (24)　دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

6-4 تدريبات حل المسألة

عناصر المثلثات المتشابهة

1) أعلاه، ترفع ياخرةً علمين متلاصقين الشكل متشابهين على ساريةٍ واحدةٍ، والارتفاع في العلم الكبير يساوي ثلاثة أمثال الارتفاع المناظر له في العلم الصغير. إذا كان طول أحد أضلاع العلم الكبير 45 in، فأوجد طول الضلع المناظر له في العلم الصغير.

15 in

2) خيام، خرج عليٌّ وأصحابه في رحلة صيد، وأقاموا في خيمةٍ واجهتها الأمامية على هيئة مثلثٍ كما في الشكل أدناه، ثم قاموا بتصوير الواجهة، فكان طول قاعدة الواجهة الأمامية 6 in وارتفاعها 5 in، إذا كان الطول الحقيقيّ لقاعدة الواجهة الأمامية للخيمة 12 ft، فما ارتفاعها الحقيقيّ؟ **10 ft**

3) ملعب، رُسم مثلثٌ كبيرٌ قائم الزاوية في ملعب مدرسة طلال، وبدأ طلال السير من رأس الزاوية القائمة للمثلث متّجهًا نحو الضلع المقابل وعلى امتداد منصف الزاوية، وتوقّف عندما وصل إلى الوتر، كما في الشكل أدناه. كم قدمًا يزيد بُعد النقطة B عن طلال على بُعد النقطة A عنه؟ **$7\frac{1}{7}$ ft**

4) سارية العلم، ثُبّت سارية علم إلى جدار بناية بواسطة شبكة من الأسلاك كما في الشكل أدناه، وقد ثُبّت الأسلاك، بحيث كان: $AE = EF$، $AC = CD$، $AB = BC$، فما نسبة CF إلى BE؟ **2:1**

5) تصوير، صوّر سلمان صفحةً من كتاب الرياضيات لتكبير الشكل أدناه، إذا كانت الصورة رديئةً وغير واضحةٍ، ولم يتمكّن سلمان من قراءة الأعداد عليها، وقاس سلمان قاعدة المثلث المكبّر فوجدها 200 mm، فأجب عما يأتي:

a) ما طول الارتفاع المرسوم في المثلث المكبّر، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب ملمتر؟

149 mm

b) ما طول القطعة المتوسطة المرسومة في المثلث المكبّر، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب ملمتر؟

154 mm



مصادر الدرس 4 - 6

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (25)　ضمن فوق

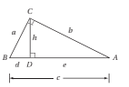
الاسم _____ التاريخ _____

6-4 التدريبات الإثرائية

برهان لنظرية فيثاغورس،

يمكنك استعمال تشابه المثلثات في برهان نظرية فيثاغورس.

1) المثلث ABC المجاور، قائم الزاوية في C و $\overline{CD}$ ارتفاع له، ارسم كل مثلثٍ من المثلثات الثلاثة المتشابهة بشكلٍ منفصلٍ، وسمِّه واكتب أطوال أضلاعه.





2) اكتب المثلثات المتشابهة الثلاثة في الصف الأعلى من الجدول أدناه.

استعمل الشكل لإكمال الجدول، وكتابة العناصر المتناظرة للمثلثات الثلاثة القائمة المتشابهة.

ΔCBD	ΔACD	ΔABC	
d	h	a	الساق القصيرة
h	e	b	الساق الطويلة
a	b	c	الوتر

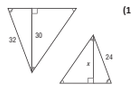
3) استعمل العناصر المتناظرة لهذه المثلثات المتشابهة وتناسباتها؛ لإكمال العبارات في البرهان الآتي، ولإثبات نظريّة فيثاغورس جبريًّا.

العبارات	المبررات
1) $\overline{CD}$ ارتفاع للمثلث القائم الزاوية ABC	1) معطيات.
2) $\frac{a}{c}=\frac{d}{a}$، $\frac{b}{c}=\frac{e}{b}$	2) النسب بين العناصر المتناظرة في المثلثين المتشابهين متساوية.
3) $a^2 = cd$، $b^2 = ce$	3) بالضرب التبادلي.
4) $a^2 + b^2 = cd + b^2$	4) خاصيّة الجمع للمساواة.
5) $a^2 + b^2 = cd + ce$	5) خاصية التعويض للمساواة.
6) $a^2 + b^2 = c(d + e)$	6) خاصيّة التوزيع.
7) $d + e = c$	7) مُسلَّمة جمع القطع المستقيمة.
8) $a^2 + b^2 = c^2$	8) خاصية التعويض للمساواة.

كتاب التمارين (15)　دون ضمن فوق

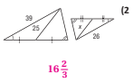
جبر، أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

1)



22.5

2)



$16\frac{2}{3}$

3)



13.5

4)



16.8

5) تصوير، لدى فؤاد آلة تصوير، المسافة بين عدستها والفيلم 24 mm.

a) إذا التقط فؤاد صورةً كاملةً لصديقه من مسافة 3 m، وبلغ طول صديقه 140 cm، فما طول الصورة على الفيلم؟ (إرشاد: حوّل الأطوال إلى الوحدة نفسها). 11.2 mm

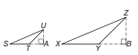
b) إذا التقط فؤاد صورةً كاملةً لصديقه، وكان طول الصورة على الفيلم 15 mm، فكم كانت المسافة بين آلة التصوير وصديقه؟ 2.24 m

6) إذا كان $\overline{PT}$ ، $\overline{KM}$ ارتفاعين، وكان $\Delta NPR \sim \Delta JKL$، و $KM = 18$، و $KL = 28$، و $PT = 15.75$، فأوجد PR.



24.5

7) إذا كان $\overline{UA}$، $\overline{ZB}$ ارتفاعين، وكان $\Delta STU \sim \Delta XYZ$، و $UA = 6$، و $UT = 8.5$، و $ZB = 11.4$، فأوجد ZY.



16.15

الفصل 6 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات الأساسيّة: رقم الصفحة بعد كلّ مفردة، يشير إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرّة.

فإذا واجه بعض الطلبة صعوبات في حلّ الأسئلة 6–1، فذكّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (33)

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المضلعات المتشابهة والمثلثات المتشابهة (الدرسان 6-1, 6-2)

- يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.
- يكون المثلثان متشابهين إذا كانت:

AA: زاويتان في أحدهما مطابقتين لزاويتين في المثلث الآخر.

SSS: أطوال الأضلاع المتناظرة للمثلثين متناسبة.

SAS: طولا ضلعين في أحدهما متناسبين مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في المثلث الآخر، والزاويتان المحصورتان متطابقتين.

الأجزاء المتناسبة (الدرس 6-3)

- إذا وازَى مستقيم أحد أضلاع مثلث، وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين محددتين، فإنّه يقسم هذين الضلعين إلى قطع مستقيمة أطوالها متناسبة.
- القطعة المنصّفة في المثلث توازي ضلعًا فيه، وطولها يساوي نصف طوله.

عناصر المثلثين المتشابهين (الدرس 6-4)

- إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين كلٍّ من طولَي ارتفاعيهما المتناظرين، وطولي منصِّفَي الزاويتين المتناظرتين، وطولي القطعتين المتوسطتين المتناظرتين تساوي النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين.

المطويات منظم أفكار

تأكّد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



مفردات أساسيّة

المضلعات المتشابهة (ص. 72)

معامل التشابه (ص. 73)

نسبة التشابه (ص. 73)

القطعة المنصّفة في المثلث (ص. 91)

الكسريات (ص. 106)

تكرار الأجزاء (ص. 106)

ذاتية التشابه (ص. 106)

صيغة ترددية (ص. 107)

اختبار المفردات

a) نسبة التشابه
b) معامل التشابه
c) مسلمة التشابه AA
d) نظرية التشابه SSS
e) نظرية التشابه SAS
f) القطعة المنصّفة

اختر مما سبق رمز الجملة التي تكمل كلًّا مما يأتي:

1) طرفا ____؟____ في المثلث هما منتصفا ضلعين فيه. **f**

2) إذا كانت: $\angle A \cong \angle X, \angle C \cong \angle Z$ فإنّ $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ وفق ____؟____. **c**

3) النسبة بين طولَي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هي ____؟____. **b**

4) إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان وفق ____؟____. **d**

5) أحيانًا يطلق على معامل التشابه بين مضلعين اسم ____؟____. **a**

6) إذا كانت $\angle A \cong \angle F$، وكان $\frac{BA}{EF} = \frac{AC}{FD}$، فإن $\triangle BAC \sim \triangle EFD$ وفق ____؟____. **e**

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلةً لكل درسٍ.

واقترح عليهم أن يُبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

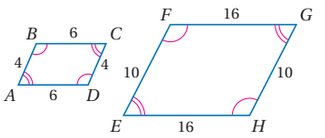
وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

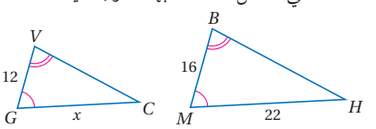
6-1 المضلعات المتشابهة (ص 79–72)

1) حدد ما إذا كان المضلعان أدناه متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، ووضّح إجابتك.

انظر الهامش



2) المثلثان في الشكل أدناه متشابهان، أوجد قيمة x. **16.5**

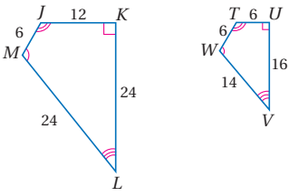


3) النظام الشمسي: صمَّمت نموذج دقيق لنظامنا الشمسي، وضعت سميرة الأرض على بعد 1 ft من الشمس، علمًا بأن المسافة الحقيقية بين الأرض والشمس 93000000 mi، إذا كانت المسافة من بلوتو إلى الشمس 3695950000 mi، فعلى أي بُعدٍ من الشمس ستضع سميرة بلوتو في نموذجها؟

ستضع سميرة بلوتو على بعد 39.7 ft تقريبًا من الشمس.

مثال 1

حدّد ما إذا كان المثلثان أدناه متشابهين أم لا. برّر إجابتك. وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، ووضح إجابتك.



الخطوة 1 : حدِّد الزوايا المتناظرة المتطابقة

$\angle J \cong \angle T, \angle K \cong \angle U, \angle L \cong \angle V, \angle M \cong \angle W$

الخطوة 2 : اختبر النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$\frac{JK}{TU} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$, $\frac{KL}{UV} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

$\frac{LM}{VW} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$, $\frac{JM}{TW} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1}$

بما أن الأضلاع المتناظرة غير متناسبة، فإن المضلعين $TUVW, JKLM$ غير متشابهين.

6-2 المثلثات المتشابهة (ص 88–80)

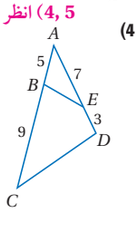
حدد ما إذا كان المثلثان في كلٍّ من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

4) نعم؛ $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ وفق نظرية التشابه SAS، حيث إنّ:
$\angle A \cong \angle A$، $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$

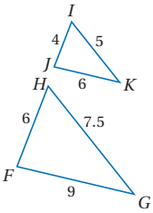
5) نعم؛ $\triangle IJK \sim \triangle HFG$ وفق نظرية التشابه SSS، حيث إنّ:
$\frac{IJ}{HF} = \frac{IK}{HG} = \frac{JK}{FG}$

4, 5) انظر الهامش

(4



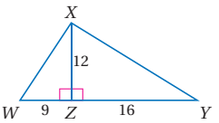
(5



6) أشجار: يريد عبد الله أن يقدّر ارتفاع شجرة، فوقف على مسافة 66 ft منها، فكانت نهاية ظلّه ونهاية ظل الشجرة عند النقطة نفسها، إذا كان طول عبد الله 6 ft و 4 in وطول ظلّه 15 ft، فما ارتفاع الشجرة؟ **34.2 ft**

مثال 2

حدّد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.



$\angle WZX \cong \angle XZY$ لأنهما زاويتان قائمتان، والآن اختبر تناسب طولَي ساقَي المثلثين القائمين.

$\frac{WZ}{XZ} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ $\frac{XZ}{YZ} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

وبما أنه يوجد ضلعان في المثلث الأول، طولاهما متناسبان مع طولَي نظيرَيهما في الثاني، وأن الزاويتين المحصورتين بينهما متطابقتان، فإنّ $\triangle WZX \sim \triangle XZY$، وفق نظرية التشابه SAS.

مراجعة الدروس

مراجعة: إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم على أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

1) لا؛ المضلعان ليسا متشابهين؛ لأن الأضلاع المتناظرة ليست متناسبة.

4) نعم؛ $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ وفق نظرية التشابه SAS، حيث إنّ:
$\angle A \cong \angle A$، $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$

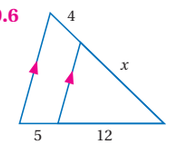
5) نعم؛ $\triangle IJK \sim \triangle HFG$ وفق نظرية التشابه SSS، حيث إنّ:
$\frac{IJ}{HF} = \frac{IK}{HG} = \frac{JK}{FG}$

الفصل 6 دليل الدراسة والمراجعة

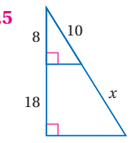
6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة (ص 98–90)

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

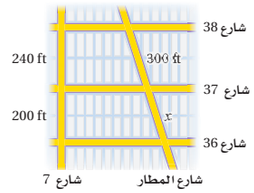
7) 9.6



8) 22.5

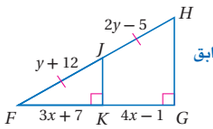


9) **شوارع:** أوجد المسافة على امتداد شارع المطار بين الشارعين 37 , 36، بفرض أن الشوارع 38 , 37 , 36 متوازية 250 ft



مثال 3

جبر: أوجد قيمة كلٍّ من x, y.

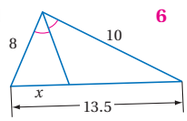


تعريف التطابق	$FK = KG$
بالتعويض	$3x + 7 = 4x - 1$
بالطرح	$-x = -8$
بقسمة كلا الطرفين على (-1)	$x = 8$
تعريف التطابق	$FJ = JH$
بالتعويض	$y + 12 = 2y - 5$
بالطرح	$-y = -17$
بقسمة كلا الطرفين على (-1)	$y = 17$

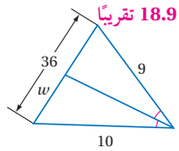
6-4 عناصر المثلثات المتشابهة (ص 105–99)

أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة:

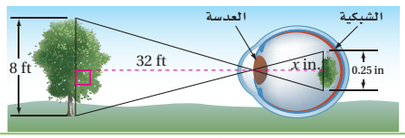
10) 6



11) 18.9 تقريبًا



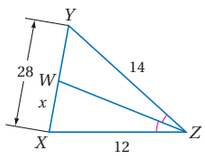
12) **عين الإنسان:** تستعمل عين الإنسان المثلثات المتشابهة لقلب الشيء وتصغيره، عندما يمر خلال العدسة إلى الشبكية، فما المسافة بين عدسة العين والشبكية؟



المسافة بين عدسة العين والشبكية 1 in

مثال 4

أوجد قيمة x.



استعمل نظرية منصِّف زاوية في مثلثٍ لكتابة تناسب.

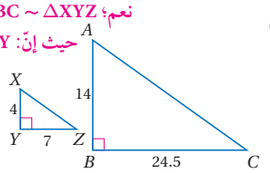
نظرية منصّف زاوية في مثلث.	$\frac{WX}{YW} = \frac{XZ}{YZ}$
بالتعويض	$\frac{x}{28 - x} = \frac{12}{14}$
خاصية الضرب التبادلي	$(28 - x)(12) = x \cdot 14$
بالتبسيط	$336 - 12x = 14x$
بإضافة $12x$ لكلا الطرفين	$336 = 26x$
بقسمة كلا الطرفين على 26	$12.9 \approx x$

110 الفصل 6 التشابه

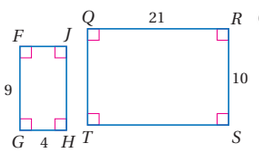
الفصل 6 اختبار الفصل

حدّد ما إذا كان المضلعان متشابهين أم لا في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وضّح إجابتك.

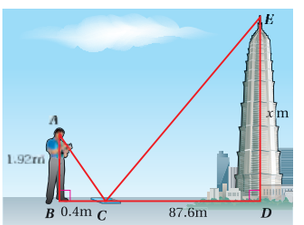
1) نعم؛ $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ وفق نظرية التشابه SAS
حيث إنّ: $\angle B \cong \angle Y$؛ $\frac{YX}{AB} = \frac{YZ}{BC}$، $\frac{2}{7}$



2) لا؛ الأضلاع المتناظرة ليست متناسبة $\frac{FG}{QR} \neq \frac{GH}{RS}$



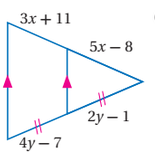
3) أبراج: استعمل المعلومات الآتية لحل السؤالين الآتيين:
لتقدير ارتفاع برج Jin Mao في شنغهاي في الصين، شاهد سائح قمة البرج في مرآة موضوعة على الأرض ووجهها إلى أعلى.



a) كم مترًا ارتفاع البرج تقريبًا؟ 420.5 m تقريبًا
b) لماذا تكون طريقة الانعكاس في المرآة في هذه الحالة أفضل للقياس غير المباشر لارتفاع البرج من استعمال الظل؟
من الصعب قياس طول الظل داخل المدن.

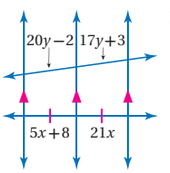
جبر: أوجد قيمتَي x, y في كلٍّ من السؤالين الآتيين، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ إذا كان ذلك ضروريًّا.

4)



$x = 9.5, y = 3$

5)



$x = 0.5, y \approx 1.7$

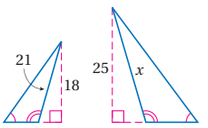
6) جبر: $\triangle MNP$ متطابق الأضلاع، محيطه $12a + 18b$، إذا كانت $\overline{QR}$ قطعة منصّفة فيه، فما قيمة QR؟ $2a + 3b$

7) جبر: $\triangle ABC$ قائم الزاوية ومتطابق الضلعين، وطول وتره h، إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة منصّفة للوتر وأحد ضلعَي القائمة فيه وطولها $4x$، فما محيط $\triangle ABC$؟ $16x + 8\sqrt{2}\,x$

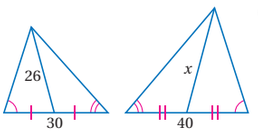
8) نماذج: لدى سالم نموذج لسيارة سباق حقيقيّة، إذا كان طول السيارة الحقيقيّة 10 ft و 6 in، وطول النموذج 7 in، فما معامل تشابه النموذج إلى السيارة الحقيقيّة؟ 1:18

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

9) 29.2 تقريبًا



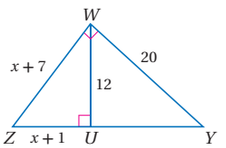
10) 34.7 تقريبًا



جبر: أوجد كل طول مشار إليه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

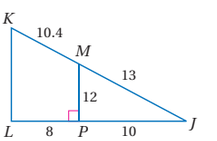
11) WZ, UZ

$\triangle WUZ \sim \triangle YUW$ وفق مسلمة التشابه AA؛ $ZW = 15, ZU = 9$



12) KL

$\triangle KJL \sim \triangle MJP$ وفق نظرية التشابه SAS، $KL = 21.6$



المعالجة: استعمل نتائج اختبار الفصل ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب.
العبارة "إذا... فاختر..." في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصدرٍ لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	الدروس: 6-1, 6-2, 6-3, 6-4		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23)		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف: تعيين بدائل الإجابة التي تمثل "لامثالًا" صحيحًا. في أسئلة الاختيار من متعدد.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

أسأل:

- ما المقصود باللّامثال في بدائل السؤال من نوع الاختيار المتعدد؟

إجابة ممكنة: هو النموذج الذي لايتوفر فيه خاصية أو أكثر من خصائص المفهوم.

- كيف يمكن تحديد اللامثال من بين بدائل أسئلة الاختيار من متعددٍ؟

إجابة ممكنة: باستعمال قدرة الطالب على تبرير عدم انتماء مثال للمفهوم والتعرف على أوجه التشابه والاختلاف بين المفاهيم المتشابهة في بعض الخصائص.

الفصل 6 الإعداد للاختبارات



تعيين اللّامثال

أحيانًا تتطلب أسئلة الاختيار من متعدّد، تحديد أيّ البدائل المعطاة تعدّ لا مثالًا صحيحًا، وتتطلب هذه الأسئلة أسلوبًا مختلفًا لحلّها.

استراتيجيات تعيين اللّامثال

الخطوة 1

اقرأ المسألة وافهمها.

- **اللامثال:** اللامثال هو بديل من بدائل الإجابة لا يحقق شروط المسألة.
- **كلمات أساسيّة:** ابحث عن كلمة لا، أو أي كلمة تدلّ على النفي (تكتب عادة بخط غامق، أو يوضع تحتها خط)؛ لتفهم منها أن المطلوب منك أن تجد لامثالًا.

الخطوة 2

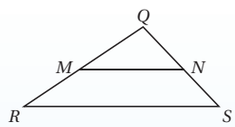
اتبع الإرشادات والخطوات الآتية؛ لمساعدتك على تعيين اللامثال:

- عيّن بدائل الإجابة الواضح عدم صحتها واحذفها.
- احذف البدائل التي تبدو بعيدة عن محتوى السؤال.
- احذف البدائل ذات الوحدات غير الصحيحة.
- اختبر بدائل الإجابة المتبقية.

مثال

اقرأ المسألة جيدًا، حدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها.

أيٌّ مما يأتي لا يكفي لإثبات أنّ: $\triangle QMN \sim \triangle QRS$؟



A $\angle QMN \cong \angle QRS$

B $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

C $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

D $\frac{QM}{QR} = \frac{QN}{QS}$

الحرف "لا" المكتوب بالخط الغامق، يُشير إلى أنه يتعين عليك أن تجد لامثالًا، اختبر كلًّا من بدائل الإجابة باستعمال مبادئ تشابه المثلثات؛ لترى ما إذا كان أيٌّ منها لا يثبت أن $\triangle QMN \sim \triangle QRS$.

البديل A: $\angle QMN \cong \angle QRS$

إذا كانت $\angle QMN \cong \angle QRS$ ، فإنّ $\triangle QMN \sim \triangle QRS$ وفق مسلمة التشابه AA .

البديل B: $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$

إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$ ، فإن $\angle QMN \cong \angle QRS$ ؛ لأنهما زاويتان متناظرتان بالنسبة لمستقيمين متوازيين قطعهما القاطع $\overline{QR}$ ، لذلك $\triangle QMN \sim \triangle QRS$ وفق مسلمة التشابه AA .

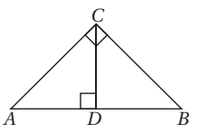
البديل C: $\overline{QN} \cong \overline{NS}$

إذا كانت $\overline{QN} \cong \overline{NS}$ ، فإننا لا نستطيع أن نستنتج أن $\triangle QMN \sim \triangle QRS$ ؛ لأننا لا نعرف أيّ شيء عن $\overline{QM}$, $\overline{MR}$ ، لذلك فالبديل C يُعدّ لامثالًا، والإجابة الصحيحة هي C. وإذا كان لديك وقت فاختبر البديل D للتأكد من أنّه مثال صحيح.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال ممَّا يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

1) أيُّ التناسبات التالية غير صحيحة في الشكل أدناه؟ **D**



A $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$

B $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$

C $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$

D $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AC}$

2) أي شكل يمكن أن يكون مثالًا ***مضادًا*** للتخمين أدناه؟ **B**

"إذا كانت جميع زوايا شكل رباعي قوائم فإنه مربّع"

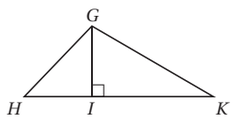
A متوازي الأضلاع

B المستطيل

C المعين

D شبه المنحرف

3) أيٌّ مما يأتي **لا** يكفي لإثبات أنّ $\triangle GIK \sim \triangle HIG$؟ **C**



A $\angle GKI \cong \angle HGI$

B $\frac{HI}{GI} = \frac{GI}{IK}$

C $\frac{GH}{GI} = \frac{GK}{IK}$

D $\angle IGK \cong \angle IHG$

4) أي مثلثين مما يأتي ***ليسا*** بالضرورة متشابهين؟ **C**

A مثلثان قائما الزاوية في كلٍّ منهما زاوية قياسها 30°

B مثلثان قائما الزاوية في كلٍّ منهما زاوية قياسها 45°

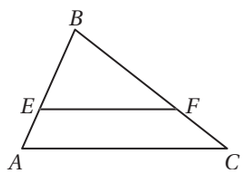
C مثلثان متطابقا الساقين

D مثلثان متطابقا الأضلاع

مثال إضافي

مثال من اختبار:

في المثلث أدناه. أيّ مما يأتي **لا** يكفي لإثبات أنّ $\triangle BFE \sim \triangle BCA$؟ **C**



A $\angle BFE \cong \angle BCA$

B $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$

C $\overline{BE} \cong \overline{EA}$

D $\frac{BF}{BC} = \frac{BE}{BA}$

3 التقويم

استعمل التمارين 4–1 ؛ للتحقق من فهم الطلاب.

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة في كلّ سؤال؛
فقد تشير إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيميّة مثل:

1) A أخطأ في كتابة التناسب.
B أخطأ في كتابة التناسب.
C أخطأ في كتابة التناسب.
D صحيحة.

2) A أخطأ في الحسابات.
B صحيحة.
C أخطأ في الحسابات.
D خمّن.

3) A أخطأ في الحسابات.
B صحيحة.
C أخطأ في الحسابات.
D أخطأ في الحسابات.

4) A عدم فهم المفهوم.
B عدم فهم المفهوم.
C صحيحة.
D عدم فهم المفهوم.

5) A أخطأ في استعمال الصيغة.
B صحيحة.
C أخطأ في استعمال الصيغة.
D أخطأ في استعمال الصيغة.

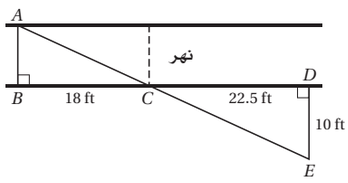
6) A أخطأ في الحسابات.
B أخطأ في الحسابات.
C صحيحة.
D خمّن.

7) A صحيحة.
B أخطأ في الحسابات.
C ضرب الإجابة الصحيحة في 2
D استعمل 21 m للشكل الرباعي الأصغر.

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثمَّ حدِّد رمز الإجابة الصحيحة:

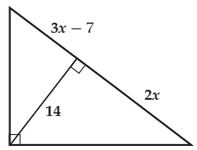
1) يُريد عادل أن يقيس عرض نهر صغير. فعيّن الأطوال المبيّنة في الشكل أدناه.



أوجد العرض التقريبي للنهر باستعمال هذه المعلومات. **D**

A 40.5 ft **C** 7 ft
B 6 ft **D** 8 ft

2) أوجد قيمة x في الشكل أدناه؟ **B**



A 5 **C** 8
B 7 **D** 10

3) إذا كان $EG = 15\text{m}$، فما طول $\overline{EF}$؟ **B**

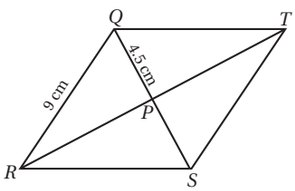


A 6m **C** 10m
B 9m **D** 12m

إرشادات للاختبار

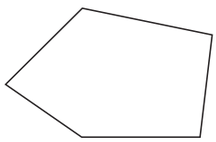
السؤال 2: عيّن مثلثين متشابهين، واكتب تناسبًا وحُلّه لإيجاد قيمة x.

4) أوجد $m\angle RST$ في المعين $QRST$ أدناه. **C**



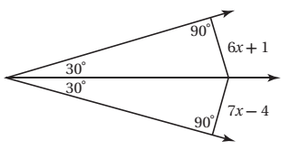
A 60° **C** 120°
B 90° **D** 150°

5) ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع أدناه؟ **B**



A 450° **C** 630°
B 540° **D** 720°

6) أوجد قيمة x. **C**



A 3 **C** 5
B 4 **D** 6

7) شكلان رباعيَّان متشابهان بمعامل تشابه 3:2، إذا كان محيط الشكل الرباعي الأكبر 21 m، فما محيط الشكل الرباعي الأصغر؟ **A**

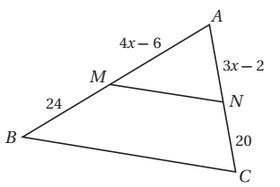
A 14m **C** 28m
B 17.5m **D** 31.5m

أسئلة ذات إجابات قصيرة

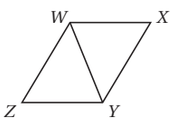
اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) **هندسة إحداثية:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $ABCD$ الذي رؤوسه: $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$، وحدد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. انظر الهامش

9) إذا كان $\overline{BC} \parallel \overline{MN}$ في المثلث أدناه، فأوجد قيمة x. 9



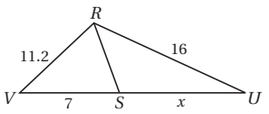
10) الشكل الرباعي $WXYZ$ معين، إذا كان $m\angle XYZ = 110°$، فأوجد $m\angle ZWY$. 55°



11) ما المعاكس الإيجابي للعبارة أدناه؟ انظر الهامش

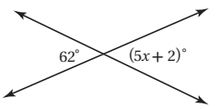
إذا كان صالح مولودًا في الرياض، فإنّه مولود في السعوديّة.

12) إذا كان $\overline{RS}$ تنصّف $\angle VRU$ في المثلث أدناه، فأوجد قيمة x. 10



13) يبيِّن مقياس رسم خريطة أن $1\text{ cm} = 25\text{ km}$، ما المسافة الحقيقية بين مدينتين، إذا كانت المسافة بينهما على الخريطة 4.5 cm؟ 112.5 km

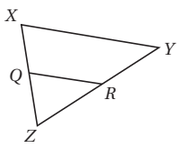
14) ما قيمة x في الشكل أدناه؟ 12



أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

15) استعمل الشكل أدناه للإجابة عن كلٍّ من الأسئلة الآتية:



a) إذا كان $\overline{QR} \parallel \overline{XY}$، فما العلاقة بين الأطوال: RZ, YR, QZ, XQ؟ $\frac{XQ}{QZ} = \frac{YR}{RZ}$

b) إذا كان: $XQ = 15, QZ = 12, YR = 20$، $\overline{QR} \parallel \overline{XY}$، فما طول $\overline{RZ}$؟ 16

c) إذا كان: $XQ = QZ, QR = 9.5$، $\overline{QR} \parallel \overline{XY}$، فما طول $\overline{XY}$؟ 19

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟																
إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
فعد إلى الدرس..	6-2	6-2	1-7	5-4	5-1	4-1	6-1	5-3	6-3	5-5	1-3	6-4	6-1	1-8	6-3

التقويم التكويني

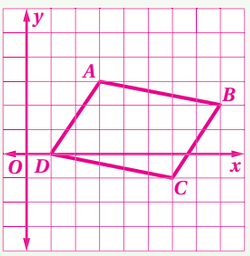
يمكنك استعمال هاتين الصفحتين؛ لتختبر مدى تقدم الطلبة في الفصول 6–1 من خلال:

اختبار تراكمي: ص (114–115)

اختبار تراكمي: ص (43–45)

إجابات:

8)



متوازي أضلاع؛ إجابة ممكنة:

باستعمال صيغة الميل:

ميل $\overline{AB}$: $\frac{2-3}{8-3} = -\frac{1}{5}$

ميل $\overline{CD}$: $\frac{-1-0}{6-1} = -\frac{1}{5}$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{3-0}{3-1} = \frac{3}{2}$

ميل $\overline{BC}$: $\frac{-1-2}{6-8} = \frac{3}{2}$

بما أن الأضلاع المتقابلة لها الميل نفسه، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \overline{AD} \parallel \overline{BC}$؛ لذا فالشكل الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

11) إذا لم يكن صالح مولودًا في السعودية، فإنّه لم يولد في الرياض.

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 7: حدد الأسئلة صفحة 117 واجبًا منزليًّا؛ لتقويم مهارات المتطلبات السابقة للفصل القادم.

الدرس 1-6 ، ص (78) :

28) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متناسبة ، فإن المثلثين المنفرجَي الزاوية متشابهان.

29) لا يمكن أن يتشابها. إجابة ممكنة: كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متوازيان. في حين أن لشبه المنحرف ضلعين متوازيين فقط. لذا فالشكلان لا يمكن أن يكونا متشابهين أبدًا؛ لأنه لا يمكن أن يكون لهما الشكل نفسه.

30) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متناسبة ، فإن المثلثين القائمَي الزاوية يكونان متشابهين.

31) أحيانًا، إجابة ممكنة: إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متناسبة، فإن المثلثين المتطابقَي الضلعين يكونان متشابهين.

32) لا يمكن أن يتشابها؛ إجابة ممكنة: بما أنّ المثلث المتطابق الضلعين له ضلعان متطابقان، والمثلث المختلف الأضلاع له ثلاثة أضلاع غير متطابقة، فإن النسب بين الأضلاع المتناظرة، لا يمكن أن تكون متساوية، لذا فالمثلث المتطابق الضلعين والمثلث المختلف الأضلاع لا يمكن أن يتشابها.

33) دائمًا؛ إجابة ممكنة: المثلث المتطابق الأضلاع قياس كل زاوية فيه 60، لذلك فزوايا أيّ مثلث متطابق الأضلاع مطابقة لزوايا أيِّ مثلثٍ آخر متطابق الأضلاع ، وبما أن أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع تكون متطابقة دائمًا، فإن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة تكون متساوية دائمًا؛ لذا فإن أي مثلثين متطابقَي الأضلاع يكونان متشابهين دائمًا.

34) البرهان: بما أن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ،

فإنّ: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$، إذن:

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{m}{n}$، وبالضرب التبادلي يكون $AB = DE\left(\frac{m}{n}\right)$

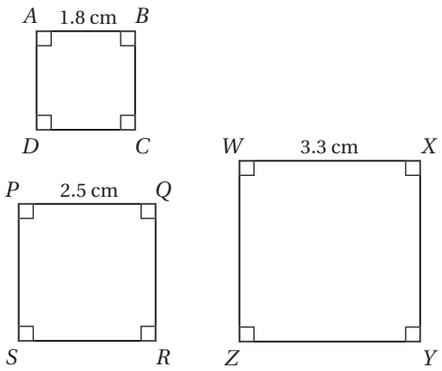
$BC = EF\left(\frac{m}{n}\right)$ ، و $AC = DF\left(\frac{m}{n}\right)$، وبالتعويض يكون محيط

$\triangle ABC$ يساوي $DE\left(\frac{m}{n}\right) + EF\left(\frac{m}{n}\right) + DF\left(\frac{m}{n}\right)$ ، أي يساوي

$\frac{m}{n}(DE + EF + DF)$ ؛ إذن فالنسبة بين المحيطين تساوي

$\frac{\frac{m}{n}(DE + EF + DF)}{DE + EF + DF} = \frac{m}{n}$.

36a) إجابة ممكنة:



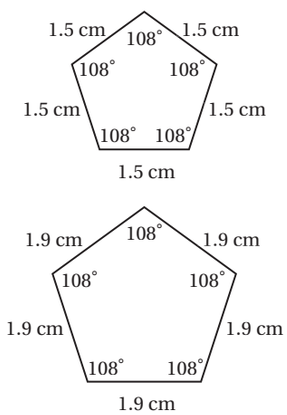
36b)

$WXYZ$, $ABCD$		$PQRS$, $WXYZ$		$ABCD$, $PQRS$	
1.8	$WX:AB$	0.76	$PQ:WX$	0.72	$AB:PQ$
1.8	$XY:BC$	0.76	$QR:XY$	0.72	$BC:QR$
1.8	$YZ:CD$	0.76	$RS:YZ$	0.72	$CD:RS$
1.8	$ZW:DA$	0.76	$SP:ZW$	0.72	$AD:PS$

$ABCD$ يشابه $PQRS$، $PQRS$ يشابه $WXYZ$،

$WXYZ$ يشابه $ABCD$.

40)

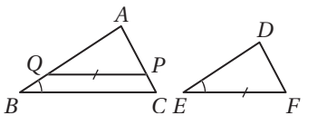


نعم؛ إجابة ممكنة: المضلعان الخماسيّان المنتظمان متشابهان؛ لأن زواياهما المتناظرة متطابقة، وأضلاعهما المتناظرة متناسبة. وبما أنّ جميع زوايا المضلع المنتظم متطابقة، وجميع أضلاعه متطابقة أيضًا. فإن زوايا المضلعين المنتظمين تكون متطابقة، بغض النظر عن أبعاد أي شكل. وبما أن جميع أضلاع المضلع المنتظم متطابقة، فإن النسب بين الأضلاع المتناظرة في المضلعين المنتظمين اللذين لهما العدد نفسه من الأضلاع ستكون متساوية؛ لذا فإن جميع المضلعات المنتظمة والتي لها العدد نفسه من الأضلاع تكون متشابهة.

الدرس 2-6 ، ص (86-87) :

17) **المعطيات:** $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$ ، $\angle B \cong \angle E$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

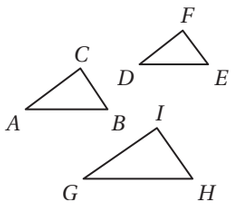


ارسم $\overline{QP} \parallel \overline{BC}$, $\overline{QP} \cong \overline{EF}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}, \angle B \cong \angle E$	1) معطيات
2) $\angle APQ \cong \angle C$, $\angle AQP \cong \angle B$	2) مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.
3) $\angle AQP \cong \angle E$	3) خاصية التعدّي للتطابق
4) $\triangle ABC \sim \triangle AQP$	4) مسلّمة التشابه AA
5) $\frac{AB}{AQ}=\frac{BC}{QP}$	5) تعريف المضلعات المتشابهة
6) $AB \cdot QP = AQ \cdot BC$; $AB \cdot EF = DE \cdot BC$	6) الضرب التبادلي
7) $QP = EF$	7) تعريف تطابق القطع المستقيمة
8) $AB \cdot EF = AQ \cdot BC$	8) بالتعويض
9) $AQ \cdot BC = DE \cdot BC$	9) بالتعويض
10) $AQ = DE$	10) خاصيّة القسمة للمساواة
11) $\overline{AQ} \cong \overline{DE}$	11) تعريف تطابق القطع المستقيمة
12) $\triangle AQP \cong \triangle DEF$	12) SAS
13) $\angle APQ \cong \angle F$	13) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
14) $\angle C \cong \angle F$	14) خاصيّة التعدّي
15) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	15) مسلمة التشابه AA

18)



خاصيّة الانعكاس للتشابه

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

البرهان :

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$	1) معطى
2) $\angle A \cong \angle A, \angle B \cong \angle B$	2) خاصية الانعكاس
3) $\triangle ABC \sim \triangle ABC$	3) مسلّمة التشابه AA

خاصيّة التماثل للتشابه

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

المطلوب: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

البرهان :

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	1) معطى
2) $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$	2) تعريف المضلعين المتشابهين
3) $\angle D \cong \angle A, \angle E \cong \angle B$	3) خاصية التماثل
4) $\triangle DEF \sim \triangle ABC$	4) مسلّمة التشابه AA

خاصيّة التعدّي للتشابه

المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF, \triangle DEF \sim \triangle GHI$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle GHI$

البرهان :

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\triangle DEF \sim \triangle GHI$	1) معطيات
2) $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle D \cong \angle G, \angle E \cong \angle H$	2) تعريف المضلعين المتشابهين
3) $\angle A \cong \angle G$, $\angle B \cong \angle H$	3) خاصية التعدّي
4) $\triangle ABC \sim \triangle GHI$	4) مسلّمة التشابه AA

تدريب وحل المسائل

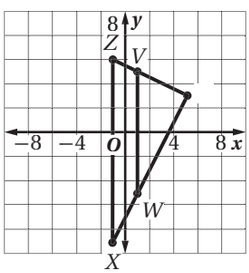
19) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle XYZ, \triangle ABC$ قائما الزاوية.	1) معطًى
2) $\angle XYZ, \angle ABC$ قائمتان .	2) تعريف المثلث القائم
3) $\angle XYZ \cong \angle ABC$	3) جميع الزوايا القوائم متطابقة
4) $\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC}$	4) معطًى
5) $\triangle YXZ \sim \triangle BAC$	5) نظرية التشابه SAS

20) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $ABCD$ شبه منحرف.	1) معطى
2) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	2) تعريف شبه المنحرف
3) $\angle BDC \cong \angle ABD$, $\angle BAC \cong \angle DCA$	3) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
4) $\triangle DCP \sim \triangle BAP$	4) مسلمة التشابه AA
5) $\frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA}$	5) الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين متناسبة

22)



$$XY = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$YZ = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$ZX = 6 - (-9) = 15$$

$$VW = 5 - (-5) = 10$$

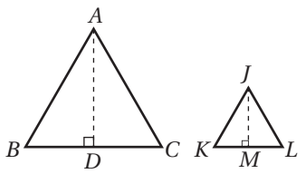
$$WY = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$YV = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{XY}{WY} = \frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{2}, \frac{YZ}{YV} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2}, \frac{ZX}{VW} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

وبما أنّ: $\frac{XY}{WY} = \frac{YZ}{YV} = \frac{ZX}{VW} = \frac{3}{2}$، إذن: $\triangle XYZ \sim \triangle WYV$
بحسب نظرية التشابه SSS.

24)



بما أن طول كل ضلع من أضلاع $\triangle JKL$ يساوي نصف طول الضلع المناظر له في $\triangle ABC$ فإن $\triangle JKL$ يشابه $\triangle ABC$ وفق نظرية التشابه SSS بمعامل تشابه $\triangle JKL$ إلى $\triangle ABC$ يساوي $\frac{1}{2}$.

أي أن $\frac{JK}{AB} = \frac{JL}{AC} = \frac{KL}{BC} = \frac{1}{2}$

وعليه فإن المثلثان القائمان ABD, JKM متشابهان وفق مسلمه التشابه AA حيث إن $\angle B \cong \angle K, \angle JMK \cong \angle ADB$ بمعامل تشابه $\triangle JKM$ إلى $\triangle ABD$ يساوي $\frac{1}{2}$ لان $\frac{JK}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{JM}{AD}$.

وبما أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع

فإن: $$\frac{\text{مساحة } \triangle JKL}{\text{مساحة } \triangle ABC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD}{\frac{1}{2} \cdot KL \cdot JM}$$

$$= \frac{BC}{KL} \cdot \frac{AD}{JM}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

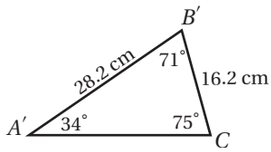
$$= (\text{معامل التشابه})^2$$

إذا كانت مساحة $\triangle ABC$ تساوي $40\,\text{in}^2$

فإن $\frac{\text{مساحة } \triangle JKL}{40} = \frac{1}{4}$

أي أن مساحة $\triangle JKM$ تساوي $10\,\text{in}^2$.

30) إجابة ممكنة:

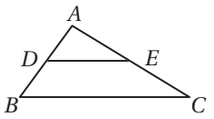


$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ ؛ لأن طول كل ضلع يساوي ضعف طول الضلع المناظر له وقياسات الزوايا المتناظرة متساوية.

31) إجابة ممكنة: أختار ضلعًا من أضلاع المثلث الأصلي وأقيس طوله، وأرسم قطعة مستقيمة طولها يساوي مِثلَي طول هذا الضلع، ثم أقيس الزاويتين المحصورتين بين الضلع الذي قِسْت طوله في المثلث الأصلي والضلعين الآخرين. وارسم زاويتين مطابقتين للزاويتين اللتين أوجدت قياسَيهما في المثلث الأصلي عند طرفَي القطعة التي رسمتها. وأمدُّ ضلعَي الزاويتين الجديدتين حتى تلتقِيا. فيكون المثلث الجديد مشابهًا للمثلث الأصلي وأبعاده مثلَي أبعاد المثلث الأصلي.

الدرس 3-6 ، ص (96-94) :

22) المعطيات: قطع DE كلًّا من ضلعي المثلث ABC، وقسَّمها إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة، حيث $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$

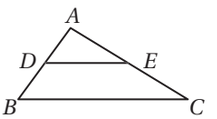


المطلوب: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$	1) معطى
2) $\frac{AD}{AD}+\frac{DB}{AD}=\frac{AE}{AE}+\frac{EC}{AE}$	2) خاصيّة الجمع بالمساواة
3) $\frac{AD+DB}{AD}=\frac{AE+EC}{AE}$	3) بالجمع
4) $AB=AD+DB, AC=AE+EC$	4) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
5) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$	5) بالتعويض
6) $\angle A \cong \angle A$	6) خاصيّة الانعكاس
7) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$	7) نظرية التشابه SAS
8) $\angle ADE \cong \angle ABC$	8) تعريف المضلّعين المتشابهين
9) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	9) إذا تطابقت الزوايا المتناظرة، فإن المستقيمين متوازيان

23) المعطيات: D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، و E نقطة منتصف $\overline{AC}$.



المطلوب: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}, DE=\frac{1}{2}BC$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) D نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، E نقطة منتصف $\overline{AC}$.	1) معطيات
2) $\overline{AD} \cong \overline{DB}, \overline{AE}=\overline{EC}$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $AD=DB,\ AE=EC$	3) بالجمع
4) $AB=AD+DB, AC=AE+EC$	4) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
5) $AB=AD+AD, AC=AE+AE$	5) بالتعويض
6) $AB=2AD, AC=2AE$	6) بالجمع
7) $\frac{AB}{AD}=2, \frac{AC}{AE}=2$	7) خاصيّة القسمة للمساواة
8) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$	8) خاصيّة التعدّي
9) $\angle A \cong \angle A$	9) خاصيّة الانعكاس
10) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$	10) نظرية التشابه SAS
11) $\angle ADE \cong \angle ABC$	11) تعريف المضلّعين المتشابهين
12) $DE \parallel \overline{BC}$	12) إذا تطابقت الزوايا المتناظرة، فإن المستقيمين متوازيان
13) $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$	13) تعريف المضلّعين المتشابهين
14) $\frac{BC}{DE}=2$	14) خاصيّة التعويض
15) $2DE=BC$	15) بالضرب
16) $DE=\frac{1}{2}BC$	16) بالقسمة

28) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ نظرية التشابه SAS

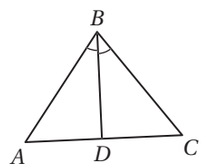
$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$ تعريف المضلعين المتشابهين

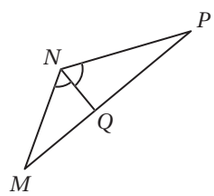
$\frac{DE}{BC}=\frac{40}{100}$ بالتعويض

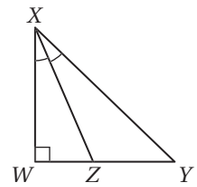
$\frac{DE}{BC}=\frac{2}{5}$ بالتبسيط

$\frac{2}{5}BC=DE$ بالضرب

34a) إجابة ممكنة:







36) دائمًا؛ إجابة ممكنة: FH قطعة منصّفة، في ΔABC، وبما أن FH قطعة منصفة في ΔABC فإن $FH \parallel BC$، وعليه فإن $FHCB$ شبه منحرف.

وبما أن $DA = \frac{3}{4}AB$

$AF = \frac{1}{2}AB$

$DF = \frac{1}{4}AB$

وكذلك $DB = DF = \frac{1}{4}AB$

أيضًا بما أن $EA = \frac{3}{4}AC$

$AH = \frac{1}{2}AC$

$EH = \frac{1}{4}AC$

وكذلك $CE = EH = \frac{1}{4}AC$

أي أن DE قطعة متوسطة في شبه المنحرف $FHCB$

وبفرض أن $BC = x$ يكون $FH = \frac{1}{2}x$، وبما أن $FHCB$ شبه منحرف فإنّ:

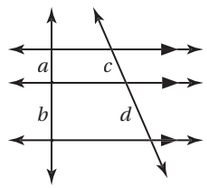
$$DE = \frac{1}{2}(BC + FH) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}x\right)$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$$

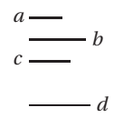
لذلك $DE = \frac{3}{4}BC$.

37) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $AB = 4, BC = 4$	**1)** معطيات
2) $AB = BC$	**2)** بالتعويض
3) $AB + BC = AC$	**3)** مسلّمة جمع القطع المستقيمة
4) $BC + BC = AC$	**4)** بالتعويض
5) $2BC = AC$	**5)** بالجمع
6) $AC = 2BC$	**6)** خاصيّة التماثل
7) $\frac{AC}{BC} = 2$	**7)** بالقسمة
8) $ED = DC$	**8)** معطى
9) $ED + DC = EC$	**9)** مسلّمة جمع القطع المستقيمة
10) $DC + DC = EC$	**10)** بالتعويض
11) $2DC = EC$	**11)** بالجمع
12) $2 = \frac{EC}{DC}$	**12)** خاصيّة القسمة
13) $\frac{AC}{BC} = \frac{EC}{DC}$	**13)** خاصيّة التعدّي
14) $\angle C \cong \angle C$	**14)** خاصيّة الانعكاس
15) $\triangle ACE \sim \triangle BCD$	**15)** نظرية التشابه SAS
16) $\angle CAE \cong \angle CBD$	**16)** تعريف المضلعين المتشابهين
17) $BD \parallel \overline{AE}$	**17)** إذا تطابقت الزوايا المتناظرة، فإنّ المستقيمين متوازيان

38) إجابة ممكنة:





بحسب النتيجة: 6.1 ، $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

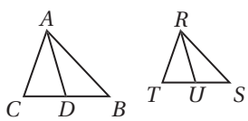
الدرس 4-6 ، ص (104) :

15) المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle RST$

$\overline{DA}$ قطعة متوسّطة لِـ $\triangle ABC$.

$\overline{UR}$ قطعة متوسّطة لِـ $\triangle RST$.

المطلوب: $\frac{AD}{RU} = \frac{AB}{RS}$

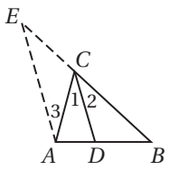


البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC \sim \triangle RST$ ؛ $\overline{AD}$ قطعة متوسّطة لِـ $\triangle ABC$ ؛ $\overline{RU}$ قطعة متوسطة لِـ $\triangle RST$.	**1)** معطيات
2) $CD = DB;\ TU = US$	**2)** تعريف القطعة المتوسّطة
3) $\frac{AB}{RS} = \frac{CB}{TS}$	**3)** تعريف المضلعين المتشابهين

4) $CB = CD + DB;\ TS = TU + US$	**4)** مسلّمة جمع القطع المستقيمة
5) $\frac{AB}{RS} = \frac{CD + DB}{TU + US}$	**5)** بالتعويض
6) $\frac{AB}{RS} = \frac{DB + DB}{US + US} = \frac{2(DB)}{2(US)}$	**6)** بالتعويض
7) $\frac{AB}{RS} = \frac{DB}{US}$	**7)** بالتبسيط
8) $\angle B \cong \angle S$	**8)** تعريف المضلعين المتشابهين
9) $\triangle ABD \sim \triangle RSU$	**9)** نظرية التشابه SAS
10) $\frac{AD}{RU} = \frac{AB}{RS}$	**10)** تعريف المضلعين المتشابهين

19) البرهان:



نرسم $\overline{CD} \parallel \overline{AE}$ ، ونصل بين C وَ E .

العبارات	المبررات
1) $\overline{CD}$ تنصّف $\angle ACB$،	**1)** معطيات
2) $\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{BC}$	**2)** نظرية التناسب في المثلث
3) $\angle 1 \cong \angle 2$	**3)** تعريف منصّف الزاوية
4) $\angle 3 \cong \angle 1$	**4)** نظّرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
5) $\angle 2 \cong \angle E$	**5)** مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
6) $\angle 3 \cong \angle E$	**6)** خاصيّة التعدّي
7) $\overline{CA} \cong \overline{CE}$	**7)** عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين
8) $EC = AC$	8) تعريف القطعتين المتطابقتين
9) $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$	**9)** بالتعويض

20) البرهان:

العبارات	المبررات
1) AS تنصف $\angle HAG$	**1)** معطًى
2) $\angle HAS \cong \angle GAS$	**2)** تعريف منصف الزاوية
3) $\angle H \cong \angle G$	**3)** معطًى
4) $\triangle HAS \sim \triangle GAS$	**4)** نظرية التشابه AA
5) $\frac{HS}{GS} = \frac{AH}{AG}$	**5)** الأضلاع المتناظرة في مثلثين متشابهين تكون متناسبة

توسع الدرس 6-4 ، ص (106):

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle KAP$ متطابق الأضلاع. النقاط D, F, M, B, C, E هي منتصفات $\overline{KA}, \overline{AP}, \overline{PK}, \overline{DA}, \overline{AF}, \overline{FD}$ ، على الترتيب.	**1)** معطيات
2) $\overline{DF}$ قطعة منصّفة في $\triangle KAP$، $\overline{BC}$ قطعة منصّفة في $\triangle ADF$	**2)** تعريف القطعة المنصِّفة
3) $\overline{DF} \parallel \overline{KP},\ \overline{BC} \parallel \overline{DF}$	**3)** نظرية القطعة المنصِّفة للمثلث
4) $\overline{KP} \parallel \overline{BC}$	**4)** القطعتان الموازيتان لقطعة مستقيمة متوازيتان
5) $\angle ABC \cong \angle AKP$	**5)** مسلمة الزاويتين المتناظرتين
6) $\angle A \cong \angle A$	**6)** خاصية الانعكاس
7) $\triangle BAC \sim \triangle KAP$	**7)** مسلمة التشابه AA

الفصل 7

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (117)

	الدرس 7-1 حصتان	الدرس 7-2 حصتان	استكشاف 7-3 حصة واحدة	الدرس 7-3 حصتان
العنوان	**الانعكاس**	**الإزاحة (الانسحاب)**	**معمل الهندسة: الدوران**	**الدوران**
الأهداف	• رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس. • رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي.	• رسم الصور الناتجة عن الإزاحة. • رسم الصور الناتجة عن الإزاحة في المستوى الإحداثي.	• استكشاف خصائص الدوران.	• رسم الصورة الناتجة عن دوران شكل باستعمال المنقلة. • رسم الصورة الناتجة عن دوران شكل في المستوى الإحداثي.
المفردات الأساسية	الانعكاس محور الانعكاس	الانسحاب		الدوران مركز الدوران زاوية الدوران
تمثيلات متعددة	ص (124)	ص (130)		ص (137)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (16) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (17) دون ضمن فوق	**المواد** • أوراق شفافة • مسطرة • منقلة	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (18) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية ص (119)	السبورة التفاعلية ص (128)		برمجية تحرير الصور ص (134)
تنويع التعليم	ص (120, 123)	ص (127, 131)		ص (134, 135)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (139)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التحويلات الهندسية والتماثل

الخطة الزمنية

التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(15) حصة	حصتان	(17) حصة

استكشاف 7-4 حصة واحدة	الدرس 7-4 حصتان	توسع 7-4 حصة واحدة	الدرس 7-5 حصتان	الدرس 7-6 حصتان
معمل الحاسبة البيانية: تركيب التحويلات الهندسية	**تركيب التحويلات الهندسية**	**معمل الهندسة: التبليط**	**التماثل**	**التمدد**
• استكشاف أثر إجراء عدة تحويلات هندسية على شكل هندسي.	• رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب تحويلين هندسيين أحدهما هو الانعكاس. • رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين وحول مستقيمين متقاطعين.	• تعرّف التبليط المنتظم. • إنشاء نماذج تبليط باستعمال التقنيات ومن دون استعمالها.	• تحديد محاور التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثنائية الأبعاد. • تحديد مستويات التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثلاثية الأبعاد.	• رسم الصورة الناتجة عن التمدد باستعمال المسطرة. • رسم الصورة الناتجة عن التمدد في المستوى الإحداثي.
	التحويل الهندسي المركب. تركيب إزاحة انعكاس.	التبليط التبليط المنتظم التبليط شبه المنتظم التبليط المتَّسق	التماثل التماثل حول محور التماثل حول مستوى محور التماثل التماثل الدوراني مركز التماثل رُتبة التماثل مقدار التماثل	التمدد تحويل التشابه معامل مقياس التمدد
			ص (158)	ص (165)
المواد • الآلة الحاسبة Ti-nspire	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (19) دون ضمن فوق	**المواد** • الآلة الحاسبة Ti-nspire	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (20) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (21) دون ضمن فوق
	السبورة التفاعلية ص (143)		السبورة التفاعلية ص (155)	السبورة التفاعلية ص (162)
	ص (144, 146)		ص (156)	ص (161, 162)

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ص (170 – 167)
- اختبار الفصل ص (171)

الفصل 7 التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 7**	
	التهيئة للفصل 7 ، ص (117)	مخطط المعالجة، ص (117)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك كل مثال	**مستوى المعالجة 1**
	تأكد	تدريبات المهارات، الفصل 7
	مسائل مهارات التفكير العليا	www.obeikaneducation.com
	مراجعة تراكمية	**مستوى المعالجة 2**
	أمثلة إضافية	تنويع التعليم
	تنبيه!	تنويع الواجبات المنزلية
	الخطوة 4، التقويم	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 7-1
	الاختبارات القصيرة ، ص (49, 50)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (139)	**مستوى المعالجة 1**
	اختبار منتصف الفصل، ص (51)	تدريبات المهارات، الفصل 7
	www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com
		مستوى المعالجة 2
		تدريبات إعادة التعليم، الفصول 7-1
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (167)	**مستوى المعالجة 1**
	اختبار الفصل، ص (171)	تدريبات المهارات، الفصل 7
	اختبار تراكمي، ص (174,175)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 2**
		تدريبات إعادة التعليم، الفصول 7-1
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 7**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (53-58)	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 7-1
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (59, 60)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص (52)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (61)	
	الاختبار التراكمي ، ص (62-64)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون استعمل آلة التصوير الرقمية؛ لتصوير نماذج لأمثلةٍ على التماثل أو الانعكاس. اطلب إلى الطلاب أن يُحضروا مرايا صغيرة لتكوين الانعكاسات وتصويرها. اطبع الصور التي التقطها الطلاب واعرضها في الساحة أو في غرفة الصف.

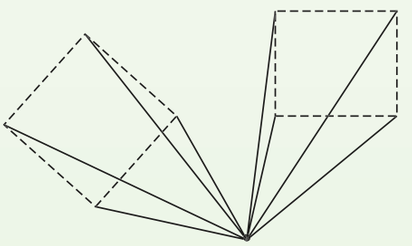
المتعلمون الطبيعيون اخرج مع الطلاب في جولة خارج أسوار المدرسة، واطلب إليهم أن يُحضروا معهم دفاتر ملاحظات وأقلام رصاص لتسجيل ملاحظاتهم. تجوَّل معهم، واطلب إليهم أن يرسموا الأشياء التي يلاحظون أنها متماثلةً وأن يسمّوها، واسألهم عن الغرض من وجود التماثل بحسب رأيهم.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب استعمال لوحٍ من الفلّين رُسمت عليه شبكة إحداثية، ودبابيس، وأشكال مغلفة، وخيط من الصوف لنمذجة الدوران. يمكن أن يبدأ الطلاب بوضع شكل على اللوح وتثبيت خيوطِ الصوفِ عند كل رأس، ثم يختاروا مركزًا للدوران ويثبّتوا أطراف خيوط الصوف عند مركز الدوران بدبوس. يتعين عليهم أن يختاروا زاوية الدوران، ويستعملوا منقلةً لرسم صور الرؤوس، وأن يحركوا الشكل إلى موقعه الجديد.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب أن يستعملوا الحاسبة TI-nspire أو القلم والورقة؛ لإنشاء أنماط تبليط أحدها بواسطة الانعكاس، وآخر بالدوران، وثالث بالإزاحة. يستعمل الطلاب المفاتيح المناسبة في الحاسبة TI-nspire لإتمام التبليط. ويمكن بعد ذلك تلوين نمط التبليط أو تركه كما هو على شكل مخططٍ واضح المعالم.

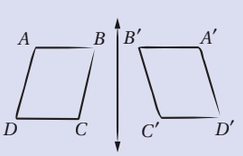
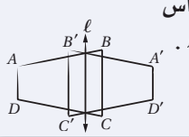


القراءة والكتابة بلغة الرياضيات

الدراسة

مهارة الدراسة

شجِّع الطلاب على إنشاء إطارات المحتوى لتنظيم ملاحظاتهم. الإطار المعروض أدناه يصف مصطلح الانعكاس الذي يُقدّم في الدرس 1-7، اطلب إلى الطلاب أن يُضيفوا تحويلاتٍ أخرى إلى هذا الإطار عند دراستها في هذا الفصل.

المصطلح	التعريف (بكلماتك الخاصة)	مثال	سؤال وإجابة
الانعكاس	تشكل صورة المرآة انعكاسًا للشكل الأصلي		ارسم صورة $ABCD$ الناتجة عن انعكاس حول المستقيم ℓ. 

يسهم هذا النشاط ومشابهه في بناء استقلالية الطلاب من خلال استعمالهم الاستراتيجيات الخاصة بهم.

الفصل 7 المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 7

- تمثيل التمدد والانعكاس والإزاحة (الانسحاب) في المستوى الإحداثي.
- تمثيل العلاقات بيانيًّا وبالجداول.
- حل معادلات خطيّة.

الفصل 7

- رسم صورة لشكل هندسي ناتجة عن التحويلات الهندسية (الانعكاس، الإزاحة، الدوران، التمدد).
- رسم صورة لشكل هندسي ناتجة عن ترتيب تحويلين هندسيين أحدهما الانعكاس.
- تحديد محور التماثل والتماثل الدوراني للشكل الثنائية الأبعاد، وتحديد مستويات التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثلاثية الأبعاد.

مابعد الفصل 7

التهيئة للصف الثاني الثانوي

- تطبيق تحويلات هندسية أساسية تشمل:

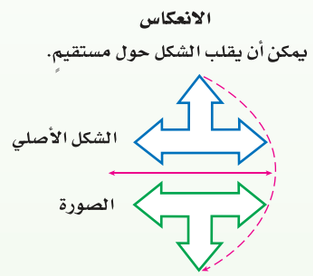
$a \cdot f(x), f(x) + d, f(x - c), f(b \cdot x), |f(x)|, f(|x|)$ على الدالة المولدة (الأم).

- إجراء عمليات تشمل تركيب الدوال وإيجاد معكوساتها، ووصف هذه الإجراءات والنتائج لفظيًّا وعدديًّا وبيانيًّا وبالرموز.

ملخص الدروس

7-1 الانعكاس

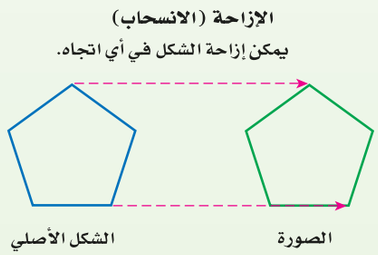
الانعكاس هو تحويل هندسي يقلب الشكل حول مستقيمٍ معلومٍ .



المستقيم الذي يكون بعد النقطة وصورتها حوله متساويًا يسمى محور الانعكاس، وتكون الصورة الناتجة عن الانعكاس مطابقة للشكل الأصلي، حيث إن الانعكاس هو تحويل تطابق.
ويمكن أن يتم الانعكاس في المستوى الإحداثي، وهذا يُتيح الفرصة لتعيين إحداثيات كل نقطةٍ في الشكل الأصلي وصورته.

7-2 الإزاحة (الانسحاب)

الإزاحة (الانسحاب) تحويل هندسي ينقل نقاط الشكل جميعها المسافة نفسها في الاتجاه نفسه.



ويمكن رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي، إذا عُلم اتجاه الإزاحة ومسافتها الأفقية و / أو الرأسية. تقوم إحدى طرائق إجراء الإزاحة لشكلٍ ما في المستوى الإحداثي على عدّ الوحدات على المحور x وعلى المحور y بالطريقة نفسها المُستعملة لإيجاد الميل.

التحويلات الهندسية والتماثل

7-3 الدوران

الدوران تحويل هندسي يدوّر كل نقطةٍ في الشكل الأصلي بزاوية محددة واتجاه محدد حول نقطة ثابتة.



تسمى النقطة الثابتة مركز الدوران، وزاوية الدوران هي الزاوية المتشكِّلة من نقطة على الشكل الأصلي، والنقطة المناظرة لها في الصورة ومركز الدوران. يحقق الدوران جميع خصائص تحويلات التطابق، بما فيها الحفاظ على الأطوال وقياسات الزوايا.
يمكن إجراء الدوران باستعمال المنقلة لقياس زاوية الدوران، والمسطرة لتعيين صور النقاط.

7-4 تركيب التحويلات الهندسية

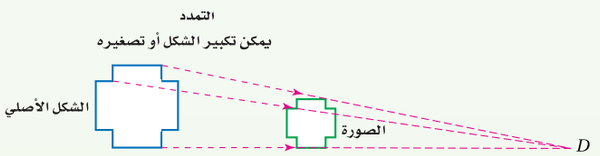
عندما يُجرى تحويل هندسي على شكلٍ ما، ثم يُجرى تحويل آخر على الصورة الناتجة عن التحويل الأول، تسمى النتيجة تركيب تحويلين هندسيين. وأحد أنواع التحويلات الهندسية المركبة هو التحويل الناتج عن تركيب إزاحة وانعكاس. وتشير النظرية 7.2 إلى أن الإزاحة تكافئ انعكاسين متتاليين حول مستقيمين متوازيين، وتشير النظرية 7.3 إلى أن الدوران يكافئ انعكاسين متتاليين حول مستقيمين متقاطعين.

7-5 التماثل

يكون الشكل متماثلًا، إذا وُجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس، ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه. يقال إن الشكل متماثل حول محورٍ، إذا كانت صورته الناتجة عن انعكاس حول هذا المحور هي الشكل نفسه. ويقال إن للشكل تماثلًا دورانيًّا إذا كانت صورته الناتجة عن دوران بين $0°$ و $360°$ حول مركزه هي الشكل نفسه. وبطريقةٍ مماثلةٍ يكون الشكل الثلاثي الأبعاد متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محورٍ.

7-6 التمدد

التمدد تحويل هندسي يغيِّر أبعاد الشكل.



قد يكون الشكل الجديد أصغر من الشكل الأصلي أو أكبر منه بمعامل تمددٍ محددٍ. إذا كان معامل مقياس التمدد 1، يسمى التمدد تمددًا مطابقًا، وإذا كان معامل مقياس التمدد لا يساوي 1، يكون التمدد تكبيرًا أو تصغيرًا، وهذا يعني أن الشكل الأصلي والصورة متشابهان.
يمكنك استعمال معامل مقياس التمدد؛ لإيجاد إحداثيات نقاط الصورة الناتجة عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل في المستوى الإحداثي. إذا كانت $P(x, y)$ النقطة الأصلية، فإن صورتها الناتجة عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله k هي $P'(kx, ky)$، ولإيجاد معامل مقياس التمدد في المستوى الإحداثي، اقسم طول الصورة على الطول الأصلي.

الفصل 7

ملاحظات

مشروع الفصل

التصوير والتبليط

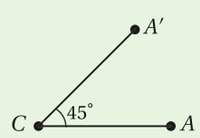
يستعمل الطلاب ما تعلموه عن الانعكاس والانسحاب والدوران؛ للربط بين التصوير والتبليط.

- اطلب إلى الطلاب أن يبحثوا في الطرق التي يوظف فيها المصوِّرون الانعكاس والإزاحة والدوران في مجال عملهم، وأن يقدموا أمثلةً لكل واحدٍ منها. موضحين كيف يؤثر كل واحد من هذه التحويلات في الصورة؟
- ثم اطلب إليهم أن يجدوا أمثلةً من الإنترنت على التبليط، يُستعمل فيها الانعكاس والإزاحة والدوران. واسألهم إن كان نمط التبليط يذكِّرهم ببعض ألعاب الطفولة.
- اطلب إلى الطلاب أن يكوّنوا أنماط تبليط خاصة بهم، باستعمال تحويلين هندسيين على الأقل من: الانعكاس والإزاحة والدوران.
- اطلب إلى الطلاب أن يعرضوا بحوثهم وتصاميمهم أمام الصف، وأن يُعطُوا أمثلةً على الأساليب التي استعملوها لإنشاء أنماط التبليط.

المفردات: قدّم مفردات هذا الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: مركز الدوران هو نقطة ثابتة ينقل الدوران حولها بزاوية $x°$ كل نقطة إلى صورتها.

مثال:



سؤال: ما النقطة التي تمثل مركز الدوران في الشكل أعلاه؟ وما اتجاه الدوران؟ النقطة C ، عكس اتجاه عقارب الساعة.

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح

غرضها: يدوِّن الطلاب ملاحظاتهم عن كل درس من دروس هذا الفصل.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب استعمال الجزء المناسب من مطوياتهم لكتابة المفردات الجديدة لكل درس، وشجعهم على كتابة أمثلة؛ لتوضيح هذه المفردات وتعريفاتها.

وقت استعمالها: شجِّع الطلاب أثناء دراستهم الفصل على إضافة معلوماتٍ على مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (47) .

يُكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

الفصل 7

التحويلات الهندسية و التماثل

Transformations and Symmetry



فيما سبق:
درستُ التحويلات الهندسية: الانعكاس والإزاحة والدوران.

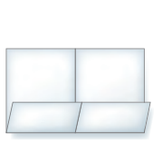
والآن:
- أرسم صور أشكال بالانعكاس أو الانسحاب أو الدوران أو التمدد.
- أتعرف تركيب تحويلين هندسيين.
- أتعرف التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد والثلاثية الأبعاد.

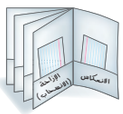
لماذا؟
تصوير: يستعمل المصوّرون الانعكاس والدوران والتماثل؛ لجعل الصورة مثيرة للاهتمام وجذّابةً بصريًا.

المطويات منظم أفكار

التحويلات الهندسية والتماثل: اعمل هذه المطوية؛ لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 7 ، مبتدئًا بأربع أوراق A4.

1. اطوِ كل ورقة من المنتصف.
2. ابسط الأوراق ثم اطوها طوليًا بعرض 5 cm لتكوّن جيبين.
3. ألصق الأوراق جنبًا إلى جنبٍ على طول خطِّ الطيِّ، لتكوّن كتيبًا كما في الشكل أدناه.
4. ضع عنوانًا لكل جيب كما في الشكل أدناه، استعمل أوراقًا أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة وخصص الجيب الأخير للمفردات الجديدة.



التهيئة للفصل 7

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

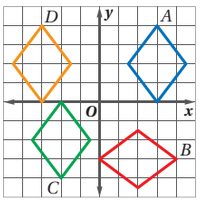
البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

(تُستعمل مع الدروس 1–7 إلى 4–7)

صنِّف كلًّا من التحويلات الهندسية الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران مستعملًا الشكل المجاور.



1) A إلى B

2) D إلى A

3) A إلى C

1) دوران

2) إزاحة أو انعكاس

3) إزاحة

(تُستعمل مع الدرس 2–7)

4) **هندسة إحداثية:** إحداثيات رؤوس $\triangle PQR$ هي $P(-4,2)$,$Q(3,0)$, $R(4,3)$. إذا أُزيح $\triangle PQR$ 4 وحدات إلى أسفل و 6 وحدات إلى اليمين للحصول على $\triangle P'Q'R'$ ، فما إحداثيات رؤوس $\triangle P'Q'R'$ ؟

$P'(2,-2), Q'(9,-4), R'(10,-1)$

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد البعد بين كل نقطتين فيما يلي:

5) $\sqrt{53}$ $(0,1)$, $(2,8)$

6) $\sqrt{34}$ $(-2,0)$, $(3,3)$

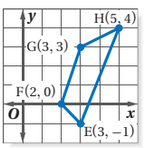
7) 5 $(6,4)$, $(2,1)$

8) $3\sqrt{5}$ $(-3,-1)$, $(0,5)$

(تُستعمل مع الدرس 6–7)

9) **تصوير:** رسم أسعد صورةً مكبرة لنملة؛ لاستعمالها في درس العلوم، أوجد مقياس الرسم للصورة إذا كان طول النملة الحقيقي $\frac{1}{2}$ in، وكان طول الصورة 1 ft 24

احسب طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي $EFGH$.



10) $\sqrt{2}$ $\overline{EF}$

11) $\sqrt{10}$ $\overline{FG}$

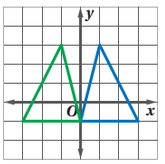
12) $\sqrt{5}$ $\overline{GH}$

13) $\sqrt{29}$ $\overline{HE}$

مراجعة سريعة

مثال 1

صنّف التحويل الهندسي المبين في الشكل المجاور إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران.



يبعد كل رأس وصورته البعد نفسه عن المحور y ، ولذلك فهذا التحويل انعكاس.

مثال 2

وقف مقدّم استعراض رياضي عند النقطة $(1, 4)$، وتحرك منها 4 وحدات إلى اليمين، ثم 3 وحدات إلى أسفل. ما إحداثيات النقطة التي وصل إليها؟

يمكن التعبير عن حركة 4 وحدات إلى اليمين، ثم 3 وحدات إلى أسفل بالقاعدة:

$(x, y) \rightarrow (x+4, y-3)$

$(1, 4) \rightarrow (1+4, 4-3) = (5, 1)$

مثال 3

عمل خالد نموذجًا مصغرًا لجسرٍ. أوجد مقياس الرسم للنموذج، إذا كان طول النموذج 2 m ، وطول الجسر 120 m

طول النموذج يساوي 2 m ، وطول الجسر يساوي 120 m؛

إذن مقياس رسم النموذج إلى الجسر $\frac{2\text{ m}}{120\text{ m}}$؛ أي $\frac{1}{60}$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، والعبارة "إذا ... فقم" في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،
فقم	بمراجعة تحويلات الانعكاس والإزاحة والدوران وصيغة المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي، ومقياس الرسم.
	www.obeikaneducation.com

المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووَضْع أنشطة علاجية لذلك.
	www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-1

استعمال المستوى الإحداثي في رسم أشكال بسيطة، وتحديد أطوالها ومساحاتها، وإيجاد صورها بالانعكاس.

الدرس 7-1

رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس، ورسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس 7-1

رسم الصورة الناتجة عن الإزاحة، ورسم الصورة الناتجة عن الإزاحة في المستوى الإحداثي.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما نوع التحويل الهندسي الذي تمثله هذه الصورة؟ انعكاس.
- ما المفردات الأخرى التي تُستعمل للتعبير عن الانعكاس؟ قلب، أو صورة مرآة
- قارن حجم الشكل الأصلي وصورته بالانعكاس في الماء، ماذا تلاحظ؟ متطابقان، كما أن بعد كل نقطة على الشكل وبعد صورتها عن سطح الماء متساويين.

رسم صورة شكل بالانعكاس

المثالان 1, 2 يبينان كيفية رسم صور الأشكال بالانعكاس، وكيفية استعمال الانعكاسات لاختصار المسافات.

7-1 الانعكاس
Reflection

فيما سبق:
درستُ الانعكاس بوصفه تحويلًا هندسيًا.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أرسم الصورة الناتجة عن الانعكاس.
- ارسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي .

المفردات:
الانعكاس
reflection
محور الانعكاس
line of reflection
www.obeikaneducation.com

لماذا؟



تُظهر المسطحات المائية انعكاسات رائعة لما يُحيط بها. ففي مسطحات الماء الراكدة، تلاحظ أن لكل نقطة فوق سطح الماء نقطة مناظرة لها تحته، هي صورتها الناتجة عن الانعكاس. وتكون المسافة بين النقطة الأصلية وسطح الماء مساوية للمسافة بين صورتها وسطح الماء.

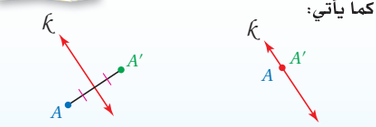
رسم الانعكاسات: تعلّمت أن **الانعكاس** هو تحويل هندسي يقلب الشكل حول مستقيم يسمى **محور الانعكاس**، بحيث يكون بُعد النقطة وبُعد صورتها عن محور الانعكاس متساويين.

مفهوم أساسي
أضف إلى مطويتك

الانعكاس حول مستقيم

الانعكاس حول مستقيم ينقل النقطة إلى صورتها كما يأتي:

- إذا كانت النقطة واقعة على محور الانعكاس، فإن صورتها هي النقطة نفسها.
- إذا كانت النقطة غير واقعة على محور الانعكاس، يكون محور الانعكاس هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطة وصورتها.



A تقع على المستقيم k

A لا تقع على المستقيم k

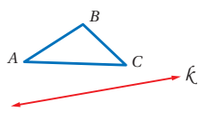
الرموز A',A'',A''' تمثل أسماء للنقاط الناتجة عن تحويل هندسي أو أكثر للنقطة A

لرسم صورة مضلع بالانعكاس حول مستقيم، ارسم صورة كل رأس من رؤوسه، ثم صل بين صور الرؤوس لتكوين صورة المضلع بهذا الانعكاس.

إرشادات للدراسة

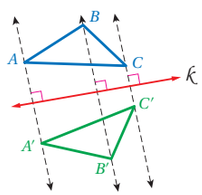
الشكل الأصلي والصورة:
سيكون الشكل الأصلي في هذا الكتاب باللون الأزرق دائمًا، وستكون الصورة باللون الأخضر.

مثال 1
رسم صورة مضلع بالانعكاس حول مستقيم



ارسم صورة $\triangle ABC$ بالانعكاس حول المستقيم k.

الخطوة 1: ارسم مستقيمًا يمرُّ بكل رأس من رؤوس المثلث، ويكون عموديًّا على المستقيم k باستعمال مثلث الرسم.



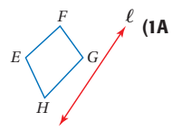
الخطوة 2: قِس المسافة بين النقطة A والمستقيم k باستعمال الفرجار، وعيّن النقطة A' ؛ بحيث يكون المستقيم k العمود المنصف لِـ $\overline{AA'}$.

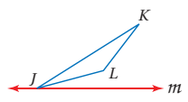
الخطوة 3: كرِّر الخطوة 2 لتعين B' و C'، ثم صِل الرؤوس A', B', C' لتشكل صورة المثلث الناتجة عن الانعكاس.

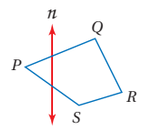
إرشادات للدراسة

تحويل التطابق:
هو تحويل تكون فيه الصورة مطابقة للشكل الأصلي.

تحقق من فهمك

(1A) 

(1B) 

(1C) 

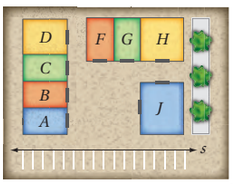
(1A–1C) انظر ملحق الإجابات.

لاحظ أن الانعكاس هو تحويل تطابق، ففي المثال 1، يكون $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

مصادر الدرس 7-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (120, 123)	• تنويع التعليم ص (120, 123)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (16)	• كتاب التمارين ص (16)	• كتاب التمارين ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

مثال 2 من واقع الحياة — اختصار المسافات باستعمال الانعكاس

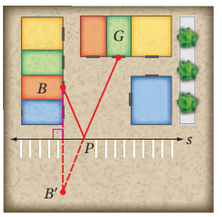


تسوق: اصطحب أحمد صديقه عليًّا في سيارته إلى السوق، حيث يرغب أحمد في الاتجاه إلى المتجر B ؛ لشراء بعض الملابس، بينما يرغب عليٌّ في الاتجاه إلى المتجر G ؛ لشراء حذاءٍ، ففي أي مكان من المواقف المحددة على المستقيم s يوقف أحمد سيارته، بحيث تكون المسافة التي سيقطعانها سيرًا للوصول إلى المتجرين أقل ما يمكن؟

افهم: **المعطيات:** أوقف أحمد سيارته في الموقف P على المستقيم s.
اتجه أحمد إلى المتجر B لشراء بعض الملابس.
واتجه علي إلى المتجر G لشراء حذاء.

المطلوب: حدد الموقف P على المستقيم s، بحيث يكون $BP + PG$ أقل ما يمكن.

خطط: تكون المسافة الكلية من B إلى P ثم من P إلى G أقل ما يمكن، عندما تكون هذه النقاط على استقامةٍ واحدةٍ.

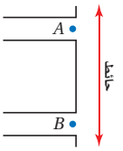


حُلَّ: ارسم $\overline{B'G}$. وعيّن P عند تقاطع المستقيم s مع $\overline{B'G}$.
علمًا بأن B' هي صورة النقطة B الناتجة عن انعكاس حول المستقيم s

تحقق: اختر مواقع أخرى للنقطة P على المستقيم s، وقارن مجموع $BP + PG$ في كل حالة؛ للتحقق من أن الموقع الذي تم تحديده للنقطة P هو الذي يجعل هذا المجموع أقل ما يمكن.

تحقق من فهمك

2) مبيعات تذاكر: يريد فهد أن يختار موقعًا مناسبًا لبيع تذاكر مباراة كرة قدم، عيّن النقطة P على الحائط، بحيث تكون المسافة التي يسيرها شخصٌ ما من النقطة A إلى P ثم إلى النقطة B أقل ما يمكن.



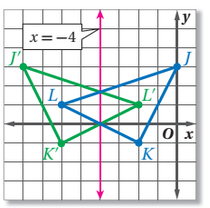
رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي: يمكن أيضًا رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي حول مستقيم أفقيٍّ أو مستقيمٍ رأسيٍّ.

مثال 3 — رسم صورة بالانعكاس حول مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي

مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(0, 3), K(-2, -1), L(-6, 1)$، ثم ارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المُعطى في كلٍّ مما يأتي:

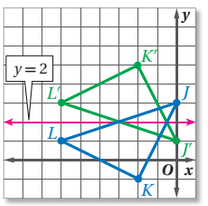
a) $x = -4$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأسٍ، بحيث يكون المستقيم $x = -4$ هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



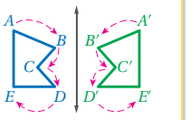
b) $y = 2$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = 2$ هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



إرشادات للدراسة

خصائص الانعكاس: يحافظ الانعكاس على الأبعاد وقياسات الزوايا والاستقامة وترتيب مواقع النقاط، ولكن يعكس الاتجاه.

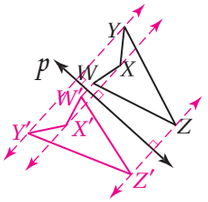


التقويم التكويني

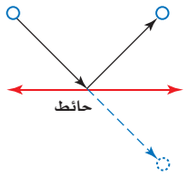
استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

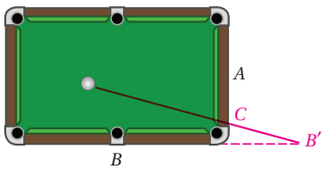
1 ارسم صورة الشكل الرباعي $WXYZ$ بالانعكاس حول المستقيم p.



2 **البلياردو:** عندما ترتطم كرة بحائط، فإنها ترتد عنه وتتحرك على نصف مستقيم يمثل انعكاس مسار حركتها لو أنها اخترقت الحائط كما هو موضح أدناه.



استعمل هذه المعلومات في رسم شكل يبين الموقع الدقيق للنقطة C على حافة طاولة البلياردو A التي يجب أن ترتطم بها الكرة لضمان تدحرجها مباشرة في اتجاه الفتحة B.



رسم الانعكاس في المستوى الإحداثي

الأمثلة 3-5 تبيّن طريقة رسم الانعكاسات في المستوى الإحداثي.

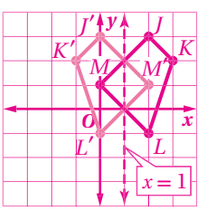
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم مثلثًا على السبورة، ثم اعرض انعكاساته باستعمال القلب الأفقي والرأسي، واطلب إلى الطلاب وصف الانعكاسات الظاهرة على السبورة.

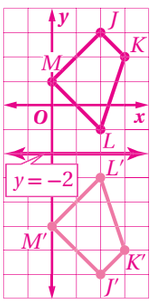
مثال إضافي

3 مثل بيانيًّا الشكل الرباعي $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $J(2, 3), K(3, 2), L(2, -1), M(0, 1)$، وارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المُعطى في كلٍّ مما يأتي:

a) $x = 1$



b) $y = -2$



تحقق من فهمك

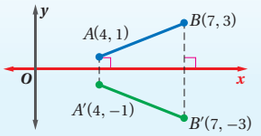
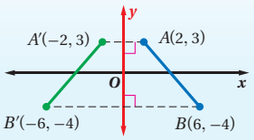
مثِّل بيانيًّا شبه المنحرف $RSTV$، الذي إحداثيات رؤوسه هي: $V(-1,-3), T(4,-1), S(4,1), R(-1,1)$، وارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى في كلٍّ ممّا يأتي: انظر ملحق الإجابات 3A–B

3A $y=-3$ **3B** $x=2$

يمكنك استعمال القاعدة الآتية، عندما يكون محور الانعكاس هو المحور x أو المحور y .

مفهوم أساسي الانعكاس حول المحور x أو المحور y

أضف إلى مطويتك

الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y
التعبير اللفظي: لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور x، اضرب إحداثي y لها في -1	التعبير اللفظي: لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور y، اضرب إحداثي x لها في -1
الرموز: $(x, y) \rightarrow (x, -y)$	الرموز: $(x, y) \rightarrow (-x, y)$
مثال: 	مثال: 

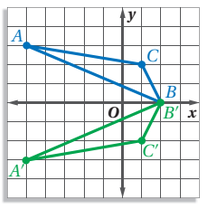
قراءة الرياضيات

التعبير عن الدالة بالصيغة الإحداثية:
يمكن قراءة العبارة: $P(a,b) \rightarrow P'(a,-b)$ على النحو الآتي: تتحول النقطة P التي إحداثيّاها a و b إلى النقطة P شرطة التي إحداثيّاها a وسالب b .

مثال 4 رسم صورة بالانعكاس حول المحور x أو المحور y

مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

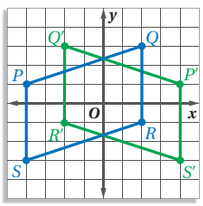
a $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-5,3), B(2,0), C(1,2)$ بالانعكاس حول المحور x .



اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1 .

$(x, y) \rightarrow (x, -y)$
$A(-5,3) \rightarrow A'(-5,-3)$
$B(2,0) \rightarrow B'(2,0)$
$C(1,2) \rightarrow C'(1,-2)$

b متوازي الأضلاع $PQRS$ الذي إحداثيات رؤوسه: $P(-4,1), Q(2,3), R(2,-1), S(-4,-3)$ بالانعكاس حول المحور y .



اضرب الإحداثي x لكل نقطة في -1

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
$P(-4,1) \rightarrow P'(4,1)$
$Q(2,3) \rightarrow Q'(-2,3)$
$R(2,-1) \rightarrow R'(-2,-1)$
$S(-4,-3) \rightarrow S'(4,-3)$

إرشادات للدراسة

النقاط الثابتة:
تسمى النقطة B في المثال 4a نقطةً ثابتةً؛ لأنها اقترنت مع نفسها، وأن إحداثييّها هما نفس إحداثيَّي صورتها B′ بالانعكاس، فالنقاط الواقعة على محور الانعكاس هي فقط التي تبقى ثابتةً تحت تأثير الانعكاس.

تحقق من فهمك

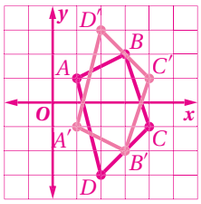
4A المستطيل الذي إحداثيات رؤوسه: $E(-4,-1), F(2,2), G(3,0), H(-3,-3)$ بالانعكاس حول المحور x.

4B $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3,2), K(2,-2), L(4,-5)$ بالانعكاس حول المحور y .

مثال إضافي

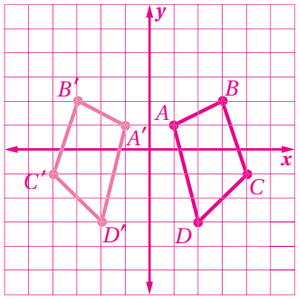
4 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الانعكاس المحدد في كلٍّ مما يأتي:

a) الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(1,1), B(3,2), C(4,-1), D(2,-3)$ بالانعكاس حول المحور x .



$A(1,1) \longrightarrow A'(1,-1)$,
$B(3,2) \longrightarrow B'(3,-2)$,
$C(4,-1) \longrightarrow C'(4,1)$,
$D(2,-3) \longrightarrow D'(2,3)$

b) الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته بالانعكاس حول المحور y .



$A(1,1) \longrightarrow A'(-1,1)$,
$B(3,2) \longrightarrow B'(-3,2)$,
$C(4,-1) \longrightarrow C'(-4,-1)$,
$D(2,-3) \longrightarrow D'(-2,-3)$

تنويع التعليم

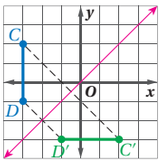
ضمن فوق

المتعلِّمون الطبيعيون: دع الطلاب يناقشوا أمثلةً على الانعكاس من الطبيعة والأشياء التي يستعملونها يوميًّا، وأعطهم الفرصة ليبيِّنوا مواقع محاور الانعكاس فيها، بحيث تشمل أشياء من الطبيعة مثل أوراق الأشجار والأزهار والفواكه والخضراوات والحيوانات والبيض وغيرها، وتشمل الأشياء التي يستعملونها يوميًّا، مثل أقلام الرصاص والورق والسيارات والأقراص المدمجة والملابس وغيرها.

مراجعة المفردات

المستقيمات المتعامدة: يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين، إذا وفقط إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -1.
مثال: المستقيمات الأفقية والرأسية تكون متعامدة دائمًا.

ويمكن أيضًا أن تعكس شكلًا حول المستقيم $y = x$، ففي المستوى الإحداثي المجاور، ارسم عمودًا من النقطة C على المستقيم $y = x$، وحيث إن ميل المستقيم $y = x$ يساوي 1، فإن ميل العمود الذي رسمته يساوي -1، لاحظ أنك تحركت من النقطة $C(-3, 2)$، بمقدار 2.5 وحدة إلى اليمين و 2.5 وحدة إلى أسفل فوصلت إلى نقطة تقاطع العمود الذي رسمته مع المستقيم $y = x$.



ومن هذه النقطة على $y = x$، تحرك 2.5 وحدة إلى اليمين و 2.5 وحدة إلى أسفل؛ لتعيّن النقطة $C'(2, -3)$ التي هي صورة النقطة C بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.
وبطريقة مماثلةٍ نجد أن صورة $D(-3, -1)$ هي $D'(-1, -3)$.
وبمقارنة إحداثيات هاتين النقطتين بإحداثيات صورتَيهِمَا، يمكن الوصول إلى القاعدة الآتية للانعكاس حول المستقيم $y = x$.

مفهوم أساسي

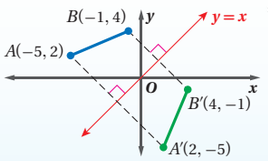
أضف إلى مطويتك

الانعكاس حول المستقيم $y = x$

التعبير اللفظي: لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المستقيم $y = x$، بدّل موضعَي الإحداثيين x و y.

الرموز: $(x, y) \rightarrow (y, x)$

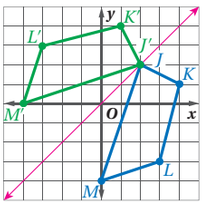
مثال:



مثال 5

رسم صورة شكل بالانعكاس حول المستقيم $y = x$

مثّل بيانيًّا الشكل الرباعي $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $J(2, 2), K(4, 1), L(3, -3), M(0, -4)$، ثم ارسم صورته $J'K'L'M'$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



بدّل الإحداثيين x و y لكل الرؤوس.

(x, y)	$\rightarrow$	(y, x)
$J(2, 2)$	$\rightarrow$	$J'(2, 2)$
$K(4, 1)$	$\rightarrow$	$K'(1, 4)$
$L(3, -3)$	$\rightarrow$	$L'(-3, 3)$
$M(0, -4)$	$\rightarrow$	$M'(-4, 0)$

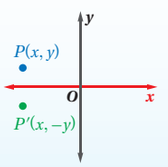
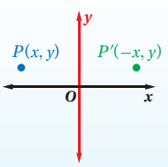
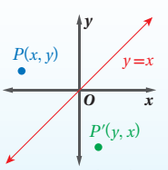
تحقق من فهمك

5) مثّل بيانيًّا $\triangle BCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $B(-3, 3), C(1, 4), D(-2, -4)$، ثم ارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. انظر الهامش.

ملخص المفهوم

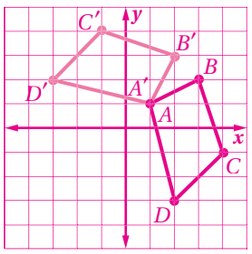
أضف إلى مطويتك

الانعكاس في المستوى الإحداثي

الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y	الانعكاس حول المستقيم $y = x$
		
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$

مثال إضافي

5 مثّل بيانيًّا الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 1), B(3, 2), C(4, -1), D(2, -3)$، ثم ارسم صورته $A'B'C'D'$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



$A(1, 1) \rightarrow A'(1, 1)$,
$B(3, 2) \rightarrow B'(2, 3)$,
$C(4, -1) \rightarrow C'(-1, 4)$,
$D(2, -3) \rightarrow D'(-3, 2)$

المحتوى الرياضي

أخطاء شائعة: من الأخطاء الشائعة، ضرب الإحداثي x في -1 عند الانعكاس حول المحور x، وضرب الإحداثي y في -1 عند الانعكاس حول المحور y. ذكّر الطلاب بأنه عند الانعكاس حول المحور x يبقى الإحداثي x للنقطة كما هو ويتغير الإحداثي y، وعند الانعكاس حول المحور y، يبقى الإحداثي y كما هو ويتغير الإحداثي x للنقطة. وبيّن لهم أن الانعكاس حول المحور x يقلب الشكل إلى أعلى أو إلى أسفل، في حين أن الانعكاس حول المحور y يقلب الشكل إلى اليمين أو إلى اليسار.

تنبيه!

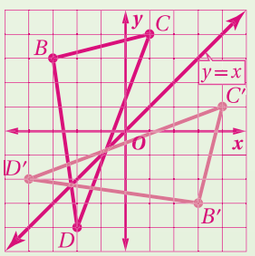
الرؤوس: عند رسم صورة شكل بالانعكاس، يجب تتبع الرؤوس وصورها بعناية، ويكون هذا الأمر في غاية الأهمية للأشكال المتماثلة كالمربع، حيث يجب تسمية الرؤوس وصورها؛ لتحديد تحويلٍ هندسيٍّ وحيدٍ.

إرشادات للمعلم الجديد

الانعكاسات: تستعمل في الكتب المختلفة مفردات مختلفة مثل انعكاس في محور، وانعكاس حول محور، وانعكاس عبر محور، وكل هذه المفردات تعني الأمر نفسه.

إجابة (تحقق من فهمك)

5)



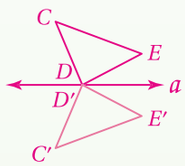
3 التدريب

التقويم التكويني

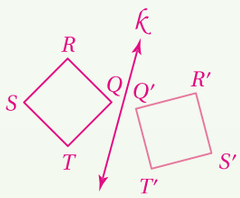
استعمل التمارين 9–1؛ للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

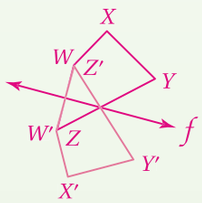
1)



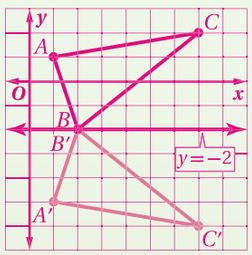
2)



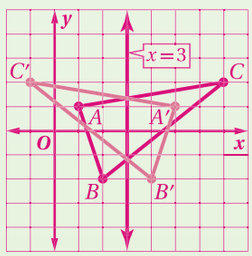
3)



5)



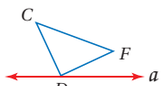
6)



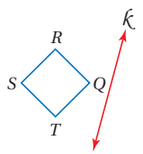
تأكـد

المثال 1 ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى: **3–1) انظر الهامش.**

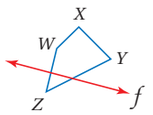
1)



2)



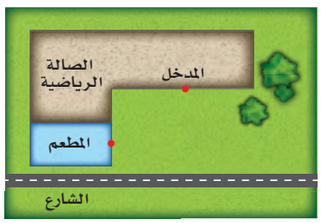
3)



المثال 2

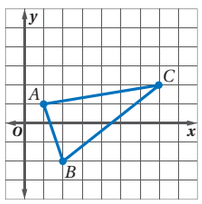
4) مباريات: ينتظر ماجد في المطعم صديقًا سيأتيه بتذكرة لحضور مباراة في الصالة الرياضية. في أي موقع على الشارع، يجب أن يُوقِفَ صديقه سيارته، حتى تكون المسافة التي يسيرها ماجد من المطعم إلى السيارة ثم إلى مدخل الصالة الرياضية أقل ما يمكن؟ ارسم شكلًا يوضح إجابتك.

انظر ملحق الإجابات



المثال 3

مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle ABC$ المبيّن جانبًا بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ من السؤالين 6، 5. **6–5) انظر الهامش .**



5) $y = -2$ **6)** $x = 3$

المثالان 5, 4

مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

7) $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $X(0, 4), Y(-3, 4), Z(-4, -1)$ بالانعكاس حول المحور y .

8) $\square QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-1, 4), R(4, 4), S(3, 1), T(-2, 1)$ بالانعكاس حول المحور x .

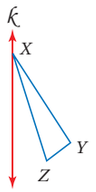
9) الشكل الرباعي الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-3, 1), K(-1, 3), L(1, 3), M(-3, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

9–7) انظر ملحق الإجابات

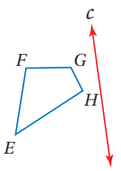
تدرب وحل المسائل

المثال 1 ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى. **12–10) انظر ملحق الإجابات**

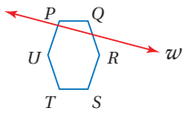
10)



11)



12)

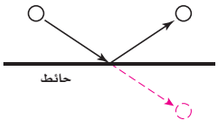


تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	23–10 ، 38–36 ، 48–41
ضمن ضمن المتوسط	37–11 فردي ، 38 ، 41 ، 42 ، 44–48
فوق فوق المتوسط	48–24

المثال 2

13) كرة قدم: عندما ترتطم كرة بحائطٍ فإنها ترتدُّ عنه وتتحرك في مسار نصف مستقيم يمثل انعكاس مسار حركتها لو أنها اخترقت الحائط كما هو موضح جانبًا.

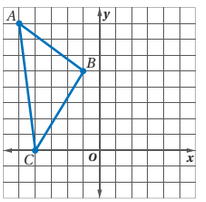


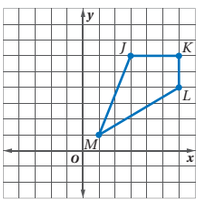
استعمل هذه المعلومات في رسم شكل يبين الموقع الدقيق للنقطة P على الحائط التي يجب أن يصوب سليمان إليها الكرة إذا كان يشارك في مباراة كرة قدم في ملعبٍ داخليٍّ، ويريد أن يمرّر الكرة إلى صديقه يوسف عند النقطة C، متجنبًا لاعبًا من الفريق الخصم عند النقطة B، ولذلك قرر أن يركل الكرة من النقطة A إلى نقطة على الحائط الجانبي، بحيث ترتد عنه نحو النقطة C. انظر ملحق الإجابات

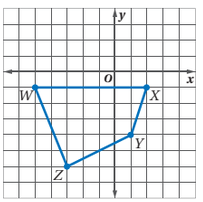


المثال 3

مثِّل صورة كل شكلٍ مما يأتي بيانيًّا بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى. 14–19) انظر ملحق الإجابات







14) $\triangle ABC, y = 3$ **15)** $JKLM, x = 1$ **16)** $WXYZ, y = -4$

17) $\triangle ABC, x = -1$ **18)** $JKLM, y = 4$ **19)** $WXYZ; x = -2$

المثالان 4, 5

مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد. 20–23) انظر ملحق الإجابات

20) المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-5, 2), B(1, 2), C(1, -1), D(-5, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = -2$.

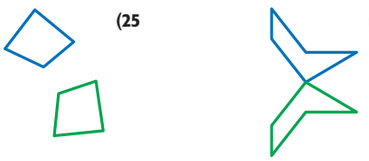
21) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-4, 6), K(0, 6), L(0, 2), M(-4, 2)$ بالانعكاس حول المحور y.

22) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-3, 2), G(-4, -1), H(-6, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

23) $\square WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(2, 3), X(7, 3), Y(6, -1), Z(1, -1)$ بالانعكاس حول المحور x.

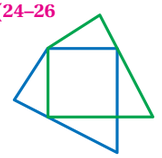
يبيِّن كلٌّ من الأشكال الآتية مضلعًا وصورته بالانعكاس حول مستقيمٍ ما، ارسم محور الانعكاس في كلٍّ منها. 24–26) انظر الهامش

24)

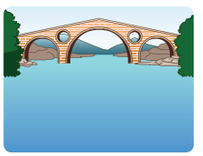


25)

26)



27) تصوير: ارسم صورة الجسر الموضح في الصورة المجاورة بالانعكاس في الماء. انظر إجابات الطلاب



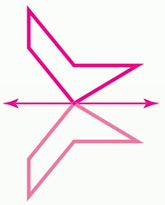


الربط مع الحياة

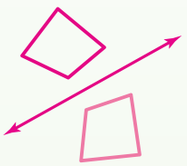
يلتقط المصورون الصور لأغراض متعددة، مثل الصحافة أو لأغراض علمية، ويتطلب العمل في بعض مجالات التصوير مثل التصوير الصحفي أو التصوير العلمي تدريبًا خاصًا.

إجابات:

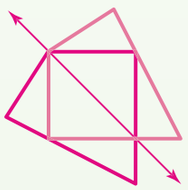
24)



25)



26)



تنويع التعليم

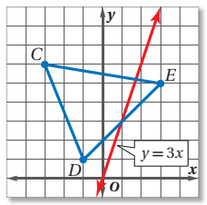
ضمن فوق

توسّع: تلعب الانعكاسات الهندسية دورًا مهمًّا في رياضاتٍ عدةٍ مثل: الجولف والبلياردو والتنس وتنس الطاولة والهوكي وكرة القدم في الملاعب الداخلية المغلقة. ارجع إلى السؤال 13؛ لتناقش كيف يمكن استعمال الانعكاس؛ لإنشاء ركلة كرة من نقطة إلى نقطة أخرى على الحائط الجانبي في ملعب كرة قدم داخلي، بحيث ترتد إلى نقطة داخل الملعب. اطلب إلى الطلاب أن يصمِّموا ملعب جولف مصغرًا ذا 9 حفر. يجب أن يتضمن النموذج شكل المنطقة الخضراء لكل حفرةٍ، والنقطة التي تبدأ منها ضرب كرة الجولف وموقع الحفرة. على الطلاب أن يشرحوا كيف يمكن أن يُنشئوا الضربات المحكمة لكل حفرةٍ للنموذج الذي أعدُّوه، أو النماذج التي أعدها زملاؤهم.

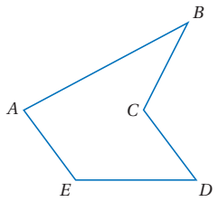
جبر: مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = 2x - 3$ وصورته بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتب معادلة المستقيم الناتج عن الانعكاس **30–28)** انظر ملحق الإجابات

28) المحور x **29)** المحور y **30)** المستقيم $y = x$

31) مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle CDE$ المبين أدناه بالانعكاس حول المستقيم $y = 3x$. انظر الهامش.

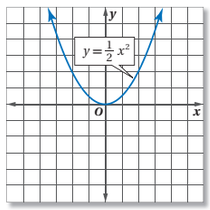


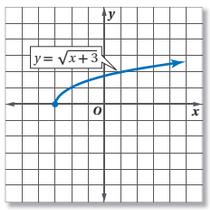
32) غيِّر موقع الرأس C ليصبح المضلع $ABCDE$ محدبًا، وتبقى أطوال أضلاعه كما هي دون تغيير. انظر الهامش.

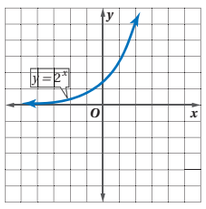


35–33) انظر الهامش. **جبر:** مثِّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الدوال الآتية بالانعكاس حول المحور المحدد، ثم اكتب معادلة الصورة الناتجة عن الانعكاس.

33) المحور x **34)** المحور y **35)** المحور x







36) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي الانعكاس حول نقطة الأصل. **a, b)** انظر ملحق الإجابات.

a) هندسيًّا: ارسم المثلث $\triangle ABC$ في المستوى الإحداثي، بحيث تكون إحداثيات رؤوسه أعدادًا صحيحة موجبة.

b) بيانيًّا: عيِّن النقاط A', B', C' الناتجة عن الانعكاس، بحيث تكون النقطة الأصلية وصورتها ونقطة الأصل على استقامةٍ واحدةٍ، وتكون النقطة الأصلية وصورتها على البعد نفسه من نقطة الأصل.

c) جدوليًّا: انقل الجدول الآتي وأكمله. **الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة.**

	$\triangle ABC$		$\triangle A'B'C'$	
الإحداثيات	A	$(2, 4)$	A'	$(-2, -4)$
	B	$(4, 5)$	B'	$(-4, -5)$
	C	$(3, 1)$	C'	$(-3, -1)$

d) لفظيًّا: ضع تخمينًا حول العلاقة بين إحداثيات الرؤوس المتناظرة لشكلٍ وصورته الناتجة عن انعكاسه حول نقطة الأصل. انظر ملحق الإجابات.

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** يجد جميل وإبراهيم إحداثيات صورة النقطة $C(2, 3)$ الناتجة عن انعكاس حول المحور x، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضِّح إجابتك. انظر ملحق الإجابات.

جميل	إبراهيم
$C'(2, -3)$	$C'(-2, 3)$

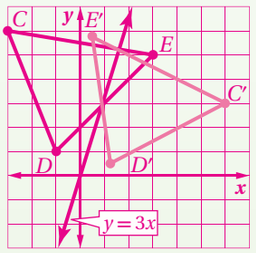
تمثيلات متعددة: في السؤال 36، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية والتمثيلات البيانية والجدول والوصف اللفظي؛ لاستقصاء الانعكاس في نقطة الأصل.

تنبيه!

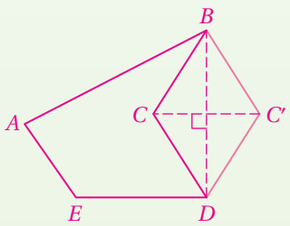
اكتشف الخطأ: في السؤال 37، يجب أن يدرك الطلاب أن إبراهيم قد وقع في خطأ شائع، وهو تغيير إشارة الإحداثي x، عند إجراء انعكاسٍ لشكلٍ ما حول المحور x. ذكر الطلاب بأن هذا خطأ يقع فيه كثيرون. لقد كتب جميل الإحداثيات الصحيحة للنقطة C'.

إجابات:

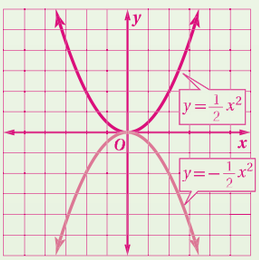
31)



32)



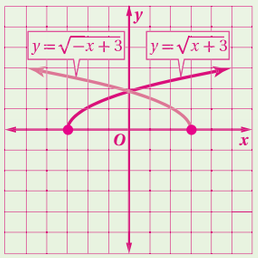
33)



لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور x، اضرب إحداثي y لها في -1 (تتغير إشارة y، وتبقى إشارة x كما هي).

معادلة الصورة الناتجة هي:
$-y = \frac{1}{2}x^2$ أو $y = -\frac{1}{2}x^2$

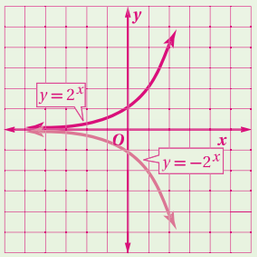
34)



لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور y، اضرب إحداثي x لها في -1 (تتغير إشارة x، وتبقى إشارة y كما هي).

معادلة الصورة الناتجة هي: $y = \sqrt{-x+3}$

35)



لتعيين صورة نقطة بالانعكاس حول المحور x، اضرب إحداثي y لها في -1 (تتغير إشارة y، وتبقى إشارة x كما هي)

معادلة الصورة الناتجة هي:
$-y = 2^x$ أو $y = -2^x$

38) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا في المستوى الإحداثي، بحيث تكون صورته الناتجة عن انعكاس حول المحور x منطبقةً عليه تمامًا. انظر الهامش

39) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي، يكون اتجاه صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم $y = 1$ مماثلًا لاتجاه الشكل نفسه. وضِّح الشروط التي يجب توافرها لتحقيق هذا الأمر. انظر ملحق الإجابات

40) **تحدٍّ:** إذا كانت صورة النقطة $A(4, 3)$ بعد الانعكاس حول مستقيمٍ معينٍ هي $A'(-1, 0)$، فأوجد معادلة محور الانعكاس. وضح إجابتك.

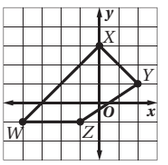
41) **تبرير:** هل تقع صورة نقطة بالانعكاس حول مستقيمٍ ما في الجهة الثانية من هذا المستقيم دائمًا أم أحيانًا أم لا تقع فيها أبدًا؟

42) **اكتب:** تقع النقاط P, Q, R على استقامةٍ واحدةٍ، حيث Q واقعة بين P و R. باستعمال الهندسة الإحداثية، صف خطةً لإثبات أن انعكاس هذه النقاط حول مستقيم يحافظ على الاستقامة وترتيب مواقع النقاط.

42–40) انظر الهوامش

تدريب على اختبار

43) **إجابة قصيرة:** إذا كانت صورة الشكل الرباعي $WXYZ$ الناتجة عن انعكاسه حول المحور y هي $W'X'Y'Z'$، فما إحداثيات X'؟ **(0, 3)**



44) إحداثيات النقطتين A, B في المستوى الإحداثي هي $(3, 3), (-2, 4)$ على الترتيب، احسب AB. **B**

A $(1, 7)$

B $\sqrt{26}$

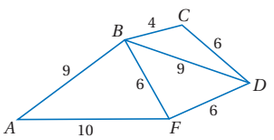
C $(5, -1)$

D $\sqrt{50}$

مراجعة تراكمية

45) **هندسة إحداثية:** في $\triangle LMN$، $\overline{PR}$ تقسِّم الضلعين MN , NL إلى قطع مستقيمة متناظرة أطولها متناسبة، إذا كانت $\frac{LP}{PN} = \frac{2}{1}$ وكانت $RN = 3$، فأوجد MR. (الدرس 6-3) **$MR = 6$**

استعمل الشكل المجاور لتكتب متباينةً تصف العلاقة بين قياسَي الزاويتين أو طولَي القطعتين المستقيمتين في كلٍّ مما يأتي. (الدرس 6-4)



46) $m\angle BDC, m\angle FDB$ **$m\angle BDC < m\angle FDB$**

47) $m\angle FBA, m\angle DBF$ **$m\angle FBA > m\angle DBF$**

استعد للدرس اللاحق

48) إحداثيات طرفَيِ $\overline{AB}$ هما $B(3, -1)$, $A(5, 4)$، تحركت كلٌّ من هاتين النقطتين 3 وحداتٍ إلى اليمين و5 وحداتٍ إلى أسفل، فكانت مواقعهما الجديدة A' , B' على الترتيب.

a) اكتب قاعدة هذا التحويل الهندسي. **$(x, y) \longrightarrow (x + 3, y - 5)$**

b) أوجد إحداثيات A' , B'. **$A'(8, -1), B'(6, -6)$**

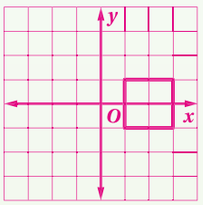
c) أوجد طول كلٍّ من $\overline{AB}, \overline{A'B'}$. **$\sqrt{29}, \sqrt{29}$**

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية، وأن يستعملوا ورق مربعات لرسم أشكال وصورها بالانعكاس. يمكن أن يرسم أحد الطلاب مثلثًا ومستقيمًا ويسميهما، ويقوم الطالب الآخر برسم صورة المثلث بالانعكاس حول المستقيم. سيسلم الطلاب أوراقهم عند مغادرة غرفة الصف.

إجابات:

38) إجابة ممكنة:



40) ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة وصورتها $\frac{3}{5}$، وباستعمال قانون نقطة المنتصف، نجد أن نقطة منتصف القطعة الواصلة بين النقطة وصورتها $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. وباستعمال صيغة النقطة والميل لمعادلة المستقيم، نجد أن معادلة خط الانعكاس $y = -\frac{5}{3}x + 4$. (ميل العمود المنصف يساوي $-\frac{5}{3}$ ؛ لأنه يساوي سالب مقلوب الميل $\frac{3}{5}$)

41) أحيانًا؛ إذا وقعت النقطة على محور الانعكاس، فإن صورتها تبقى في الموقع نفسه.

42) أنشئ النقاط P, Q, R على استقامة واحدة، بحيث تكون Q بين P و R. ارسم المستقيم ℓ ، ثم أنشئ أعمدة من كلٍّ من P, Q, R على المستقيم ℓ، واستعمل صيغة الميل؛ لتبين أن ميل $P'Q'$ يساوي ميل $P'R'$، فتكون النقاط P', Q', R' على استقامةٍ واحدةٍ، ولأن: $PQ = P'Q', QR = Q'R', PR = P'R'$ وحيث إن: $PR = PQ + QR$ ، إذن: $P'R' = P'Q' + Q'R'$، مما يعني أن Q' تقع بين P', R'.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم _____ التاريخ _____

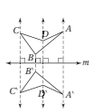
7-1 تدريبات إعادة التعليم

الانعكاس

رسم الانعكاسات:

تعلمت أن الانعكاس تحويل هندسي يمثل قلب الشكل حول مستقيم يسمى **محور الانعكاس**، بحيث يكون بُعد النقطة وبُعد صورتها عن محور الانعكاس متساويين، وينقل الانعكاس النقطة إلى صورتها، بحيث إذا كانت النقطة واقعةً على محور الانعكاس، تكون صورتها هي النقطة نفسها، وإذا كانت النقطة غير واقعةٍ على محور الانعكاس، يكون محور الانعكاس العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي تصل النقطة بصورتها.

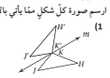
مثال ارسم صورة الشكل الرباعي $ABCD$ بالانعكاس حول المستقيم m.



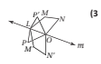
ارسم مستقيمًا من كلّ رأس، بحيث يكون عمودًا على المستقيم m، وعيّن النقاط A', B', C', D' في الجهة الثانية من المستقيم m، على أن يكون المستقيم m على بُعد واحدٍ من كلّ رأس وصورته. صِل الرؤوس A', B', C', D'، فيكون الشكل $A'B'C'D'$ هو صورة الشكل $ABCD$ بالانعكاس حول المستقيم m.

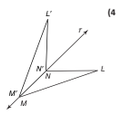
تمارين

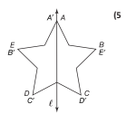
ارسم صورة كلّ شكلٍ ممّا يأتي بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى في كلٍّ ممّا يأتي:

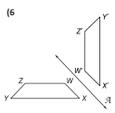
1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) دون

الاسم _____ التاريخ _____

7-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الانعكاس

رسم الانعكاس في المستوى الاحداثي:

يمكنك أيضًا رسم الصورة الناتجة عن الانعكاس في المستوى الإحداثي.

- لإيجاد إحداثيَّي صورة نقطةٍ بالانعكاس حول المحور x، اضرب الإحداثي y لها في (-1).
$A(x, y) \rightarrow A'(x, -y)$
- لإيجاد إحداثيَّي صورة نقطةٍ بالانعكاس حول المحور y، اضرب الإحداثي x لها في (-1).
$M(x, y) \rightarrow M'(-x, y)$
- لإيجاد إحداثيَّي صورة نقطةٍ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$، بدّل الإحداثيين y، x.
$L(x, y) \rightarrow L'(y, x)$

مثال مثّل بيانيًّا الشكل الرباعي $DEFG$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $D(-2, 3), E(4, 4), F(3, -2), G(-3, -1)$، ثم ارسم صورته بالانعكاس حول المحور x.

لإيجاد الصورة بالانعكاس حول المحور x، استعمل الإحداثيّ x نفسه، واضرب الإحداثيّ y في (-1) وبالرموز $(a, b) \rightarrow (a, -b)$. الإحداثيات الجديدة هي: $D'(-2, -3), E'(4, -4), F'(3, 2), G'(-3, 1)$
والصورة هي الشكل الرباعي $D'E'F'G'$.





تمارين

مثّل بيانيًّا صورة ΔFGH المبيّن جانبًا بالانعكاس حول كلٍّ من المستقيمين الآتيين:

1) $x = -1$ 2) $y = 1$



مثّل بيانيًّا صورة الشكل الرباعي $ABCD$ المبيّن جانبًا بالانعكاس حول كلٍّ من المستقيمين الآتيين:

3) $y = 0$ 4) $y = x$

مثّل بيانيًّا كلًّا من الشكلين الآتيين وصورتيهما بالانعكاس المحدد في كلٍّ ممّا يأتي:

5) ΔDEF الذي إحداثيات رؤوسه: $D(-2, -1), E(-1, 3), F(3, -1)$ بالانعكاس حول المحور x.



6) $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(1, 4), B(3, 2), C(1, -2), D(-3, 1)$، بالانعكاس حول المحور y.



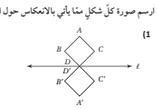
تدريبات المهارات (8) دون ضمن فوق

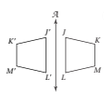
الاسم _____ التاريخ _____

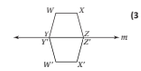
7-1 تدريبات المهارات

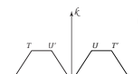
الانعكاس

ارسم صورة كلّ شكلٍ ممّا يأتي بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى:

1) 

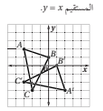
2) 

3) 

4) 

هندسة إحداثية: مثّل بيانيًّا كلّ شكلٍ وصورته بالانعكاس المذكور.

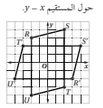
5) ΔABC الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-3, 2), B(0, 1), C(-2, -3)$، بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



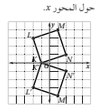
6) شبه المنحرف $DEFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(0, -3), E(1, 3), F(3, 3), G(4, -3)$، بالانعكاس حول المحور y.



7) متوازي الأضلاع $RSTU$ الذي إحداثيات رؤوسه: $R(-2, 3), S(2, 4), T(2, -3), U(-2, -4)$، بالانعكاس حول المستقيم $x = -y$.



8) المربع $KLMN$ الذي إحداثيات رؤوسه: $K(-1, 0), L(-2, 3), M(1, 4), N(2, 1)$، بالانعكاس حول المحور x.



تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-1 تدريبات حلّ المسألة

الانعكاس

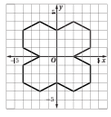
1) انعكاس، بدأ خالد رسم نجمةٍ، أكمل عمل خالدٍ برسم صورة نصفها المبين في الشكل بالانعكاس حول المستقيم m.



2) أشكال، قصّ جاسر الشكل الآتي من قطعة من الورق المقوّى، ووضعه على طاولةٍ، وذهب لاحضار الصمغ، وأثناء ذلك قلب صديقه مازن الشكل دون أن يخبر جاسرًا بذلك، ولم يلاحظ جاسر عند عودته أي تغيّرٍ في الشكل أو مكانه. ارسم المستقيم الذي قلب مازن الشكل حوله.



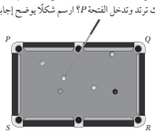
3) شعار، تريد سعاد تصميم شعار لجمعية خيرية نسائية، فقامت بتصميم شكلٍ في الربع الأول من المستوى الإحداثي كما في الشكل أدناه، ثم قامت بعمل انعكاس له حول المحور x، وأكملت تصميم الشعار بعمل انعكاس للشكل الأصلي وصورته حول المحور y. أكمل رسم الشعار الذي صمّمته سعاد.



4) تصميم داخلي، طلب مهند من مهندس ديكور طريقةً جديدةً لترتيب أثاث غرفة نومه، وقد وضع المهندس المخطّط المبيّن في الشكل أدناه، ولكن لم يُرْقِ هذا الوضع لمهند، فقرر أن يعكس المخطّط حول مستقيم رأسيّ يمرّ بمركز الغرفة. ارسم صورة المخطّط بعد إجراء الانعكاس.



5) بلياردو، يلعب أحمد لعبة البلياردو، ويستعمل حقيقة أن الكرة عند ضربها من منتصفها ترتد بالزاوية نفسها إلى جانبٍ من جوانب الطاولة. افترض أن أحمد يرغب في ضرب الكرة B لتدخل في الفتحة P من خلال ارتدادها على جانب الطاولة $\overline{SR}$، كما في الشكل المجاور، فعند أي نقطةٍ من جانب الطاولة $\overline{SR}$ يجب على أحمد ضرب الكرة، بحيث ترتد وتدخل الفتحة P؟ ارسم شكلًا يوضح إجابتك.



بما أن صورة النقطة P حول محور الانعكاس $\overline{SR}$ هي النقطة P'، إذن يجب على أحمد ضرب الكرة عند النقطة T' التي تمثّل نقطة تقاطع $\overline{SR}$ و $\overline{BP'}$، لترتد وتدخل الفتحة P.





مصادر الدرس 1 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)

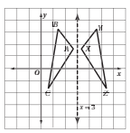
ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-1 التدريبات الإثرائيّة

الانعكاس في المستوى الإحداثيّ:

انظر إلى الشكل المجاور، والذي ينقل المثلث ABC إلى ΔXYZ بالتحويل الهندسيّ الذي قاعدته $(x,y)\rightarrow(-x+6,y)$، ولاحظ أن صورة ΔXYZ بالانعكاس حول ΔABC المستقيم $x=3$.



استند من الشكل المجاور في الإجابة عن السؤالين **(1, 2)**:

1) أثبت أن المستقيم الرأسيّ $x=3$، هو العمود المنصّف للقطعة المستقيمة التي طرفاها (x,y) و $(-x+6,y)$ (إرشاد: استعمل قانون نقطة المنتصف).

نقطة منتصف القطعة التي تصل النقطة (x,y) بصورتها هي $(-x+6,y)$

$\left(\frac{x+(-x+6)}{2},\frac{y+y}{2}\right)=(3,y)$، وهي تقع على المستقيم $x=3$.

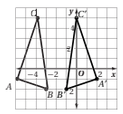
بما أن القطعة التي تصل (x,y) بـ $(-x+6,y)$ قطعة أفقية؛ إذن فهي تعامد المستقيم الرأسي، وهذا يعني أن المستقيم $x=3$ هو العمود المنصف للقطعة التي تصل (x,y) بصورتها.

2) إن كلّ تحويل هندسيّ قاعدته $(x,y)\rightarrow(-x+2h,y)$ يمثّل انعكاسًا حول المستقيم الرأسيّ الذي معادلته $x=h$ ما نوع التحويل الهندسيّ الذي قاعدته $(x,y)\rightarrow(x,-y+2k)$؟

انعكاس حول المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=k$.

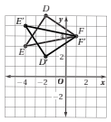
ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالتحويل الهندسيّ المعطى، وهل هو انعكاس؟ وإذا كان كذلك، فما خطّ الانعكاس؟

3) $(x,y)\rightarrow(-x-4,y)$



نعم؛ $x=-2$.

4) $(x,y)\rightarrow(x,-y+8)$



نعم؛ $y=4$.

كتاب التمارين (16)

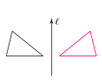
دون ضمن فوق

الفصل السابع: التحويلات الهندسية والتماثل

7 - 1 الانعكاس

ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم ℓ.

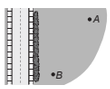
1)



2)

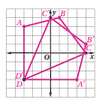


3) يمثل الشكل المجاور وحدتي إنارة A, B في إحدى الحدائق، ويُراد إضافة وحدة إنارة جديدة C على جانب الشارع المقابل للحديقة، فأين يمكن وضعها، بحيث تكون المسافة $AC+BC$ أقل ما يمكن؟

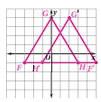


هندسة إحداثية: مثّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد:

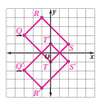
4) الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-3,3)$، $B(1,4)$، $C(4,0)$، $D(-3,-3)$ انعكاس حول المستقيم $y=x$.



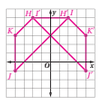
5) ΔFGH الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-3,-1)$، $G(0,4)$، $H(3,-1)$ انعكاس حول المستقيم $x=1$.



6) المستطيل $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $T(0,-1)$، $Q(-3,2)$، $R(-1,4)$، $S(2,1)$ انعكاس حول المحور x.



7) شبه المنحرف $HIJK$ الذي إحداثيات رؤوسه: $H(-2,5)$، $I(2,5)$، $J(-4,-1)$، $K(-4,3)$ انعكاس حول المحور y.



1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-2

رسم الصورة الناتجة عن انعكاس حول مستقيم.

الدرس 7-2

رسم الصورة الناتجة عن الإزاحة، ورسم الصورة الناتجة عن الإزاحة في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس 7-2

رسم الصورة الناتجة عن دوران شكلٍ مستعملًا المنقلة، ورسم الصورة الناتجة عن دوران شكلٍ في المستوى الإحداثي.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- لماذا تستعمل الفرق العسكرية عادة الإزاحة في تحركها وليس الدوران؟ إجابة ممكنة: استعمال الدوران يحول دون مواجهتها جمهور المتفرجين.
- ما أنواع الخطوات التي ينتقل بها أعضاء تلك الفرق؟ إجابة ممكنة: إلى الجانبين وإلى الخلف وإلى الأمام.

7-2 الإزاحة (الانسحاب)
Translation

فيما سبق:
درستُ الانسحاب بوصفه تحويلًا هندسيًا.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أرسم الصور الناتجة عن الإزاحة.
- أرسم الصور الناتجة عن الإزاحة في المستوى الإحداثي.

المفردات:
الانسحاب
translation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



تُفتتح بعض الاحتفالات الوطنية بعروض عسكرية تزيدها بهجة وبهاءً. ومعظم حركات أعضاء تلك الفرق العسكرية تمثِّل ما يُعرف في الهندسة بالإزاحة أو الانسحاب.

رسم الإزاحة (الانسحاب): تعلمت سابقًا أن **الانسحاب** هو تحويل هندسي ينقل الشكل من موقع إلى آخر من دون تدويره. حيث يتم نقل جميع نقاط الشكل المسافة نفسها وفي الإتجاه نفسه. ويمكن التعبير عن الإزاحة (الانسحاب) لكل نقطة من الشكل بقطعة مستقيمة طولها يساوي $\overline{AA'}$ حيث إن A' هي صورة النقطة A الناتجة عن الإزاحة (الانسحاب).

مفهوم أساسي — الإزاحة (الانسحاب)

أضف إلى مطويتك



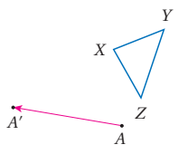
تنقل الإزاحة (الانسحاب) كل نقطة إلى صورتها مسافةً محدّدةً وفي اتجاه محدّد (اتجاه الإزاحة). فالإزاحة التي تنقل النقطة A إلى صورتها A'، تنقل نقاط الشكل جميعها أيضًا بحيث إن:

- مقدار الإزاحة يساوي طول القطعة المستقيمة التي تصل أي نقطة بصورتها يساوي طول $\overline{AA'}$.
- القطعة المستقيمة التي تصل أي نقطة بصورتها توازي $\overline{AA'}$.

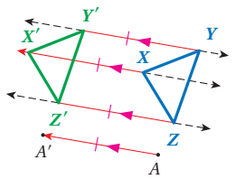
النقطة A' هي صورة النقطة A بالإزاحة.

مثال 1 — رسم الإزاحة في المستوى

ارسم صورة $\triangle XYZ$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A'.



الخطوة 1: باستعمال المسطرة ومثلث الرسم، ارسم من كل رأسٍ من رؤوس المثلث XYZ مستقيمًا يوازي $\overline{AA'}$.



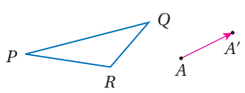
الخطوة 2: قِسْ طول $\overline{AA'}$، ثم عيّن على المستقيم المار بالرأس X النقطة X'، التي تبعد عن X في الاتجاه من A إلى A' مسافةً تساوي طول $\overline{AA'}$.

الخطوة 3: كرِّر الخطوة 2 لتعيّن Y' , Z'، ثم صِلِ الرؤوس X', Y', Z' لتشكل المثلث $X'Y'Z'$ الناتج عن الإزاحة.

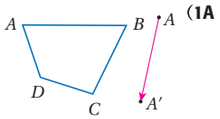
تحقق من فهمك

(1A) انظر ملحق الإجابات

(1B)



(1A)



مصادر الدرس 7-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (127)	• تنويع التعليم ص (131, 127)	• تنويع التعليم ص (131)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (17)	• كتاب التمارين ص (17)	• كتاب التمارين ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

رسم الإزاحة في المستوى الإحداثي: يمكن رسم الإزاحات في المستوى الإحداثي، إذا علمنا مقدار الإزاحة واتجاهها أفقيًّا أو رأسيًّا، فإذا رمزنا للمسافة الأفقية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز a، وللمسافة الرأسية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز b، فإنه يمكن التعبير عن هذه الإزاحة بالقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ ، ويمكن استعمال هذه القاعدة لإجراء إزاحةٍ للشكل في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي

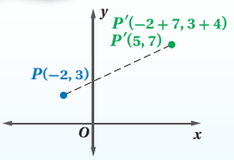
الإزاحة في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإزاحة نقطة ما مسافة a وحدةً أفقيًّا، و b وحدةً رأسيًّا، اجمع a إلى الإحداثي x ، و b إلى الإحداثي y .

الرموز: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$

مثال: إذا كانت: $a = 7$, $b = 4$ ، فإن صورة النقطة $P(-2, 3)$ الناتجة عن هذه الإزاحة هي $P'(5, 7)$.



قراءة الرياضيات

الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية: عندما يكون $b = 0$ ، تكون الإزاحة أفقيةً فقط، وعندما يكون $a = 0$ ، تكون الإزاحة رأسية فقط.

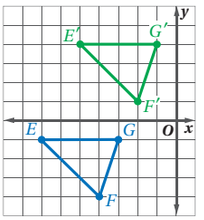
مثال 2

الإزاحة في المستوى الإحداثي

مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

a) $\triangle EFG$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $E(-7, -1), F(-4, -4), G(-3, -1)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 5)$

تدل هذه القاعدة على إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و 5 وحدات إلى أعلى .



$(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 5)$

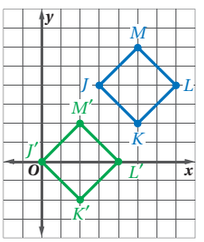
$E(-7, -1) \rightarrow E'(-5, 4)$

$F(-4, -4) \rightarrow F'(-2, 1)$

$G(-3, -1) \rightarrow G'(-1, 4)$

b) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3, 4), K(5, 2), L(7, 4), M(5, 6)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 4)$

تدل هذه القاعدة على إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أسفل .



$(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 4)$

$J(3, 4) \rightarrow J'(0, 0)$

$K(5, 2) \rightarrow K'(2, -2)$

$L(7, 4) \rightarrow L'(4, 0)$

$M(5, 6) \rightarrow M'(2, 2)$

إرشادات للدراسة

الإشارة السالبة: إشارة a السالبة تعني أن الإزاحة إلى اليسار، وإشارة b السالبة تعني أن الإزاحة إلى أسفل.

تحقق من فهمك

2A) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(2, 6), B(1, 1), C(7, 5)$ ، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 4, y - 1)$

2B) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-8, -2), R(-9, -5), S(-4, -7), T(-4, -2)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 7, y + 1)$ انظر ملحق الإجابات 2A–2B

رسم الإزاحة

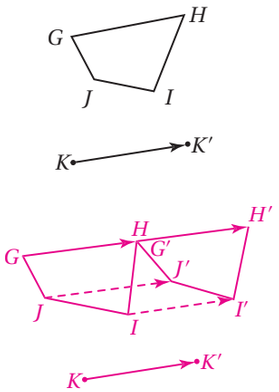
المثال 1 يبيّن كيفية رسم صورة شكل هندسي الناتجة عن إزاحة بمسافة محددة واتجاه محدد.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثالٍ؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 ارسم صورة الشكل أدناه، الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة K إلى النقطة K'.



رسم الإزاحة (الانسحاب) في المستوى الإحداثي

المثالان 2, 3 يبيّنان كيفية إجراء إزاحة لشكلٍ ما في المستوى الإحداثي، وذلك بتحريكه أفقيًّا أو رأسيًّا أو في كلا الاتجاهين.

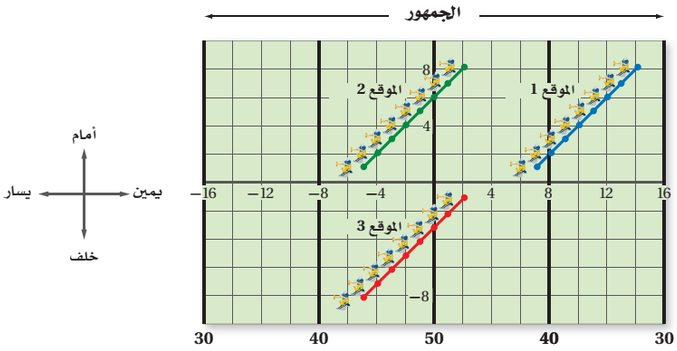
تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون: كوّن ثلاث أو أربع شبكات إحداثية على لوحات كبيرة، وزوِّد الطلاب بأشكال مثل: المستطيل وشبه المنحرف وأشكال خماسية وسداسية. ودع الطلاب يتدربوا على إجراء الإزاحة عمليًّا لهذه الأشكال على الشبكات. يمكن أن يستعمل الطلاب أمثلةً من هذا الدرس، أو أن يكوّنوا أمثلةً جديدةً خاصةً بهم.

مثال 3 من واقع الحياة — وصف الإزاحة

استعراض: في استعراضٍ لفرقةٍ عسكريةٍ، يسير الأفراد من الموقع 1 إلى الموقع 2 ثم إلى الموقع 3، وكل وحدة على الشبكة تمثل خطوةً واحدةً.



a) اكتب قاعدةً لحركة أفراد الفرقة العسكرية عند انتقالهم من الموقع 1 إلى الموقع 2 ثم صفها لفظيًّا.

إحدى النقاط في الموقع 1 عند (14, 8)، وتحركت هذه النقطة إلى (2, 8) في الموقع 2، استعمل قاعدة الإزاحة $(x, y) \to (x + a, y + b)$ لكتابة معادلتين وحلِّهما لإيجاد قيمة كلٍّ من a , b.

$$(14 + a, 8 + b) = (2, 8)$$

$$14 + a = 2 \qquad 8 + b = 8$$

$$a = -12 \qquad b = 0$$

إذن قاعدة هذه الإزاحة هي : $(x, y) \to (x - 12, y)$

أي أن كلًّا من أفراد الفرقة العسكرية تحرك 12 خطوةً إلى اليسار، ولم يتحرك أي خطوةٍ إلى الأمام أو إلى الخلف في أثناء انتقاله من الموقع 1 إلى الموقع 2

b) صِفْ حركة أفراد الفرقة العسكرية عند انتقالهم من الموقع 1 إلى الموقع 3 باستعمال قاعدة الإزاحة.

$$(14 + a, 8 + b) = (2, -1)$$

$$14 + a = 2 \qquad 8 + b = -1$$

$$a = -12 \qquad b = -9$$

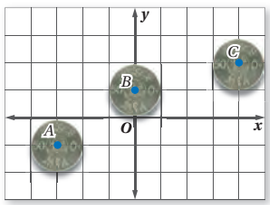
إذن قاعدة هذه الإزاحة هي : $(x, y) \to (x - 12, y - 9)$

إرشادات للدراسة

تحويلات التطابق: الإزاحة هي تحويل تطابق أيضًا، فهي تحافظ على الأبعاد وقياسات الزوايا وترتيب مواقع النقاط والاستقامة.

تحقق من فهمك

3) نقود: تمَّ تصوير حركة قطعة نقود في مواقع مختلفة على المستوى الإحداثي.



A) صِفْ حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع B لفظيًّا.

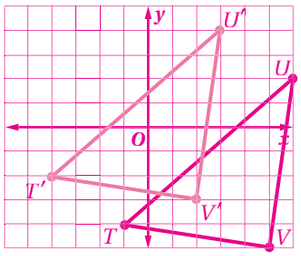
B) صِفْ حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع C باستعمال قاعدة الإزاحة. $(x, y) \to (x + 7, y + 3)$

3A) تحركت قطعة النقد 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى.

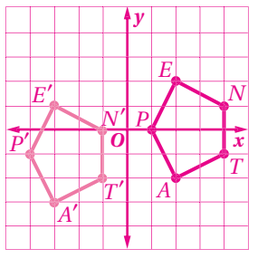
مثالان إضافيان

2 مثّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

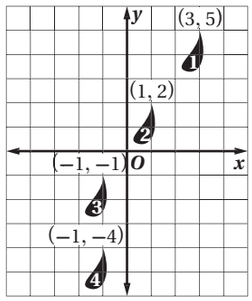
a) $\triangle TUV$ الذي إحداثيات رؤوسه: $T(-1, -4)$, $U(6, 2)$, $V(5, -5)$، أُزيح وفق القاعدة: $(x, y) \to (x - 3, y + 2)$



b) الخماسي $PENTA$ الذي إحداثيات رؤوسه: $P(1, 0)$, $E(2, 2)$, $N(4, 1)$, $T(4, -1)$, $A(2, -2)$، أُزيح وفق القاعدة: $(x, y) \to (x - 5, y - 1)$



3 صور متحركة: يبيّن الشكل الآتي إزاحاتٍ متكررةً تمثل حركة قطرة المطر.



a) صِفِ الإزاحة التي تنقل القطرة من الموقع 2 إلى الموقع 3 باستعمال قاعدة الإزاحة، وبالتعبير اللفظي.

$(x, y) \to (x - 2, y - 3)$

أُزيحت القطرة وحدتين إلى اليسار وثلاث وحدات إلى أسفل.

b) صِفِ الإزاحة التي تنقل القطرة من الموقع 3 إلى الموقع 4 باستعمال قاعدة الإزاحة.

$(x, y) \to (x, y - 3)$

تنبيه!

الإزاحة: عند إزاحة نقطةٍ وفق قاعدةٍ معينةٍ، انتبه جيدًا للإشارات في إحداثيات النقطة وفي قاعدة الإزاحة.

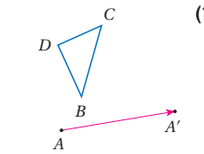
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم مضلعًا في المستوى الإحداثي، ومثّل إزاحةً بسحب المضلع إلى موقعٍ جديدٍ على المستوى الإحداثي. اطلب إلى الطلاب أن يجدوا إحداثيات رؤوس صورة المضلع، وأن يستعملوها لوصف الإزاحة.

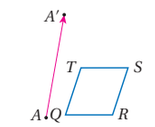
تأكـد

المثال 1 ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلٍّ ممَّا يأتي: **3–1) انظر الهامش .**

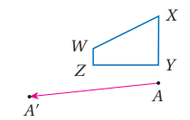
1)



2)



3)



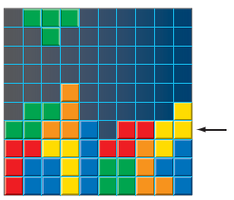
المثال 2 مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا: **6–4) انظر ملحق الإجابات**

4) شبه المنحرف $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(2, 4), K(1, 1), L(5, 1), M(4, 4)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 7, y + 1)$

5) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(-8, 8), F(-10, 4), G(-7, 6)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 5, y - 2)$

6) متوازي الأضلاع $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(-6, -5), X(-2, -5), Y(-1, -8), Z(-5, -8)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 4)$

المثال 3 **7) ألعاب فيديو:** إن هدف اللعبة المجاورة هو تحريك القطع الملونة إلى اليمين أو اليسار، عندما تنزل من أعلى الشاشة لملء كل صف دون ترك فراغاتٍ فيه. إذا كان الموقع الابتدائي للقطعة في أعلى الشاشة (x, y)، فاكتب قاعدةً لوصف الانسحاب الذي يملأ الصف المشار إليه بالسهم. $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 5)$

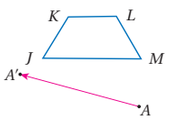


تدرب وحل المسائل

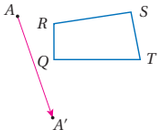
المثال 1 **10–8) انظر ملحق الإجابات**

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلٍّ مما يأتي:

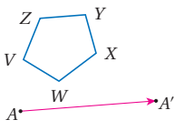
8)



9)



10)



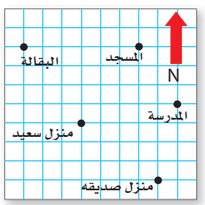
المثال 2 مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا: **13–11) انظر ملحق الإجابات**

11) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(1, 6), B(3, 2), C(4, 7)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 4, y - 1)$

12) المستطيل $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-8, 4), R(-8, 2), S(-3, 2), T(-3, 4)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 3)$

13) الشكل الرباعي $FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-4, -2), G(-1, -1), H(0, -4), J(-3, -6)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 6)$

المثال 3 **14) مواقع:** تبين الشبكة المجاورة بعض المواقع في الحي الذي يقطنه سعيد.



a) إذا غادر سعيد منزله، وانتقل 4 وحدات إلى الشمال و 3 وحدات إلى الشرق، فأين يصل؟ المسجد

b) صِف لفظيًّا إزاحتين تنقلان سعيد من المدرسة إلى منزله.

انظر الهامش

3 التدريب

التقويم التكويني

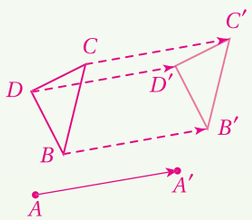
استعمل التمارين 7–1؛ للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

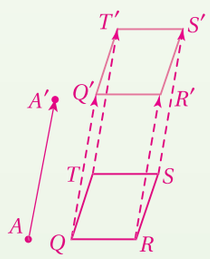
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	14–8 ، 21 ، 23–38
ضمن ضمن المتوسط	14–9 فردي ، 15 ، 17 ، 19–21 ، 23–38
فوق فوق المتوسط	34–15 ، (اختياري: 35–38)

إجابات:

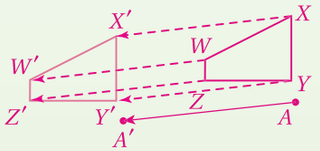
1)



2)

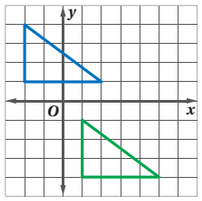


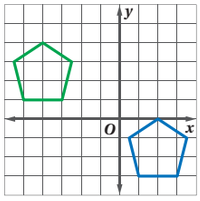
3)



14b) إجابة ممكنة: يمكن أن يسير 5 وحداتٍ جهة الغرب، ثم وحدةً واحدةً إلى الجنوب، أو أن يسير وحدةً إلى الجنوب ثم 5 وحداتٍ جهة الغرب.

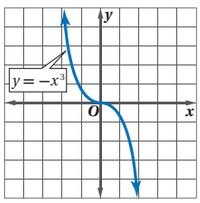
اكتب قاعدة الإزاحة التي تنقل الشكل الأزرق إلى الشكل الأخضر في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

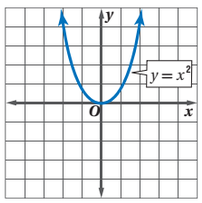
15) 

16) 

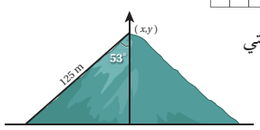
جبر: مثِّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الدالتين الآتيتين الناتجة عن الإزاحة المعطاة، ثم اكتب معادلة هذه الصورة.

17) $(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 1)$ **18)** $(x, y) \rightarrow (x - 2, y)$ **17–18) انظر الهامش.**



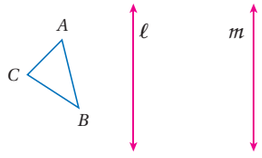


19) تضاريس: طول منحدر تلةٍ من قمتها حتى أسفلها 125 m، وقياس الزاوية التي يصنعها مع المستقيم الرأسي 53°، إذا كان موقع منصور عند قمة التلة (x, y)، فاكتب قاعدة الإزاحة التي تمثل انتقاله إلى أسفل التلة. **انظر الهامش**



20) تمثيلات متعددة: ستستقصي في هذه المسألة نتيجة انعكاسين حول مستقيمين رأسيَّين.

a) هندسيًّا: ارسم على ورق شفاف $\triangle ABC$ ، والمستقيمين الرأسيّين ℓ ، m ، وارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ ، بطيِّ الورقة على امتداد المستقيم ℓ وسمِّ هذه الصورة $\triangle A'B'C'$ ، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m ، بطيّ الورقة على امتداد المستقيم m ، وسمّ هذه الصورة $\triangle A''B''C''$. **a–b) انظر ملحق الإجابات**



b) هندسيًّا: كرّر العملية التي نفذتها في الفرع **a** لرسم صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين p ، n ، وصورة $\triangle MNP$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين r ، q.

c) جدوليًّا: انسخ الجدول الآتي وأكمله. **الإجابات المعطاة هنا هي بعض الإجابات الممكنة.**

المسافة بين المستقيمين الرأسيين (cm)		المسافة بين النقاط المتناظرة (cm)	
ℓ ، m	2.2	A و A'' ، B و B'' ، C و C''	4.4
n ، p	2.8	D و D'' ، E و E'' ، F و F''	5.6
q ، r	1.4	M و M'' ، N و N'' ، P و P''	2.8

d) لفظيًّا: صِفْ نتيجة الانعكاسين حول المستقيمين الرأسيين باستعمال الإزاحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

21) تبرير: أُجريت إزاحةٌ لشكلٍ ما، وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 3, y + 8)$، ثم إزاحةٌ أخرى للصورة الناتجة وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 8)$. من دون استعمال الرسم، حدِّد مكان الشكل النهائي وبرِّر إجابتك.

إرشادات للدراسة

انسحاب الدالة المتصلة:
عند إجراء تحويل هندسي على دالة متصلة تمثل بخطٍّ منحنٍ من دون انقطاع كما في السؤالين 17, 18، تبقى الدالة محافظة على شكلها كما هو الحال في تحويلات التطابق.

قراءة الرياضيات

الشرطتان:
تستعمل الشرطتان للدلالة على أن هذا الرمز صورة ناتجة عن تحويل هندسي ثانٍ.

20d) إجابة ممكنة: يمكن وصف نتيجة انعكاسين حول مستقيمين رأسيين باعتباره إزاحةً أفقيةً مسافتها مثلا المسافة بين المستقيمين الرأسيين، واتجاهها عموديٌّ عليهما.

21) يعود الشكل إلى مكانه الأصلي؛ لأن الإزاحة وفقًا للقاعدة $(x - 3, y + 8)$، تعني إزاحة الشكل 3 وحدات إلى اليسار، و8 وحدات إلى أعلى، والإزاحة وفقًا للقاعدة $(x + 3, y - 8)$، تعني إزاحة الشكل 3 وحدات إلى اليمين و8 وحدات إلى أسفل، وهو عكس الإزاحة الأولى؛ لذا يعود الشكل إلى مكانه الأصلي.

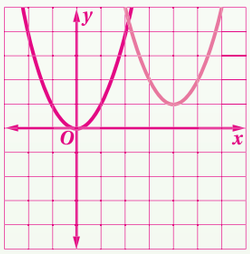
تنبيه لحل سؤال

الورق الشفاف: حل السؤال 20 يتطلب استعمال الورق الشفاف.

تمثيلات متعددة: في السؤال 20، يستعمل الطلاب الرسم الهندسي والجداول والوصف اللفظي؛ لاستقصاء الانعكاسات حول مستقيمين متوازيين.

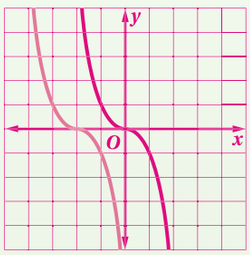
إجابات:

17)



الإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 1)$ تنقل كل نقطة إلى صورتها بمقدار 4 وحداتٍ إلى اليمين ثم وحدةً وحدةً إلى أعلى.
معادلة الصورة الناتجة عن الإزاحة هي: $y = (x - 4)^2 + 1$

18)



الإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x - 2, y)$ تنقل كل نقطة إلى صورتها بمقدار وحدتين إلى اليسار.
معادلة الصورة الناتجة عن الإزاحة هي: $y = -(x + 2)^3$ أو $y = -(x - (-2)^3$

19) استعمل النسب المثلثية وزوايا الارتفاع والانخفاض لإيجاد قيمة كلٍّ من: x, y.

$$\sin 53^\circ = \frac{x}{125}$$
$$x \approx 100$$
$$\cos 53^\circ = \frac{y}{125}$$
$$y \approx 75$$

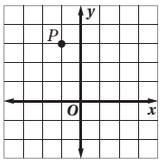
$(x, y) \rightarrow (x - 100, y - 75)$

22) **تحدَّ:** أُزيح المستقيم $y = mx + b$ وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$. اكتب معادلة صورته الناتجة عن هذه الإزاحة. ما مقطع المحور y للمستقيم الجديد؟ $y = m(x - a) + 2b;\ 2b - ma$

23) **اكتب:** تذكر من الدرس السابق أن النقطة الثابتة هي النقطة التي تنطبق صورتها عليها. هل توجد نقاط ثابتة في الإزاحة؟ وضح أسباب وجودها أو أسباب عدم وجودها. انظر الهامش

تدريب على اختبار

24) أوجد صورة النقطة P الناتجة عن الإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 1)$ **D**



A $(0, 6)$ **B** $(0, 3)$ **C** $(2, -4)$ **D** $(2, 4)$

25) يحتوي كيس على 5 كرات حمراء وكرتين زرقاوين و 4 كرات بيضاء وكرة واحدة صفراء. إذا سُحب من الكيس كرتان على التوالي من دون إرجاع، فما احتمال سحب كرتين بيضاوين؟ **B**

A $\frac{1}{66}$ **B** $\frac{1}{11}$ **C** $\frac{1}{9}$ **D** $\frac{5}{33}$

26) **إجابة قصيرة:** ما قاعدة الإزاحة التي تنقل النقطة $A(3, -5)$ إلى النقطة $A'(-2, -8)$؟ $(x, y) \rightarrow (x - 5, y - 3)$

مراجعة تراكمية

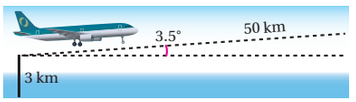
مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد. (الدرس 1-7) **27–29)** انظر الهامش.

27) $\overline{DJ}$ التي إحداثيات طرفَيها $D(4, 4), J(-3, 2)$، بالانعكاس حول المحور y.

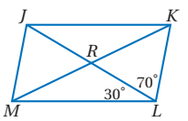
28) $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $X(0, 0), Y(3, 0), Z(0, 3)$، بالانعكاس حول المحور x.

29) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-3, -1), B(0, 2), C(3, -2)$، بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

30) **الملاحة الجوية:** كان ارتفاع طائرة 3 km فوق سطح البحر عندما بدأت بالارتفاع بزاوية $3.5°$، إذا بقيت هذه الزاوية ثابتةً، فكم كيلو مترًا يكون ارتفاعها فوق سطح البحر بعد طيرانها مسافة 50 km؟ (مهارة سابقة) **6.1 km تقريبًا**



أوجد كلًّا من القياسات الآتية مستعملًا $\square JKLM$ المجاور. (الدرس 2-5)

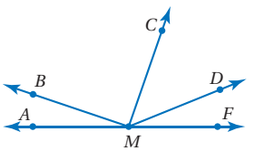


31) $m\angle MJK$ **100°** **32)** $m\angle JML$ **80°**

33) $m\angle JKL$ **80°** **34)** $m\angle KJL$ **30°**

استعد للدرس اللاحق

صنِّف كلًّا من الزوايا الآتية إلى قائمةٍ أو حادةٍ أو منفرجة، ثم استعمل المنقلة لقياس الزاوية إلى أقرب درجةٍ.



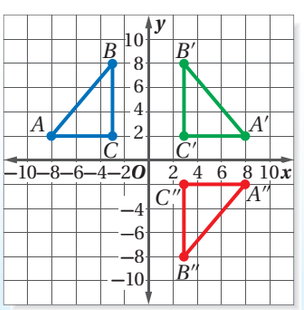
35) $\angle AMC$ منفرجة؛ **110°** **36)** $\angle FMD$ حادة؛ **20°**

37) $\angle BMD$ منفرجة؛ **140°** **38)** $\angle CMB$ قائمة؛ **90°**

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: ما نوع التحويل الهندسي الذي يمثله انعكاسان متتاليان حول محورين متقاطعين؟ استعمل المستوى الإحداثي لتوضيح إجابتك. دوران.



4 التقويم

فهم الرياضيات: أنشئ على السبورة رسومًا تمثل إزاحاتٍ، أو ارسم بعض الإزاحات المختارة من الكتاب، ثم اطلب إلى الطلاب أن يصفوها بصوتٍ واضحٍ.

التقويم التكويني

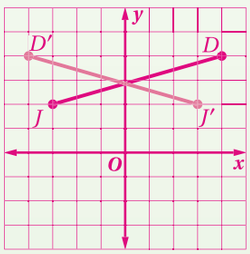
تحقق من استيعاب الطلاب مفاهيم الدرسين: 1–7 و 2–7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1 صفحة (49).

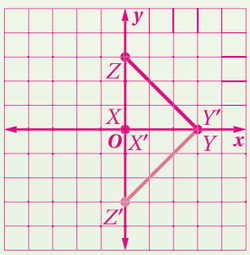
إجابات:

23) إجابة ممكنة: لا؛ لأنه يجب أن تتحرك النقطة حتى تتم الإزاحة، ويبقى الشكل محافظًا على هيئته، فلا يمكن أن تبقى أيّ نقطة ثابتة في الإزاحة، وإذا بقيت أي نقطة ثابتة، فعندئذ تكون الصورة هي الشكل الأصلي نفسه.

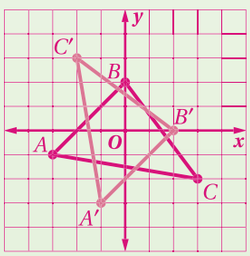
27)



28)



29)





مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم _____ التاريخ _____

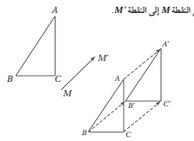
7-2 تدريبات إعادة التعليم

الإزاحة (الانسحاب)

رسم الإزاحة (الانسحاب):

تعلمت أن الانسحاب هو تحويل هندسي ينقل الشكل من موقع إلى آخر من دون تدويره، حيث يتم نقل جميع نقاط الشكل المسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه، ويمكن التعبير عن الإزاحة (الانسحاب) لكل نقطة من الشكل بقطعة مستقيمة طولها $\overline{AA'}$، حيث إن A' هي صورة النقطة A الناتجة عن الإزاحة (الانسحاب) إلى A'.

مثال 2 ارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة M إلى النقطة M'.



الخطوة 1: ارسم من كل رأسٍ مستقيمًا يوازي $\overline{MM'}$.

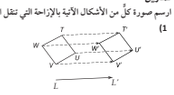
الخطوة 2: قِس طول $\overline{MM'}$، وعيّن على المستقيم المار بالرأس A النقطة A'، بحيث يكون بُعدُ الصورة عن النقطة الأصلية يساوي طول MM' في الاتجاه من M إلى M'.

الخطوة 3: كرّر الخطوة 2 لتعيين B' و C'، ثم صِل الرؤوس A', B', C' لتشكل المثلث $A'B'C'$ الناتج عن الإزاحة.

تمارين

ارسم صورة كلٍّ من الأشكال الآتية بالإزاحة التي تنقل النقطة L إلى L':

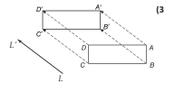
(1)



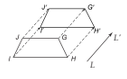
(2)



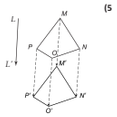
(3)



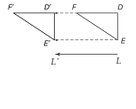
(4)



(5)



(6)



تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) دون

الاسم _____ التاريخ _____

7-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الإزاحة (الانسحاب)

رسم الإزاحة هي المستوى الإحداثي:

يمكن رسم الإزاحات في المستوى الإحداثي، إذا علمنا مقدار الإزاحة واتجاهها أفقيًّا أو رأسيًّا، فإذا رمزنا للمسافة الأفقية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز a، وللمسافة الرأسية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز b، فإنه يمكن التعبير عن هذه الإزاحة بالقاعدة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$. ويمكن استعمال هذه القاعدة لإجراء إزاحة للشكل في المستوى الإحداثي.

مثال إحداثيات رؤوس المستطيل $RECT$ هي: $R(-2,-1), E(-2,2), C(3,2), T(3,-1)$.
مثّل بيانيًّا المستطيل $RECT$ وصورته الناتجة عن إزاحة وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x+2, y-1)$.
تنقل هذه الإزاحة كلّ نقطةٍ من نقاط المستطيل وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل.

$(x, y) \rightarrow (x+2, y-1)$

$R(-2,-1) \rightarrow R'(-2+2,-1-1) = R'(0,-2)$

$E(-2,2) \rightarrow E'(-2+2,2-1) = E'(0,1)$

$C(3,2) \rightarrow C'(3+2,2-1) = C'(5,1)$

$T(3,-1) \rightarrow T'(3+2,-1-1) = T'(5,-2)$

مثّل بيانيًّا المستطيل $RECT$ وصورته $R'E'C'T'$.



تمارين

مثّل بيانيًّا كلًّا من الأشكال الآتية وصورها الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي:

1) الشكل الرباعي $TUVW$ الذي إحداثيات رؤوسه: $T(-3,-8), U(-6,3), V(3,0), W(0,3)$، أزيح وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x+4, y+5)$



2) $\triangle QRS$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(2,5), R(7,1), S(-1,2)$، أزيح وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x-1, y-2)$



3) متوازي الأضلاع $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(1,6), B(4,5), C(1,-1), D(-2,0)$، أزيح وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x+3, y-2)$



تدريبات المهارات (13) دون ضمن فوق

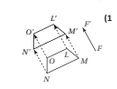
الاسم _____ التاريخ _____

7-2 تدريبات المهارات

الإزاحة (الانسحاب)

ارسم صورة كلٍّ من الأشكال الآتية بالإزاحة التي تنقل النقطة F إلى النقطة F'.

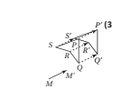
(1)



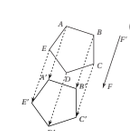
(2)



(3)



(4)



هندسة إحداثية: مثّل بيانيًّا كلّ شكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في السؤالين 5 و 6:

5) $\triangle KL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $K(-4,-4), K(-2,-1), L(2,-4)$، أزيح وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x+2, y+5)$.



6) الشكل الرباعي $LMNP$ الذي إحداثيات رؤوسه: $L(4,2), M(4,-1), N(0,-1), P(1,4)$، أزيح وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x-4, y-3)$.



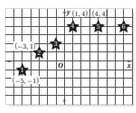
تدريبات حل المسألة (14) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-2 تدريبات حل المسألة

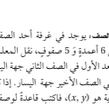
الإزاحة (الانسحاب)

1) رسوم متحركة، تُستعمل أجهزة الحاسوب في صناعة الرسوم المتحركة، والشكل المجاور يبين إزاحات متكررة للحصول على صور النجمة الظاهرة فيه، أوجد الإزاحة التي تنقل النجمة 1 إلى النجمة 2.



$(x, y) \rightarrow (x+2, y+2)$

2) سفر، في أحد المطارات يصطفُّ سلمان في الصف للحصول على بطاقة الصعود للطائرة، ويسير في اتجاه مرظَّفي المطار، بحيث تمثل حركته في كل مرّة وحدةً واحدة كما في الشكل أدناه. إذا كان موقع سلمان هو (x, y)، فاكتب قاعدةً لوصف الإزاحة التي تنقل سلمان إلى بداية الصف أمام الموظف المختص.



$(x, y) \rightarrow (x-3, y+2)$

3) غرفة الصف، يوجد في غرفة أحد الصفوف 30 مقعدًا مرتبةً في 6 أعمدةٍ وَ 5 صفوف، نقل المعلم الطالب أحمد من المقعد الأول في الصف الثاني جهة اليمين إلى المقعد الأخير في الصف الأخير جهة اليسار. إذا كان موقع أحمد في البداية هو (x, y)، فاكتب قاعدةً لوصف الإزاحة التي تنقل أحمد إلى موقعه الجديد.

$(x, y) \rightarrow (x-5, y-3)$

4) ورق جدران، يتكوّن تصميمٌ لورق جدران من إزاحات متكررة لمثلث واحد متطابق الضلعين، والشكل الآتي يبيّن هذا التصميم على المستوى الإحداثيّ.

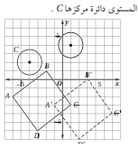


a) يتعيّن أن يُملأ الفراغ فوق المثلث المرسوم حول النقطة $(5,1)$ برسم مثلثٍ يكون مُتَّفقًا مع بقية النمط، فما إحداثيّات رؤوس هذا المثلث؟ **(4,3)، (5, 5)، (6,3)**

b) حدد المثلث الذي يمكن إزاحته بحسب القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x-8, y+5)$، ليكون موقعه الجديد هو المثلث المرسوم حول النقطة $(-3,3)$.

إجابة المثلث المرسوم حول النقطة $(-2, 5)$

5) مربعات ودوائر، على المستوى الإحداثي أدناه، يظهر المربع $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ بعد الانسحاب، كما يظهر في المستوى دائرة مركزها C.



أجب عمّا يلي:

a) اكتب قاعدة الإزاحة التي نقلت المربع $ABCD$ إلى المربع $A'B'C'D'$.
$(x, y) \rightarrow (x+5, y-1)$

b) ارسم صورة الدائرة C الناتجة عن الإزاحة التي كُتبت قاعدتها في الفرع a. **انظر الرسم في الشكل أعلاه.**



مصادر الدرس 2 - 7

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-2 التدريبات الإثرائية

الإزاحة في المستوى الإحداثي:

يمكنك استعمال قاعدة الانعكاس لتبيّن أن نتيجة انعكاسين حول مستقيمين متوازيين هي إزاحة.

1) إذا كان لدينا الانعكاسان الآتيان، بحيث a و b عددان حقيقيان مختلفان قاعدتاهما هما:

قاعدة الانعكاس الأول: $(x,y) \rightarrow (-x+2a, y)$

قاعدة الانعكاس الثاني: $(x,y) \rightarrow (-x+2b, y)$

أي أن الانعكاس الأول حول المستقيم $x = a$، والانعكاس الثاني حول المستقيم $x = b$.

a) أوجد قاعدة التحويل الهندسي المركب:
"الانعكاس الأول متبوعًا بالانعكاس الثاني"

$$(x, y) \rightarrow (x + 2(b - a), y)$$

b) أوجد قاعدة التحويل الهندسي المركب:
"الانعكاس الثاني متبوعًا بالانعكاس الأول"

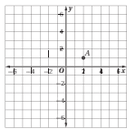
$$(x,y) \rightarrow (x + 2(a - b), y)$$

2) تأمّل النتيجتين اللتين توصلت إليهما في السؤال 1.
ما الذي تدلّ عليه هاتان النتيجتان حول علاقة المسافة بين المستقيمين المتوازيين مع المسافة بين نقطةٍ وصورتها بالانعكاسين حول هذين المستقيمين المتوازيين؟

المسافة بين كل نقطة وصورتها تساوي مثلَي المسافة بين المستقيمين المتوازيين.

3) وضح بالرسم إجابتك عن السؤالين 1 و 2، استعمل ورقة إضافيّة إذا كان ذلك ضروريًا.

انظر إجابات الطلاب.

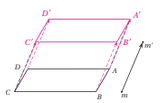


كتاب التمارين (17)　دون ضمن فوق

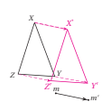
7 - 2 الإزاحة (الانسحاب)

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة m إلى النقطة m' في السؤالين الآتيين:

1)



2)

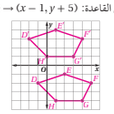


مثّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين بيانيًا:

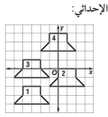
3) الرباعي $TUWX$ الذي إحداثيات رؤوسه: $T(-1,1), U(4,2), W(1,5), X(-1,3)$
أُزيح وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 4)$



4) الخماسي $DEFGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(-1,-2), E(2,-1), F(5,-2), G(4,-4), H(1,-4)$
أُزيح وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 5)$



هندسة إحداثية: أوجد قاعدة الإزاحة التي تنقل كلًّا من الأشكال الآتية في المستوى الإحداثي:



5) الشكل 1 ⟵ الشكل 2　$(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 2)$

6) الشكل 2 ⟵ الشكل 3　$(x, y) \rightarrow (x - 4, y + 1)$

7) الشكل 3 ⟵ الشكل 4　$(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 4)$

1 التركيز

الهدف

استكشاف خصائص الدوران.

المواد اللازمة لكل مجموعة

- أوراق شفافة
- مسطرة
- منقلة

إرشادات للتدريس

إن هدف معمل الهندسة هذا هو توضيح خصائص الدوران، ولكي تكون هذه الخصائص واضحة وظاهرة، وجّه الطلاب ليحرصوا على أن تكون القياسات في الخطوة 4 من النشاط، وفي السؤال 1 دقيقةً جدًّا.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظِّم الطلاب مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم حل السؤالين 2–1

واسأل:

- ماذا تلاحظ حول الأطوال المقيسة في الخطوة 4؟ $AP = A'P,\ BP = B'P,\ CP = C'P,\ DP = D'P$
- أين تضع مركز المنقلة كي تقيس زاوية الدوران °90 في السؤال1؟ أضع مركز المنقلة على نقطة الأصل في المستوى الإحداثي.
- كيف تحدد الإحداثي x والإحداثي y لرؤوس المثلَّثين $J'K'L'$ و $J''K''L''$؟ تحدد الإحداثيات بتعيين الصورة على المستوى الإحداثي وإيجاد إحداثيات كل رأسٍ.

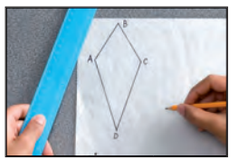
درست سابقًا التماثل الدوراني حول نقطة، والذي يحرك الشكل حول نقطة ثابتة تسمى مركز الدوران بزاوية معينة وفي اتجاه محدد، وستستعمل الورق الشفاف في هذا النشاط لاستكشاف خصائص الدوران.

نشاط استكشاف الدوران باستعمال الورق الشفاف

الخطوة 1: ارسم في قطعة من الورق الشفاف الشكل الرباعي $ABCD$ والنقطة P.

الخطوة 2: انسخ الشكل الرباعي $ABCD$ والنقطة P في قطعةٍ أخرى من الورق الشفاف، وسمّ الشكل الجديد $A'B'C'D'$.

الخطوة 3: ضع الورقتين بحيث تنطبق النقطة P من الأولى على النقطة P من الثانية، ودوّر الورقتين بحيث لا يكون هناك تداخل بين $ABCD$، و $A'B'C'D'$، وألصق الورقتين معًا.



الخطوة 1

الخطوة 4: قِس المسافة بين النقطة P وكل رأس من رؤوس الشكلين $ABCD$ و $A'B'C'D'$، ثم انقل الجدول الآتي وأكمله.

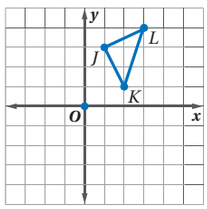


الخطوتان 2, 3

الشكل الرباعي	الطول			
$ABCD$	AP	BP	CP	DP
	15 mm	22 mm	17 mm	5 mm
$A'B'C'D'$	$A'P$	$B'P$	$C'P$	$D'P$
	15 mm	22 mm	17 mm	5 mm

تمارين:

1) انسخ $\triangle JKL$ الموضح في الشكل المجاور الذي إحداثيات رؤوسه هي: $L(3, 4)$, $K(2, 1)$, $J(1, 3)$ في قطعة من الورق الشفاف ثم أجب عما يأتي:



a) استعمل الورق الشفاف والمنقلة لتدوير كل رأس بزاوية °90 في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟

b) استعمل الورق الشفاف والمنقلة لتدوير $\triangle JKL$ بزاوية °180 حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟ انظر الهامش.

c) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد المسافة بين نقطة الأصل وكلٍّ من النقاط J, K, L. ثم أوجد المسافة بين نقطة الأصل وكلٍّ من رؤوس المثلثين $J''K''L''$, $J'K'L'$.

$OJ = OJ' = OJ'' = \sqrt{10}\ ;\ OK = OK' = OK'' = \sqrt{5}\ ;\ OL = OL' = OL'' = 5$

2) **اكتب:** إذا تم تدوير النقطة $(4, 2)$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل بزاويةٍ °90، وبزاوية °180، فما التغيير الذي يطرأ على الإحداثي x والإحداثي y؟ انظر الهامش.

3) **تخمين:** ما إحداثيًّا صورة النقطة (x, y) الناتجة عن دوران بزاوية °270 في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟ $(-y, x)$

4) **تخمين:** اكتب تخمينًا حول المسافة بين مركز الدوران P، والرؤوس المتناظرة للشكلين $ABCD$, $A'B'C'D'$. انظر الهامش.

3 التقويم

التقويم التكويني

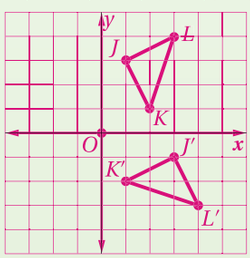
استعمل السؤالين 3 و4؛ لتقويم فهم الطلاب خصائص الدوران.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا تمثيلًا جبريًّا لما يطرأ على الإحداثي x والإحداثي y عند تدوير نقطةٍ بزاويةٍ: °180, °90 و °270 حول نقطة الأصل.

إجابات:

1a) $J'(3, -1), K'(1, -2), L'(4, -3)$



1b) $J''(-3, 1), K''(-1, 2), L''(-4, 3)$

2) يتبدل الإحداثيان x, y عند تدوير النقطة بزاوية °90، وتتغير إشارة الإحداثي x، وعند التدوير بزاوية °180 تتغير إشارة كلا الإحداثيَّين.

4) بُعد كل نقطةٍ عن مركز الدوران يساوي بُعد صورتها عنه.

7-3 الدوران
Rotations



لماذا؟

استُعملت الطاقة المتولدة من المراوح الهوائية في الماضي؛ لضخِّ الماء أو لطحن الحبوب، أما في الوقت الحاضر، فيمكن أن تكون مراوح الهواء الحديثة بديلًا مهمًّا عن الوقود الأحفوري (النفط والغاز والفحم). إذ تُحوِّل هذه المراوح طاقة الرياح إلى طاقة كهربائية.

رسم الأشكال الناتجة عن الدوران: تعلمت أن الدوران يحرك كل نقطة في الشكل الأصلي بزاوية محددة وفي اتجاه محدد حول نقطة ثابتة.

فيما سبق:
درستُ التماثل الدوراني حول نقطة.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أرسم الصورة الناتجة عن دوران شكلٍ مستعملًا المنقلة .
- أرسم الصورة الناتجة عن دوران شكلٍ في المستوى الإحداثي .

المفردات:
الدوران
rotation
مركز الدوران
center of rotation
زاوية الدوران
angle of rotation

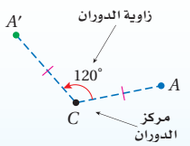
www.obeikaneducation.com

مفهوم أساسي — الدوران

أضف إلى مطويتك

الدوران حول نقطة ثابتة (تسمى **مركز الدوران**) بزاوية معينة قياسها $x°$ واتجاهٍ معينٍ، يحول النقطة إلى صورتها بحيث:

- إذا كانت النقطة هي مركز الدوران، فإن صورتها هي النقطة نفسها.
- إذا كانت النقطة غير مركز الدوران، فإن النقطة الأصلية وصورتها تبعُدان المسافة نفسها عن مركز الدوران، والزاوية المتشكِّلة من النقطة ومركز الدوران والصورة تُسمى **زاوية الدوران** وقياسها يساوي $x°$.



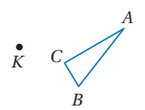
A' هي صورة A الناتجة عن دوران بزاوية 120° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة C.

يمكن أن يكون اتجاه الدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة أو عكس اتجاه حركة عقارب الساعة. ومن الآن فصاعدًا سيكون كل دوران عكس اتجاه حركة عقارب الساعة إلا إذا ورد خلاف ذلك.

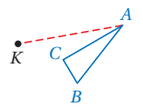


مثال 1 — رسم الشكل الناتج عن الدوران

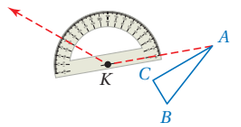
استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن دوران بزاوية 140° حول النقطة K.



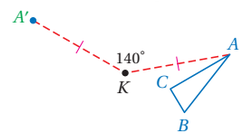
الخطوة 1: ارسم قطعةً مستقيمةً من الرأس A إلى النقطة K.



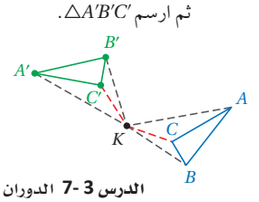
الخطوة 2: ارسم زاويةً قياسها 140° تكون $\overline{KA}$ أحد ضلعَيها .



الخطوة 3: استعمل مسطرةً لتعيين A' على الضلع الثاني، بحيث يكون $KA' = KA$.



الخطوة 4: كرِّر الخطوات 3–1 للرأسين B و C ثم ارسم $\triangle A'B'C'$.



إرشادات للدراسة

تحويلات التطابق:
الدوران هو تحويل تطابق أيضًا، فهو يحافظ على الأبعاد وقياسات الزوايا وترتيب مواقع النقاط والاستقامة، حيث تكون فيه الصورة مطابقة للشكل الأصلي.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-3

رسم صورة شكل بالانعكاس حول مستقيمٍ، وفي المستوى الإحداثي.
رسم صورة شكل بالانسحاب في المستوى، وفي المستوى الإحداثي.

الدرس 7-3

رسم الصورة الناتجة عن دوران شكل مستعملًا المنقلة، ورسم الصورة الناتجة عن دوران شكلٍ في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس 7-3

رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب تحويلين هندسيين أحدهما هو الانعكاس.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما الأشياء التي تدور في مراوح الهواء؟ أذرع المروحة
- ما المصطلح الهندسي الذي يمكن أن تُطلقه على العلبة التي تتصل بها الأذرع؟ مركز الدوران
- إذا كانت الزوايا بين الأذرع متساوية، فما قياس كلٍّ منها؟ 120°

مصادر الدرس 7-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (134, 135)	• تنويع التعليم ص (134, 135)	• تنويع التعليم ص (134, 135)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (18)	• كتاب التمارين ص (18)	• كتاب التمارين ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

رسم الصورة الناتجة عن الدوران

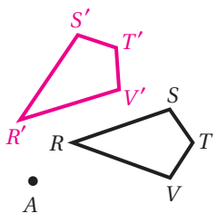
المثال 1 يبيّن كيفية رسم دوران في المستوى.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثالٍ؛ للتحقق من استيعاب الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 استعمل منقلة ومسطرة لرسم صورة الشكل الرباعي $RSTV$ الناتجة عن دوران حول النقطة A بزاوية $45°$

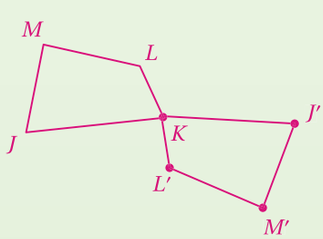


التعليم باستعمال التقنيات

برمجية تحرير الصور: اعرض على الطلاب عدة صور رقمية التقطت في أثناء وضع الكاميرا بزوايا مختلفة، ثم اطلب إليهم أن يستعملوا برمجية تحرير الصور لتدوير الصور حتى تأخذ الوضع الصحيح المعتدل، ثم اطلب إليهم أن يربطوا بين الصورة التي يشاهدونها وزاوية الدوران الذي استعملوه واتجاهه.

إجابة (تحقق من فهمك):

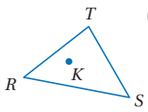
(1B



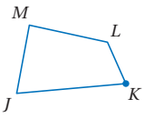
تحقق من فهمك

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كل من السؤالين الآتيين:

(1A $65°$

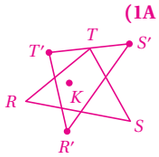


(1B $170°$



انظر الهامش.

(1A



إرشادات للدراسة

الدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة: يُشير قياس زاوية الدوران السالب إلى أنه في اتجاه حركة عقارب الساعة. فالدوران بزاوية $-90°$ حول نقطة الأصل هو دوران بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

رسم الصورة الناتجة عن الدوران في المستوى الإحداثي: يمكنك استعمال القواعد الآتية لتحديد صورة نقطةٍ ما، عندما يتم تدويرها بزاوية $90°$ أو $180°$ أو $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

مفهوم أساسي — الدوران في المستوى الإحداثي

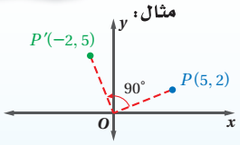
أضف إلى مطويتك

الدوران بزاوية $90°$

عند تدوير نقطة بزاوية $90°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1 ، ثم بدّل موقعَي الإحداثيَّين x, y .

الرموز: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

مثال:

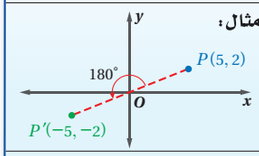


الدوران بزاوية $180°$

عند تدوير نقطة بزاوية $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب كلًّا من الإحداثيَّين x, y في -1

الرموز: $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

مثال:

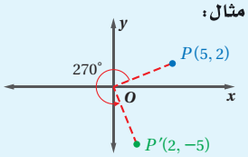


الدوران بزاوية $270°$

عند تدوير نقطة بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1 ثم بدّل موقعَي الإحداثيَّين x, y .

الرموز: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$

مثال:



إرشادات للدراسة

الدوران بزاوية $360°$: الدوران بزاوية $360°$ حول نقطةٍ ما يُعيد الشكل إلى وضعه الأصلي؛ أي أن الصورة الناتجة عن دوران بزاوية $360°$ هي الشكل الأصلي نفسه.

مثال 2 — الدوران في المستوى الإحداثي

إحداثيات رؤوس المثلث PQR هي: $P(1, 1), Q(4, 5), R(5, 1)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1 ثم بدّل الإحداثيَّين .

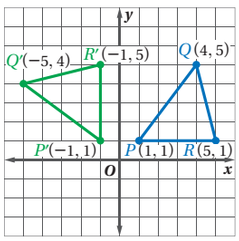
$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$P(1, 1) \rightarrow P'(-1, 1)$

$Q(4, 5) \rightarrow Q'(-5, 4)$

$R(5, 1) \rightarrow R'(-1, 5)$

ثم مثِّل $\triangle PQR$ وصورته $\triangle P'Q'R'$ في المستوى الإحداثي.

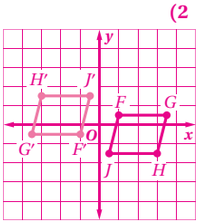


تحقق من فهمك

انظر الهامش.

2) إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع $FGHJ$ هي: $F(2, 1), G(7, 1), H(6, -3), J(1, -3)$.
مثِّل بيانيًّا $FGHJ$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

(2



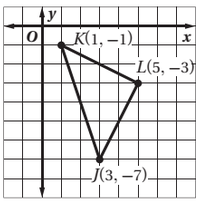
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون / الرياضيون: اطلب إلى الطلاب تطوير نظام لتدوير الأشكال، وذلك وفقًا للخطوات التالية: أولًا: يجب عليهم قراءة المسألة وفهمها جيدًا، ثم رسم الشكل المطلوب تدويره وفقًا للمعطيات المحددة، تحديد إتجاه الدوران، وأخيرًا: تطبيق الدوران.
يمكن للطلاب استعمال نظام مشابه لهذا النظام في تدوير الأشكال أو أن يطوروا نظامًا خاصًّا بهم.

مثال 3 من اختبار

ما صورة النقطة J الناتجة عن دوران $\triangle JKL$ بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل؟



A $(-3, -7)$

B $(-7, 3)$

C $(-7, -3)$

D $(7, -3)$

اقرأ سؤال الاختبار

لقد أعطيت $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3, -7), K(1, -1), L(5, -3)$ ، وطُلب إليك أن تحدد إحداثيَّي صورة النقطة J الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

حُل سؤال الاختبار

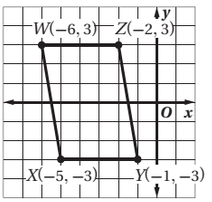
لإيجاد إحداثيَّي صورة النقطة J الناتجة عن الدوران بزاوية $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1 ، ثم بدّل الإحداثيَّين x , y

$(x, y) \rightarrow (y, -x)$ $\quad$ $(3, -7) \rightarrow (-7, -3)$

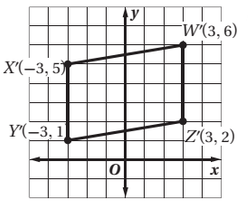
فالإجابة الصحيحة هي C.

تحقق من فهمك

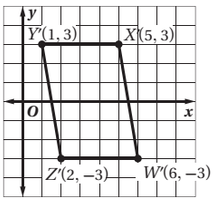
3) تمّ تدوير متوازي الأضلاع $WXYZ$ في الشكل المجاور بزاوية $180°$عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، أيُّ الأشكال الآتية يمثل صورة متوازي الأضلاع الناتجة عن الدوران؟ C



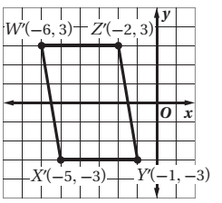
A



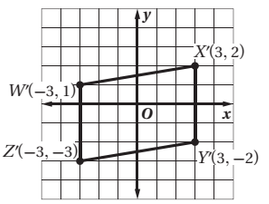
C



B



D



إرشادات للدراسة

الدوران $270°$:
يمكن إجراء دوران بزاوية $270°$ بعمل دورانين متعاقبين؛ أحدهما بزاوية $90°$ والآخر بزاوية $180°$، كما يمكن إجراء هذا الدوران أيضًا بعمل دوران بزاوية $90°$ في اتجاه عقارب الساعة.

إرشادات للاختبار

حل مسألة أبسط:
يمكنك أن تتحقق من صورة رأس واحد فقط مثل النقطة X هنا، بدلًا من التحقق من صور رؤوس متوازي الأضلاع $WXYZ$ الأربعة كلها، فإذا كانت صحيحة فأكمل للرؤوس الباقية، وإلا فانتقل إلى شكل آخر.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

توسّع: ما قياس أصغر زاوية يدورها الشكل حتى ينطبق على نفسه؟ $72°$



إرشادات للمعلم الجديد

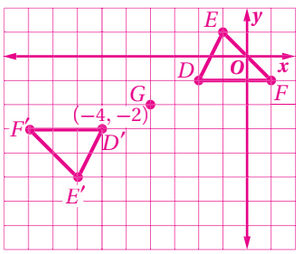
اتجاه الدوران و مركزه:
أكّد على أن الدوران يكون حول نقطة الأصل، وعكس اتجاه عقارب الساعة، إلّا إذا ورد خلاف ذلك في نصِّ السؤال.

رسم الصورة الناتجة عن الدوران في المستوى الإحداثي

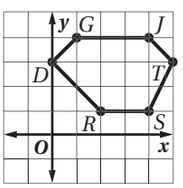
المثالان 2, 3 يبيّنان كيفية رسم الصورة الناتجة عن الدوران في المستوى الإحداثي.

مثالان إضافيان

2 إحداثيات رؤوس المثلث DEF هي: $D(-2, -1), E(-1, 1), F(1, -1)$، مثّل بيانيًّا $\triangle DEF$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $180°$ مع اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة $G(-4, -2)$.



3 يبيِّن الشكل الآتي السداسي $DGJTSR$. ما صورة النقطة T الناتجة عن دوران بزاوية $90°$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟ C



A $(5, -3)$

B $(-5, -3)$

C $(-3, 5)$

D $(3, -5)$

3 التدريب

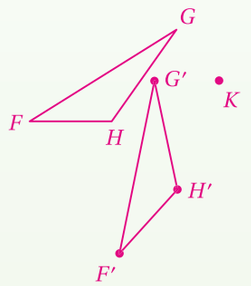
التقويم التكويني

استعمل التمارين 4–1؛ للتأكد من فهم الطلبة.

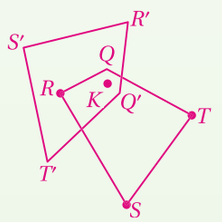
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

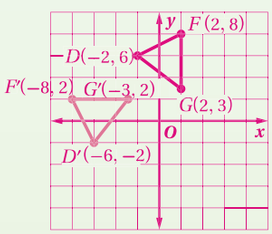
1)



2)



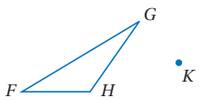
3)



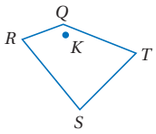
تأكـد

المثال 1 استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) 45° انظر الهامش .

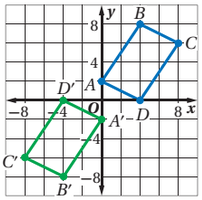


2) 240° انظر الهامش .



المثال 2 **3)** إحداثيات رؤوس المثلث DFG هي: $G(2, 3)$, $F(2, 8)$, $D(-2, 6)$ ، مثّل بيانيًّا $\triangle DFG$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية 270° حول نقطة الأصل . انظر الهامش .

المثال 3 **4)** **اختيار من متعدد:** الشكل المجاور يبيّن الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل.



ما قياس زاوية الدوران؟ **B**

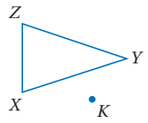
A 90° **B** 180°

C 270° **D** 360°

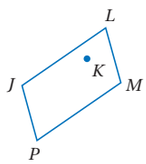
تدرب وحل المسائل

المثال 1 استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ ممَّا يأتي:

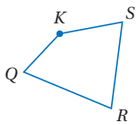
5) 90°



6) 145°



7) 260°



5–7) انظر ملحق الإجابات.

المثالان 2, 3 مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ ممَّا يأتي:

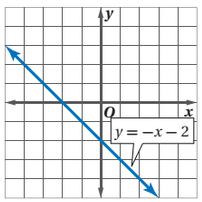
8) المعين $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(-3, 4), X(0, 7), Y(3, 4), Z(0, 1)$ ، 90°

9) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(2, 4), G(5, 6), H(7, 2)$ ، 180°

10) متوازي الأضلاع $MPQV$ الذي إحداثيات رؤوسه: $M(-6, 3), P(-2, 3), Q(-3, -2), V(-7, -2)$ ، 270°.

8–10) انظر ملحق الإجابات.

جبر: أوجد معادلة صورة المستقيم $y = -x - 2$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ من الأسئلة الآتية، ثم صِفِ العلاقة بين المستقيم الأصلي وصورته.



11) 90°

12) 180°

13) 270°

14) 360°

11) $y = x - 2$ ؛ متعامدان

12) $y = -x + 2$ ؛ متوازيان

13) $y = x + 2$ ؛ متعامدان

14) $y = -x - 2$ ؛ على استقامةٍ واحدةٍ.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	10–5 ، 31–20
ضمن ضمن المتوسط	10–5 فردي ، 19–11 فردي
فوق فوق المتوسط	31–11 ، (اختياري: 34–32)

جبر: أوجد معادلة صورة المستقيم الناتجة عن دورانه بالزاوية المحددة حول نقطة تقاطعه مع المحور x وحول نقطة تقاطعه مع المحور y في كلٍّ ممَّا يأتي:

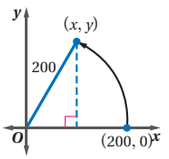
15) $90°$ ، $y = x - 5$ **16)** $180°$ ، $y = 2x + 4$ **17)** $270°$ ، $y = 3x - 2$



الربط مع الحياة

تتحمل إطارات الدراجات ما يصل إلى 400 مرّة من وزنها، ولا تتحطم إلا تحت حمل يعادل 700 مرّة من وزنها.

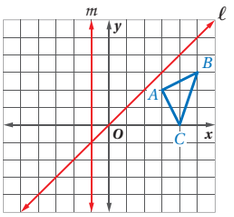
18) سباق الدراجات: يشارك سليمان وعبد الله في سباق دراجات على مسار دائري الشكل نصف قطره 200 ft



a) إذا بدأ السباق من النقطة $(200, 0)$ وأتمَّ الاثنان دورة واحدة في 30 ثانيةً، فما إحداثيات موقعهما بعد 5 ثوانٍ؟ **$(100, 173.2)$**

b) افترض أن السباق يتكون من 50 دورةً، وأن سليمان استمر بالسرعة نفسها. إذا أنهى عبد الله مسافة السباق في 26.2 دقيقةً، فمن الفائز؟ **سليمان؛ 26.2 دقيقة < 25 دقيقة**

19) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستستقصي الانعكاس حول مستقيمين متقاطعين.



a) هندسيًّا: في المستوى الإحداثي المجاور، رسم $\triangle ABC$ والمستقيمان المتقاطعان ℓ, m.
ارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ.
وسمّها $\triangle A'B'C'$، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m. وسمّها $\triangle A''B''C''$. **انظر ملحق الإجابات.**

إرشادات للدراسة

علاقة الدوران بالانعكاس:
إن إجراء انعكاسين متعاقبين حول مستقيمين متقاطعين يمثل دورانًا حول نقطة تقاطع المستقيمين.

b) هندسيًّا: كرِّر العملية السابقة مرتين في رُبعين مختلفين، سمّ المثلث الثاني DEF ، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين p, n. وسمّ المثلث الثالث MNP، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين q, r. **انظر ملحق الإجابات.**

c) جدوليًّا: قِسْ زاوية الدوران لكل مثلثٍ حول نقطة تقاطع المستقيمين، وانسخ الجدول الآتي وأكمله.

قياس الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين		قياس زاوية الدوران بين الشكلين	
ℓ, m	**45°**	$\triangle ABC, \triangle A''B''C''$	**90°**
n, p	**90°**	$\triangle DEF, \triangle D''E''F''$	**180°**
q, r	**45°**	$\triangle MNP, \triangle M''N''P''$	**90°**

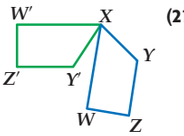
d) لفظيًّا: اكتب تخمينًا حول قياس زاوية الدوران الذي تحصل عليه عند إجراء انعكاسين متعاقبين للشكل حول مستقيمين متقاطعين.

مسائل مهارات التفكير العليا

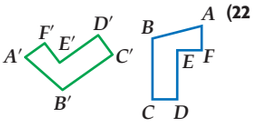
20) تحدٍّ: إحداثيًّا النقطة C هما $C(5, 5)$، وإحداثيًّا صورتها الناتجة عن دوران بزاوية $100°$ حول نقطة معينة هما $C'(-5, 7.5)$، أوجد إحداثيَّي مركز الدوران. وضّح إجابتك. **انظر الهامش.**

يظهر في كلٍّ من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن دوران حول النقطة P، انسخ في دفترك كلًّا من الشكلين وحدِّد موقع النقطة P ، ثم أوجد قياس زاوية الدوران. **22–21) انظر ملحق الإجابات.**

21)



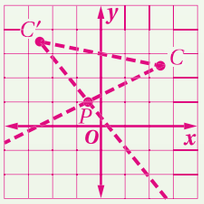
22)



تمثيلات متعددة: في السؤال 19، يستعمل الطلاب التمثيل الهندسي والتمثيل البياني والجداول والوصف اللفظي؛ لاستقصاء انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين.

إجابة:

20) إجابة ممكنة: $(2, -1)$ ؛ بما أن $\triangle CC'P$ متطابق الضلعين، وزاوية رأسه تساوي زاوية الدوران، فإن كلًّا من $m\angle PCC'$ و $m\angle PC'C$ يساوي $40°$؛ لأن زاويتَي القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، وعندما ترسم زاوية قياسها $40°$ عند الرأس C، وزاوية قياسها $40°$ عند الرأس C'، يتقاطع نصفا المستقيمين اللذين يكوِّنان هاتين الزاويتين عند مركز الدوران؛ أيْ عند النقطة $(2, -1)$.



15) حول نقطة تقاطعه مع المحور x : $y = -x + 5$ ،
حول نقطة تقاطعه مع المحور y : $y = -x - 5$

16) حول نقطة تقاطعه مع المحور x : $y = 2x + 4$ ،
حول نقطة تقاطعه مع المحور y : $y = 2x + 4$

17) حول نقطة تقاطعه مع المحور x : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$
حول نقطة تقاطعه مع المحور y : $y = -\frac{1}{3}x - 2$

19d) إجابة ممكنة: قياس زاوية الدوران حول نقطة تقاطع المستقيمين يساوي مثلي قياس الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين .

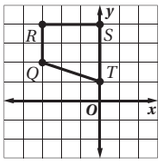
23) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي، وصف دورانًا زاويته لا تساوي الصفر، وتنطبق فيه الصورة والشكل الأصلي أحدهما على الآخر. **انظر الهامش.**

24) **تبرير:** هل يكافئ انعكاس شكل حول المحور x دورانًا حول نقطة الأصل للشكل نفسه بزاوية $180°$ ؟ وضِّح إجابتك. **انظر الهامش.**

25) **اكتب:** هل تبقى نقاط ثابتة في الدوران دائمًا أو أحيانًا أو لا تبقى أي نقاطٍ ثابتةٍ أبدًا؟ **انظر الهامش.**

تدريب على اختبار

26) ما الدوران الذي يُجرى على شبه المنحرف $QRST$ لينقل الرأس R إلى $R'(4, 3)$؟ **D**



A $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

B $185°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

C $180°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

D $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

27) يرتكز سُلَّم طوله 18 ft على حائط رأسي وأرض أفقية، إذا كان أسفل السلم يبعد 8 ft عن الحائط، فما ارتفاع رأس السلم عن الأرض مقربًا إلى أقرب عُشر قدمٍ؟ **B**

A 10.0 ft

B 16.1 ft

C 19.7 ft

D 26.0 ft

مراجعة تراكمية

28) **براكين:** تحركت سُحُب من الغبار والغازات المنبعثة من بركان مسافة 64 km غربًا و48 km شمالًا. ارسم شكلًا يوضح الإزاحة التي وقعت على حُبيبات الغبار، ثم أوجد طول أقصر مسار ينقل الغبار إلى الموقع نفسه. (الدرس 2-7) **انظر الهامش.**

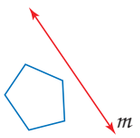


ارسم صورة المضلع الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 1-7)

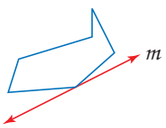
29) **انظر الهامش.**



30) **انظر الهامش.**



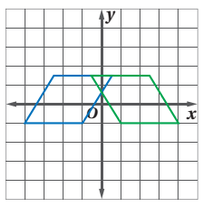
31) **انظر الهامش.**



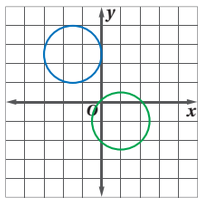
استعد للدرس اللاحق

صنِّف التحويل المبيَّن في كلٍّ من الأشكال الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران.

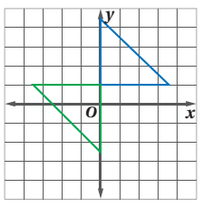
32) انعكاس



33) دوران



34) انعكاس أو إزاحة أو دوران



4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقرة توضح كيف ساعدهم درس الإزاحة (الانسحاب) على استيعاب مفهوم الدوران.

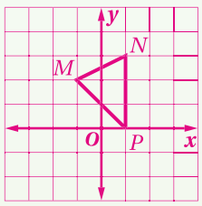
التقويم التكويني

تحقق من استيعاب الطلاب الدرس 3–7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2 ، (49).

إجابات:

23) إجابة ممكنة:

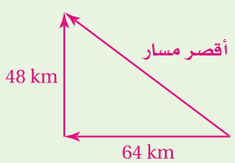


دوران بزاوية $360°$ حول نقطة الأصل

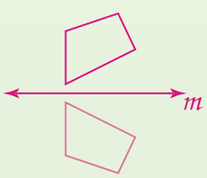
24) لا؛ إجابة ممكنة: عندما يُعكس الشكل حول المحور x، يبقى الإحداثي x ثابتًا وتتغير إشارة الإحداثي y، وعندما يتم تدوير الشكل نفسه بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل، تتغير إشارتا الإحداثيين x و y؛ لذا فإن لهذين التحويلين صورتين مختلفتين.

25) تبقى في الشكل نقاط ثابتة أحيانًا؛ إجابة ممكنة: عندما يكون مركز الدوران إحدى نقاط الشكل، فإن هذه النقطة تبقى ثابتة عند تدوير الشكل. وعندما يكون مركز الدوران نقطة ليست واقعة عليه، فلن تبقى أي نقطة ثابتة نتيجة الدوران.

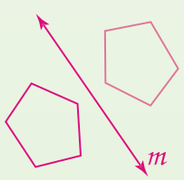
28) 80 km ؛



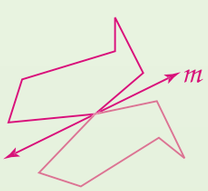
29)



30)



31)





مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 7

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

7-3 تدريبات إعادة التعليم

الدوران

رسم الأشكال الناتجة عن الدوران:

الدوران تحويل هندسيّ تدور به كلّ نقطة من نقاط الشكل بزاوية معينة $x°$، وفي اتجاه معيّن حول نقطةٍ ثابتةٍ تُسمّى **مركز الدوران**، وتنتقل النقطة A بالدوران إلى A' بحيث:

- إذا كانت A هي مركز الدوران، فإن صورتها تكون النقطة نفسها.
- إذا كانت النقطة A غير مركز الدوران، فإن النقطة A وصورتها A' تبعدان المسافة نفسها عن مركز الدوران، والزاوية المتشكلة من A و A' ومركز الدوران تسمى **زاوية الدوران**، وقياسها يساوي $x°$.

مثال استعمل مثلثةً ومسطرةً لرسم صورة المربع $LMNO$ الناتجة عن دورانٍ بزاوية $110°$ حول النقطة P.



الخطوة 1: ارسم قطعةً مستقيمةً من الرأس L إلى النقطة P.



الخطوة 2: ارسم زاويةً قياسها $110°$، بحيث تكون PL أحد ضلعيها.



الخطوة 3: استعمل مسطرةً لتعيين L' على الضلع الثاني، بحيث يكون $PL' = PL$.

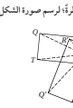


الخطوة 4: كرّر الخطوات 3–1 للرؤوس M, N, O، ثم ارسم المربع $L'M'N'O'$.

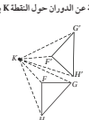
تمارين

استعمل مثلثةً ومسطرةً، لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ ممّا يأتي:

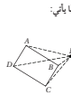
1) $75°$



2) $45°$



3) $135°$



تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

7-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الدوران

رسم الصورة الناتجة عن الدوران في المستوى الإحداثي:

يمكنك استعمال القواعد الآتية لتحديد صورة نقطة عندما يتم تدويرها بزاوية $90°$ أو $180°$ أو $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

زاوية الدوران	الإجراءات	الرموز
$90°$	اضرب الإحداثي y في (-1)، ثم بدّل موقعي الإحداثيّين x, y	$(x, y) \rightarrow (-y, x)$
$180°$	اضرب كلًّا من الإحداثيّين y, x في (-1)	$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
$270°$	اضرب الإحداثي x في (-1)، ثم بدّل موقعي الإحداثيّين y, x	$(x, y) \rightarrow (y, -x)$

مثال إحداثيات رؤوس $\square WXYZ$ هي:
$W(-2, 4), X(3, 6), Y(5, 2), Z(0, 0)$. مثل بيانيًّا $\square WXYZ$ وصورته الناتجة عن دورانٍ بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل.

اضرب الإحداثي x لكل رأس في (-1)، ثم بدّل الإحداثيين.

$(x, y) \rightarrow (y, -x)$
$W(-2, 4) \rightarrow W'(4, 2)$
$X(3, 6) \rightarrow X'(6, -3)$
$Y(5, 2) \rightarrow Y'(2, -5)$
$Z(0, 0) \rightarrow Z'(0, 0)$

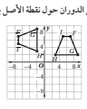


ثم مثّل $\square WXYZ$ وصورته $\square W'X'Y'Z'$ في المستوى الإحداثي.

تمارين

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

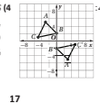
1) شبه المنحرف $FGHI$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(7, 7), G(9, 2), H(3, 2), I(5, 7)$، زاوية الدوران $90°$



2) $\triangle LMN$ الذي إحداثيات رؤوسه: $L(-1, -1), M(0, -4), N(-6, -2)$، زاوية الدوران $90°$



3) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-3, 5), B(0, 2), C(-5, -1)$، زاوية الدوران $180°$



4) $\square PQRS$ الذي إحداثيات رؤوسه: $P(4, 7), Q(6, 6), R(3, -2), S(1, -1)$، زاوية الدوران $270°$



تدريبات المهارات (18) — دون ضمن فوق

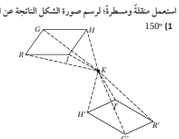
الاسم _____ التاريخ _____

7-3 تدريبات المهارات

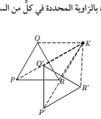
الدوران

استعمل مثلثةً ومسطرةً، لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة k بالزاوية المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) $150°$



2) $30°$



مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة بالدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في الأسئلة الآتية:

3) $\triangle STU$ الذي إحداثيات رؤوسه: $S(2, -1), T(5, 1), U(3, 3)$؛ زاوية الدوران $90°$



4) $\triangle DEF$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(-4, 3), E(1, 2), F(-3, -3)$؛ زاوية الدوران $180°$



5) الشكل الرباعي $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(-1, 8), X(0, 4), Y(-2, 1), X(-4, 3)$، زاوية الدوران $180°$



6) شبه المنحرف $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(9, 0), B(6, -7), C(3, -7), D(0, 0)$، زاوية الدوران $270°$



تدريبات حل المسألة (19) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-3 تدريبات حلّ المسألة

الدوران

1) بوصلة: تُشير إبرة بوصلة إلى اتجاه الشمال الغربي. إذا سرت في اتجاه الغرب وفق هذه البوصلة، فما زاوية الدوران في تنقلك إلى اتجاه الشمال الفعلي. $255°$

2) إعلانات: يصمّم ناتلٌ إعلانًا يحتوي على الحرف "M".



وقد قرّر أن يدوّر ذلك الحرف في اتجاه حركة عقارب الساعة بزاوية $60°$، لرسم صورة الحرف الناتجة عن هذا الدوران.



3) حروف: ارسم شكلًا على المستوى الإحداثي أدناه، بحيث يمثل الشكل وصورته بعد الدوران بزاويةٍ حول نقطةٍ حرفًا من حروف اللغة الإنجليزية. (إرشاد: اختر أي نقطة للدوران حولها). **إجابة ممكنة:**



إجابة أخرى ممكنة: H, N, Z

4) تصميم: صُمّم الإطار المعدني الداخلي لعجلات سيارةٍ، بحيث يقسم دوراتًا، أوجد زاوية الدوران بالدرجات التي تنقل النقطة Q إلى النقطة X. **$255°$ عكس اتجاه عقارب الساعة**



ترفيه: استعمل المعلومات التالية لحل السؤالين التاليين: تظهر في الشكل المجاور عجلة كبيرة دوّارة مثبت عليها 20 مقعدًا، تعدّ مثالًا على الدوران.



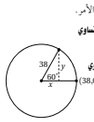
5) ما قياس زاوية الدوران التي تحرك المقعد 1 إلى مكان المقعد 5؟ **$72°$**

6) إذا دار المقعد 1 بزاوية مقدارها $144°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، فما رقم المقعد الذي يحل هذا المقعد محله؟ **المقعد 9**

7) معلم: يدور معلم دوّار $360°$ مستغرقًا ساعة و 15 دقيقة، إذا جلس عبدالعزيز على بُعد 38 ft من مركز المعلم، وبدأ المعلم الدوران من إحداثيات الموقع $(0, 38)$، فما إحداثيات مكان جلوس عبدالعزيز بعد 12.5 دقيقة؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

زاوية الدوران في الدقيقة الواحدة تساوي
$\frac{360°}{75} = 4.8°$

الزاوية المقطوعة خلال 12.5s تساوي
$(12.5)(4.8°) = 60°$



$\sin 60° = \frac{y}{38}$, $y = 32.9$
$\cos 60° = \frac{x}{38}$, $x = 19$
أي أن إحداثيات موقع عبدالعزيز بعد 12.5s تساوي $(19, 32.9)$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر الدرس 3 - 7

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (20)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

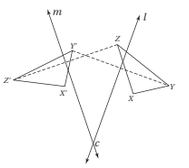
7-3 التدريبات الإثرائية

إيجاد مركز الدوران:

إذا علمت أن $\Delta X'Y'Z'$ صورة ΔXYZ بدوران، مركزه وقياس زاويته غير معلومين، فهل يمكنك أن تجدها؟

نعم. ارسم قطعتين مستقيمتين تصلان بين زوجين من الرؤوس المتناظرة.

لقد رُسمت القطعتان YY' و ZZ' في الشكل المجاور، ارسم العمود المنصف l للقطعة YY'، والعمود المنصف m للقطعة ZZ'، فتكون النقطة C التي يتقاطع عندها هذان المستقيمان هي مركز الدوران.

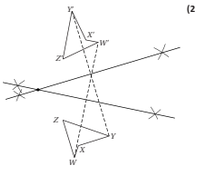


1) كيف يمكنك أن تجد قياس زاوية الدوران في الشكل السابق؟

أرسم $\angle XCX'$ (أو $\angle YCY'$ أو $\angle ZCZ'$) وأقيسها بالمنقلة.

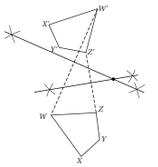
عيّن مركز الدوران الذي ينقل الشكل $WXYZ$ إلى $W'X'Y'Z'$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم أوجد قياس زاوية الدوران.

2)



مركز الدوران هو نقطة تقاطع العمودين المنصفين للقطعتين، وزاوية الدوران $100°$ تقريبًا.

3)



مركز الدوران هو نقطة تقاطع العمودين المنصفين للقطعتين، وزاوية الدوران $110°$ تقريبًا.

قد تختلف القطعتان اللتان يختارهما الطلاب لرسم العمود المنصف لكلٍّ منهما، انظر إجابات الطلاب.

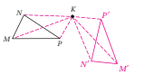
الصف، الأول الثانوي　20　الفصل 7، التحويلات الهندسية

كتاب التمارين (18)　دون ضمن فوق

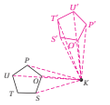
7-3 الدوران

استعمل مثلثاً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) $110°$

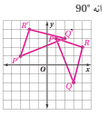


2) $280°$

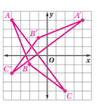


مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ ممّا يأتي:

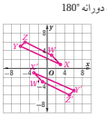
3) ΔPQR الذي إحداثيات رؤوسه: $P(1, 3), Q(3, -2) R(4, 2)$؛ وزاوية دورانه $90°$



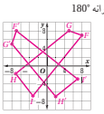
4) ΔABC الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-4, 4), B(-2, -1), C(2, -4)$؛ وزاوية دورانه $270°$



5) الرباعي $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(1,3), X(3,1), Y(-6,5), Z(-5,6)$؛ وزاوية دورانه $180°$



6) شبه المنحرف $FGHI$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(8, 7), G(5, 8), H(-3, -7), I(-7, -9)$؛ وزاوية دورانه $180°$



7) **ملاحة:** يُبحر قارب مسافة 30 km في اتجاه الشمال، و20 km في اتجاه الشرق، حدّد النقطة التي تمثل موقع القارب على المستوى الإحداثي وصورتها الناتجة عن الدوران بزاوية $90°$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل. **(20 , 30)، (30 , 20−)**

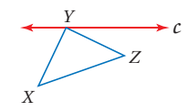
18

الفصل السابع: التحويلات الهندسية والتماثل

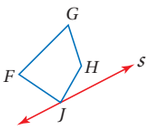
اختبار منتصف الفصل

ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المعطى. (الدرس 1-7) **1–2) انظر ملحق الإجابات.**

1)



2)

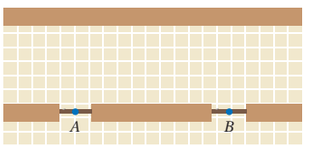


مثل كلًّا من الشكلين الآتيين بيانيًّا، ثم ارسم صورة كلٍّ منهما بالانعكاس المحدد: (الدرس 1-7) **3–5) انظر ملحق الإجابات.**

3) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$F(-4, 3), G(-2, 0), H(-1, 4)$،
بالانعكاس حول المحور y.

4) المعين $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$Q(2, 1), R(4, 3), S(6, 1), T(4, -1)$،
بالانعكاس حول المحور x.

5) احتفالات: وضع المشرفون على احتفال المدرسة طاولة قرب الحائط المقابل للمدخلين A, B لقاعة الاحتفال؛ لتقديم بعض الحلوى للحضور بعد نهاية الاحتفال. حدّد موقع النقطة P التي تمثل موقع الطاولة، بحيث يسير الأشخاص الذين يعبرون من المدخل A أو المدخل B المسافة نفسها حتى يصلوا إلى الطاولة مستخدمًا الانعكاس. (الدرس 1-7)



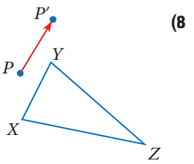
مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 2-7) **6–7) انظر ملحق الإجابات.**

6) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$A(0, 0), B(2, 1), C(1, -3)$، إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل.

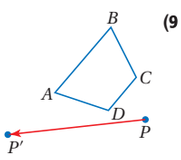
7) المستطيل $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$J(-4, 2), K(-4, -2), L(-1, -2), M(-1, 2)$،
إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أسفل.

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة P إلى P' في كلٍّ من السؤالين الآتيين. (الدرس 2-7) **8–9) انظر ملحق الإجابات.**

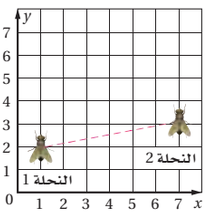
8)



9)

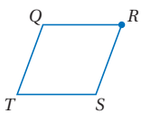


10) قصص مصورة: يكتب سامي قصة مصورة وهو يستعمل ورق الرسم البياني؛ ليتأكد من أن قياسات الأشكال التي يرسمها دقيقة. إذا رسم مستوى إحداثيًّا ونحلتين كما في الشكل المجاور، فما الإزاحة التي تنقل النحلة 1 إلى موقع النحلة 2؟ (الدرس 2-7) **6 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أعلى**

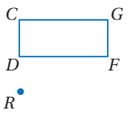


استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة R بالزاوية المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-7) **11–12) انظر الهامش.**

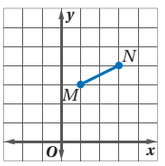
11) $45°$



12) $60°$



13) اختيار من متعدد: ما صورة النقطة M الناتجة عن الدوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل؟ (الدرس 3-7) **A**



A $(-3, 1)$ **C** $(-1, -3)$
B $(-3, -1)$ **D** $(3, 1)$

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحدّدة في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-7) **14–15) انظر الهامش.**

14) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$R(-3, 0), S(-1, -4), T(0, -1)$، وزاوية دورانه $90°$

15) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$J(-1, 2), K(-1, -2), L(3, -2), M(3, 2)$،
وزاوية دورانه $180°$

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يُجِيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدرس المُشار إليه بعد كل سؤال.

التقويم التكويني

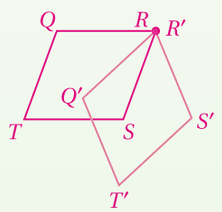
اختبار منتصف الفصل، ص (51).

المطويات متابعة المطويات

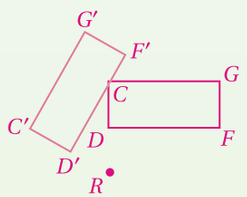
قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل، شجِّع الطلاب على مراجعة الملاحظات التي دوَّنوها في مطوياتهم حول الدروس 1-7 إلى 3-7

إجابات:

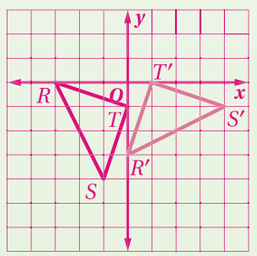
11)



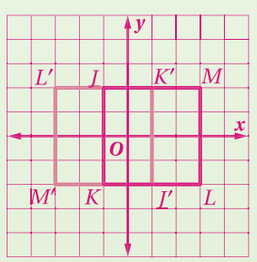
12)



14)



15)



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس 1-7 إلى 3-7		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف

استكشاف أثر إجراء عدة تحويلات هندسية على شكل هندسي.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة TI–nspire

إرشادات للتدريس

ينبغي أن يكون الطلاب قادرين على استعمال الحاسبة TI–nspire، امنح الطلاب الوقت الكافي؛ لاستكشاف الآلة والتدرّب عليها، وتابع أعمال الطلاب من خلال جهاز الحاسوب المربوط بالآلات، ووجِّههم لتنفيذ خطوات النشاط بالصورة الصحيحة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب إلى الطلاب أن ينفذوا النشاط بصورة فردية، ثم نظِّمهم في مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات ليقوموا بحل الأسئلة 1–6

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 1–6

3 التقويم

التقويم التكويني

اطلب إلى الطلاب أن يصفوا كيف يكون تركيب انعكاسين إما إزاحةً أو دورانًا؛ لتقويم مدى استيعاب الطلاب لتركيب انعكاسين.

من المحسوس إلى المجرد

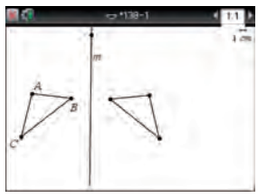
اطلب إلى الطلاب أن يستعملوا الهندسة الإحداثية؛ للتأكد من أن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين يكافئ إزاحة.

ستستعمل الحاسبة البيانية TI–nspire في هذا المعمل؛ لاستكشاف أثر إجراء عدة تحويلاتٍ هندسيةٍ على شكلٍ هندسيٍّ.

نشاط انعكاس شكل حول محورين رأسيين

الخطوة 1: ارسم مثلثًا وسمِّه.

- افتح الآلة بالضغط على on، ثم ارسم مثلثًا بالضغط على مفتاح: menu، ثم اختار 5:الأشكال الهندسية ومنها 2:مثلث، ثم الضغط على ثلاث مواقع لاختيار نقاط المثلث، قم بتحديد ثلاث نقاط يظهر المثلث، ثم اضغط esc
- سمّ المثلث ABC، وذلك بوضع المؤشر عند كل نقطة رأس، ثم الضغط على ctrl menu، ثم اختار 2:التسمية، وكتابة اسم النقطة بالضغط على shift ثم الحرف؛ لجعل الحروف كبيرة، والضغط على enter بعد كل تسمية.



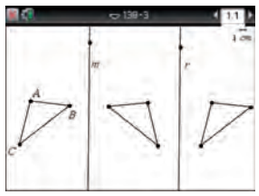
الخطوة 2: ارسم مستقيمًا عن يمين $\triangle ABC$ وسمِّه.

- ارسم مستقيمًا بالضغط على المفاتيح menu. ثم اختار 4:النقاط والمستقيمات ومنها 4:مستقيم ثم ارسم المستقيم بتحديد نقطة عن يمين $\triangle ABC$، ثم الضغط على enter ثم esc.
- سمّ المستقيم m بالضغط على المستقيم، ثم على المفاتيح ctrl menu، ثم اختار 2:التسمية وسمّه m واضغط enter.



الخطوة 3: ارسم انعكاسًا لِـ $\triangle ABC$ حول المستقيم m.

- ارسم انعكاس $\triangle ABC$ حول المستقيم m بالضغط على مفتاح menu، ثم اختار 8:التحويل الهندسي ومنها 2:الانعكاس، ثم الضغط على المستقيم والمثلث ليظهر الانعكاس.



الخطوة 4: ارسم مستقيمًا موازيًا لِـ m.

- ارسم مستقيمًا عن يمين المثلث الناتج بحيث يكون موازيًا لِـ m وسمِّه r بالضغط على مفتاح menu ثم اختار 7:الانشاء الهندسي ومنها 2:مستقيم موازي.
- اضغط على المستقيم m والنقطة المطلوب رسم r عندها عن يمين المثلث الناتج من الخطوة 3

الخطوة 5: كرّر العملية التي نفذتها في الخطوة 3؛ لرسم صورة الشكل الجديد بالانعكاس حول المستقيم r.

تحليل النتائج:

1) ما العلاقة بين الشكل الأصلي والشكل النهائي؟ إجابة ممكنة: الشكلان متطابقان ولهما الاتجاه نفسه.
2) ما التحويل الهندسي الذي يمكن استعماله للحصول على الشكل النهائي؟ الإزاحة
3) ماذا يحدث إذا حركت المستقيم m؟ وماذا يحدث إذا حركت المستقيم r؟ 3–6) انظر الهامش.
4) **خمّن:** إذا أُجري انعكاس لهذا الشكل حول مستقيمٍ ثالثٍ، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل للحصول على الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.
5) كرّر هذا النشاط مع مستقيمين متعامدين. ما التحويل الهندسي الذي يمكن أن يُستعمل للحصول على الشكل النهائي؟
6) **خمّن:** إذا أجريت انعكاسًا للشكل الناتج في السؤال 5 حول مستقيمٍ ثالثٍ يعامد المستقيم الثاني، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل لإنتاج الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.

إجابات:

3) إجابة ممكنة: إذا حركت المستقيم m، فستتحرك صورتا الشكل بالانعكاس، أما إذا حركت المستقيم r، فستتحرك الصورة النهائية فقط.

4) إجابة ممكنة: بما أنه سيكون اتجاه الشكل عكس اتجاهه الأصلي، فيمكن استعمال انعكاس أو دوران مركزه نقطة على المستقيم الثالث وبزاوية دوران 180°؛ لإنتاج الشكل النهائي بتحويلٍ هندسيٍّ واحدٍ.

5) يمكن استعمال دوران بزاوية 180° حول نقطة التقاطع؛ لإنتاج الشكل النهائي بتحويلٍ هندسيٍّ واحدٍ.

6) إجابة ممكنة: سيتطلب الأمر أن تستعمل الدوران؛ لإنتاج الشكل النهائي بتحويل هندسي واحد؛ لأن اتجاه الشكل النهائي لن يكون مماثلًا لاتجاه الشكل الأصلي.

7-4 تركيب التحويلات الهندسية
Composition of Transformations

لماذا؟



يوضح نمط آثار الأقدام على رمال الشاطئ في الصورة المجاورة إجراء تحويلين هندسيين مختلفين هما الإزاحة والانعكاس.

عند إجراء تحويل هندسي على شكل ما، ثم إجراء تحويل هندسي آخر على صورته، فإن التحويل الهندسي الذي ينقل الشكل الأصلي إلى الصورة النهائية هو تركيب لتحويلين هندسيين، ويُسمى **تحويلًا هندسيًّا مركبًا**. وأحد أنواع التحويلات الهندسية المركبة هو التحويل الهندسي الناتج عن تركيب إزاحة وانعكاس.

فيما سبق:

درستُ رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن الانعكاس والانسحاب والدوران.

(الدروس 7-1, 7-2, 7-3)

والآن:

- أرسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب تحويلين هندسيين أحدهما هو الانعكاس.
- أرسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين وحول مستقيمين متقاطعين.

المفردات:

التحويل الهندسي المركب
composite transformation
تركيب إزاحة انعكاس
glide reflection

www.obeikaneducation.com

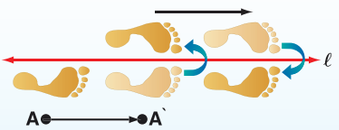
مفهوم أساسي — تركيب إزاحة انعكاس

أضف إلى مطويتك

تركيب إزاحة انعكاس هو تحويل هندسي مركب ينتج عن إزاحة يليها انعكاس في خطٍّ مستقيمٍ موازٍ لخط اتجاه الإزاحة.

مثالٌ:

تركيب إزاحة انعكاس المجاور هو تحويل هندسي مركب ينقل الشكل في اتجاه الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A′ مع انعكاسٍ حول المستقيم ℓ.



مثال 1 — تمثيل تركيب الإزاحة والانعكاس بيانيًّا

إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي: $J(6, -1), K(10, -2), L(5, -3)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته الناتجة عن إزاحةٍ مقدارها 4 وحداتٍ إلى أعلى ثم انعكاس حول المحور y.

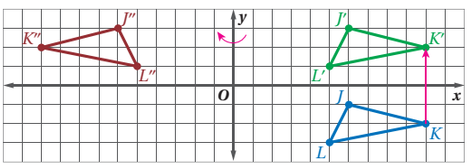
الخطوة 1: الإزاحة 4 وحدات إلى أعلى

$(x, y) \rightarrow (x, y + 4)$
$J(6, -1) \rightarrow J'(6, 3)$
$K(10, -2) \rightarrow K'(10, 2)$
$L(5, -3) \rightarrow L'(5, 1)$

الخطوة 2: الانعكاس حول المحور y

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
$J'(6, 3) \rightarrow J''(-6, 3)$
$K'(10, 2) \rightarrow K''(-10, 2)$
$L'(5, 1) \rightarrow L''(-5, 1)$

الخطوة 3: مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J''K''L''$.



إرشادات للدراسة

تمييز التحويلات الهندسية:
يستخدم السهم ← للدلالة على الانسحاب، بينما يستخدم السهم ↩ للدلالة على الانعكاس. أما صورة الصورة فستكون باللون البنيّ.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-4

رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن الانعكاس والانسحاب والدوران.

الدرس 7-4

رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب تحويلين هندسيين، أحدهما هو الانعكاس.

رسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين وحول مستقيمين متقاطعين.

ما بعد الدرس 7-4

تطبيق خصائص التحويلات الهندسية لتحليل تماثل الأشكال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

واسأل:

- لماذا لا يمكن اعتبار آثار الأقدام المتتابعة أنها تحويل هندسي واحد هو الإزاحة؟ ليس لآثار الأقدام المتتابعة الاتجاه نفسه.
- صِفْ تركيب التحويلين الهندسيَّين اللذين ينتجان نمط آثار الأقدام. يمكن أن ينتج نمط آثار الأقدام المتتابعة عن إزاحة ثم انعكاس.
- اذكر نمطًا آخر يمكن أن ينتج عن تركيب التحويلين الهندسيين نفسيهما؟ النمط الناشئ عن شخصٍ يسير على يديه على الرمال.

مصادر الدرس 7-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (144)	• تنويع التعليم ص (146, 144)	• تنويع التعليم ص (146, 144)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (19)	• كتاب التمارين ص (19)	• كتاب التمارين ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

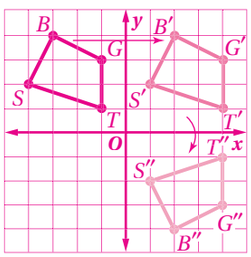
المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية تمثيل تركيب تحويلين هندسيين؛ أحدهما الانعكاس في المستوى الإحداثي.

التقويم التكويني

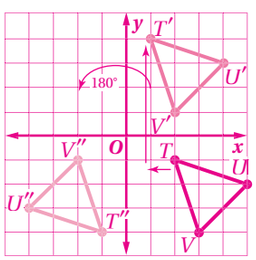
استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثالٍ؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $BGTS$ هي: $B(-3, 4)$, $G(-1, 3)$, $T(-1, 1)$, $S(-4, 2)$ مثّل بيانيًّا الشكل الرباعي $BGTS$ وصورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحداتٍ إلى اليمين، ثم انعكاس حول المحور x.



2 إحداثيات رؤوس $\triangle TUV$ هي: $T(2, -1)$, $U(5, -2)$, $V(3, -4)$. مثّل بيانيًّا $\triangle TUV$ وصورته الناتجة عن إزاحة بمقدار وحدةٍ واحدةٍ إلى اليسار و5 وحداتٍ إلى أعلى، ثم دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.



إرشادات للدراسة

تحويلات التطابق: إنّ الانعكاس والإزاحة والدوران والتحويلات المركبة منها، هي تحويلات تطابق أيضًا.

في المثال 1 تلاحظ أنّ: $\triangle JKL \cong \triangle J'K'L'$، و كذلك: $\triangle J'K'L' \cong \triangle J''K''L''$ ، وبحسب خاصية التعدي للتطابق فإن: $\triangle JKL \cong \triangle J''K''L''$. وهذا يقود إلى النظرية الآتية:

نظرية 7.1 — **تركيب تحويلات التطابق**

أضف إلى مطويتك

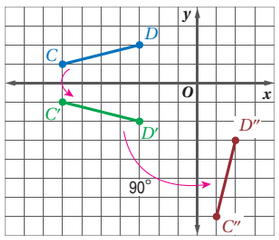
تركيب تحويلَي تطابق (أو أكثر) هو تحويل تطابق أيضًا.

ستبرهن النظرية 7.1 في السؤال 20

لذا فإن الصورة الناتجة عن تركيب أي تحويلين هندسيين من تحويلات التطابق كالإزاحة أو الانعكاس أو الدوران تكون مطابقةً للشكل الأصلي.

مثال 2 تمثيل تركيب تحويلَي تطابق بيانيًّا

إحداثيات طرفَي $\overline{CD}$ هما $C(-7, 1)$, $D(-3, 2)$، مثّل بيانيًّا $\overline{CD}$ وصورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.



الخطوة 1: الانعكاس حول المحور x

$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$C(-7, 1) \rightarrow C'(-7, -1)$

$D(-3, 2) \rightarrow D'(-3, -2)$

الخطوة 2: الدوران حول نقطة الأصل بزاوية $90°$

$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$C'(-7, -1) \rightarrow C''(1, -7)$

$D'(-3, -2) \rightarrow D''(2, -3)$

الخطوة 3: مثّل بيانيًّا $\overline{CD}$ وصورتها $\overline{C''D''}$.

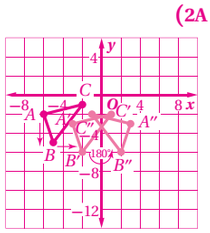
تحقق من فهمك

إحداثيات رؤوس المثلث PQR هي: $P(1, 1)$, $Q(2, 5)$, $R(4, 2)$، مثّل بيانيًّا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: **1A–1B) انظر ملحق إجابات**

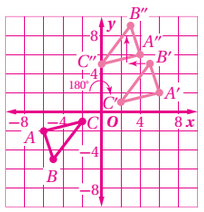
1A) إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x.

1B) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى أسفل و3 وحدات إلى اليسار، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$.

2A)



2B)



تحقق من فهمك

إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(-6, -2)$, $B(-5, -5)$, $C(-2, -1)$، مثّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن تركيب التحويلين الهندسيين بالترتيب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

2A) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y.

2B) دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل، ثم إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

تركيب انعكاسين: إن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين يكافئ إزاحة.

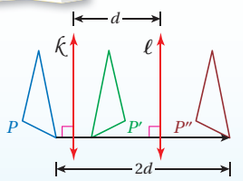
نظرية 7.2

أضف إلى مطويتك

تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين بأنه إزاحة، ويكون:

- اتجاهها عموديًا على كلٍّ من المستقيمين.
- مقدارها يساوي مثلَي المسافة بين المستقيمين المتوازيين.



ستبرهن النظرية 7.2 في السؤال 26

إن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين يكافئ دورانًا .

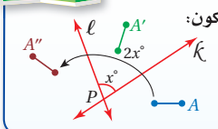
نظرية 7.3

أضف إلى مطويتك

تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين بأنه دوران، ويكون:

- مركزه هو نقطة تقاطع المستقيمين.
- قياس زاويته يساوي مثلَي قياس الزاوية التي يشكّلها تقاطع هذين المستقيمين.



ستبرهن النظرية 7.3 في السؤال 27

تنبيه!

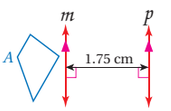
ترتيب التركيب: احرص على تركيب التحويلين الهندسيين بالترتيب المحدد في المسألة.

مثال 3

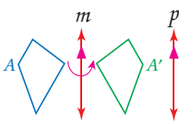
رسم الصورة الناتجة عن انعكاسين حول مستقيمين

ارسم صورة الشكل A الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m ثم حول المستقيم p ، ثم صف تحويلًا هندسيًا واحدًا ينقل A إلى A'' في كلٍّ ممَّا يأتي:

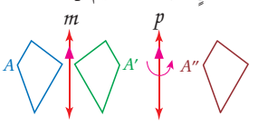
(a



الخطوة 1: ارسم صورة الشكل A الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m .

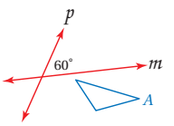


الخطوة 2: ارسم صورة الشكل A' الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم p.

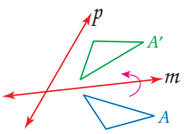


بناءً على النظرية 7.2، فإن تركيب هذين الانعكاسين حول المستقيمين المتوازيين m, p يكافئ إزاحةً أفقيةً إلى اليمين مقدارها $2 \times 1.75 = 3.5$ cm

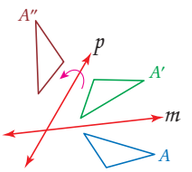
(b



الخطوة 1:



الخطوة 2:



بناءً على النظرية 7.3، فإن تركيب هذين الانعكاسين حول المستقيمين المتقاطعين m, p يكافئ دورانًا بزاوية تساوي $2 \times 60°$ أي $120°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة تقاطع المستقيمين m, p



تاريخ الرياضيات

فيلكس كلاين
(1849–1925)
هو عالم رياضيات ألماني عرّف الهندسة بأنها دراسة خصائص الفضاء التي تبقى دون تغيير تحت تأثير مجموعة من التحويلات الهندسية.

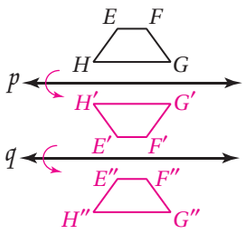
تركيب انعكاسين

المثال 3 يبيّن كيفية رسم صورة شكل بانعكاسين حول مستقيمين متوازيين أو مستقيمين متقاطعين.

المثال 4 يبيّن طريقة تعيين التحويلات الهندسية في أنماطٍ من واقع الحياة.

مثال إضافي

3 ارسم صورة المضلع $EFGH$، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم p متبوعًا بانعكاسٍ حول المستقيم q، ثم صِفْ تحويلًا هندسيًا واحدًا ينقل $EFGH$ إلى $E''F''G''H''$.



إجابة ممكنة: إزاحة إلى أسفل

المحتوى الرياضي

شروط: وضح للطلاب أن تركيب الانعكاسات حول مستقيماتٍ متوازيةٍ، يكافئ إزاحة إذا كان عدد المستقيمات المتوازية زوجيًّا فقط.

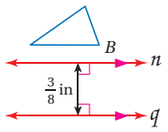
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم مربعًا في المستوى الإحداثي، واكتب 3 تحويلات هندسية مختلفة على السبورة (فعلى سبيل المثال: انعكاس حول المحور x، إزاحة 3 وحدات إلى أعلى، ودوران بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل). اطلب إلى الطلاب أن يختاروا اثنين من هذه التحويلات، وأن يرسموا صورة المربع الناتجة عن تطبيقهما عليه واحدًا تلو الآخر، ثم اختر بعض الطلاب واطلب إليهم أن يرسموا تحويلاتهم ويشرحوها. ناقشهم إن كان لترتيب إجراء التحويلين تأثير في الصورة النهائية أم لا.

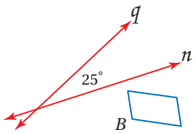
تحقق من فهمك

ارسم صورة الشكل B الناتجة عن انعكاس حول المستقيم n ثم حول المستقيم q، ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل B إلى B''.

(3A)



(3B)



يتم إنشاء كثيرٍ من الأنماط في الحياة الواقعية باستعمال تركيب التحويلات الهندسية.

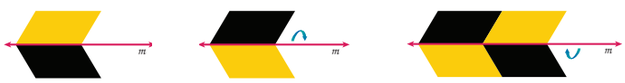
مثال 4 من واقع الحياة — وصف التحويلات الهندسية

أنماط: صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا، يمكن استعماله لتكوين النمط في كلٍّ ممَّا يأتي:

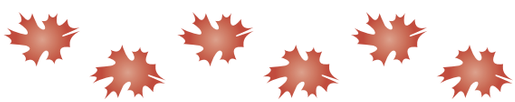
(a)



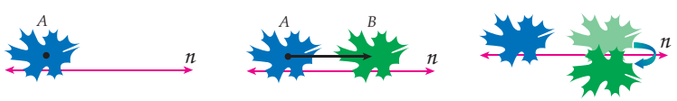
يمكن تكوين هذا النمط بتركيب انعكاس وإزاحة الشكلين المتقابلين (وحدة النمط)، بتركيب انعكاس حول المستقيم m، ثم إزاحة إلى اليمين موازية للمستقيم m كما في الشكل أدناه. لاحظ أن المستقيم m يمرُّ في منتصف الشكل الأصلي (وحدة النمط).



(b)



تمَّ تكوين هذا النمط بتركيب إزاحة وانعكاس؛ أي أنه يمكن تكوينه بتركيب إزاحة إلى اليمين موازية للمستقيم n تنقل A إلى B متبوعةً بانعكاسٍ حول المستقيم n كما في الشكل التالي.



تحقق من فهمك

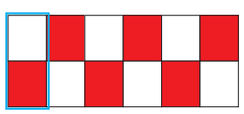
4) سجاد: صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين النمط في كل ممَّا يأتي:

(A)



تركيب إنعكاس وإزاحة

(B)



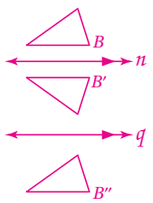
تركيب إنعكاس وإزاحة



الربط مع الحياة

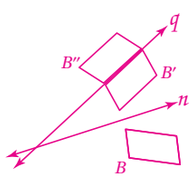
تستعمل تحويلات هندسية مركبة عند تصميم السجاد، لاحظ تكرار الجزء نفسه في إطار السجادة أعلاه.

(3A)



إزاحة في اتجاه عمودي المستقيمين إلى أسفل مسافة $\frac{3}{4}$ in

(3B)

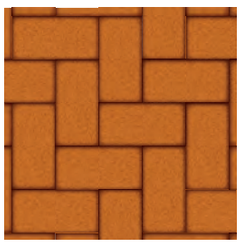


دوران بزاوية 50° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة تقاطع المستقيمين q وَ n

مثال إضافي

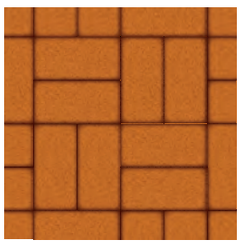
4 مناظر طبيعية: صِفْ التحويلات الهندسية التي تم تركيبها لإنشاء نمط البلاط المبين في كلٍّ من الشكلين الآتيين.

(a)



تم تكوين هذا النمط باستعمال إزاحات ودورانات متتابعة.

(b)



تم تكوين هذا النمط بدورانات متتابعة لبلاطتين، أو بتركيب إزاحات ودورانات بالتناوب.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون: اطلب إلى الطلاب أن يجمعوا بين جمال الفن والهندسة في تصميم شكلٍ، ثم إجراء تحويلات هندسية تتضمن تركيب تحويلات هندسية مختلفة عليه، وتنفيذ ذلك في ورقةٍ كبيرةٍ، ثم اطلب إليهم أن يُكملوا المشروع الفني بإضافة الألوان وبعض الزينة تبعًا لاختيارهم.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

تركيب التحويلات الهندسية

الإزاحة	الدوران
تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين.	تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين.

تأكد

المثال 1 إحداثيات رؤوس المثلث CDE هي: $E(-1,-1)$, $D(-2,-5)$, $C(-5,-1)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle CDE$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: **1–3)** انظر الهامش.

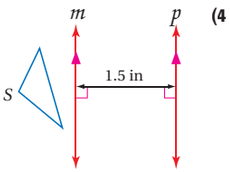
1) إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين، ثم انعكاس حول المحور x

2) إزاحة مقدارها 6 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y

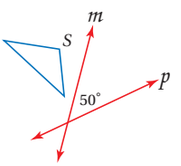
المثال 2 **3)** إحداثيات طرفَي $\overline{JK}$ هما $J(2,5)$, $K(6,5)$، مثِّل بيانيًّا $\overline{JK}$ وصورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x، ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

المثال 3 ارسم صورة الشكل S الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m ثم حول المستقيم p، ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل S إلى S''. **4–5)** انظر ملحق الإجابات.

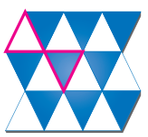
4)



5)



المثال 4 **6)** **أنماط البلاط:** صنع راشدٌ نمطًا من بلاطٍ على شكل مثلث متطابق الضلعين، صِفِ التحويل الهندسي المركّب الذي يمكن استعماله لتكوين هذا النمط.



انعكاس وإزاحة.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي: **7–10)** انظر ملحق الإجابات.

7) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $R(1,-4)$, $S(6,-4)$, $T(5,-1)$، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x

8) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(2,8)$, $F(1,2)$, $G(4,6)$، إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المستقيم $y=x$

المثال 2 مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي:

9) $\overline{WX}$، حيث $W(-4,6)$, $X(-4,1)$، انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

10) $\overline{RS}$، حيث $R(2,-1)$, $S(6,-5)$، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار ووحدتان إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y

3 التدريب

التقويم التكويني

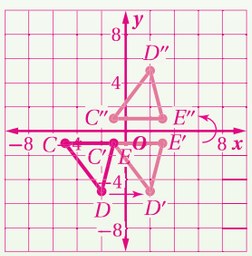
استعمل التمارين 6–1؛ للتحقق من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل سؤال

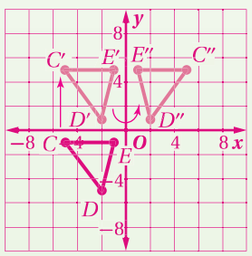
الورق الشفاف: قد يكون من المفيد وجود الورق الشفاف مع الطلاب عند حل الأسئلة 5, 11, 12

إجابات:

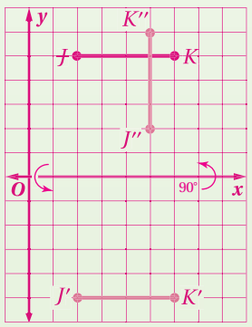
1)



2)



3)

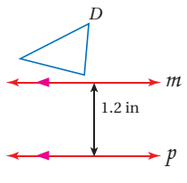


تنويع الواجبات المنزلية

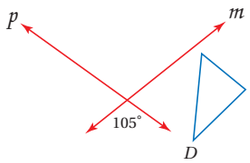
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	16–7 ، 32 ، 42–29
ضمن ضمن المتوسط	19–7 فردي ، 21–20 ، 25 ، 27 ، 42–29
فوق فوق المتوسط	39–17 ، (اختياري: 42–40)

المثال 3 ارسم صورة الشكل D الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم m ثم حول المستقيم p. ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل D إلى D''. (11, 12) انظر الهامش

(11)

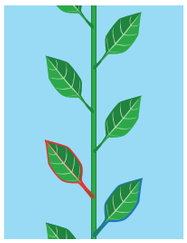


(12)

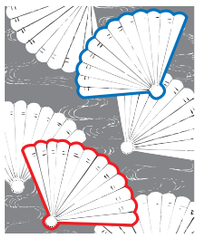


المثال 4 صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين نمط الأقمشة في كلٍّ ممَّا يأتي:

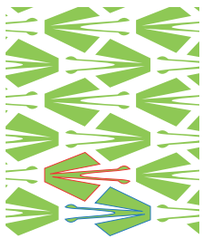
(13)



(14)



(15)

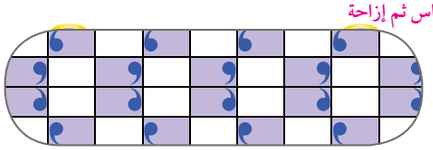


13) إزاحة ثم انعكاس

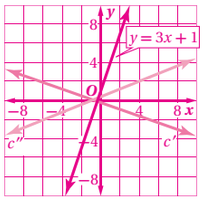
14) انعكاس ثم إزاحة

15) إزاحة ثم انعكاس

(16) **زلّاجات:** رسم صالح على زلاجته نمطًا، ما التحويل الهندسي المركب الذي استعمله صالح لرسم هذا النمط؟ انعكاس ثم إزاحة

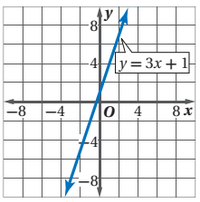


(17)

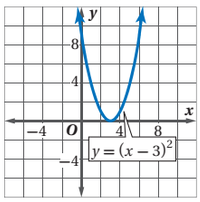


جبر: مثّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد:

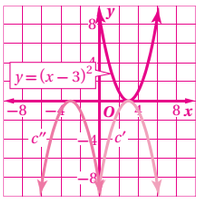
(17) دوران بزاوية °90 حول نقطة الأصل
انعكاس حول المحور x



(18) انعكاس حول المحور x
انعكاس حول المحور y



(18)

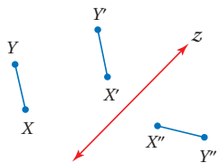


(19) أوجد إحداثيات رؤوس $\triangle A''B''C''$ الناتج عن انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية °180 حول نقطة الأصل للمثلث $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(-3, 1), B(-2, 3), C(-1, 0)$.

(20) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للحالة الآتية من نظرية 7.1 تركيب تحويلات التطابق. $A''(3, 1), B''(2, 3), C''(1, 0)$ انظر الهامش.

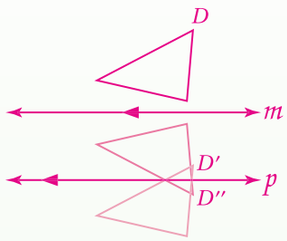
المعطيات: تنقل الإزاحة بمقدار a وحدةً إلى اليمين وb وحدةً إلى أعلى النقطة X إلى X' والنقطة Y إلى Y'.
وينقل الانعكاس حول المستقيم z النقطة X' إلى X'' والنقطة Y' إلى Y''.

المطلوب: $\overline{XY} \cong \overline{X''Y''}$



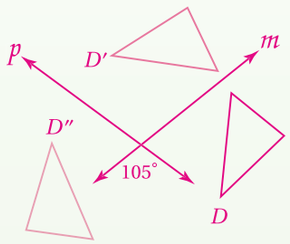
إجابات:

(11)



إزاحة في اتجاهٍ عمودي على المستقيم m, p إلى أسفل بمقدار 2.4 بوصة.

(12)



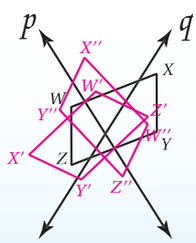
دوران بزاوية °210 حول نقطة تقاطع المستقيمين m و p

(20) **البرهان:** تعلم أن الإزاحة بمقدار a وحدة إلى اليمين وb وحدة إلى أعلى، تنقل X إلى X'، وتنقل Y إلى Y'. ومن تعريف الإزاحة نعلم أن النقطتين X و Y تحركتا المسافة نفسها في الاتجاه نفسه، ولذلك فإن $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$. كما نعلم أن الانعكاس حول المستقيم z ينقل X' إلى X''، وينقل Y' إلى Y''. وباستعمال تعريف الانعكاس، فإن X' و X'' على بعدين متساويين من المستقيم z، وكذلك Y' و Y'' على بعدين متساويين من المستقيم z. إذن $\overline{X'Y'} \cong \overline{X''Y''}$. ومن خاصية التعدي للتطابق ينتج أن $\overline{XY} \cong \overline{X''Y''}$.

تنويع التعليم

ضمن فوق

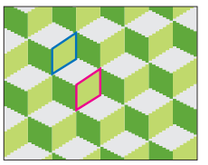
توسّع: أوجد صورة متوازي الأضلاع $WXYZ$ الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم p متبوعًا بدوران زاويته °270 عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة تقاطع المستقيمين p وَ q.



4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقرة تبيِّن كيف ساعدتهم دراسة كلٍّ من التحويلات الهندسية على تعلُّم تركيب التحويلات الهندسية.

21) حياكة: تحيك خولة منديلًا باستعمال النمط الظاهر في الشكل المجاور، صف تركيب التحويلات الهندسية الذي تستعمله خولة لإنشاء هذا النمط. تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين.



آثار الأقدام: استعن بمعلومات الربط مع الحياة، وصِفِ التحويل المركّب من إزاحة وانعكاس الذي يمكن استعماله للتنبؤ بموقع أثر القدم اللاحق في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

22) طائر الحبش إزاحة بمقدار 5.5 in إلى اليمين، وانعكاس حول المستقيم الذي يفصل الآثار اليمنى عن اليسرى.



23) البطة إزاحة بمقدار 2.5 in إلى اليمين، وانعكاس حول المستقيم الذي يفصل الآثار اليمنى عن اليسرى



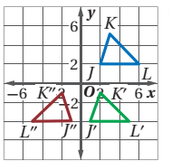


الربط مع الحياة

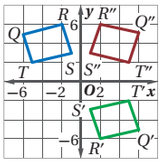
طول خطوة الحيوان يساوي المسافة بين أثري قدمٍ متتاليين. فمتوسط طول خطوة طائر الحبش 11 in تقريبًا، ومتوسط طول خطوة البطة 5 in تقريبًا.

صِفِ التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل الأزرق إلى البني في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

24) إجابة ممكنة: إزاحة وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x-1, y-6)$، وانعكاس حول المحور y.



25) إجابة ممكنة: دوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل وانعكاس حول المحور x.



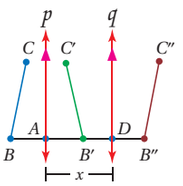
26) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 7.2 (26, 27) انظر ملحق الإجابات.

المعطيات: ينقل الانعكاس حول المستقيم p القطعة $\overline{BC}$ إلى $\overline{B'C'}$، وينقل الانعكاس حول المستقيم q القطعة $\overline{B'C'}$ إلى $\overline{B''C''}$.

$p \parallel q, AD = x$.

المطلوب: a) $\overline{BB''} \perp p$, $\overline{BB''} \perp q$

b) $\overline{BB''} = 2x$



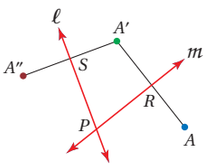
27) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 7.3

المعطيات: يتقاطع المستقيمان ℓ , m في النقطة P.

A نقطة لا تقع على أيٍّ من المستقيمين ℓ أو m.

المطلوب: a) إذا أُجري انعكاس للنقطة A حول المستقيم m، ثم أُجري انعكاس لصورتها حول المستقيم ℓ، فإن A'' تكون صورة A بدورانٍ حول النقطة P.

b) $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$



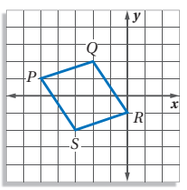
إرشادات للدراسة

مراجعة: عُد إلى الدرس 1–7 لمراجعة خصائص تطابق القطع المستقيمة.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) تحدٍّ: إذا أُزيح الشكل $PQRS$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أسفل، ثم عُكست الصورة حول المستقيم $y = -1$، وبعد ذلك تم تدوير الصورة الجديدة بزاوية 90° حول نقطة الأصل، فما إحداثيات رؤوس الشكل الناتج $P'''Q'''R'''S'''$؟

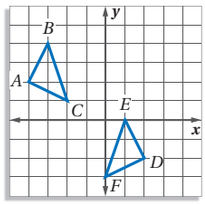
$P'''(1, -2), Q'''(2, 1), R'''(-1, 3), S'''(-2, 0)$



147 الدرس 4-7 تركيب التحويلات الهندسية

29) تبرير: إذا أُجري انعكاسان متعاقبان بشكلٍ ما؛ أحدهما حول المستقيم $y = x$، والآخر حول المحور x، فهل يؤثر ترتيب الانعكاسين في الصورة الناتجة؟ اشرح إجابتك. انظر ملحق الإجابات.

30) مسألة مفتوحة: صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتحويل $\triangle ABC$ إلى $\triangle DEF$ في الشكل المجاور.



31) تبرير: إذا أُخضع شكلٌ ما لدورانين، فهل لترتيب الدورانين تأثير في موقع الصورة الناتجة دائمًا، أو أحيانًا، أو ليس له تأثير أبدًا؟ انظر الهامش.

32) اكتب: هل تبقى أي نقاط ثابتةً في التحويلات الهندسية المركبة؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش.

تدريب على اختبار

33) ما صورة النقطة $A(4, 1)$ الناتجة عن انعكاس حول المستقيم $y = x$؟ **B**

A $(1, -4)$ **C** $(-1, 4)$

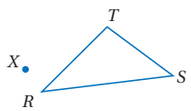
B $(1, 4)$ **D** $(-1, -4)$

34) إجابة قصيرة: إحداثيات طرفَي $\overline{CD}$ هما $C(2, 4)$ و $D(8, 7)$، إذا أُزيحت هذه القطعة المستقيمة بمقدار 6 وحدات إلى اليسار ووحدتين إلى أعلى، ثم عكست الصورة حول المحور y، فما إحداثيات D''؟ $(-2, 9)$

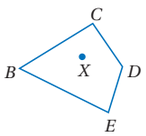
مراجعة تراكمية

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة X بالزاوية المبينة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 3-7) **35–37)** انظر الهامش.

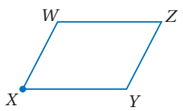
35) $60°$



36) $120°$



37) $180°$



مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحدّدة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-7) **38, 39)** انظر الهامش.

38) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $F(1, -4)$, $G(3, -1)$, $H(7, -1)$؛ إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و6 وحدات إلى أعلى.

39) الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-2, 7)$, $B(-1, 4)$, $C(2, 3)$, $D(2, 7)$؛ إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و5 وحدات إلى أسفل.

استعد للدرس اللاحق

يبيِّن كل من الأشكال الآتية الأصل والصورة الناتجة عن انعكاسٍ حول مستقيمٍ ما، ارسم محور الانعكاس. **40–42)** انظر الهامش.

40)



41)



42)

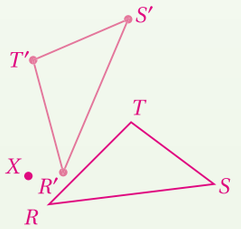


إجابات:

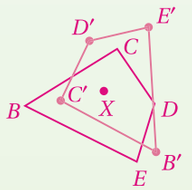
31) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: عندما يُجرى دورانان على شكلٍ ما، لا يكون لترتيبهما تأثير، عندما يكون للدورانين المركز نفسه.

32) إجابة ممكنة: لا توجد نقاط ثابتة في التحويلات الهندسية الناتجة عن تركيب إزاحة مع تحويل هندسي آخر؛ لأنّ الإزاحة تحرك جميع النقاط. في بعض التحويلات الهندسية المركبة، قد توجد نقاط ثابتة مثلًا عند تدوير شكل حول إحدى نقاطه بزاوية ما، ثم دورانه مرة أخرى بزاوية أخرى حول نفس النقطة. أو عند إجراء انعكاس لشكل ما حول مستقيم يمسه أو يقطعه في بعض النقاط، ثم إجراء دوران له حول إحدى نقاط تقاطعه مع المستقيم.

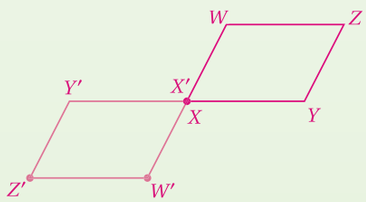
35)



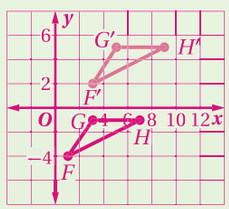
36)



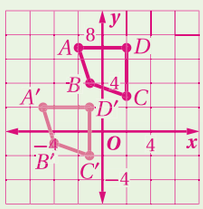
37)



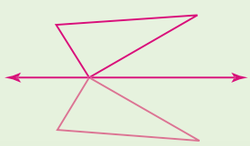
38)



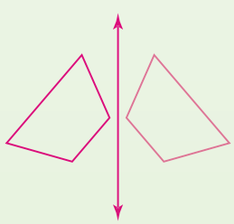
39)



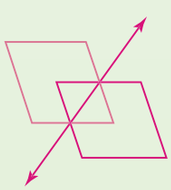
40)

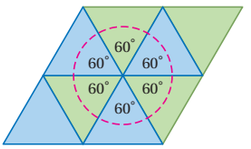


41)



42)





التبليط نمطٌ يتكون من شكل أو أكثر، يغطّي سطحًا من دون تقاطعات أو فراغات، ويكون مجموع قياسات الزوايا حول كل رأس في التبليط $360°$

و**التبليط المنتظم** هو التبليط الذي يُستعمل فيه نوع واحد فقط من المضلعات المنتظمة، ويمكن تبليط سطح بمضلع منتظم، إذا كان قياس زاويته الداخلية أحد عوامل العدد 360، ويمكن عمل تبليط باستعمال أكثر من نوع واحد من المضلعات المنتظمة، ويسمى التبليط الذي يتكون من مضلعين منتظمين أو أكثر **تبليطًا شبه منتظم**.

نشاط 1 التبليط المنتظم

حدِّد ما إذا كان استعمال كلٍّ من المضلعين المنتظمين الآتيين لتكوين تبليط في المستوى ممكنًا أم لا، فسِّر إجابتك.

a) مضلع سداسي

افترض أن قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم يساوي $x°$

$x = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$ صيغة الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم

$= \frac{(n-2)\cdot 180°}{6}$ $n = 6$

$= 120°$ بالتبسيط

وبما أن 120 أحد عوامل 360، فإنه يمكن استعمال المضلع السداسي المنتظم لتبليط المستوى.

b) مضلع عشاري

افترض أن قياس الزاوية الداخلية للعشاري المنتظم يساوي x.

$x = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$ صيغة الزاوية الداخلية للمضلع المنتظم

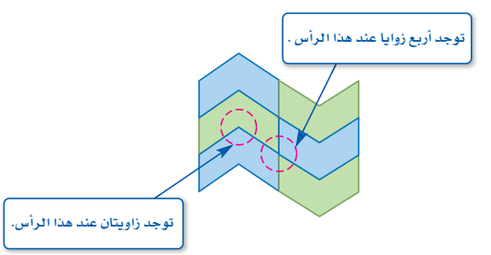
$= \frac{(n-2)\cdot 180°}{10}$ $n = 10$

$= 144$ بالتبسيط

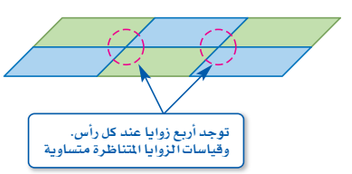
وبما أن 144 ليست من عوامل 360، إذن لا يمكن استعمال العشاري المنتظم لتبليط المستوى.

يقال: إن التبليط **متّسق** إذا احتوى الترتيب نفسه من الأشكال والزوايا عند كل رأس.

غير متسق



متسق



1 التركيز

الأهداف

- تعرّف التبليط المنتظم.
- إنشاء نماذج تبليط باستعمال التقنيات ومن دون استعمالها.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة TI–nspire

إرشادات للتدريس

قد يصعب على الطلاب إتمام هذا المعمل في حصة واحدة ، وبخاصة إن لم يعتادوا على استخدام الحاسبة TI–nspire، فقد تحتاج إلى حصتين لتنفيذ هذا المعمل.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزِّع الطلاب في مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم تنفيذ الأنشطة 3–1، ثم دعهم ينفِّذوا النشاط 4 بشكلٍ فردي.

واسأل:

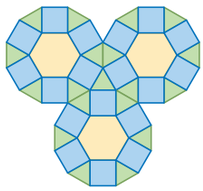
- لماذا يُعد 120 عاملًا للعدد 360؟
  120 عامل للعدد 360؛ لأن $120(3) = 360$
- كيف تحدِّد رؤوس نمط التبليط؟ أعيِّن المضلع المُستعمل في التبليط، فتكون رؤوس المضلع نفسها هي رؤوس نمط التبليط أيضًا.
- في الخطوة 2 من النشاط 3، هل يمكن استعمال زاوية دوران أخرى لتكوين نمط التبليط؟ لا؛ إذ يمكن أن تتداخل المثلثات.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حلّ الأسئلة 1–9

نشاط 2 تصنيف التبليط

حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأنماط الآتية تبليطًا أم لا، وإذا كان كذلك فصنّفه إلى منتظمٍ أو شبه منتظم أو غير منتظمٍ وإلى متسقٍ أو غير متسقٍ.

a)

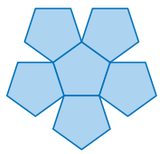


بما أنه لا توجد فراغات في الشكل، وليس هنالك تقاطعات، فإن هذا النمط يشكّل **تبليطًا**،

وهذا التبليط يتكون من أشكال سداسية منتظمة ومربعات ومثلثات متطابقة الأضلاع، إذن هو تبليط **شبه منتظم** .

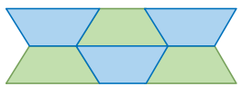
بما أنه عند بعض الرؤوس يوجد 5 زوايا، وعند بعضها 4 زوايا، ، إذن هذا التبليط **غير متسق**.

b)



توجد فراغات في الشكل فهذا النمط **ليس تبليطًا**.

c)



لا توجد فراغات ولا تقاطعات في هذا النمط فهو **تبليط** .

يتكون هذا التبليط من شبه منحرف، وهو مضلع **غير منتظم**؛ لذا فهذا التبليط **غير منتظم**، لكنه **متسق**؛ لأنه يحتوي على ترتيبات الأشكال نفسها والزوايا نفسها عند كل رأسٍ.

يمكن استعمال خصائص التبليط؛ لتصميم وإنشاء أشكال تبليط مختلفة.

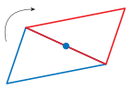
نشاط 3 رسم التبليط

ارسم مثلثًا واستعمله لإنشاء تبليط.

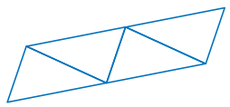
الخطوة 1: ارسم مثلثًا وعيّن نقطةً منتصف أحد أضلاعه.



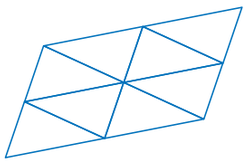
الخطوة 2: دوّر المثلث بزاوية 180° في اتجاه عقارب الساعة حول تلك النقطة.



الخطوة 3: اعمل إزاحة للمثلثين لتكوّن صفًّا.



الخطوة 4: اعمل إزاحة للصف لتكون تبليطًا.

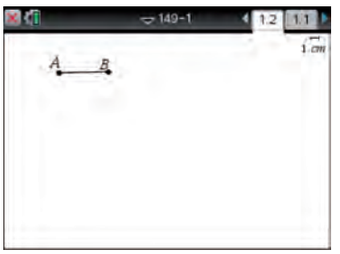


المحتوى الرياضي

الأشكال غير المنتظمة: يمكن استعمال الأشكال غير المنتظمة في التبليط، وفي هذه الحالة يصنف التبليط المتكوّن بأنه ليس منتظمًا، وليس شبه منتظم.

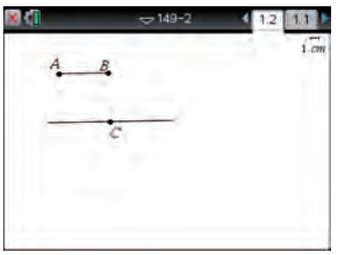
نشاط 4 إنشاء تبليط باستعمال الآلة الحاسبة البيانية TI-nspire

الخطوة 1: ارسم قطعةً مستقيمةً.



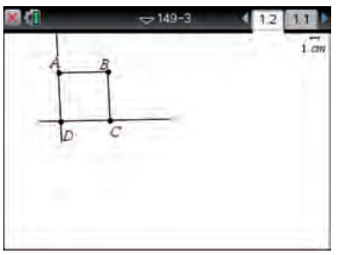
- افتح تطبيق الهندسة بالضغط على المفاتيح on
  ارسم قطعةً مستقيمةً بالضغط على مفتاح menu، ثم اختار
  4: النقاط والمستقيمات، ثم 5: قطعة مستقيمة، واضغط في مقعين لتظهر القطعة المستقيمة.
- سمّ القطعة المستقيمة التي رسمتها، بوضع المؤشر عند أحد طرفَيها، ثم اضغط menu واختار 2: التسمية ثم اضغط shift (ليكون الحرف كبيرًا) واكتب A، وبالمثل سمِّ الطرف الآخر B.

الخطوة 2: ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\overline{AB}$.



- ارسم نقطةً أسفل $\overline{AB}$، وذلك بالضغط على menu، ثم اختار
  4: النقاط والمستقيمات، ثم 1: نقطة في المستوى، ثم الضغط على الموقع المراد للنقطة C.
- سمّ النقطة المرسومة، بوضع المؤشر عند النقطة والضغط على menu ثم اختار 2: التسمية ثم الضغط على shift وكتابة C.
- ارسم مستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{AB}$ ويمر بالنقطة C، بالضغط على menu ثم اختار
  7: الانشاء الهندسي، ومنها 2: مستقيم موازي ثم الضغط على القطعة $\overline{AB}$ والنقطة C.

الخطوة 3: ارسم مستقيمًا موازيًا لـ $\overline{BC}$.



- ارسم القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ بالضغط على menu، ثم اختار
  4: النقاط والمستقيمات ثم 5: قطعة مستقيمة، ثم الضغط على النقطتين B, C.
- ارسم مستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{BC}$ ويمرُّ في A (بطريقة مماثلة لما ورد في الخطوة 2)، وسمّه $\overleftrightarrow{AD}$، (حيث D نقطة تقاطع المستقيم الموازي لِـ $\overline{AB}$ والمستقيم الموازي لِـ $\overline{BC}$)، وذلك بالضغط على مفتاح menu، ثم اختار 4: النقاط والمستقيمات ثم 3: نقطة (نقاط) التقاطع ثم على كلٍّ من المستقيمين الموازيين لِـ $\overline{AB}$ وَ $\overline{BC}$؛ لتظهر نقطة تقاطعهما وسمِّها D.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 6–1؛ لتقويم فهم الطلاب خصائص التبليط.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا معادلة جبرية بدلالة n (عدد أضلاع المضلع)، تستعمل لتحديد ما إذا كان ممكنًا استعمال المضلع للتبليط في المستوى.

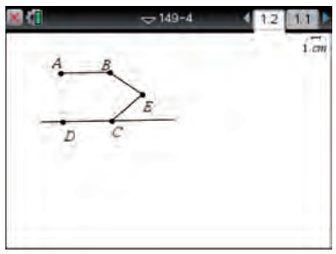
مثال:

$$\frac{360^\circ}{\frac{180^\circ(n-2)}{n}} = \frac{2n}{n-2}$$

إذا كان $\frac{2n}{n-2}$ عددًا صحيحًا، فإنه يمكن استعمال المضلع لتكوين تبليطٍ منتظمٍ في المستوى.

توسع 4-7 معمل الهندسة: التبليط 151

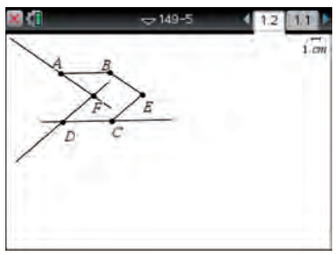
الخطوة 4: قم بإخفاء القطعة المستقيم $\overline{BC}$.



- قم بإخفاء القطعة المستقيم $\overline{BC}$ بالضغط عليها ثم على menu ctrl واختار 4:إخفاء ، وبالمثل قم بإخفاء المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$.
- ارسم نقطةً عن يمين $\overline{BC}$ وسمِّها E
- صِلْ بين B وَ E، وبذلك بالضغط على menu ثم اختار ▪ 4:النقاط والمستقيمات ثم 5:قطعة مستقيمة ثم على النقطتين B, E.

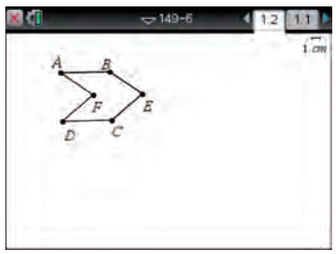
  وبالمثل صِلْ بين النقطتين C وَ E.

الخطوة 5: ارسم مستقيم موازٍ لِـ $\overline{CE}$ وَ $\overline{BE}$.



- ارسم مستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{BE}$ ويمر في A ، ومستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{CE}$ ويمر في D.
- حدِّد نقطة تقاطع المستقيمين الموازيين لِـ $\overline{CE}$ وَ $\overline{BE}$ وسمِّها F، وذلك بطريقةٍ مماثلةٍ لما ورد في الخطوة 3 .

الخطوة 6: كوّن مضلعًا.

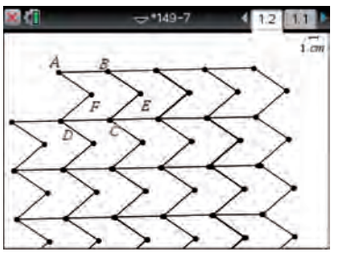


- قم بإخفاء المستقيمات $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{DC}$
- كوّن مضلعًا سداسيًّا بالضغط على menu ثم 5:الأشكال الهندسية ثم 4:المضلع ثم بالضغط على جميع رؤوسه بالتوالي، بدءًا بأحدها وانتهاءً به ثم الضغط على esc .

152 الفصل 7 التحويلات الهندسية والتماثل

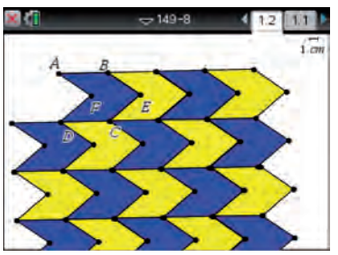
الخطوة 7: اسحب المضلع.

- اعمل انسحابًا للمضلع، بالضغط على (menu)، ثم اختار 8:التحويل الهندسي ومنها 3:الانسحاب ثم الضغط على أحد الرؤوس ثم على المضلع؛ لعمل نسخةٍ منه.
- اسحب النسخة للمكان المناسب، ثم اضغط على مفتاح الإدخال لإفلاتها.
- كرِّر ذلك للحصول على التبليط.



الخطوة 8: لوّن التبليط.

- لوّن التبليط الذي أنشأته، وذلك بتحديد كل مضلع ثم الضغط على (ctrl) (menu) ثم اختار 2:لون التعبئة، واختار لونٍ.



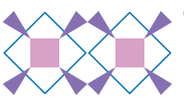
تمارين:

حدّد ما إذا كان استعمال أيٍّ من المضلعات المنتظمة الآتية لتكوين تبليط في المستوى ممكنًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا". **1–3) انظر الهامش.**

1) مثلث **2)** مضلع خماسي **3)** مضلع له 16 ضلعًا

حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأنماط الآتية تبليطًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا"، وإن كان كذلك فصنّفه إلى منتظمٍ أو شبه منتظمٍ أو غير منتظم، وإلى متسق أو غير متسق.

4) لا



5) نعم؛ غير منتظم؛ غير متسق



6) نعم؛ منتظم؛ متسق



ارسم نمط تبليط باستعمال الشكل (أو الأشكال) الآتي: **7–9) انظر الهامش.**

7) مضلع ثماني منتظم ومربع **8)** مثلث قائم الزاوية **9)** شبه منحرف ومتوازي أضلاع

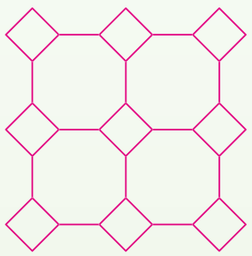
إجابات:

1) نعم؛ إجابة ممكنة: إن قياس الزاوية الداخلية للمثلث المتطابق الأضلاع 60°، وهو من عوامل العدد 360.

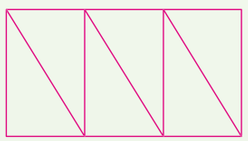
2) لا؛ إجابة ممكنة: قياس الزاوية الداخلية للخماسي المنتظم 108°، وهذا ليس من عوامل العدد 360

3) لا؛ إجابة ممكنة: قياس الزاوية الداخلية للمضلع ذي الـ 16 ضلعًا يساوي 157.5°، وهذا ليس من عوامل العدد 360

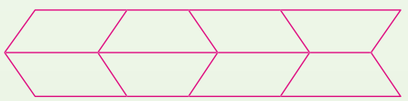
7) إجابة ممكنة:



8) إجابة ممكنة:



9) إجابة ممكنة:





مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

7-4 تدريبات إعادة التعليم

تركيب التحويلات الهندسية

تركيب إزاحة العكاس:

عند إجراء تحويلين هندسيين متعاقبين على شكل هندسي، فإن التحويل الهندسي الذي ينقل الشكل الأصلي إلى الصورة النهائية يسمى **تحويلاً هندسيًّا مركبًا**، وأحد هذه التحويلات المركبة تركيب **إزاحة العكاس**، وهو التحويل الهندسي الناتج عن تركيب إزاحة متبوعة بانعكاس حول خط يوازي اتجاه الإزاحة.

مثال

إحداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(3,3)$، $B(4,-2)$، $C(-1,-3)$، مثل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار ووحدة إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور x.

الخطوة 1: إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار، ووحدة إلى أسفل

$(x, y) \rightarrow (x-2, y-1)$
$A(3,3) \rightarrow A'(1,2)$
$B(4,-2) \rightarrow B'(2,-3)$
$C(-1,-3) \rightarrow C'(-3,-4)$

الخطوة 2: انعكاس حول المحور x

$(x, y) \rightarrow (x, -y)$
$A'(1,2) \rightarrow A''(1,-2)$
$B'(2,-3) \rightarrow B''(2,3)$
$C'(-3,-4) \rightarrow C''(-3,4)$

الخطوة 3: مثّل بيانيًّا $\triangle A''B''C''$ وصورته $\triangle A'''B'''C'''$



تمارين

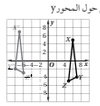
إحداثيات رؤوس $\triangle XYZ$ هي: $X(6,5)$، $Y(7,-4)$، $Z(5,-5)$.

مثّل بيانيًّا $\triangle XYZ$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركب المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

1) إزاحة مقدارها وحدة إلى اليمين، ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y



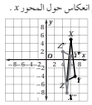
2) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار، و4 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x



3) إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين، ثم انعكاس حول المحور x، $y = x$.



4) إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليسار، وثلاث وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x.



تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) دون

7-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

تركيب التحويلات الهندسية

تركيب العكاسين:

7.2	تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين، يعادل إزاحةً اتجاهها عموديٌّ على كلٍّ من المستقيمين، ومقدارها يساوي مثلي المسافة بين المستقيمين المتوازيين.
7.3	تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين يكافئ دورانًا مركزه نقطة تقاطع المستقيمين، وقياس زاويته يساوي مثلي قياس الزاوية التي يشكّلها تقاطع هذين المستقيمين.

مثال

ارسم صورة الشكل A بالانعكاس حول المستقيم ℓ، ثم صِفْ تحويلاً هندسيًّا واحدًا ينقل A إلى A''.



الخطوة 1: ارسم صورة A بالانعكاس حول المستقيم ℓ.



الخطوة 2: ارسم صورة A' بالانعكاس حول المستقيم m.

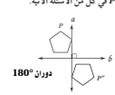


تلاحظ أن تركيب هذين الانعكاسين يعادل إزاحة A إلى A''.

تمارين

ارسم صورة الشكل P الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم a، ثم حول المستقيم b. ثم صِفْ تحويلاً هندسيًّا واحدًا ينقل P إلى P'' في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

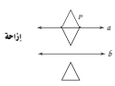
1)



2)



3)



4)



تدريبات المهارات (23) دون ضمن فوق

7-4 تدريبات المهارات

تركيب التحويلات الهندسية

إحداثيات طرفَي القطعة المستقيمة $\overline{DE}$ هي: $D(1,3)$، $E(3,-3)$، مثل بيانيًّا $\overline{DE}$ وصورتها الناتجة عن التحويل الهندسي المركب المحدد في كلٍّ ممّا يأتي:

1) إزاحة مقدارها وحدتان إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور x.



2) إزاحة مقدارها وحدة إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y.



3) إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم دوران حول نقطة الأصل بزاوية $270°$

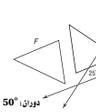


4) انعكاس حول المحور x، ثم دوران حول نقطة الأصل بزاوية $90°$



ارسم صورة الشكل F الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم u، ثم حول المستقيم v، ثم صِفْ تحويلاً هندسيًّا واحدًا ينقل F إلى F''' في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

5)



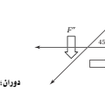
6)



7)



8)

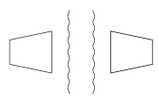


تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

7-4 تدريبات حل المسألة

تركيب التحويلات الهندسية

1) إنشاءات: حتى يكون الجسر فوق النهر متينًا، يجب أن تكون كل واحدة من قاعدتيه صورةً للأخرى بانعكاسٍ حول خطٍّ يمتصف المسافة بين جانبَي النهر، ارسم القاعدة الثانية للجسر.



2) انعكاسان: أجرى أحمد انعكاسين متتابعين لجسم ما، ففي الخطوة الأولى أجرى له انعكاسًا حول المستقيم $y = -1$، ثم أكمل هذا التحويل المركّب بإجراء انعكاسٍ للصورة حول المستقيم $y = 1$. فكانت النتيجة النهائية إزاحة للجسم، اكتب قاعدة هذه الإزاحة.

$(x, y) \rightarrow (x, y + 4)$

3) اكتشف الخطأ: يقول سعد إن الانعكاسين حول المحور x ثم الانعكاس حول المحور y، يعادلان دورانًا بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل، أما أحمد فيقول إن الانعكاس حول المحور y ثم الانعكاس حول المحور x، يعادلان انعكاسًا حول المستقيم $y = x$، فهل كان أيّ منهما على صوابٍ؟ برّر إجابتك.

سعد على صواب؛ لأن تركيب الانعكاسين يحول (x, y) إلى $(y-, x-)$، وهي نفسها نتيجة الدوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

4) تبرير: إذا أُخضِع شكلٌ ما لدورانٍ ثم انعكاسٍ، فهل لترتيب التحويلين تأثير في موقع الصورة النهائية دائمًا أم أحيانًا أم ليس له تأثير أبدًا؟ وضح إجابتك.

أحيانًا؛ عند تدوير شكل بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$، لا يؤثر ترتيب التحويلين في موقع الصورة النهائية.

5) قصة إزاحتين: أجرت سمية إزاحة لجسم ما في المستوى الإحداثيّ وفق القاعدة $(x,y) \rightarrow (x+5, y+3)$. ثم أجرت سلمى بعدها إزاحة لصورة الجسم نفسه وفق القاعدة $(x,y) \rightarrow (x-4, y+2)$. ما الإزاحة الواحدة التي تعطي نتيجة الإزاحتين اللتين نفذتهما سمية وسلمى مجتمعتين؟ هل تكون النتيجة مختلفة لو نفذت سلمى إزاحتها أولًا؟

$(x, y) \rightarrow (x + 1, y + 5)$؛ لا، تغيير ترتيب الإزاحات لا يؤثر في النتيجة.

6) إطارات: صِفْ تحويلاً هندسيًّا مركّبًا يمكن استعماله لتكوين كلٍّ من الإطارات الآتية:

(a)



انعكاسات متعاقبة، اعكس الأشكال الثلاثة الأولى حول مستقيم رأسيّ، ثم اعكس الشكل الناتج حول مستقيم رأسيّ وهكذا.

(b)



اعكس الشكلين (الأول والثاني) حول مستقيم أفقيّ يمر بمنتصفي القطعتين الرأسيتين، ثم أزح الصورة الناتجة إلى اليمين، وكرر العملية.

(c)



كرر إزاحة الأشكال الخمسة الأولى إلى اليمين.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر الدرس 4 - 7

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

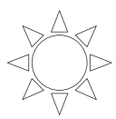
التدريبات الإثرائية (25)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-4 التدريبات الإثرائية

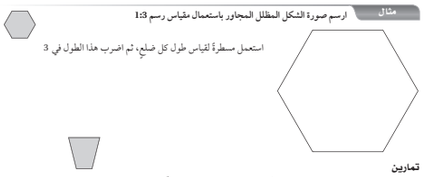
تصميم فني:

تحويلات التطابق هي التحويلات التي تحافظ على قياسات الأبعاد بين النقاط، وقياسات الزوايا، والقطع المستقيمة والأشكال، بحيث تكون الصورة الناتجة فيها مطابقة للشكل الأصلي. لكن ليست كل التحويلات الهندسية تحويلات تطابق، إذ إن بعضها يكبّر الأبعاد أو يصغرها بنسبةٍ محددة. يلجأ الرسامون والمصممون إلى تغيير الأبعاد في رسوماتهم؛ للإيحاء بالعمق أو الحركة، فيقوموا بتكبير القياسات أو تصغيرها باستعمال مقياس رسمٍ أو عامل مقياسٍ ثابت.



مثال ارسم صورة الشكل المظلل المجاور باستعمال مقياس رسم 1:3

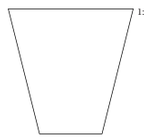
استعمل مسطرةً لقياس طول كل ضلعٍ، ثم اضرب هذا الطول في 3



تمارين

ارسم صورة الشكل المظلل المجاور مستعملًا مقياس الرسم المناسب في كلٍّ مما يأتي:

1) 1:4



2) 2:3



3) 4:5

4) 2:1



5) 6:1



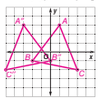
6) 4:3

كتاب التمارين (19)　دون ضمن فوق

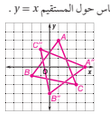
7 - 4 تركيب التحويلات الهندسية

إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(1, 3), B(-2, -1), C(3, -2)$. مثّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركب المحدد في كلٍّ ممّا يأتي:

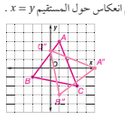
1) إزاحة وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x + 2, y)$ ثم انعكاس حول المحور y .



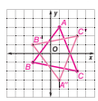
2) إزاحة وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 1)$ ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$.



3) إزاحة وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 2)$ ثم انعكاس حول المستقيم $x = y$.

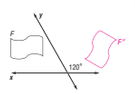


4) إزاحة وفق القاعدة: $(x, y) \rightarrow (x, y + 2)$ ثم انعكاس حول المحور x .



ارسم صورة الشكل F الناتجة عن انعكاسٍ حول المستقيم x، ثم حول المستقيم y، ثم صف تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل F إلى F'' في كلٍّ ممّا يأتي:

5)



دوران بزاوية $240°$ حول نقطة التقاطع

6)



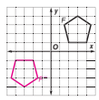
دوران بزاوية $160°$ حول نقطة التقاطع

7)



إزاحة مقدارها 2 in.

8)



دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل

7-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الراسي

ما قبل الدرس 7-5

رسم صورة الشكل الناتجة عن الانعكاس، والناتجة عن الدوران.

الدرس 7-5

تحديد محاور التماثل، والتماثل الدوراني للأشكال الثنائية الأبعاد.

تحديد مستويات التماثل، والتماثل الدوراني للأشكال الثلاثية الأبعاد.

ما بعد الدرس 7-5

رسم الصورة الناتجة عن التمدد باستعمال المسطرة، ورسم الصورة الناتجة عن التمدد في المستوى الإحداثي.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- استعمل صورة السلحفاة، لتخمين معنى التماثل حول محور. انظر إجابات الطلاب.
- استعمل صورة السمكة الهلامية، لتخمين معنى التماثل الدوراني. انظر إجابات الطلاب.
- ما نوع التماثل الذي تتصف به صورة إنسان؟ تماثل حول محور.

7-5

التماثل
Symmetry

فيما سبق:

درستُ رسم صورة ناتجة عن الانعكاس والدوران.

(الدرسان 3-7, 1-7)

والآن:

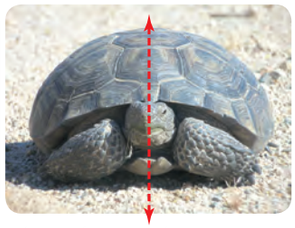
- أحدّد محاور التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثنائية الأبعاد.
- أحدّد مستويات التماثل والتماثل الدوراني للأشكال الثلاثية الأبعاد.

المفردات:

التماثل
symmetry
التماثل حول محور
line symmetry
محور التماثل
line of symmetry
التماثل الدوراني
rotational symmetry
مركز التماثل
center of symmetry
رُتبة التماثل
order of symmetry
مقدار التماثل
magnitude of symmetry
التماثل حول مستوى
plane symmetry

www.obeikaneducation.com





لماذا؟

صورة السلحفاة المجاورة توضح تماثلًا لجزأي جسمها الأيمن والأيسر، حيث يُعد التماثل خاصيةً يمكن أن نصف بها العديد من الأشياء، مثل الأشكال الهندسية والمعادلات الرياضية وغيرها. فالمخلوقات التي تبدو صور أجسامها متماثلة حول مستقيم تظهر أنماط عيش أكثر تعقيدًا من المخلوقات ذاتّ الأجسام المتماثلة دورانيًّا مثل قنديل البحر.

التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد: يكون الشكل متماثلًا، إذا وُجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه. أحد أنواع التماثل هو التماثل حول محور.

مفهوم أساسي — التماثل حول محور

أضف إلى مطويتك

يكون الشكل الثنائي الأبعاد متماثلًا حول محور، إذا كانت صورته الناتجة عن انعكاس حول مستقيمٍ ما هي الشكل نفسه، ويسمى هذا المستقيم محور تماثل.



مثال 1 من واقع الحياة — تعيين محاور التماثل

مخلوقات بحرية: بيِّن ما إذا كان يبدو لصورة المخلوق البحري محور تماثلٍ أم لا. وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ ممَّا يأتي:

a)



نعم، لصورة هذا المخلوق محور تماثل واحد.



b)



نعم؛ لصورة هذا المخلوق 5 محاور تماثل.



c)



لا؛ لا يوجد لصورة هذا المخلوق محاور تماثل.

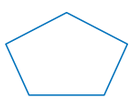
تحقق من فهمك

بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ ممَّا يأتي: (1B–C انظر ملحق الإجابات.

1A) لا



1B)



1C)



مصادر الدرس 7-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (156)	• تنويع التعليم ص (156)	• تنويع التعليم ص (156)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (20)	• كتاب التمارين ص (20)	• كتاب التمارين ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

وهناك نوع آخر من التماثل هو التماثل الدوراني .

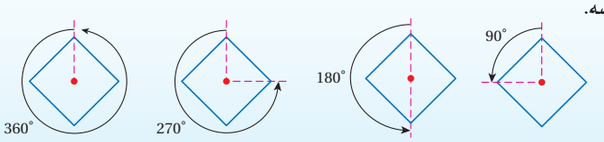
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التماثل الدوراني

يكون للشكل الثنائي الأبعاد **تماثل دوراني** (أو تماثل نصف قطري) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران بين $0°$ و $360°$ حول مركزه هي الشكل نفسه، ويسمّى مركز الدوران في هذه الحالة **مركز التماثل** (أو نقطة التماثل).

أمثلة : المربع الآتي له تماثل دوراني؛ لأن الدوران بكلٍّ من الزوايا $0°$، $90°$، $180°$، $270°$، $360°$ ينتج عنه الشكل نفسه.



يطلق على عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل على الشكل نفسه في أثناء دورانه من $0°$ إلى $360°$ اسم **رتبة التماثل**، أما **مقدار التماثل** (أو زاوية الدوران) فهو قياس أصغر زاوية يدورها الشكل حتى ينطبق على نفسه، ويرتبط مقدار التماثل ورُتبته بالعلاقة:

مقدار التماثل يساوي ناتج قسمة $360°$ على رُتبة التماثل.

ففي الشكل أعلاه، رُتبة التماثل الدوراني 4، ومقدار التماثل $90°$

مثال 2

تعيين التماثل الدوراني

بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ ممّا يأتي:

a)



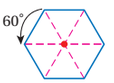
نعم؛ للسداسي المنتظم تماثل دوراني.

مركز التماثل هو نقطة تقاطع أقطاره.

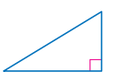
رتبة التماثل $= 6$

مقدار التماثل $=$

$360° \div 6 = 60°$



b)



لا؛ لا يوجد دوران بزاوية بين $0°$ و $360°$ تنطبق فيه صورة المثلث القائم الزاوية على نفسه.

c)



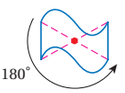
نعم؛ لهذا الشكل تماثل دوراني.

مركز التماثل هو نقطة تقاطع قطريه.

رتبة التماثل $= 2$

مقدار التماثل $=$

$360° \div 2 = 180°$



تحقق من فهمك

أزهار: بيِّن ما إذا كان يبدو لصورة الزهرة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كلٍّ ممّا يأتي: **2A–B)** انظر ملحق الإجابات.

2A)

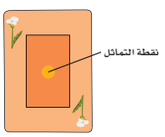


2B)



إرشادات للدراسة

التماثل حول نقطة: يكون الشكل متماثلًا حول نقطة، إذا كانت صورته الناتجة عن الدوران حول تلك النقطة بزاوية $180°$ هي الشكل نفسه. يحقق الشكل أدناه خاصية التماثل حول نقطة.



التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد

المثالان 1, 2 يبيّنان طريقة تمييز الشكل الذي يحقق خاصية التماثل حول محور و/أو التماثل الدوراني.

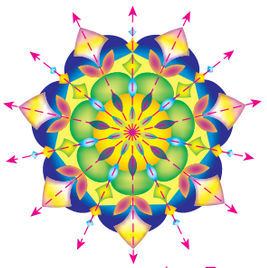
التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 **المنظار السحري:** بيّن ما إذا كان يبدو أن للصور الآتية محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم الشكل وارسم محاور التماثل جميعها، وحدِّد عددها.

a)



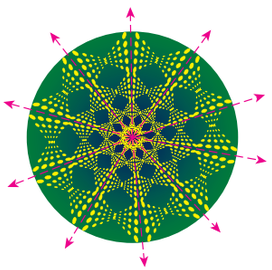
نعم؛ 7 محاور

b)



لا

c)



نعم؛ 5 محاور

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي: وجّه الطلاب إلى أن استعمال "يبدو أن" عند السؤال عن تماثل بعض الأجسام، جاء لأن كثيرًا من الأجسام تبدو متماثلةً مثل وجه الانسان، ولكنها في الحقيقة ليست متماثلةً إذا طُبِّق التعريف الرياضي للتماثل.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم شكلًا على السبورة، ودوّره لتوضيح التماثل الدوراني، ثم اطلب إلى الطلاب أن يحدِّدوا رُتبة التماثل في كل شكلٍ يحقق التماثل الدوراني.

التماثل في الأشكال الثلاثية الأبعاد: يمكن أن تكون الأشكال الثلاثية الأبعاد أيضًا متماثلة.

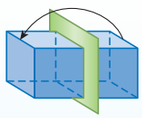
مفاهيم أساسية

أضف إلى مطويتك

التماثلات في الأشكال الثلاثية الأبعاد

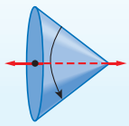
التماثل حول مستوى

يكون الشكل الثلاثي الأبعاد **متماثلًا حول مستوى**، إذا أمكن تقسيمه بهذا المستوى إلى شكلين متطابقين، وفي هذه الحالة يسمى هذا المستوى (مستوى التماثل).



التماثل حول محور

يكون الشكل الثلاثي الأبعاد **متماثلًا حول محور**، إذا أمكن تدويره حول هذا المحور بزاويةٍ بين $0°$ و $360°$؛ ليصبح كما كان في وضعه الأصلي.



إرشادات للدراسة

مستوى التماثل: هو المستوى الذي يقسم الشكل إلى نصفين متطابقين تمامًا، بحيث يكون كلٌّ منهما صورة للآخر.

مراجعة المفردات

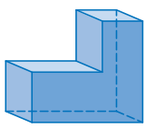
المنشور: مجسم متعدد السطوح له قاعدتان متطابقتان وأوجهه على شكل متوازي أضلاع.

مثال 3

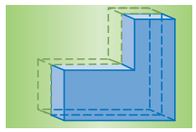
التماثل في الأشكال الثلاثية الأبعاد

بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) مجسَّم على شكل حرف L



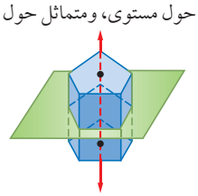
متماثل حول مستوى



b) منشور خماسي منتظم



متماثل حول مستوى، ومتماثل حول محور



تحقق من فهمك

بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى، أو متماثلًا حول محور، أو كلاهما، أو غير ذلك في كلٍّ ممَّا يأتي:

3A) كلاهما



3B) غير ذلك



3C) كلاهما



3D) كلاهما



مثال إضافي

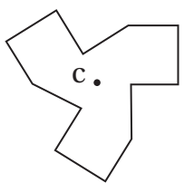
2 بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك فانسخ الشكل، وعيّن مركز التماثل، وحدِّد رُتبته ومقداره.

a)



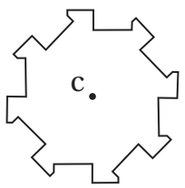
نعم؛ مركز التماثل هو مركز النجمة، ورُتبة التماثل 5، ومقداره $72°$

b)



نعم؛ مركز التماثل هو مركز الشكل، ورُتبة التماثل 3، ومقداره $120°$

c)



نعم؛ مركز التماثل هو مركز الشكل، ورُتبة التماثل 8، ومقداره $45°$

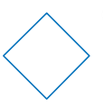
تنويع التعليم

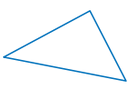
دون ضمن فوق

المتعلمون الطبيعيون: هناك أمثلة كثيرة لأجسامٍ متماثلةٍ في الطبيعة، اطلب إلى الطلاب أن يرسموا أو يجمعوا أشياء من الطبيعة يبيِّنون فيها أنواع التماثلات التي تمَّت مناقشتها في هذا الدرس.

تأكد

المثال 1 بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

1)  انظر الهامش.

2)  لا

3)  انظر الهامش.

المثال 2 بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

4)  لا

5)  انظر الهامش.

6)  انظر الهامش.

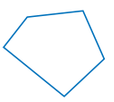
المثال 3 7) بيِّن ما إذا كان الشكل المجاور متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.



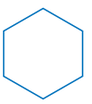
كلاهما

تدرب وحل المسائل

المثال 1 بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي: 9, 10) انظر ملحق الإجابات.

8)  لا

9) 

10) 

11, 13) انظر ملحق الإجابات.

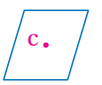
أعلام: بيِّن ما إذا كان للعلم محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

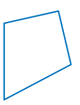
11) 

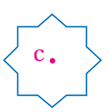
12)  لا

13) 

المثال 2 بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيِّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

14)  نعم؛ 2؛ 180°

15)  لا

16)  نعم؛ 8؛ 45°

17) نعم؛ 7؛ 51.4°

18) نعم؛ 6؛ 60°

19) نعم؛ 10؛ 36°

إطارات: بيِّن ما إذا كان لصورة غطاء إطار السيارة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فحدد رتبة التماثل ومقداره .

17) 

18) 

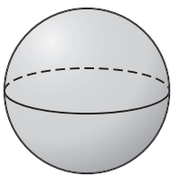
19) 

التماثل في الأشكال الثلاثية الأبعاد

المثال 3 يبين طريقة تحديد ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى، أو متماثلًا حول محورٍ.

مثال إضافي

3 بيّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى، أو حول محور، أو كلاهما، أو غير ذلك.

a) 

كلاهما.

b) 

غير ذلك.

3 التدريب

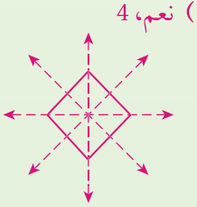
التقويم التكويني

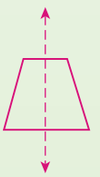
استعمل الأسئلة 7–1؛ للتأكد من الفهم. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

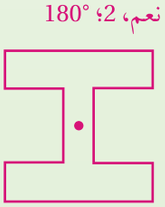
تنويع الواجبات المنزلية

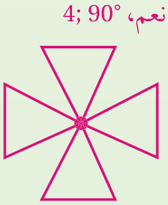
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	22–8 ، 36 ، 38–48
ضمن ضمن المتوسط	25–8 فردي ، 26–36 ، 38–48
فوق فوق المتوسط	44–23 ، (اختياري: 45–48)

إجابات:

1) نعم، 4 

3) نعم، 1 

5) نعم، 2؛ 180° 

6) نعم، 4؛ 90° 

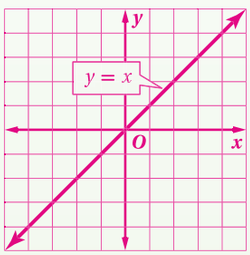
تنبيه لحل سؤال

الورق الشفاف: قد يكون من المفيد وجود الورق الشفاف مع الطلاب عند حل الأسئلة 10–8، والأسئلة 16–14

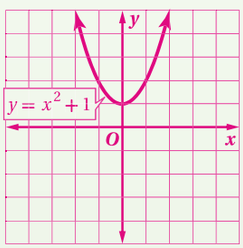
تمثيلات متعددة: في السؤال 35، يستعمل الطلاب جدول قيم لاستقصاء العلاقة بين رتبة التماثل للمضلع، وعدد أضلاعه.

إجابات:

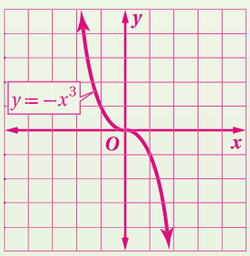
29) تماثل دوراني، 180°، 2، وتماثل حول المستقيم $y = -x$



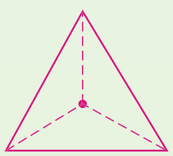
30) تماثل حول محور، $x = 0$



31) تماثل دوراني وليس له محور تماثل، 180°، 2

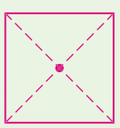


35a)



رتبة التماثل = 3

35b)



رتبة التماثل = 4



رتبة التماثل = 5



رتبة التماثل = 6

35c)

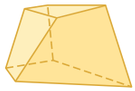
عدد أضلاع المضلع	رتبة التماثل
3	3
4	4
5	5
6	6

المثال 3 بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كلٍّ ممَّا يأتي:

20) كلاهما



21) غير ذلك



22) كلاهما



عبوات: حدّد عدد مستويات التماثل الأفقية، ومستويات التماثل الرأسية لكلٍّ من العلب الآتية:

23) لا يوجد مستويات تماثل أفقية، وهناك عدد لا نهائي من مستويات التماثل الرأسية.



24) لا يوجد مستويات تماثل أفقية؛ مستوى تماثل رأسي واحد.



25) لايوجد مستويات تماثل أفقية، وهناك عدد لا نهائي من مستويات التماثل الرأسية.



هندسة إحداثية: حدّد ما إذا كان للشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ من الأسئلة الآتية تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا.

26) $A(-4, 0), B(0, 4), C(4, 0), D(0, -4)$ له محور تماثل وتماثل دوراني.

27) $R(-3, 3), S(-3, -3), T(3, 3)$ له محور تماثل.

28) $F(0, -4), G(-3, -2), H(-3, 2), J(0, 4), K(3, 2), L(3, -2)$ له محور تماثل وتماثل دوراني.

جبر: مثِّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية، وحدّد ما إذا كان لتمثيلها البياني تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا. وإذا كان كذلك، فحدّد رتبة التماثل ومقداره، واكتب معادلة كل محور تماثل. **29–31)** انظر الهامش.

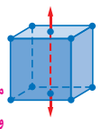
29) $y = x$

30) $y = x^2 + 1$

31) $y = -x^3$

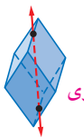
حدِّد ما إذا كانت البلورة متماثلةً حول مستوى أو متماثلة حول محور في كلٍّ ممَّا يأتي:

32) مكعب



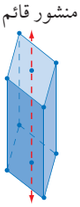
متماثل حول مستوى وحول محور

33) مجسم ذو ستة أوجه كل منها معين



متماثل حول مستوى وحول محور

34) منشور قائم قاعدته معين



متماثل حول مستوى وحول محور



الربط مع الحياة

تعتمد الخصائص الفيزيائية للمادة الصلبة على ترتيب بلوراتها، فبلورات الألماس تأخذ شكل المكعب، وروابطها قوية جدًا يصعب قطعها، وهذا ما يجعل الألماس مادةً قاسيةً جدًا.

35) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي التماثل الدوراني في المضلعات المنتظمة.

a) هندسيًّا: ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع، وحدّد رتبة تماثله. **a–c)** انظر الهامش.

b) هندسيًّا: كرّر العملية في الفرع **a** على مربعٍ ومضلعٍ خماسيٍّ منتظمٍ ومضلعٍ سداسيٍّ منتظمٍ.

c) جدوليًّا: نظِّم جدولًا يبين رتبة التماثل لكلٍّ من هذه المضلعات.

d) لفظيًّا: ضع تخمينًا حول رتبة التماثل لمضلع منتظم.

إجابة ممكنة: رتبة تماثل المضلع المنتظم تساوي عدد أضلاعه.

مسائل مهارات التفكير العليا

38–36) انظر الهامش.

36) اكتشف الخطأ: يقول جمال: إن للشكل A تماثلًا حول محور فقط، في حين يقول ناصر: إن للشكل A تماثلًا دورانيًّا فقط. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ برر إجابتك.



الشكل A

37) تحدٍّ: يوجد لشكل رباعي في المستوى الإحداثي محورا تماثل فقط هما: $y = -x + 2$, $y = x - 1$. مثل محوري التماثل بيانيًا ثم أوجد مجموعة من الإحداثيات الممكنة لرؤوس هذا الشكل ومثله بيانيًا.

38) مسألة مفتوحة: ارسم شكلًا له محور تماثل، ولكن ليس له تماثل دوراني. اشرح إجابتك.

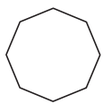
39) اكتب: بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التماثل حول محور والتماثل الدوراني.

تدريب على اختبار

40) إجابة قصيرة: ما عدد محاور التماثل التي يمكن رسمها في صورة علم مملكة البحرين؟ **1**



41) ما رتبة التماثل للشكل الآتي؟ **8**



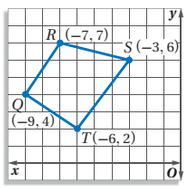
مراجعة تراكمية

إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي: $J(1, 5)$, $K(3, 1)$, $L(5, 7)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-7) **42, 43)** انظر الهامش.

42) إزاحة مقدارها 7 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل ثم انعكاس حول المحور x.

43) إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y.

44) يبيِّن الشكل المجاور الشكل الرباعي $QRST$ في المستوى الإحداثي، ما صورة النقطة R الناتجة عن دوران الشكل بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل؟ (الدرس 3-7) **(7, −7)**

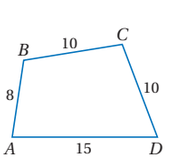


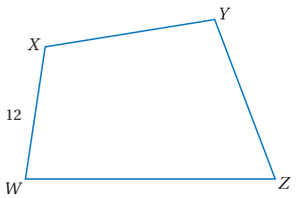
استعد للدرس اللاحق

إذا كان $WXYZ \sim ABCD$، فأوجد كلًّا مما يلي:

45) معامل تشابه $ABCD$ إلى $WXYZ$ $\frac{2}{3}$

46) XY **15** **47)** YZ **15** **48)** WZ **22.5**





4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدتهم دراسة تحويلات التطابق في الدروس السابقة على تعلُّم الدرس الحالي عن التماثل.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين: 4–7 و5–7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (50).

تنبيه!

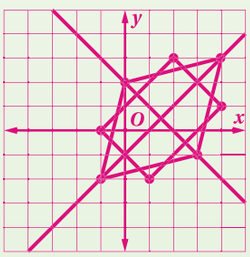
اكتشف الخطأ: لم تكن إجابة أيٍّ من جمال أو ناصر عن السؤال 36 صحيحة: يجب أن يدرك الطلاب أن للشكل A أربع محاور تماثل وتماثلًا دورانيًّا.

إجابات:

36) لم تكن إجابة أيٍّ منهما صحيحة: الشكل A متماثل حول محور وله تماثل دوراني في الوقت نفسه.

37) إجابة ممكنة: مستطيل إحداثيات رؤوسه هي: $(-1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(1, -2)$

إجابة ممكنة أخرى: معين إحداثيات رؤوسه هي: $(0, 2)$, $(4, 3)$, $(3, -1)$, $(-1, -2)$

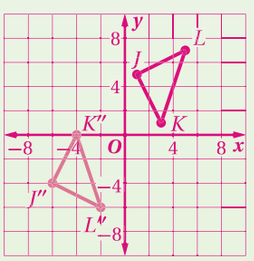


38) إجابة ممكنة:

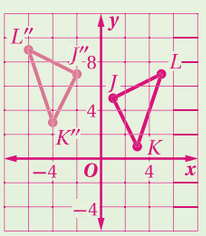


المثلث المتطابق الضلعين متماثل حول المستقيم المرسوم من الرأس إلى منتصف القاعدة، وليس له تماثل دوراني؛ لأنه لا ينطبق على نفسه عند تدويره بزاويةٍ بين $0°$ و$360°$ حول أي نقطة.

42)



43)





مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم _____ التاريخ _____

7-5 تدريبات إعادة التعليم

التماثل

التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد:

يكون الشكل الثنائي الأبعاد **متماثلًا حول محور** إذا كانت صورته الناتجة عن الانعكاس حول مستقيم ما هي الشكل نفسه. ويسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. ويكون للشكل الثنائي الأبعاد **تماثل دوراني**، إذا كانت صورته الناتجة عن دوران بزاوية بين °0 و°360 حول مركزه هي الشكل نفسه، ويُسمّى مركز الشكل عندئذ **مركز التماثل** (أو نقطة التماثل)، ويطلق على عدد المرات التي تتطابق فيها صورة الشكل على الشكل نفسه في أثناء دورانه من °0 إلى °360 اسم **رتبة التماثل**، أما **مقدار التماثل** (أو زاوية الدوران) فهو قياس أصغر زاوية يدورها الشكل حتى ينطبق على نفسه، ويرتبط مقدار التماثل ورُتبته بالعلاقة: مقدار التماثل يساوي ناتج قسمة °360 على رُتبة التماثل.

مثال 1 بيّن ما إذا كان للشكل المجاور محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها وحدّد عددها.

هذا الشكل متماثل حول محور، وله محور تماثل واحد.

مثال 2 بيّن ما إذا كان للشكل المجاور تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك فعيّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره.

لهذا الشكل تماثل دوراني من الرتبة 4، ومقدار التماثل هو °90 = 4 ÷ 360°، ومركز التماثل هو نقطة التقاء قطريه.

تمارين

بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدد عددها في كلٍّ مما يأتي:

1) نعم؛ 5
2) نعم؛ 1
3) لا

بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

4) نعم؛ 8؛ °45
5) لا
6) نعم؛ 1؛ °180

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) دون

الاسم _____ التاريخ _____

7-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

التماثل

التماثل في الأشكال الثلاثية الأبعاد:

يكون الشكل الثلاثي الأبعاد **متماثلًا حول مستوى**، إذا أمكن تقسيمه في هذا المستوى إلى شكلين متطابقين، وفي هذه الحالة يسمى هذا المستوى مستوى التماثل. ويكون الشكل الثلاثي الأبعاد **متماثلًا حول محور**، إذا أمكن تدويره حول هذا المحور بزاوية بين °0 و°360؛ ليصبح كما كان في وضعه الأصلي.

مثال بيّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك، في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

a) كلاهما؛ لأن الأسطوانة متماثلة حول مستوى، ومتماثلة حول محور.

b) الحرف N متماثل حول مستوى.

تمارين

بيّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي:

1) كلاهما
2) كلاهما
3) متماثل حول مستوى
4) كلاهما
5) كلاهما
6) كلاهما

تدريبات المهارات (28) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-5 تدريبات المهارات

التماثل

بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

1) نعم؛ 3 محاور
2) لا
3) لا
4) نعم؛ له محورا تماثل

بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

5) نعم؛ 3؛ °120
6) نعم؛ 8؛ °45
7) نعم؛ 2؛ °180
8) لا

بيّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي:

9) كلاهما
10) كلاهما

تدريبات حل المسألة (29) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-5 تدريبات حل المسألة

التماثل

أعلام، بيّن ما إذا كان للعلم محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدد عددها في كلٍّ مما يأتي:

1) لا
2) نعم؛ 2
3) **أغطية إطارات**، بيّن ما إذا كانت أغطية الإطارات أدناه متماثلةً حول محورٍ أم لا.

نعم لا نعم

4) **شعار**، صمّم حمدٌ شعارًا لشركته كما في الشكل أدناه، ما عدد محاور تماثل الشعار؟

8 محاور

5) **تنظيم حفل**، أعدّت هند تصميمًا لترتيب أماكن الجلوس في حفلٍ، ورأت أن تكون الطاولات متماثلةً، فوضعت الأطباق على الهيئة المبيّنة في الشكل أدناه.

a) ما رتبة التماثل الدوراني لهذا الشكل، وما مقداره؟

رتبته: 2، مقداره °180

b) أضف أقل عدد ممكن من الأطباق لهذا الشكل، على أن يحقق الشكل الناتج التماثل الدوراني حول مركزه من الرتبة 4؟

c) هل يمكنك إعادة ترتيب مواقع الأطباق الأربعة في الشكل الأصلي، على أن تحقق الشروط الآتية:
1) أن تبقى أبعادها عن مركز الطاولة ثابتة
2) أن توضع بحيث يقع مركز الأطباق على أضلاع المستطيلات المبيّنة في التصميم.
3) أن يحقق الشكل الناتج التماثل الدوراني من الرتبة 4؟

إذا كان كذلك، فارسم الشكل، وإلّا، فوضّح الأسباب.

نعم

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 7

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

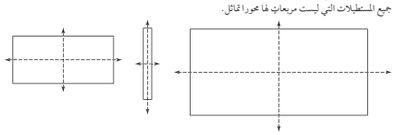
7-5 التدريبات الإثرائيّة

التماثل في الأشكال الرباعية:

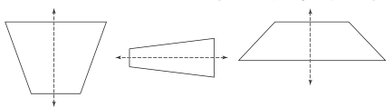
لكل نوعٍ من الأشكال الرباعية عددٌ من محاور التماثل يختلف عن عددها في الأنواع الأخرى.
والمربع هو الشكل الوحيد الذي له 4 محاور تماثل، كما يظهر في الشكل المجاور.
ويمكنك أن تحدّد نوع الشكل الرباعي من عدد محاور التماثل التي يحويها.



جميع المستطيلات التي ليست مربعاتٍ لها محورا تماثل.

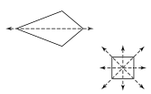


وكل شبه منحرفٍ متساوي الساقين، له محور تماثل واحد فقط.



تمارين

اقرأ كلًّا من الجمل الآتية، وبيّن ما إذا كانت صحيحةً أو خاطئةً، وإذا كانت خاطئةً، فارسم مثالًا مضادًّا:



1) المعينات التي ليست مربعات لها محورا تماثلٍ فقط. **صحيحة**

2) لشكل الطائرة الورقية محورا تماثلٍ فقط. **خاطئة**

3) شبه المنحرف غير المتساوي الساقين ليس له محاور تماثلٍ. **صحيحة**

4) لكلِّ متوازي أضلاعٍ محورا تماثلٍ فقط. **خاطئة**

5) **تعميم:** فكّر في التماثل الدوراني في الأشكال الرباعية، ثم اكتب من عندك بعض التعميمات ذات العلاقة بالتماثل الدوراني في الأشكال الرباعية. **انظر إجابات الطلاب**

كتاب التمارين (20)　دون ضمن فوق

7 - 5 التماثل

بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا. وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدد عددها في كلٍّ ممّا يأتي:

1) نعم؛ 1

2) نعم؛ 2

3) لا

بيّن ما إذا كان للشكل تماثلٌ دورانيٌّ أم لا. وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ ممّا يأتي:

4) نعم؛ 2، 180°

5) نعم؛ 5، 72°

6) نعم؛ 16، 22.5°

بيّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى، أو متماثلًا حول محور، أو كلاهما، أو غير ذلك في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

7) كلاهما

8) متماثل حول مستوى

9) **قوارب،** في القوارب البخارية يدوّر محرك بخاري دولاب المجاديف التي تدفع القارب في الماء. إذا تكوّن دولاب المجاديف من 18 مجدافًا المسافات بينها متساوية؛ فحدّد رتبة ومقدار التماثل الدوراني للدولاب. 18؛ 20°



7-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-6

رسم صورة ناتجة عن تكبير شكل أو تصغيره.

الدرس 7-6

رسم الصورة الناتجة عن التمدد باستعمال المسطرة.

رسم الصورة الناتجة عن التمدد في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس 7-6

تطبيق تحويلات هندسية أساسية تشمل $a.f(x), f(y)+d, f(x-c), f(b.x),$ $f(x)\,|, f(|x|)$ على الدالة المولدة الأم.

إجراء عمليات تشمل تركيب الدوال وإيجاد معكوساتها، ووصف هذه الإجراءات والنتائج لفظيًّا وعدديًّا وبيانيًّا وبالرموز

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما العلاقة بين المسودَّة وصورةٍ مكبرةٍ أو مصغرةٍ عنها؟ إنهما متشابهتان.
- كيف تثبت أن الصورة مشابهة للمسودة؟ أثبت أن زواياهما المتناظرة متطابقة، وأن أطوال أضلاعهما المتناظرة متشابهة.

7-6 التمدد
Dilations

فيما سبق:
درستُ رسم صورة ناتجة عن تكبير شكل أو تصغيره.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أرسم الصورة الناتجة عن التمدد باستعمال المسطرة.
- أرسم الصورة الناتجة عن التمدد في المستوى الإحداثي.

المفردات:
التمدد
dilation
تحويل التشابه
similarity transformation
معامل مقياس التمدد
scale factor of dilation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



بينما يستعمل كثيرون آلات التصوير الرقمية، إلا أنه لا زال بعض المصوِّرين يفضلون استعمال الفيلم وآلات التصوير التقليدية لإنتاج مسودات الصور، ومن هذه المسودات يكوّن المصوِّرون صورًا بقياساتٍ مختلفةٍ.

رسم التمدد: **التمدد** هو تحويل هندسي يكبّر الشكل أو يصغره بنسبة محدّدة هي نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر لها في الشكل الأصلي. وتسمى هذه النسبة **معامل مقياس التمدد**. ولأن الصورة الناتجة عن التمدّد تشبه الشكل الأصلي، فإن التمدد نوع من أنواع **تحويلات التشابه**. ويتم تحديد التمدد بمعرفة مركز التمدد ومعامله.

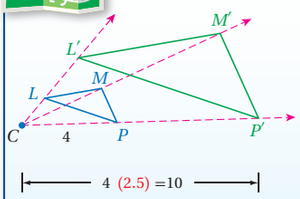
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التمدد

التمدد الذي مركزه C ومعامله هو العدد الموجب k ، حيث $k \neq 1$ ، ينقل النقطة P في شكلٍ ما إلى صورتها P' ، بحيث:

- إذا انطبقت النقطة P على مركز التمدد C ، فإن صورتها هي النقطة P نفسها.
- إذا لم تنطبق النقطة P على مركز التمدد C ، فإن صورتها P' تقع على $\overrightarrow{CP}$ ، ويكون $CP' = k(CP)$.



$\triangle L'M'P'$ هو صورة $\triangle LMP$ الناتجة عن التمدد الذي مركزه C ومعامله 2.5

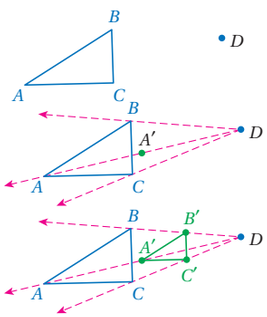
مثال 1 رسم التمدد

استعمل مسطرةً لرسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة D ، ومعامله $\frac{1}{2}$

الخطوة 1: ارسم من D أنصاف المستقيمات $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

الخطوة 2: عيّن A' على $\overrightarrow{DA}$ ، بحيث يكون $DA' = \frac{1}{2}\,DA$.

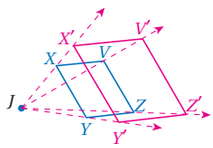
الخطوة 3: عيّن B' على $\overrightarrow{DB}$ و C' على $\overrightarrow{DC}$ بالطريقة نفسها ثم ارسم $\triangle A'B'C'$.



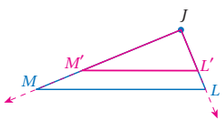
تحقق من فهمك

استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة J ، ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ ممّا يأتي:

(1A) $k = \frac{3}{2}$



(1B) $k = 0.75$



مصادر الدرس 7-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (161)	• تنويع التعليم ص (162, 161)	• تنويع التعليم ص (162, 161)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (21)	• كتاب التمارين ص (21)	• كتاب التمارين ص (21)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

من تعريف معامل مقياس التمدد، تجد أنه إذا كان معامل مقياس التمدد k أكبر من 1 ، فإن أبعاد الصورة أكبر من الأبعاد المناظرة لها في الشكل الأصلي وعندها يكون التمدد تكبيرًا. وإذا كان $0<k<1$، فإن أبعاد الصورة تكون أصغر من الأبعاد المناظره لها في الشكل الأصلي، وعندها يكون التمدد تصغيرًا. وبما أن $\frac{1}{2}$ يقع بين 0 و 1، فإن التمدد في المثال 1 تصغير.

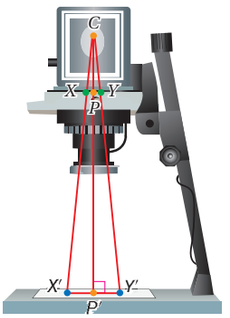
ويسمّى التمدد الذي معامله 1 تمددًا مطابقًا؛ إذ يكون الشكل الأصلي وصورته متطابقين.

إرشادات لحل المسألة

استعمال التقدير: لتجنُّب الأخطاء غير المقصودة في حساباتك، قدّر إجابة السؤال قبل الشروع في الحل. يمكنك أن تقدّر معامل مقياس التمدد في المثال 2 بحوالي $\frac{240}{40}$ أو 6 وبذلك يكون CP' (50) 6 أي 300 تقريبًا. ويكون PP' $300 - 250$ mm أي 50 تقريبًا، أو 25 cm، والإجابة 24.7 cm قريبة من الإجابة المقدّرة؛ لذا فإن الإجابة معقولة.

مثال 2 من واقع الحياة

إيجاد معامل مقياس التمدد



تصوير: لإنتاج صور مكبرة، يمكن أن تُعَدّل المسافة بين مسودة الصورة والصورة المكبرة باستعمال جهاز تكبير الصور.
افترض أن المسافة CP بين مصدر الضوء C ومسودة الصورة تساوي 45 mm، ما المسافة PP' التي يلزم أن يُعَدّل إليها جهاز تكبير الصور للحصول على صورة عرضها $X'Y' = 22.75$cm من مسودة عرضها $XY = 35$ mm؟

افهم: **المعطيات:** مركز التمدد C ، $XY = 35$ mm ،
$X'Y' = 22.75$ cm $= 227.5$ mm ،
$CP = 45$ mm.

المطلوب: إيجاد PP'.

خطط: أوجد معامل مقياس التمدد من الشكل الأصلي $\overline{XY}$ إلى الصورة $\overline{X'Y'}$، واستعمله لإيجاد CP' ، ثم استعمل CP و CP' لإيجاد PP'.

حُلَّ: معامل مقياس التمدد هو نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر له في الشكل الأصلي .

$k = \frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الأصل}}$ — معامل مقياس تمدد الصورة

$= \frac{X'Y'}{XY}$ — طول الصورة يساوي $X'Y'$ ، وطول الأصل يساوي XY

$= \frac{227.5}{35} = 6.5$ — بالتعويض والقسمة

استعمل معامل مقياس التمدد لإيجاد CP'.

$CP' = k(CP)$ — تعريف التمدد

$= 6.5(45)$ — $k = 6.5$, $CP = 45$

$= 292.5$ — بالضرب

استعمل CP' و CP لإيجاد PP'.

$CP + PP' = CP'$ — مسلّمة جمع القطع المستقيمة

$45 + PP' = 292.5$ — $CP = 45$, $CP' = 292.5$

$PP' = 247.5$ — بطرح 45 من الطرفين

يجب أن يُعدل جهاز تكبير الصور، بحيث تكون المسافة PP' بين المسودة والصورة المكبرة 247.5 mm أو 24.75 cm.

تحقق: بما أن هذا التمدد تكبير، إذن يجب أن يكون معامله أكبر من 1، وبما أن $1 < 6.5$ ، فإن معامل مقياس التمدد معقول . ✓

رسم التمدد

المثال 1 يبيّن كيفية رسم الصورة الناتجة عن التمدد.

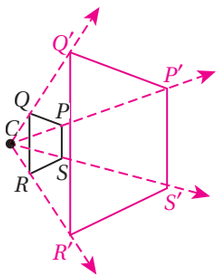
المثال 2 يبيّن كيفية إيجاد معامل مقياس التمدد.

التقويم التكويني

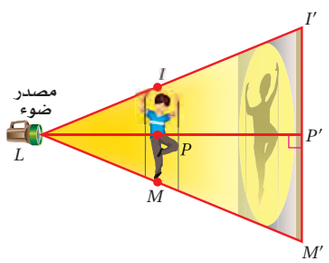
استعمل أسئلة تحقق من فهمك بعد كل مثالٍ؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 استعمل مسطرةً لرسم صورة شبه المنحرف $PQRS$ بالتمدد الذي مركزه النقطة C ومعامله 3



2 **دمى:** للإيهام بأن الصورة بالحجم الطبيعي، يستعمل محرِّكو الدُّمَى مصدرًا ضوئيًّا؛ لعرض صورة مكبرة للدُّمية على شاشة أو حائط. افترض أن المسافة بين مصدر الضوء L والدمية (LP) هي 24 in، على أي بُعدٍ عن الشاشة تضع دمية طولها 9 in؛ ليكون طول ظلِّها ($I'M'$) يساوي 49.5 in ؟



9 ft أو 108 in

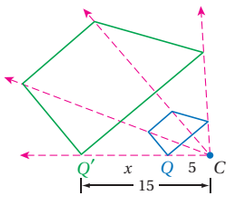
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون: يمكن ربط التمدد مع النوابض من خلال زيادةطول النابض أو تقصيره، حيث يُستعمل معامل التمدد (أكبر من 1) عند زيادة الطول، ومعامل التمدد (أصغر من 1) عند تقصير الطول، ويستطيع الطلاب تجريب ذلك باستعمال نوابض متعددة داخل غرفة الصف.

التحقق من فهمك

2) حدِّد ما إذا كان التمدد من الشكل Q إلى Q' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل مقياس التمدد، وقيمة x. **تكبير؛ 3؛ 10**



التمدد في المستوى الإحداثي: يمكن أن تستعمل القاعدة الآتية لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل.

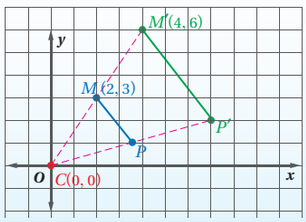
مفهوم أساسي — التمدد في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، اضرب الإحداثيَّين x , y لكل نقطة في الشكل الأصلي في معامل مقياس التمدد k.

الرموز: $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

مثال:



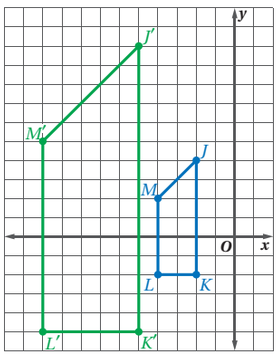
مثال 3 — التمدد في المستوى الإحداثي

إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي: $J(-2, 4), K(-2, -2), L(-4, -2), M(-4, 2)$. مثِّل بيانيًّا $JKLM$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله 2.5

اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل التمدد 2.5

(x, y)	$\rightarrow$	$(2.5x, 2.5y)$
$J(-2, 4)$	$\rightarrow$	$J'(-5, 10)$
$K(-2, -2)$	$\rightarrow$	$K'(-5, -5)$
$L(-4, -2)$	$\rightarrow$	$L'(-10, -5)$
$M(-4, 2)$	$\rightarrow$	$M'(-10, 5)$

مثِّل بيانيًّا $JKLM$ وصورته $J'K'L'M'$.



التحقق من فهمك

مثِّل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيًّا، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل، ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: **3A, 3B** انظر ملحق الإجابات .

3A) $k=\frac{1}{3}$؛ $Q(0, 6), R(-6, -3), S(6, -3)$ **3B)** $k=2$؛ $A(2, 1), B(0, 3), C(-1, 2), D(0, 1)$

إرشادات للدراسة

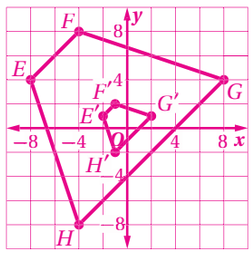
معامل التمدد السالب: يمكن أن يكون معامل التمدد سالبًا، وستستقصي هذا النوع من التمدد في السؤال 26.

التمدد في المستوى الإحداثي

المثال 3 يبيّن كيفية رسم صورة شكل ناتجة عن تمددٍ في المستوى الإحداثي.

مثال إضافي

3 إحداثيات رؤوس شبه المنحرف $EFGH$ هي: $E(-8, 4), F(-4, 8), G(8, 4), H(-4, -8)$، مثِّل بيانيًّا صورة $EFGH$ الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{1}{4}$



تنبيه!

مركز التمدد: انتبه للطلاب الذين يبدؤون رسم التمدد من نقطة على الشكل، ويقيسون من نقطةٍ بعيدةٍ عن مركز التمدد، وأكِّد على أن معامل مقياس التمدد يُقاس بدءًا من مركز التمدد.

المحتوى الرياضي

الاتجاه: بيّن للطلاب أن التمدد يحفظ قياس الزوايا والاتجاه، ولكنه لا يحفظ الأطوال.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اعرض المستوى الإحداثي على السبورة، ثم ارسم شكلًا في المستوى، وأعطِ الطلاب معامل مقياس التمدد، واطلب إليهم أن يحدِّدوا إحداثيات رؤوس صورة الشكل الناتجة عن التمدد، وأن يعيّنوا هذه النقاط ويرسموا صورة الشكل.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا الخطوات المتَّبعة في رسم الصورة الناتجة عن التمدد، ويتعين على الطلاب أن يقدموا أمثلةً توضح هذه الخطوات، وأن يكتبوا خصائص التمدد. اقبل جميع الإجابات المعقولة.

تأكـد

المثال 1 استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه النقطة M ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: 2–1) انظر الهامش.

1) $k = \frac{1}{4}$

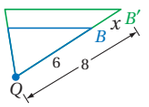


2) $k = 2$

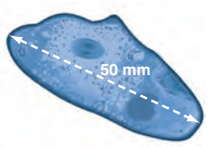


المثال 2

3) حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل B إلى الشكل B' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x. تكبير؛ $\frac{4}{3}$؛ 2



4) أحياء: طول مخلوق حيٍّ دقيق وحيد الخلية 200 ميكرون، ويظهر طوله تحت المجهر 50 mm، إذا كان 1000 ميكرون = 1 mm، فما قوة التكبير (معامل مقياس التمدد) المُستعملة؟ وضّح إجابتك.



4) 250 مرة؛ طول الكائن الحي بالملمتر يساوي 1000 ÷ 200 أي 0.2 mm

معامل مقياس التمدد يساوي $\frac{50}{0.2}$ أي 250

المثال 3 مثِّل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيًّا، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية: 8–5) انظر ملحق الإجابات

5) $W(0, 0), X(6, 6), Y(6, 0)$؛ $k = 1.5$

6) $Q(-4, 4), R(-4, -4), S(4, -4), T(4, 4)$؛ $k = \frac{1}{2}$

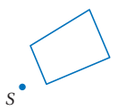
7) $A(-1, 4), B(2, 4), C(3, 2), D(-2, 2)$؛ $k = 2$

8) $J(-2, 0), K(2, 4), L(8, 0), M(2, -4)$؛ $k = \frac{3}{4}$

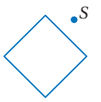
تدرب وحل المسائل

المثال 1 استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه النقطة S ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية: 11–9) انظر ملحق الإجابات

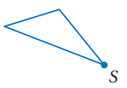
9) $k = \frac{5}{2}$



10) $k = \frac{1}{3}$

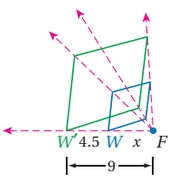


11) $k = 2.25$

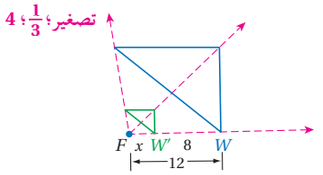


المثال 2 حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى الشكل W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x.

12) تكبير؛ 2؛ 4.5



13) تصغير؛ $\frac{1}{3}$؛ 4



3 التدريب

التقويم التكويني

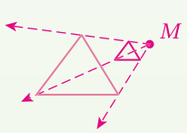
استعمل الأسئلة 8–1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل بعض الأسئلة

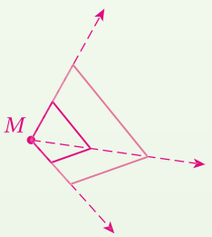
الورق الشفاف: قد يجد الطلاب أنه من المفيد وجود الورق الشفاف لوضعها فوق كل شكل من الأشكال في الأسئلة 11–9، للحصول على صورة مطابقة تمامًا لكل منها ثم رسم الصورة الناتجة عن التمدد وفقًا لما هو محدد في كل سؤال

إجابات:

1)



2)



تنويع الواجبات المنزلية

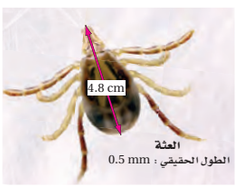
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	18–9، 42–29
ضمن ضمن المتوسط	19–9 فردي، 20، 25–21 فردي، 26، 42–29
فوق فوق المتوسط	38–19، (اختياري: 42–39)

حشرات: طول كلٍّ من الحشرتين الآتيتين كما تُرى تحت المجهر مكتوب على الصورة. إذا علمت طول الحشرة الحقيقي، فأوجد قوة التكبير المُستعملة، ووضّح إجابتك.

14)



15)



المثال 3 مثِّل بيانيًّا المضلع وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية: **16–18)** انظر ملحق الإجابات.

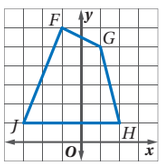
16) $k = 0.5$ ؛ $J(-8, 0), K(-4, 4), L(-2, 0)$

17) $k = 0.75$ ؛ $D(4, 4), F(0, 0), G(8, 0)$

18) $k = 3$ ؛ $W(2, 2), X(2, 0), Y(0, 1), Z(1, 2)$

a–b) انظر الهامش .

19) هندسة إحداثية: استعمل التمثيل البياني للمضلع $FGHJ$ للإجابة عمَّا يلي:



a) مثِّل بيانيًّا صورة $FGHJ$ الناتجة عن تمدد معامله $\frac{1}{2}$ ومركزه نقطة الأصل، ثم انعكاس حول المحور y.

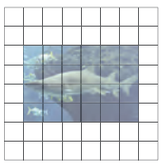
b) نفِّذ التحويل المركب في الفرع **a** بعكس الترتيب.

c) هل يؤثر ترتيب التحويلين الهندسيين هنا في الصورة النهائية؟ **لا**

d) هل يؤثر ترتيب تركيب التمدد والانعكاس في الصورة النهائية دائمًا أو أحيانًا أو أنه لا يؤثر عليها أبدًا؟

انظر الهامش .

20) رسم: يرسم سليمان صورةً باستعمال طريقة المربعات، فيضع شبكة إحداثية شفافة طول وحدتها $\frac{1}{4}$ cm فوق صورة أبعادها $4\text{ cm} \times 6\text{ cm}$، ويضع شبكةً أخرى طول وحدتها $\frac{1}{2}$ cm على ورقة رسم أبعادها $8\text{ cm} \times 12\text{ cm}$، ثم يرسم ما يحويه كل مربع من الصورة في المربع المناظر له على ورقة الرسم.

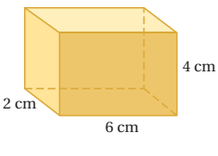


a) ما معامل مقياس هذا التمدد؟ $\frac{2}{1}$ **أي 2**

b) ما طول وحدة الشبكة التي يتعيَّن عليه استعمالها لرسم صورة قياسها 10 أمثال قياس الصورة الأصلية؟ **2.5 cm**

c) كم تكون مساحة الرسم الناتج عن صورة أبعادها 5 cm x 7 cm عند استعمال شبكة وحدتها 2 cm على لوحة الرسم؟ **2240 cm²**

21) تغيير الأبعاد: يمكن إجراء تمددٍ على الأشكال الثلاثية الأبعاد أيضًا.



a) أوجد مساحة سطح المنشور المجاور وحجمه.

b) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمددٍ معامله 2 ، وأوجد حجمه.

c) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمددٍ معامله $\frac{1}{2}$ ، وأوجد حجمه.

d) أوجد نسبة مساحة سطح المنشور الناتج عن كل تمدد إلى مساحة سطح المنشور الأصلي، ثم أوجد نسبة حجم المنشور الناتج عن كل تمددٍ إلى حجم المنشور الأصلي. انظر الهامش.

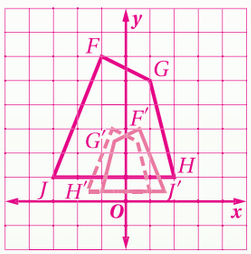
e) ضع تخمينًا حول أثر التمددٍ ذي المعامل الموجب في مساحة سطح المنشور وفي حجمه. انظر الهامش.

إجابات:

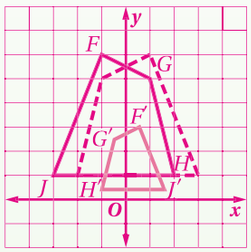
14) 15مرة ؛ طول صورة الحشرة بالملمترات هو 10×3.75 أي 37.5 mm ومعامل مقياس التمدد يساوي $\frac{37.5}{2.5}$ أي 15

15) 96 مرة ؛ طول الحشرة بالملمترات هو 10×4.8 أي 48 mm. ومعامل مقياس التمدد يساوي $\frac{48}{0.5}$ أي 96

19a)



19b)



19d) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: لا يكون لترتيب تركيب التمدد الذي مركزه نقطة الأصل والانعكاس أهمية، إذا كان محور الانعكاس يحوي نقطة الأصل؛ أي إذا كانت معادلته على الصورة: $y = mx$.

21d) مساحة السطح 4 أمثال المساحة الأصلية، عندما يكون معامل مقياس التمدد 2، ومساحة السطح تساوي $\frac{1}{4}$ المساحة الأصلية، إذا كان معامل مقياس التمدد $\frac{1}{2}$، حجم المنشور الجديد 8 أمثال حجم المنشور الأصلي، عندما يكون معامل مقياس التمدد 2، وحجم المنشور يساوي $\frac{1}{8}$ الحجم الأصلي، إذا كان معامل مقياس التمدد $\frac{1}{2}$

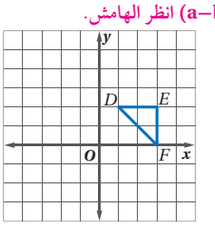
21e) أضرب مساحة سطح الشكل الأصلي في k^2، ثم أضرب حجم الشكل الأصلي في k^3.

21a) مساحة سطح المنشور: 88 cm^2 ؛ وحجمه : 48 cm^3

21b) مساحة سطحه: 352 cm^2 ؛ وحجمه: 384 cm^3

21c) مساحة سطحه: 22 cm^2 ؛ وحجمه: 6 cm^3

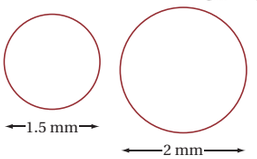
22) هندسة إحداثية: استعمل التمثيل البياني المجاور للإجابة عمّا يأتي: **a–b)** انظر الهامش.



a) مثّل بيانيًّا صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن تمدد مركزه النقطة D ومعامله 3

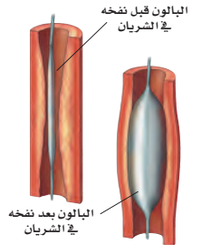
b) عبّر عن هذا التمدد بتركيب تحويلين هندسيين، أحدهما تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3

23) صحة: استعمل فقرة الربط مع الحياة المجاورة للإجابة عن السؤالين الآتيين:



a) ينفخ الطبيب بالون القسطرة في الشريان التاجي للمريض مكبرًا البالون كما يتضح في الشكل المجاور.
أوجد معامل هذا التمدد. $1\frac{1}{3}$

b) أوجد مساحة المقطع العرضي للبالون قبل النفخ وبعده. $1.77\ mm^2$ ؛ $3.14\ mm^2$



الربط مع الحياة

عندما يضيق الشريان التاجي الذي ينقل الدم إلى القلب بسبب تراكم الكولسترول، يمكن توسيعه باستعمال أنبوب أجوف مرن في نهايته بالون صغير، وتسمّى هذه العملية قسطرة البالون.

أُعطي في كلٍّ من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن تمدد مركزه النقطة P، عيّن موقع النقطة P، وأجد معامل مقياس التمدد. 24, 25) انظر الهامش.

24)



25)



26) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستستقصي التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب. **a–c)** انظر الهامش.

a) هندسيًّا: مثّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-2, 0), B(2, -4), C(4, 2)$. ثم ارسم صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقط الأصل ومعامله -2

b) هندسيًّا: ارسم صورة المثلث الناتجة عن تمدد معامله $-\frac{1}{2}$ ، وآخر معامله -3

c) جدوليًّا: اكتب إحداثيات صورة المثلث الناتجة عن كل تمدد في جدول.

d) لفظيًّا: ضع تخمينًا حول قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

e) تحليليًّا: اكتب قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $-k$. $(x, y) \rightarrow (-kx, -ky)$

f) لفظيًّا: عبّر عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب بتحويل هندسي مركب.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) اكتشف الخطأ: يحاول كلٌّ من متعب وسعود أن يصف تأثير القيمة السالبة لمعامل مقياس التمدد في صورة الشكل الرباعي $WXYZ$، فأيهما تفسيره صحيح؟ اشرح تبريرك.

سعود؛ لأن متعبًا استعمل معامل تمدد موجبًا.



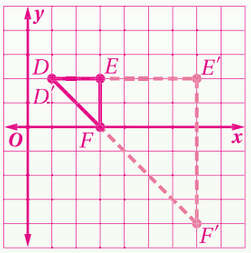
28) تحدَّ: أوجد معادلة صورة المستقيم $y = 4x - 2$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5 $y = 4x - 3$

29) اكتب: هل تحفظ التحويلات الهندسية جميعها التوازي والاستقامة ؟ اشرح إجابتك. انظر الهامش.

تمثيلات متعددة: في السؤال 26، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية والجداول والتعابير الجبرية والوصف اللفظي؛ لاستقصاء التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

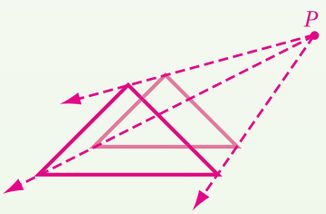
إجابات:

22a)



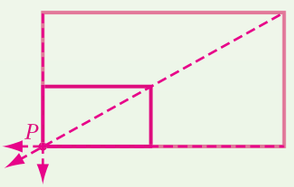
22b) تركيب تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار، و4 وحداتٍ إلى أسفل.

24)



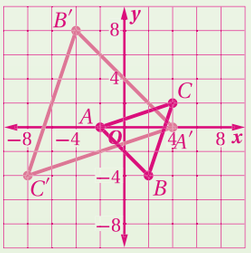
$\frac{4}{5}$

25)



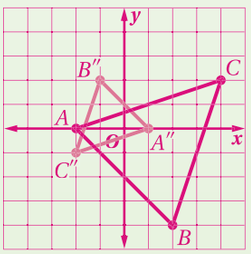
$\frac{11}{5}$

26a)

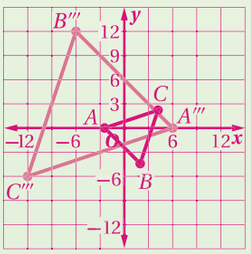


عندما $k = -2$

26b)



عندما $k = -\frac{1}{2}$



عندما $k = -3$

26c)

	الإحداثيات		
معامل مقياس التمدد	A'	B'	C'
-2	$(4, 0)$	$(-4, 8)$	$(-8, -4)$
$-\frac{1}{2}$	$(1, 0)$	$(-1, 2)$	$(-2, -1)$
-3	$(6, 0)$	$(-6, 12)$	$(-12, -6)$

29) إجابة ممكنة: نعم؛ تتكون أشكال متطابقة نتيجة الانعكاس والإزاحة والدوران؛ ممَّا يعني أن جميع الأضلاع المتوازية قبل التحويل الهندسي، تبقى متوازيةً بعده، وأن النقاط الواقعة على استقامة واحدة قبل التحويل الهندسي، تبقى على استقامة واحدة بعده. كما يحفظ التمدد التوازي والاستقامة؛ لأن الأشكال الناتجة تكون مشابهة للأصل؛ أي أن لها الشكل نفسه، ولكن بأطوالٍ مختلفةٍ.

26d) إجابة ممكنة: يضرب كل إحداثي في معامل مقياس التمدد السالب.

26f) إجابة ممكنة: يمكن وصف التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $-k$ بأنه تركيب تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله k ودوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب أن يقيسوا جسمًا في غرفة الفصل، وأن ينفِّذوا تمددًا لتصغيره، ويكوِّنوا نموذجًا عنه على لوحة و/أو على ورق الرسم، واطلب إليهم أن يُسلّموا النماذج التي أعدُّوها قبل مغادرة الفصل.

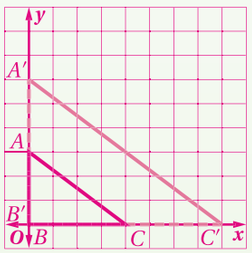
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 6–7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (50)

إجابات:

30)



$k = 2$ ، ومركز التمدد هو النقطة B، وهي نقطة الأصل.

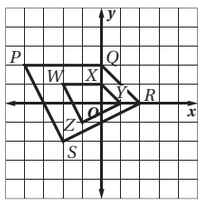
31) إجابة ممكنة: يُنتج كلٌّ من الانعكاس والإزاحة والدوران أشكالًا مطابقة للشكل الأصلي؛ لأن زوايا وأضلاع الشكل الأصلي تطابق الزوايا و الأضلاع المناظرة لها في الصورة. ويُنتج التمدد أشكالًا مشابهةً للشكل الأصلي؛ لأن زوايا الشكل الأصلي تطابق الزوايا المناظرة لها في الصورة، وأطوال أضلاع الشكل الأصلي متناسبة مع أطوال الأضلاع المناظرة لها في الصورة. وكذلك يُنتج كل من الدوران بزاوية قياسها 360° حول نقطة الأصل، والانعكاس حول محور تماثل الشكل، والتمدد الذي معامله 1 الشكل الأصلي نفسه؛ لأن كل جزء من الشكل الناتج من هذه التحويلات ينطبق على الجزء المناظر له في الشكل الأصلي.

30) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا في المستوى الإحداثي، ثم كبِّره بحيث تصبح مساحة صورته الناتجة عن التمدد أربعة أمثال مساحته الأصلية، وحدّد معامل مقياس التمدد ومركزه. **انظر الهامش.**

31) **اكتب:** حدّد التحويلات الهندسية التي تكون نتيجتها مطابقة للشكل الأصلي، وتلك التي تكون نتيجتها مشابهة للشكل الأصلي، وتلك التي تكون نتيجتها الشكل الأصلي نفسه. اشرح إجابتك. **انظر الهامش.**

تدريب على اختبار

32) ما معامل مقياس التمدد من الشكل $PQRS$ إلى الشكل $WXYZ$؟ $\frac{1}{2}$



33) يرسم توفيق نسخةً من لوحة فنية معروضة في متحف فني. إذا كان عرض اللوحة 3 ft، وطولها 6 ft، وقرر أن يستعمل معامل مقياس تمدد قدره 0.25، فما أبعاد ورقة الرسم بالبوصات المناسبة لإنجاز رسمه؟ **D**

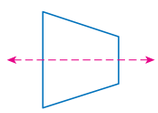
A 4 in × 8 in
B 8 in × 16 in
C 6 in × 12 in
D 10 in × 20 in

مراجعة تراكمية

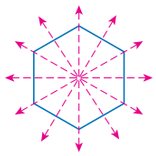
بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدد عددها في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 5-7)

34) لا

35) نعم؛ 1

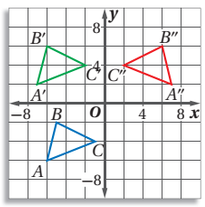


36) نعم؛ 6

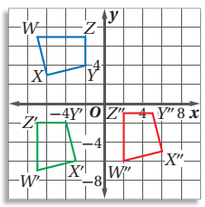


صِفِ التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل إلى صورته النهائية في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-7)

37) إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليسار و 8 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y.



38) دوران بزاوية 90° حول نقطة الأصل وإزاحة مقدارها 9 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أعلى.



استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

39) $58.9 = 2x$ **29.45** تقريبًا
40) $\frac{108.6}{\pi} = x$ **34.57** تقريبًا
41) $228.4 = \pi x$ **72.7** تقريبًا
42) $\frac{336.4}{x} = \pi$ **107.08** تقريبًا



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 7

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

الاسم _____ التاريخ _____

7-6 تدريبات إعادة التعليم

التمدد

رسم التمدد:

التمدد هو تحويل هندسي يكبّر الشكل أو يصغره بنسبةٍ محدّدةٍ، هي نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر لها في الشكل الأصلي. ونسمي هذه النسبة معامل مقياس التمدد، ولأن الصورة الناتجة عن التمدّد تشبه الشكل الأصلي، فإن التمدد نوع من أنواع تحويلات التشابه، ويتم تحديد التمدد بمعرفة مركز التمدد ومعامله.

مثال استعمل مسطرةً لرسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن التمدّد الذي مركزه النقطة O ، ومعامله $k = 2$.

الخطوة 1: ارسم $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ، $\overline{OC}$.

الخطوة 2: عيّن النقاط A' و B' و C' على أن يكون:
$OA' = 2(OA)$ و $OB' = 2(OB)$ و $OC' = 2(OC)$

الخطوة 3: صِل النقاط A' و B' و C'؛ لتحصل على $\triangle A'B'C'$ ،
فيكون $\triangle A'B'C'$ صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن التمدّد.

تمارين

استعمل مسطرةً لرسم الصورة الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة S ومعامله العدد k المحدّد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

1) $k = 2$

2) $k = \frac{1}{2}$

3) $k = 1$

4) $k = 3$

5) $k = \frac{2}{3}$

6) $k = 1$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (32) دون

الاسم _____ التاريخ _____

7-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

التمدد

التمدد في المستوى الإحداثي:

لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله k ، اضرب الإحداثيين x و y لكل نقطةٍ من الشكل الأصلي في معامل التمدد k.

$$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$$

مثال إحداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-2, -2), B(1, -1), C(2, 0)$ ، مثل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 2.

اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في العدد 2.

$(x, y) \rightarrow (2x, 2y)$
$A(-2, -2) \rightarrow A'(-4, -4)$
$B(1, -1) \rightarrow B'(2, -2)$
$C(2, 0) \rightarrow C'(4, 0)$

ومثّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته $\triangle A'B'C'$

تمارين

مثّل بيانيًّا المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه، ثم مثّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

1) $E(-2, -2), F(-2, 4), G(2, 4), H(2, -2)$; $k = 0.5$

2) $A(0, 0), B(3, 3), C(6, 3), D(6, -3)$, $E(3, -3)$; $k = \frac{1}{3}$

3) $A(-2, -2), B(-1, 2), C(2, 1)$; $k = 2$

4) $A(2, 2), B(3, 4), C(5, 2)$; $k = 2.5$

تدريبات المهارات (33) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-6 تدريبات المهارات

التمدد

استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن التمدّد الذي مركزه C ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) $k = 2$

2) $k = \frac{1}{4}$

حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل التمدد وقيمة x.

3) تكبير؛ $k = 3.5, x = 2$

4) تصغير؛ $k = 2.5, x = 3$

مثّل بيانيًّا المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه، ثم مثّل صورته الناتجة عن التمدّد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

5) $J(2, 4), K(4, 4), P(3, 2)$; $k = 2$

6) $D(-2, 0), G(0, 2), F(2, -2)$; $k = 1.5$

تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-6 تدريبات حل المسألة

التمدد

1) مركز التمدد: وضع سعيد صورة شكل نتجت عن تمدّد فوق الشكل الأصليّ، كما في الشكل أدناه، عيّن مركز هذا التمدّد، واشرح الطريقة التي اتبعتها لتعيينه.

انظر الشكل. صل النقاط وصورها بخطوط مستقيمة؛ فتكون نقطة التقاطع هي مركز التمدد.

2) معامل التمدد: رسم عمر شكلًا وصورته الناتجة عن تمدّدٍ على المستوى الإحداثيّ نفسه، كما هو موضّح أدناه: ما معامل هذا التمدّد؟ **2.5**

3) إعلانات: إذا كان طول صورة سيارةٍ على إعلان لبيع السيارات هو 4 in ، فما معامل التصغير، إذا كان طول السيارة الأصلي 14 ft؟

$\frac{1}{42}$

4) تمدد: يرسم فهدٌ صورًا لوضعها على لوحة، ويريد أن يزيد مساحة خطوط النجمة الخماسيّة أداءه بإجراء تمدّدٍ لها، ومن ثم يظلّل المساحة بين الشكل الأصليّ والصورة. ارسم صورة النجمة الناتجة عن التمدّد الذي مركزه النقطة المبيّنة في الشكل ومعامله 1.5. **انظر الشكل.**

5) مخططات: رسم سلمان في المستوى الإحداثيّ مخطّطًا لمنصّةٍ يعدّها لقاعة الاحتفالات في المدرسة، وقد قرّر أن يصغّرها لكي تكون صالحةً للاستعمال في أماكن أصغر مساحةً من قاعة المدرسة.

a) ارسم صورة هذا المخطّط الناتجة عن التمدّد الذي مركزه النقطة $(0, 0)$ ومعامله 0.5. **انظر الشكل.**

b) إذا كان محيط الصورة الناتجة عن التمدّد 26 وحدة، فما محيط المخطّط الأصليّ؟ **52 وحدة.**

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 7

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (35)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

7-6 التدريبات الإثرائية

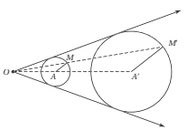
الدوائر المتشابهة:

قد تتعجب إذا علمت أنّ أيّ دائرتين غير متطابقتين واقعتين في المستوى نفسه ولا تشتركان في نقاطٍ داخليّة، يمكنك نقل إحداهما إلى الأخرى بأكثر من تمدّدٍ واحد.

1) يبيّن الشكل المجاور إحدى طرق نقل الدائرة الصغيرة إلى الدائرة الكبيرة باستعمال التمدّد. إذا أُعطيت الدائرتان، فإنه يمكنك تحديد مركز التمدّد بالطريقة التي توضحها المستقيمات المرسومة في الشكل. صِف الطريقة التي يمكنك تحديد مركز التمدّد بها.

استعمل القطع المستقيمة الملوّنة في الشكل للتعبير عن معامل التمدّد.

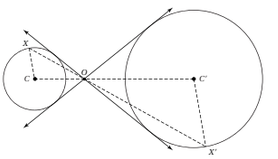
ارسم المنصّفَين المشتركَين الخارجيين للدائرتين. فتكون نقطة تقاطعهما هي مركز التمدّد الذي ينقل $\odot A$ إلى $\odot A'$، معامل التمدّد $= \frac{A'M'}{AM}$



2) في الشكل أدناه زوجٌ آخر من الدوائر غير المتطابقة التي لا تشترك في أي نقطة داخليّة، فلقد بيّن لك من السؤال 1 أنه يمكنك الآن تحديد نقطة عن يسار الدائرة الصغرى تمثّل مركز التمدّد الذي ينقل $\odot C$ إلى $\odot C'$، أوجد مركزًا آخر لتمدّد آخر يحوّل $\odot C$ إلى $\odot C'$، ثم عيّن قطعًا مستقيمةً وسمّها واستعملها للتعبير عن معامل التمدّد.

ارسم المنصّفَين المشتركَين الداخليين للدائرتين. فتكون نقطة تقاطعهما هي مركز التمدّد.

معامل التمدّد $= \frac{CX}{CX}$

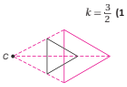


كتاب التمارين (21)　دون ضمن فوق

7 - 6 التمدد

استعمل مسطرة لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه النقطة C، ومعامله k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) $k = \frac{3}{2}$

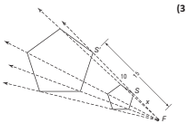


2) $k = \frac{2}{3}$



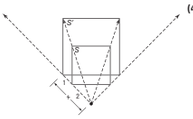
حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل S إلى S' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x.

3)



تكبير؛ $K = 3, x = 5$

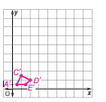
4)



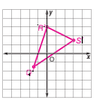
تكبير؛ $K = 1.5, x = 3$

مثّل بيانيًّا المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه، ثمَّ مثّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزهُ نقطة الأصل، ومعامله العدد k المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

5) الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(1, 1), B(2, 3), C(4, 2), D(3, 1)$؛ $k = 0.5$



6) $\triangle QRS$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-1, -1), R(0, 2), S(2, 1)$، $k = \frac{3}{2}$



7) تصوير: كبّر خالد صورة أبعادها $10\,\text{cm} \times 16\,\text{cm}$ بمعامل مقياس تمدد $\frac{5}{2}$، ما بُعدا الصورة الناتجة؟

$40\,\text{cm} \times 25\,\text{cm}$

الفصل 7 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الانعكاس (الدرس 7-1)

- الانعكاس هو تحويل هندسي يقلب الشكل حول مستقيمٍ يُسمّى محور الانعكاس.

الإزاحة (الانسحاب) (الدرس 7-2)

- الإزاحة (الانسحاب) هي تحويل هندسي ينقل نقاط الشكل جميعها المسافة نفسها وفي الاتجاه نفسه .

الدوران (الدرس 7-3)

- يحرِّك الدوران كل نقطة في الشكل الأصلي بزاوية محددة وفي اتجاه محدد حول نقطة ثابتة.

تركيب التحويلات الهندسية (الدرس 7-4)

- يمكن تمثيل الإزاحة بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متوازيين، ويمكن تمثيل الدوران بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متقاطعين .

التماثل (الدرس 7-5)

- التماثل: يكون الشكل مماثلًا إذا وُجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه.
- رُتبة التماثل هي عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل على الشكل نفسه في أثناء تدويره من 0° إلى 360°
- مقدار التماثل هو قياس أصغر زاوية يدور بها الشكل حتى ينطبق على نفسه.

التمدد (الدرس 7-6)

- يكبّر التمدد الشكل أو يصغّره بنسبة محدّدة.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



مفردات أساسية

محور الانعكاس (ص. 118)
مركز الدوران (ص. 133)
زاوية الدوران (ص. 133)
التحويل الهندسي
المركب (ص. 141)
التماثل (ص. 154)
التماثل حول محور (الأشكال الثنائية الأبعاد) (ص. 154)
التماثل حول مستوى (ص. 156)
محور التماثل (ص. 154)
التماثل حول محور (الأشكال الثلاثية الأبعاد) (ص. 156)
التماثل الدوراني (ص. 155)
مركز التماثل (ص. 155)
رتبة التماثل (ص. 155)
مقدار التماثل (ص. 155)
التمدد (ص. 160)
تحويل التشابه (ص. 160)
معامل مقياس التمدد (ص. 160)

اختبار المفردات

اختر المفردة التي تجعل الجملة صحيحة:

1) عند إجراء تحويل هندسي على شكلٍ ما، ثم إجراء تحويلٍ هندسي آخر على صورته، فإن هذه العملية تسمى (تحويلًا هندسيًّا مركبًا ، رتبة الدوران).

2) إذا طُوي شكل حول خطٍّ مستقيمٍ، وانطبق نصفاه أحدهماعلى الآخر تمامًا، فإن خط الطي يسمى (محور الانعكاس ، محور التماثل).

3) التحويل الهندسي الذي يكبّر الشكل أو يصغّره بنسبة محددة هو (التمدد ، الدوران).

4) يُطلق على عدد المرات التي ينطبق فيها الشكل على نفسه في أثناء تدويره من 0° إلى 360° اسم (مقدار التماثل ، رتبة التماثل).

5) يبعد (محور الانعكاس ، مركز التمدد) المسافة نفسها عن كل نقطة في الشكل وصورتها.

6) يكون الشكل (تحويلًا هندسيًّا مركبًا ، متماثلًا) إذا وجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه.

7) يمكن تمثيل (الإزاحة ، الدوران) بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متقاطعين.

8) لتدوير نقطةٍ ما بزاوية (90°، 180°) عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1، وبدّل الإحداثيين x , y.

9) (التمدد ، الانعكاس) هو تحويل تطابق.

10) يكون للشكل (محور تماثل ، تماثل دوراني) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران حول مركزه بزاوية بين 0° و 360° هي الشكل نفسه.

التقويم التكويني

المفردات الأساسية : رقم الصفحة بعد كل مفردة يُشير إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرةٍ.

فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 10-1، فذكِّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات ، ص (52).

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفَّحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلةً لكل درس.

واقترح عليهم أن يُبقُوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

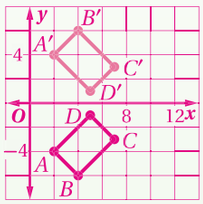
وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة؛ استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

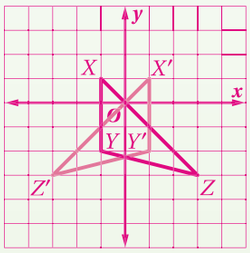
مراجعة: إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم على أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

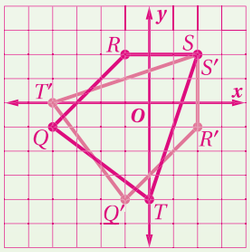
11)



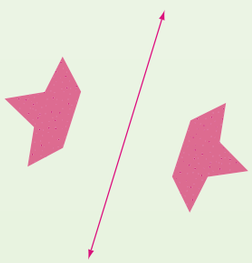
12)



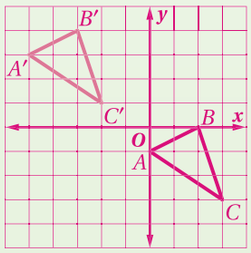
13)



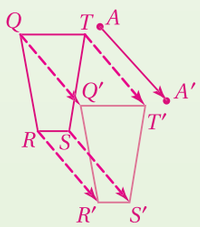
14)



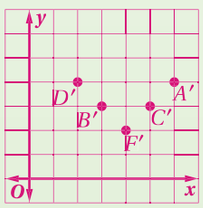
15)



16)



17)



مراجعة الدروس

7-1 الانعكاس (ص 125–118)

14–11) انظر الهامش.

مثِّل بيانيًّا كل شكل مما يأتي وصورته بالانعكاس المحدد.

11) المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$A(2, -4), B(4, -6), C(7, -3), D(5, -1)$ ؛
الانعكاس حول المحور x .

12) المثلث XYZ الذي إحداثيات رؤوسه:
$X(-1, 1), Y(-1, -2), Z(3, -3)$ ؛ الانعكاس حول المحور y .

13) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$Q(-4, -1), R(-1, 2), S(2, 2), T(0, -4)$ ؛
بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

14) فن: يصنع عامر منحوتتين ليضعهما على جانبَي ممرٍّ في حديقة منزله، بحيث تكون إحداهما انعكاسًا للأخرى حول المستقيم الذي يقسم هذا الممر طوليًّا إلى نصفين. انسخ الشكل في دفترك، وارسم محور الانعكاس.



مثال 1

مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(1, 4), K(2, 1), L(6, 2)$ ، ومثِّل صورته بالانعكاس حول المحور x .

اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1

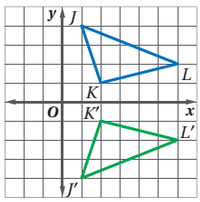
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$J(1, 4) \rightarrow J'(1, -4)$

$K(2, 1) \rightarrow K'(2, -1)$

$L(6, 2) \rightarrow L'(6, -2)$

ثم مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته $\triangle J'K'L'$.

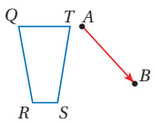


7-2 الإزاحة (الانسحاب) (ص 131–126)

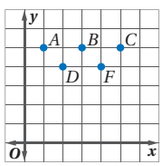
17–15) انظر الهامش.

15) مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$ ، وارسم صورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

16) انقل إلى دفترك الشكل المجاور ثم ارسم صورة الشكل $QRST$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل A إلى B .



17) يمثل الشكل المجاور مواقع 5 لاعبين في ملعب، تحرك كل من اللاعبين B, F, C وحدتين إلى أسفل، في حين تحرك اللاعب A خمس وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل. ارسم المواقع النهائية للاعبين .



مثال 2

مثِّل بيانيًّا $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $X(2, 2), Y(5, 5), Z(5, 3)$ ، وارسم صورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 5 وحدات إلى أسفل.

يمكن تمثيل هذه الإزاحة بالقاعدة $(x, y) \rightarrow (x-3, y-5)$.

أوجد صورة كل رأس.

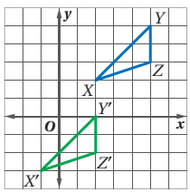
$(x, y) \rightarrow (x-3, y-5)$

$X(2, 2) \rightarrow X'(-1, -3)$

$Y(5, 5) \rightarrow Y'(2, 0)$

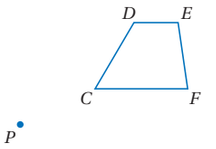
$Z(5, 3) \rightarrow Z'(2, -2)$

ثم مثِّل بيانيًّا $\triangle XYZ$ وصورته $\triangle X'Y'Z'$.



7-3 الدوران (ص 138–133)

18) استعمل منقلةً ومسطرةً لرسم صورة $CDEF$ الناتجة عن دوران بزاوية $50°$ حول النقطة P. **20–18) انظر الهامش.**



مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران بالزاوية المحددة حول نقطة الأصل في كلٍّ ممَّا يأتي:

19) $\triangle MNO$ الذي إحداثيات رؤوسه: $M(-2, 2), N(0, -2), O(1, 0)$؛ $180°$

20) $\triangle DGF$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(1, 2), G(2, 3), F(1, 3)$؛ $90°$

مثال 3

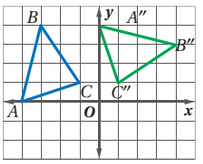
مثّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل، حيث: $A(-4, 0), B(-3, 4), C(-1, 1)$.

إحدى طرائق حل هذه المسألة هي إجراء دوران بزاوية $180°$، ثم دوران آخر بزاوية $90°$؛ لذا اضرب الإحداثيَّين x, y في -1

(x, y)	$\rightarrow$	$(-x, -y)$
$A(-4, 0)$	$\rightarrow$	$A'(4, 0)$
$B(-3, 4)$	$\rightarrow$	$B'(3, -4)$
$C(-1, 1)$	$\rightarrow$	$C'(1, -1)$

ثم اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1، وبدّل موقعَي الإحداثيين x, y.

(x, y)	$\rightarrow$	$(-y, x)$
$A'(4, 0)$	$\rightarrow$	$A''(0, 4)$
$B'(3, -4)$	$\rightarrow$	$B''(4, 3)$
$C'(1, -1)$	$\rightarrow$	$C''(1, 1)$



ثم مثّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته $\triangle A''B''C''$.

7-4 تركيب التحويلات الهندسية (ص 148–141)

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كلٍّ ممَّا يأتي: **23–21) انظر الهامش.**

21) $\overline{CD}$، حيث $C(3, 2), D(1, 4)$، انعكاس حول المستقيم $x = y$، ثم دوران $270°$ حول نقطة الأصل.

22) $\overline{GH}$، حيث $G(-2, -3), H(1, 1)$، إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x.

23) أنماط: كوّن عبد السلام النمط الآتي لإطار لوحة، صِف تركيب التحويلات الهندسية الذي استعمله لتكوين هذا النمط.



مثال 4

إحداثيات طرفَي $\overline{RS}$ هما $S(1, 1)$, $R(4, 3)$، مثّل بيانيًّا $\overline{RS}$ وصورتها الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم دوران حول نقطة الأصل بزاوية $180°$

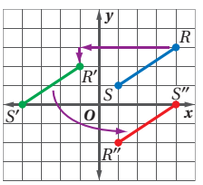
الخطوة 1: يمكن التعبير عن الإزاحة بالقاعدة $(x, y) \rightarrow (x-5, y-1)$

(x, y)	$\rightarrow$	$(x-5, y-1)$
$R(4, 3)$	$\rightarrow$	$R'(-1, 2)$
$S(1, 1)$	$\rightarrow$	$S'(-4, 0)$

الخطوة 2: الدوران حول نقطة الأصل بزاوية $180°$

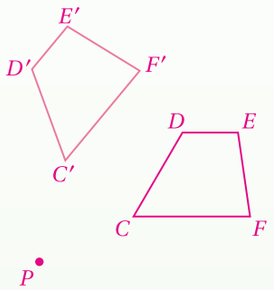
(x, y)	$\rightarrow$	$(-x, -y)$
$R'(-1, 2)$	$\rightarrow$	$R''(1, -2)$
$S'(-4, 0)$	$\rightarrow$	$S''(4, 0)$

الخطوة 3: مثّل بيانيًّا $\overline{RS}$ وصورتها $\overline{R''S''}$.

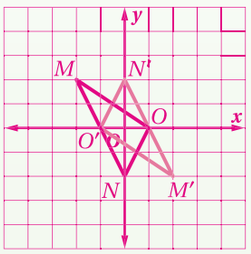


إجابات:

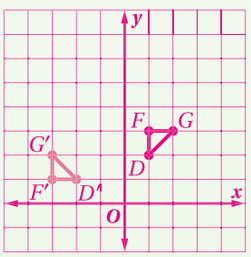
18)



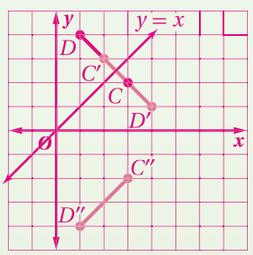
19)



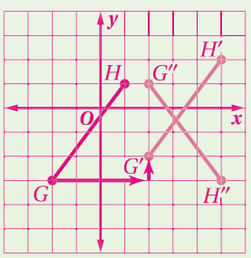
20)



21)



22)



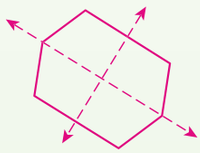
23) إجابة ممكنة: تركيب إزاحات.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 7 ، ص (46)، وناقشهم في تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل 7 عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

24) نعم؛ 2



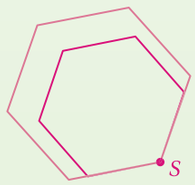
25) نعم؛ 1



26) نعم؛ 4; 90°



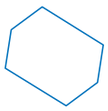
28)



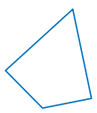
7-5 التماثل (ص 159–154)

بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها. 26–24) انظر الهامش

24)



25)



بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيِّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ ممَّا يأتي:

26)



26) انظر الهامش

27)



لا

مثال 5

بيِّن ما إذا كان الشكل الآتي متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك .



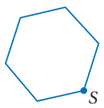
المصباح متماثل حول مستوى، وكذلك حول محور.



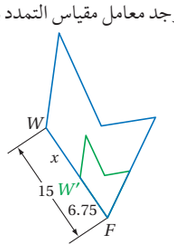
7-6 التمدد (ص 166–160)

28) استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه S ومعامله $k = 1.25$.

انظر الهامش



29) حدد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل مقياس التمدد وقيمة x.



تصغير ؛

8.25, 0.45

30) **نوادٍ علمية :** استعمل أعضاء نادي الرياضيات جهاز العرض لرسم لوحة على الجدار، إذا كان عرض اللوحة الأصلية 6 in ، وعرض صورتها على الجدار 4 ft ، فما معامل التكبير؟ 8

مثال 6

مثل بيانيًّا الشكل $ABCD$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 0.5 ، إذا كانت: $A(0, 0), B(0, 8), C(8, 8), D(8, 0)$.

اضرب الإحداثيين x, y لكل رأس في معامل مقياس التمدد 0.5

$(x, y) \rightarrow (0.5x, 0.5y)$

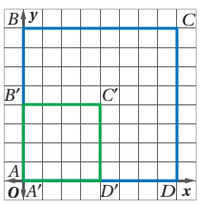
$A(0, 0) \rightarrow A'(0, 0)$

$B(0, 8) \rightarrow B'(0, 4)$

$C(8, 8) \rightarrow C'(4, 4)$

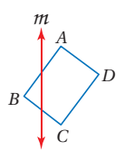
$D(8, 0) \rightarrow D'(4, 0)$

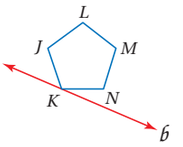
مثِّل $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ بيانيًّا.



الفصل 7 اختبار الفصل

ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المُعطى: 2–1) انظر الهامش

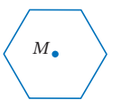
1) 

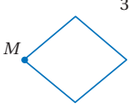
2) 

3) **حدائق:** يريد فؤاد أن يكبّر الصورة الآتية للحديقة؛ لتصبح أبعادها 4 in في 6 in، مستعملًا آلة نسخ تكبر الصورة حتى 150% فقط وبنسب على شكل أعداد كلية، أوجد نسبتين على شكل عددين كليين يمكن استعمالهما لتكبير الصورة، بحيث تصبح أبعادها أقرب ما يمكن إلى 4 in في 6 in، ولا تزيد عن ذلك. انظر ملحق الإجابات



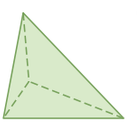
استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه M ومعامله k المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: 5–4) انظر الهامش.

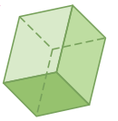
4) $k = 1.5$ 

5) $k = \frac{1}{3}$ 

6) **مدينة الألعاب:** يركب أحمد في إحدى الألعاب التي تدور عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول مركزها 60° كل ثانيتين، فبعد كم ثانية يعود أحمد إلى النقطة التي انطلق منها؟ 12 ثانيةً.

بيّن ما إذا كان كلٌّ من الشكلين الآتيين متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

7) غير ذلك 

8) كلاهما 

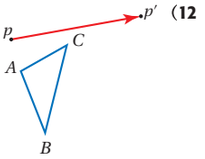
مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي: 11–9) انظر الهامش

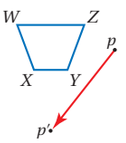
9) $\square FGHJ$، حيث: $F(-1, 4), G(4, 4), H(3, 1), J(-2, 1)$؛ انعكاس حول المحور x.

10) $\triangle ABC$، حيث: $A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$؛ إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

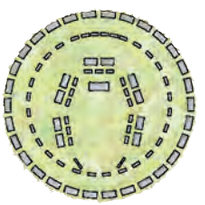
11) الشكل الرباعي $WXYZ$، حيث: $W(2,3), X(1,1), Y(3,0), Z(5,2)$؛ دوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل.

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل P إلى P' في كلٍّ من السؤالين الآتيين: 13–12) انظر ملحق الإجابات

12) 

13) 

14) **آثار:** يبيّن الشكل الآتي مخطط موقع أثري، فما رتبة تماثل الحلقة الخارجية؟ وما مقداره؟ 30; 12"



15) **اختيار من متعدد:** ما التحويل الهندسي أو تركيب التحويلات الهندسية الذي يمثّله الشكل الآتي؟ B

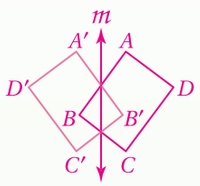


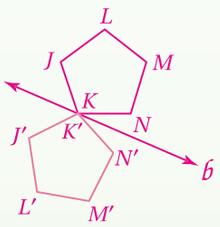
A تمدد
B إزاحة ثم انعكاس
C دوران
D إزاحة

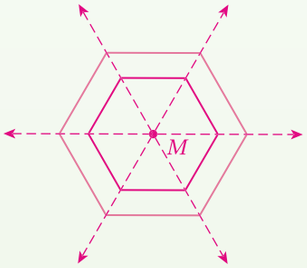
مخطط المعالجة

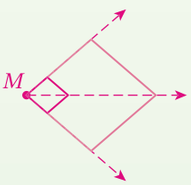
المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر أحد المصادر الآتية:	فاختر أحد المصدرين الآتيين:
الدروس: 1-7 إلى 6-7	تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 7, 11, 12, 16, 17, 21, 22, 26, 27, 31, 32)
تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33)	www.obeikaneducation.com
www.obeikaneducation.com	

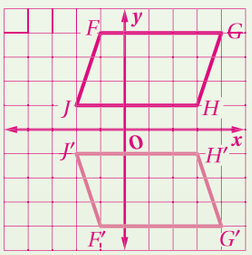
إجابات:

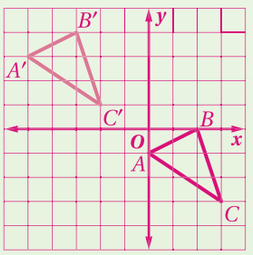
1) 

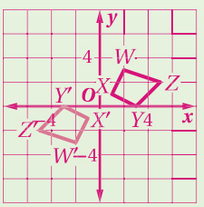
2) 

4) 

5) 

9) 

10) 

11) 

1 التركيز

الهدف: الحل عكسيًّا عندما تكون النتيجة النهائية معلومةً.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- ما المفردات التي تدل على أنه يتعين عليك أن تحل المسألة عكسيًّا؟ إجابة ممكنة: كلمات مثل "قبل"، "الأصلي" و "في البداية". جميعها تشير إلى أنه يتعين عليك أن تحل المسألة عكسيًّا.
- أعطِ مثالًا لسؤالٍ من هذا الفصل، يمكن حلُّه عكسيًّا. إجابة ممكنة: سؤال 23 فقرة b من صفحة 165 والتي تطلب إيجاد مساحة المقطع العرضي للبالون قبل النفخ وبعده.
- ما وجه الشبه بين هذه الطريقة واستراتيجيات كتابة البرهان ذي العمودين؟ إجابة ممكنة: عند كتابة البرهان فإنك تبدأ بكتابة الجملة أو الخطوة الأخيرة التي تريد إثباتها، ومن ثم تبدأ الحل عكسيًّا حتى تصل إلى الخطوة الأولى أو المعطيات.

الفصل 7 الإعداد للاختبارات

الحل عكسيًّا



في معظم المسائل تُعطى مجموعة من الشروط أو الحقائق، ويُطلب إليك إيجاد النتيجة النهائية. ومع ذلك قد تُعطى في بعض المسائل النتيجة النهائية، ويطلب إليك إيجاد أمر ما وقع مبكرًا في موقف المسألة. ولحل مثل هذه المسائل، يتعين عليك أن تستعمل استراتيجية الحل عكسيًّا.

استراتيجيات الحل عكسيًّا

الخطوة 1

ابحث عن كلمات مفتاحيه تشير إلى أنه يلزم أن تحل المسألة عكسيًّا.
بعض الكلمات المفتاحية الممكنة:

- ماذا كان المقدار **الأصلي** ...؟
- ماذا كانت القيمة **قبل** ...؟
- ماذا كان المقدار **في البداية** ...؟

الخطوة 2

تراجع عن الخطوات المعطاة في نص المسألة.

- اكتب قائمة بالخطوات المتتابعة من البداية، وصولًا إلى النتيجة النهائية.
- ابدأ من النتيجة النهائية، وتتبع الخطوات بترتيبٍ عكسيٍّ.
- "تراجع" عن كل خطوة باستعمال العمليات العكسية حتى تصل إلى القيمة الأصلية.

الخطوة 3

تحقق من الحل إذا سمح الوقت .

- تأكد من أن إجابتك منطقية.
- ابدأ من إجابتك واتبع الخطوات بالترتيب المُعطى في المسألة؛ لتتأكد من الوصول إلى النتيجة النهائية نفسها.

مثال

حُلَّ المسألة الآتية، وبيِّن خطوات الحل، وستصحح الإجابة، وتحدد الدرجة المُستحقّة باستعمال سُلَّم تقدير الإجابات القصيرة المجاور.

تستعمل سعاد برمجيةً حاسوبيةً؛ لتتدرب على التحويلات الهندسية في المستوى الإحداثي. بدأت من نقطة وأزاحتها 4 وحدات إلى أعلى و 8 وحدات إلى اليسار. ثم أجرت انعكاسًا للصورة الناتجة حول المحور x. وأخيرًا أجرت تمددًا للصورة الناتجة معامله 0.5، ومركزه نقطة الأصل، فكانت إحداثيات الصورة النهائية $(-4, -1)$. ماذا كانت الإحداثيات الأصلية لهذه النقطة؟

سلم تقدير	
المعيار	الدرجة
صحيح كاملًا: الإجابة صحيحة، ومعها تفسير تام يوضح كل خطوةٍ من خطوات الحل .	2
صحيح جزئيًّا: • الإجابة صحيحة، ولكن التفسير غير تام . • الإجابة غير صحيحة، ولكن التفسير صحيح.	1
غير صحيح مطلقًا: لا توجد إجابة، أو أنها غير منطقية.	0

اقرأ المسألة بعناية. لقد أعطيت مجموعة تحويلات هندسية متعاقبة لنقطةٍ في المستوى الإحداثي، وتعلم إحداثيات الصورة النهائية لهذه النقطة، وطُلب إليك أن تجد الإحداثيات الأصلية. حُلّ المسألة بالعمل عكسيًّا؛ تراجع عن كل تحويل هندسي بترتيب عكسي؛ كي تجد الإحداثيات الأصلية.

مثال للإجابة التي تستحق درجتين:

النقطة الأصلية ← إزاحة ← انعكاس ← تمدد ← النتيجة النهائية.
ابدأ بإحداثيات النتيجة النهائية وحُلّ عكسيًّا.
للتراجع عن التمدد الذي معامله 0.5 ، نفّذ تمددًا معامله 2 : $(-2, -8) = (-1 \times 2, -4 \times 2) \rightarrow (-1, -4)$
للتراجع عن الانعكاس الأول، أوجد صورة النقطة بالانعكاس حول المحور x : $(-2, -8) \rightarrow (-2, 8)$
وللتراجع عن الإزاحة الأولى، نفّذ إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى أسفل و8 وحدات إلى اليمين: $(-2, 8) \rightarrow (-2 + 8, 8 - 4) = (6, 4)$
إذن الإحداثيات الأصلية لهذه النقطة هي $(6, 4)$.

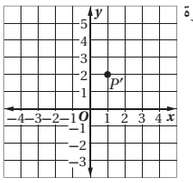
لقد كانت الخطوات والحسابات والتبريرات كلها واضحة في هذه الإجابة، وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة، ولذلك تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

حُلّ كلًّا من المسائل الآتية، وبيّن خطوات الحل، وستصحح الإجابات وتحدد الدرجة المُستحقة باستعمال سُلَّم تقدير الإجابة القصيرة الوارد في الصفحة السابقة.

1) حطّت حشرة طائرة على شبكة إحداثية ثم قفزت عبر المحور x، ثم قفزت عبر المحور y على هيئة انعكاسين متعاقبين، ثم سارت 9 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى أسفل، فكان موقعها النهائي عند النقطة $(4, -1)$، فما إحداثيات النقطة التي حطّت عليها الحشرة في البداية؟ **(5, −3)**

2) في الشبكة الإحداثية الآتية تظهر الصورة النهائية لنقطةٍ تم تدويرها بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ثم نُفّذ عليها تمدد معامله 2 ، ثم أُزيحت 7 وحدات إلى اليمين. ماذا كانت إحداثيات الموقع الأصلي لهذه النقطة؟ **(−1, −3)**

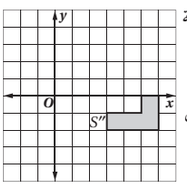


3) إذا كانت $A''(2, -2), B''(-5, -4)$ إحداثيات طرفي $\overline{A''B''}$ تمثل الصورة النهائية لِـ $\overline{AB}$، بعد إجراء انعكاسٍ لها حول المحور x، ثم إزاحة وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 2)$ فأيٌّ ممّا يأتي يمثل إحداثيَّي نقطة منتصف $\overline{AB}$. **B**

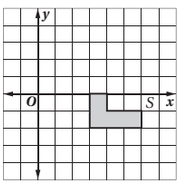
A $\left(\frac{-3}{2}, -3\right)$ **C** $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$

B $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$ **D** $(-1, 0)$

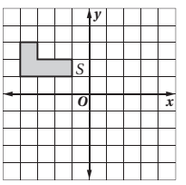
4) الشكل S'' يمثل الصورة النهائية الناتجة للشكل S، بعد إجراء التحويلات الهندسية التالية عليه: انعكاس حول المحور y، ثم انسحاب 3 وحدات إلى أسفل ووحدتين إلى اليمين. **A**



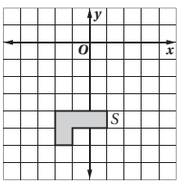
C



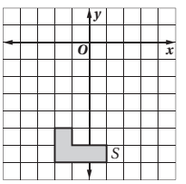
A



D



B



مثال إضافي

1 تدريب على اختبار:
يستعمل زياد برمجيةً هندسيةً للتدريب على التحويلات الهندسية في المستوى الإحداثي، فبدأ من نقطةٍ ما وسحبها 3 وحداتٍ إلى أسفل و 5 وحدات إلى اليمين، ثم أجرى انعكاسًا للصورة الناتجة حول المحور y، وأخيرًا نفّذ تمددًا للصورة الثانية معامله 3، فكانت الصورة النهائية عند $(6, 6)$، ما إحداثيات النقطة الأصلية؟ $(-7, 5)$

3 التقويم

استعمل التمارين 4–1؛ لتقويم فهم الطلاب.

تشخيص أخطاء الطلاب

أوجد أخطاء الطلاب في كل سؤال؛ قد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية مثل:

1) A أخطأ باستعمال قاعدة الانعكاس حول المستقيم $y = x$

B أخطأ باستعمال قاعدة الدوران بزاوية $180°$

C انعكاس حول المحور x

D الإجابة الصحيحة

2) A الإجابة الصحيحة

B إزاحة إلى أسفل

C تتضمن دورانًا

D تتضمن دورانًا

3) A تخمين بالنظر

B خطأ حسابي

C الإجابة الصحيحة

D خطأ حسابي

4) A استعمال تعريف خطأ

B استعمال تعريف خطأ

C الإجابة الصحيحة

D استعمال تعريف خطأ

5) A أخطأ باعتباره منصف الزاوية منصفًا للضلع المقبل لها.

B تخمين

C أخطأ باعتباره الضلعين AB, BD متطابقين

D الإجابة الصحيحة

6) A قيمة x

B خطأ حسابي

C خطأ حسابي

D الإجابة الصحيحة

7) A الإجابة الصحيحة

B لم يعتبر كون الأضلاع المتطابقة متتالية

C لم يعتبر كون الأضلاع المتطابقة متتالية

D تخمين

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصائبة:

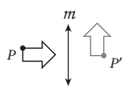
1) إحداثيات النقطة N هي $(-3, 4)$، ما إحداثيات صورتها الناتجة عن الانعكاس حول المحور y ؟ **D**

A $N'(-3, 4)$ **C** $N'(4, 3)$

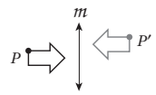
B $N'(-4, 3)$ **D** $N'(-4, -3)$

2) أيُّ الأشكال الآتية يبيّن نتيجة انعكاس الشكل P حول المستقيم m ثم إزاحة إلى أعلى؟ **A**

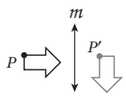
C



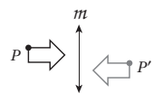
A



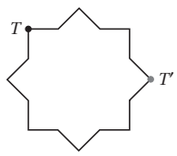
D



B



3) ما الزاوية التي تم تدوير الشكل الآتي بها حول مركز تماثله حتى تنتقل النقطة T إلى النقطة T' ؟ **C**



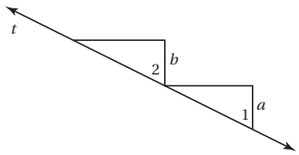
A $90°$ **C** $135°$

B $120°$ **D** $225°$

إرشادات للاختبار

السؤال 3: كم رأسًا لهذه النجمة؟ اقسم $360°$ على عدد الرؤوس؛ لإيجاد زاوية الدوران من نقطةٍ إلى النقطة التالية.

4) **المعطيات:** $a \parallel b$



أيُّ العبارات الآتية تبرّر استنتاج أن $\angle 2 \cong \angle 1$؟ **C**

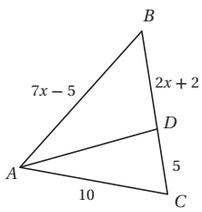
A إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا متطابقتان .

B إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزاويتين المتبادلتين داخليًّا متطابقتان.

C إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزاويتين المتناظرتين متطابقتان .

D إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t، فإن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان .

5) في $\triangle ABC$، $\overline{AD}$ تنصف $\angle CAB$.



ماقيمة x ؟ **D**

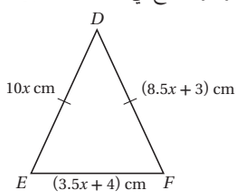
A 1.5

B 5

C 1.4

D 3

6) أيٌّ ممَّا يأتي هو طول ضلع في المثلث المتطابق الضلعين DEF؟ **D**



A 2 cm **C** 9 cm

B 8 cm **D** 11 cm

7) أي المضلعات الآتية فيه زوجان فقط من الأضلاع المتتالية المتطابقة؟ **A**

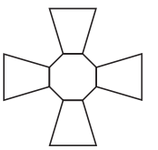
A شكل الطائرة الورقية **C** المعين

B متوازي الأضلاع **D** شبه المنحرف

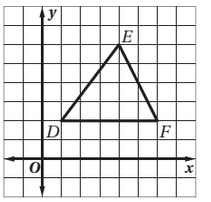
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة. نعم؛ الرتبة 4، المقدار 90°

8) بيّن ما إذا كان للشكل الآتي تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل وحدد رتبته ومقداره .



9) مثّل بيانيًّا الصورة الناتجة عن عمل تمدد للشكل الآتي مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5 انظر الهامش .

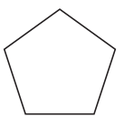


10) أكمل العبارة الآتية: انظر الهامش .

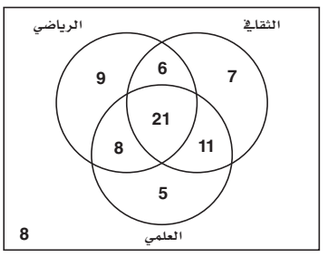
"بحسب نظرية منصف الزاوية، إذا وقعت نقطة على منصف زاوية، فإنها ..... ."

11) ما صورة النقطة $A(-4, 3)$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل $B(-1, -2)$ إلى $B'(4, -3)$ ؟ (1, 2)

12) ما قياس الزاوية الداخلية للمضلع الخماسي المنتظم؟ 108°



13) سُئل 57 طالبًا عن النشاطات المدرسية التي يشاركون فيها، ومُثِّلت النتائج بشكل ڤن الآتي:



ما عدد الطلاب الذين يشاركون في النشاطين (الثقافي والعلمي)، ولا يشاركون في النشاط الرياضي؟ 11

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.
14a–e) انظر الهامش .

14) يدرس أحمد الهندسة المعمارية، وقد رسم مخططًا لمتنزه رؤوسه: $Q(2, 2)$, $R(-2, 4)$, $S(-3, -3)$, $T(3, -4)$، ولكنه لاحظ أن اتجاه رسمه غير صحيح، حيث ظهر الشمال في أسفل الرسم بدلًا من أن يكون في أعلى الرسم.

a) ما التحويل الذي يستطيع أحمد تطبيقه على مخططه ليجعل الشمال في أعلى الرسم؟

b) هل هذا هو التحويل الوحيد الذي يجعل الشمال في أعلى الرسم؟ وضح إجابتك.

c) ارسم الشكل الرباعي $QRST$، واكتب إحداثيات رؤوسه.

d) ارسم الصورة $Q'R'S'T'$ بعد التحويل، واكتب إحداثيات رؤوسها.

e) فسّر كيف يمكن لأحمد أن يعرف إحداثيات رؤوس الصورة من دون استعمال المستوى الإحداثي.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس..	7-1	7-4	7-3	2-1	6-4	3-1	5-6	7-5	7-6	4-1	7-2	5-1	1-2	7-3

التقويم التكويني

يمكنك تحديد مدى تقدم الطلاب في الفصل 7 من خلال:

اختبار تراكمي: ص (174, 175)

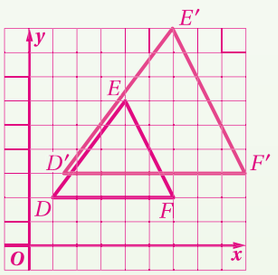
اختبار تراكمي، ص (62–64).

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 8: حدِّد الأسئلة ص (177) واجبًا منزليًّا؛ لتقويم مهارات الطلاب في المتطلبات السابقة للفصل القادم.

إجابات :

9)

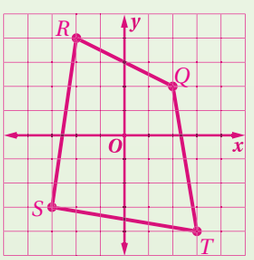


10) إجابة ممكنة: تكون على بعدين متساويين عن ضلعَي الزاوية.

14a) على أحمد أن يقوم بتدوير الشكل $QRST$ بزاوية قياسها 180° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة؛ ليصبح الشمال في أعلى، والمحافظة على اتجاه النقاط.

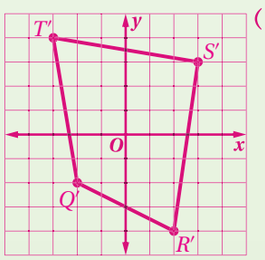
14b) سيضع الانعكاس الشمال أعلى الرسم، لكنه سيغير اتجاه النقاط؛ لذا لا يصلح إلا الدوران.

14c)



$Q(2, 2)$, $R(-2, 4)$,
$S(-3, -3)$, $T(3, -4)$

14d)



$Q'(-2, -2)$, $R'(2, -4)$,
$S'(3, 3)$, $T'(-3, 4)$

14e) لإيجاد إحداثيَّي كل نقطةٍ بعد دوران 180° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، يمكن استعمال القاعدة التالية:

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ ؛ لذا

$Q(2, 2) \rightarrow Q'(-2, -2)$

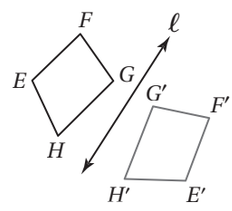
$R(-2, 4) \rightarrow R'(2, -4)$

$S(-3, -3) \rightarrow S'(3, 3)$

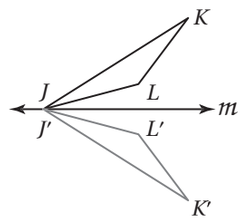
$T(3, -4) \rightarrow T'(-3, 4)$

الصفحة 118، الدرس 1-7 (تحقق من فهمك)

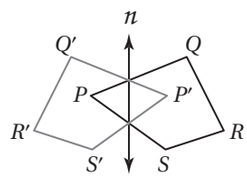
(1A)



(1B)

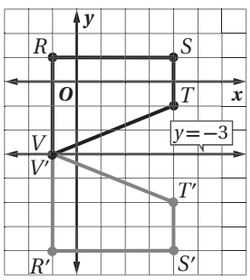


(1C)

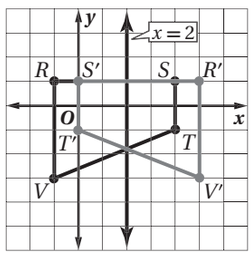


الصفحة 120، الدرس 1-7 (تحقق من فهمك)

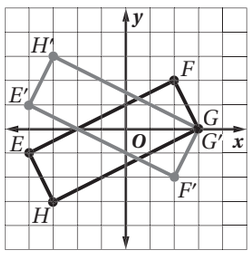
(3A)



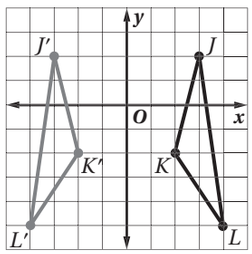
(3B)



(4A)

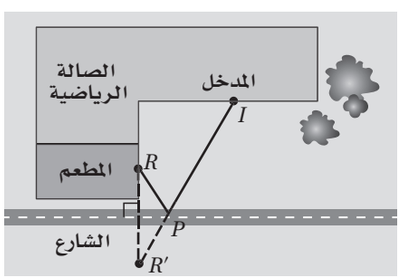


(4B)

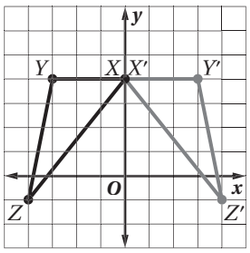


الصفحات 125–122، الدرس 1-7

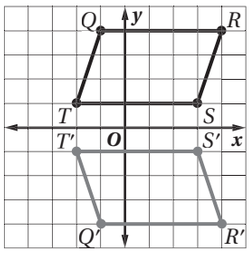
4) إجابة ممكنة: حدد الموقف P على الشارع بحيث يكون $RP + PI$ أقل ما يمكن وتكون المسافة الكلية من مدخل المطعم R إلى موقف السيارة P ثم من الموقف P إلى مدخل الصالة الرياضية I أقل ما يمكن عندما تكون هذه النقاط علي استقامة واحدة. لذا ارسم $R'I$ وعين P عند تقاطع الشارع مع $R'I$ علمًا بأن R' هي صورة النقطة R الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم الذي يمثل الشارع.



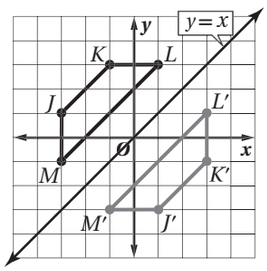
(7)



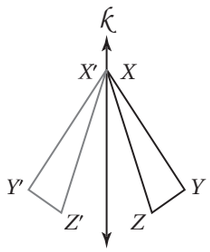
(8)



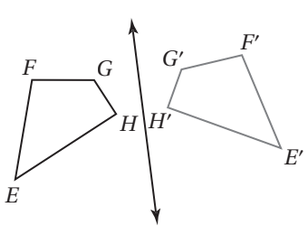
(9)



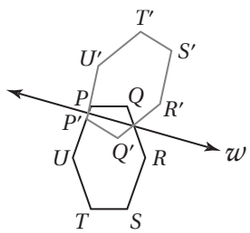
(10)



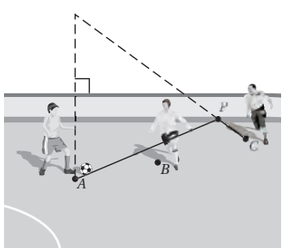
(11)



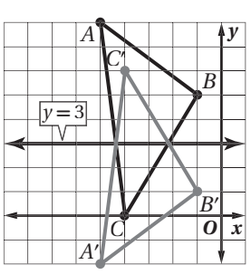
(12)



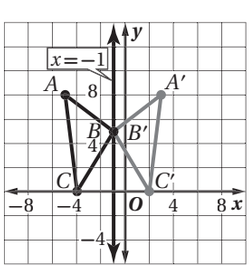
(13) إجابة ممكنة: حدد النقطة P أسفل الحائط بحيث يكون $PA + PC$ أقل ما يمكن. وتكون المسافة الكلية من A إلى P ثم من P إلى C أقل ما يمكن عندما تكون هذه النقاط على استقامة واحدة. لذا ارسم $A'C$ وعين النقطة P أسفل الجدار علمًا بأن A' هي صورة النقطة A الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم الممثل لحافة الملعب أسفل الجدار.



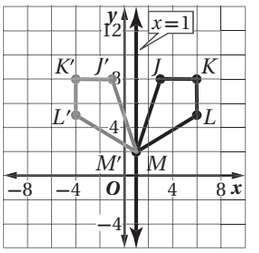
(14)



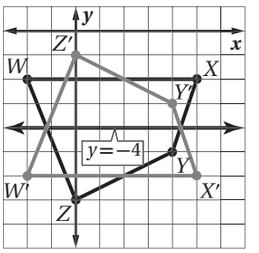
(17)



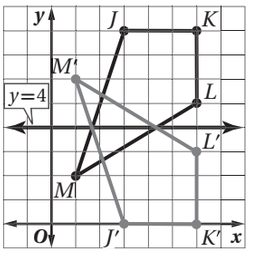
(15



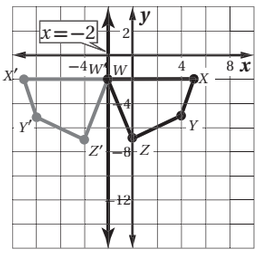
(16



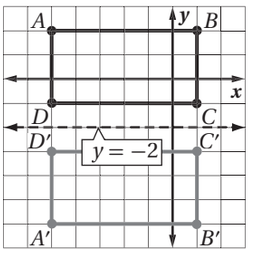
(18



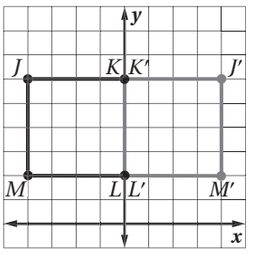
(19



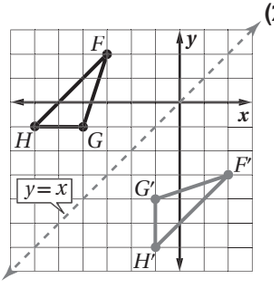
(20



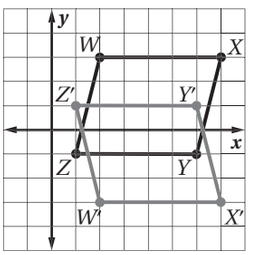
(21



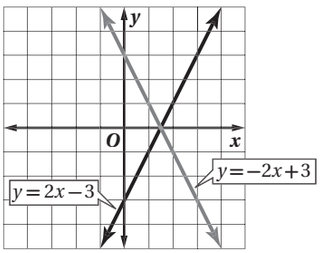
(22



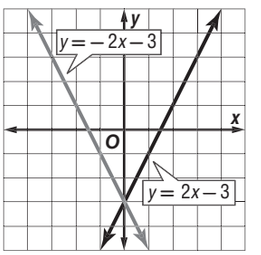
(23



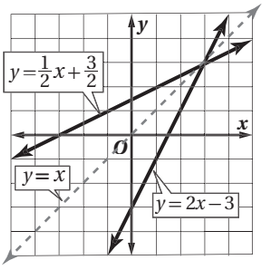
(28



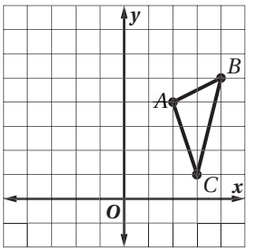
(29



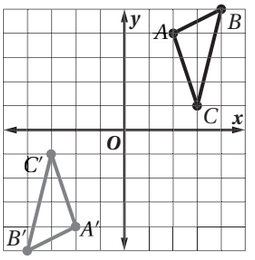
(30



36a) إجابة ممكنة:



(36b



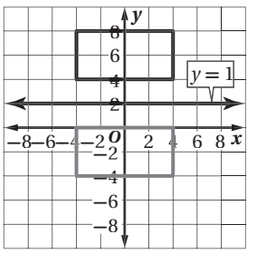
36d) إجابة ممكنة: إحداثيًّا الصورة بالانعكاس في نقطة الأصل هما المعكوسان الجمعيان لإحداثيَّي النقطة الأصلية.

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

37) جميل؛ إجابة ممكنة: صورة نقطة بالانعكاس حول المحور x يبقى موقع الصورة الأفقي نفسه، ولكنه يتغير رأسيًّا. عندما تعكس النقطة (3,2) حول المحور x يكون إحداثيًّا الصورة هما (2, −3)؛ لأنها تكون في الموقع الأفقي نفسه؛ ولكن في الجهة الأخرى من المحور x رأسيًّا.

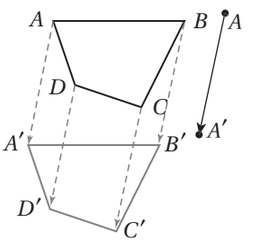
(39

إجابة ممكنة: حتى يبقى الشكل بعد الانعكاس على هيئته نفسها، يجب أن ينطبق نصفاه أحدهما على الآخر تمامًا عند طيِّه نصفين أفقيًّا.

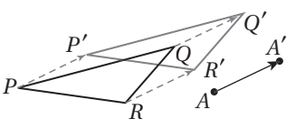


الصفحتان 127 ,126 الدرس 2-7 (تحقق من فهمك)

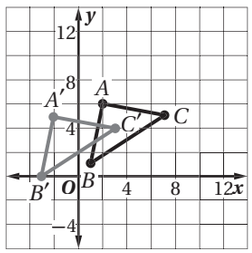
(1A



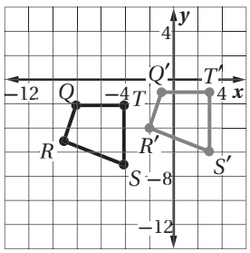
(1B



(2A

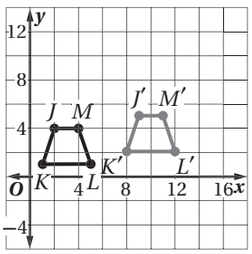


(2B

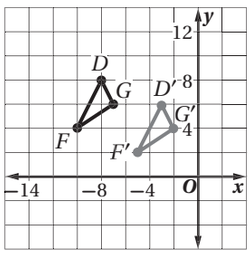


الصفحات 129, 130، الدرس 7-2

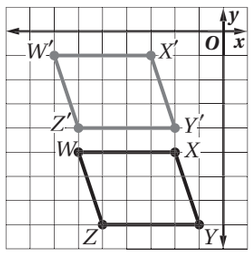
(4



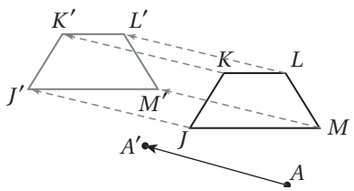
(5



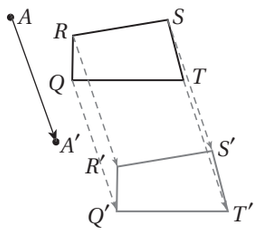
(6



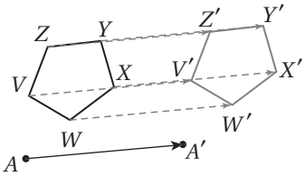
(8



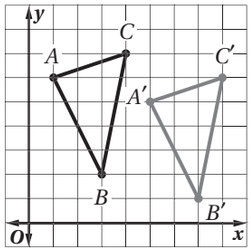
(9



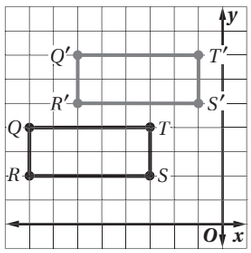
(10



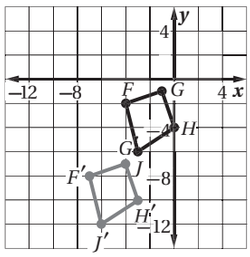
(11



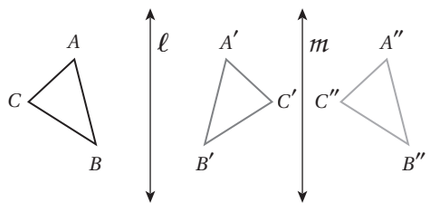
(12



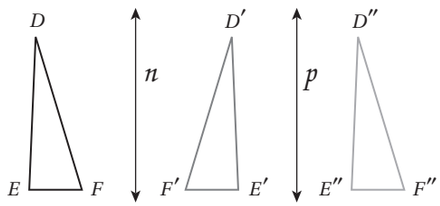
(13

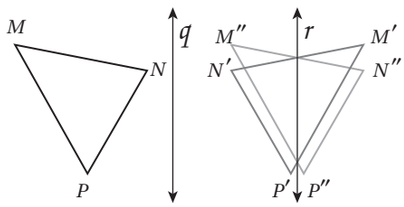


(20a



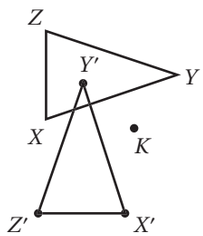
(20b إجابة ممكنة:



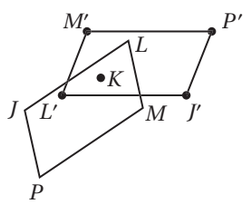


الصفحات 136, 137، الدرس 7-3

(5

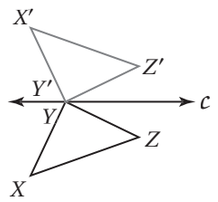


(6

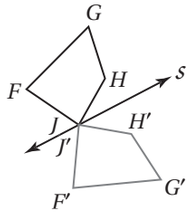


الصفحة 139، اختبار منتصف الفصل

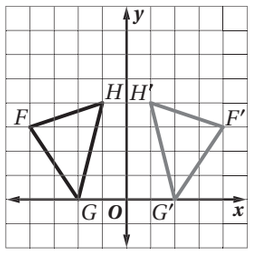
1)



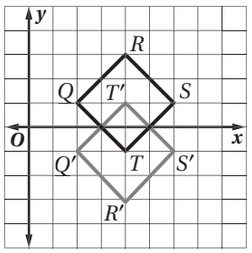
2)



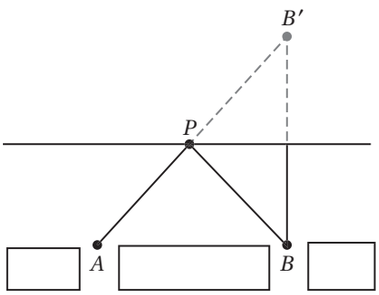
3)



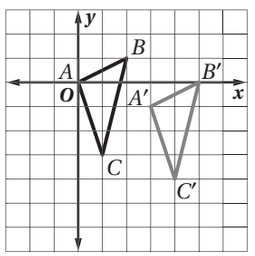
4)



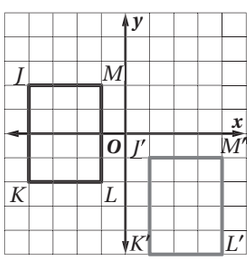
5)



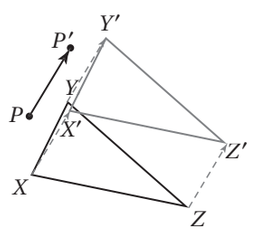
6)



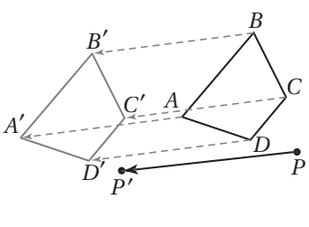
7)



8)

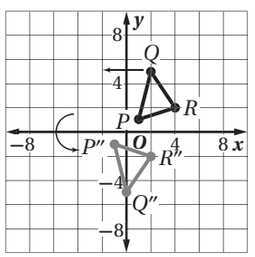


9)

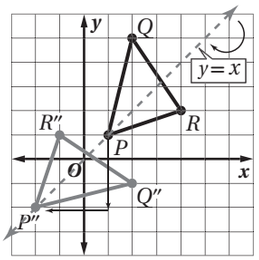


الصفحة 142، الدرس 4-7 (تحقق من فهمك)

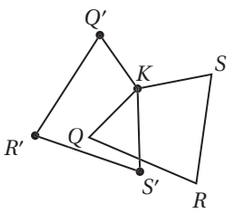
1A)



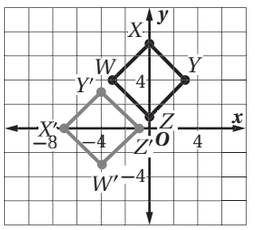
1B)



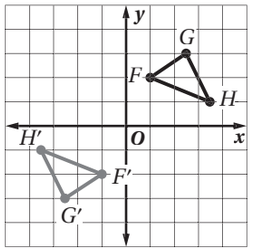
7)



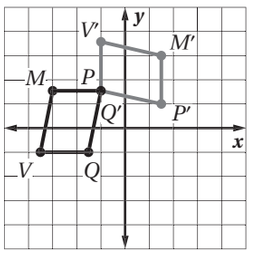
8)



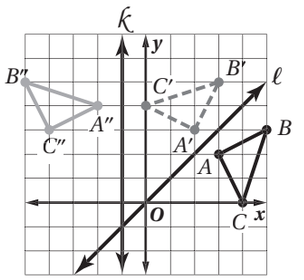
9)



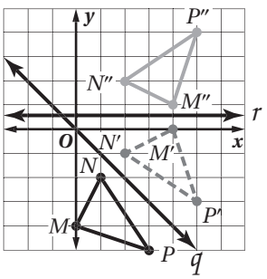
10)

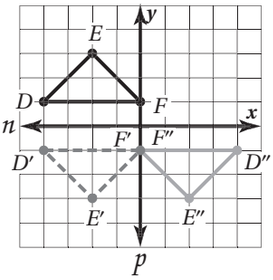


19a)

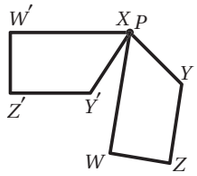


19b) إجابة ممكنة:



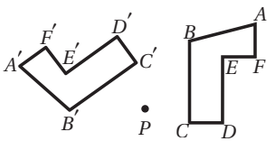


21)



80°

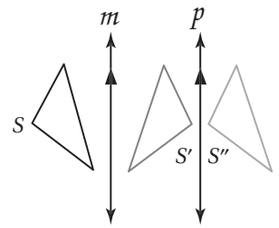
22)



125°

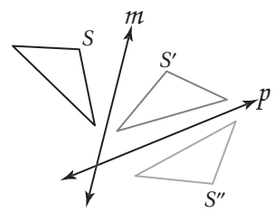
الصفحة 148–145 الدرس 4-7

4)



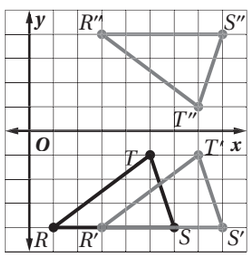
إزاحة أفقية بمقدار 3 بوصاتٍ إلى اليمين.

5)

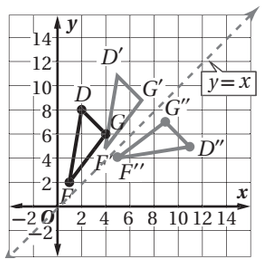


دوران بزاوية °100 حول نقطة تقاطع المستقيمين m و p

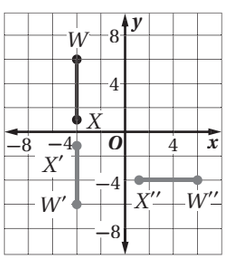
7)



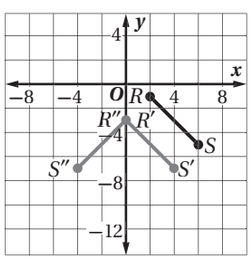
8)



9)



10)



26) البرهان:

ينقل الانعكاس حول المستقيم p النقطة B إلى B'، وينقل الانعكاس حول المستقيم q النقطة B' إلى B''؛ وبما أن $p \parallel q$؛ فإن $\overleftrightarrow{BB'}$ يعامد كلًّا من المستقيمين p, q؛ أي أن B, B', B'' واقعة على استقامة واحدة، ومن تعريف الانعكاس، نعلم أن A نقطة منتصف $\overline{BB'}$ و D منتصف $\overline{B'B''}$؛ إذن: $\overline{BA} \cong \overline{AB'}$; $\overline{B'D} \cong \overline{DB''}$؛ أي أن $BA = AB'$; $B'D = DB''$

بحسب تعريف التطابق، ولكن: $BB'' = BA + AB' + B'D + DB''$

بحسب مسلمة جمع القطع المستقيمة. وبالتعويض:

$$BB'' = AB' + AB' + B'D + B'D$$

$$BB'' = 2AB' + 2B'D$$

$$BB'' = 2(AB' + B'D)$$

$$= 2AD$$

وبما أن $AD = x$، إذن $BB'' = 2x$

27) البرهان: نعلم أن المستقيمين ℓ و m يتقاطعان في النقطة P، وأن النقطة A لا تقع على أيٍّ من المستقيمين ℓ أو m، عيّن A' صورة النقطة A بانعكاسٍ حول المستقيم m، وعيّن A'' صورة A' بانعكاسٍ حول المستقيم ℓ. ومن تعريف الانعكاس يكون المستقيم m هو العمود المنصف للقطعة $\overline{AA'}$ عند النقطة R، ويكون المستقيم ℓ هو العمود المنصف للقطعة $\overline{A'A''}$ عند النقطة S. $\overline{AR} \cong \overline{A'R}$ و $\overline{A'S} \cong \overline{A''S}$ من تعريف العمود المنصف، وبما أنه يوجد مستقيمٌ واحدٌ يمرُّ بأي نقطتين، إذن يمكن أن ترسم القطع المساعدة $\overline{AP}, \overline{A'P}, \overline{A''P}$ والزوايا: $\angle A'SP, \angle A'RP, \angle ARP$ و $\angle A''SP$ زوايا قائمة من تعريف العمود المنصف. وكذلك $\overline{RP} \cong \overline{RP}$ و $\overline{SP} \cong \overline{SP}$ بحسب خاصية الانعكاس؛ إذن: $\triangle ARP \cong \triangle A'RP$ و $\triangle A'SP \cong \triangle A''SP$ بحسب مُسلَّمة التطابق SAS. ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن: $\overline{AP} \cong \overline{A'P}$ ، $\overline{A'P} \cong \overline{A''P}$ ،ولذلك $\overline{AP} \cong \overline{A''P}$ بحسب خاصية التعدِّي، ومن تعريف الدوران فإن A'' هي صورة A بدوران مركزه P.

وكذلك: $\angle APR \cong \angle A'PR$ و $\angle A''PS \cong \angle A'PS$؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. ومن تعريف التطابق يكون: $m\angle APR = m\angle A'PR, m\angle A'PS = m\angle A''PS$، لكن:

$m\angle APA'' = m\angle APR + m\angle A'PR + m\angle A'PS + m\angle A''PS$

و $m\angle A'PS + m\angle A'PS + m\angle A'PR + m\angle A'PR = m\angle APA''$

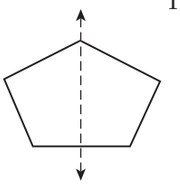
هذا يعني: $m\angle APA'' = 2(m\angle A'PR + m\angle A'PS)$.

وبما أن: $m\angle A'PS + m\angle A'PR = m\angle SPR$ بحسب مسلّمة جمع الزوايا و $m\angle A'PS + m\angle A'PR = m\angle SPR$ بحسب مسلّمة جمع الزوايا وبالتعويض، ينتج أن: $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$.

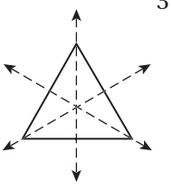
29) نعم؛ إذا أُجري انعكاس حول المحور xللقطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفَيها (a, b) و (c, d)، فإن إحداثيات طرفَي صورتها هي: $(a, -b), (c, -d)$. وإذا أُجري انعكاس حول المستقيم $y = x$ ، للصورة فإن إحداثيات طرفَي الصورة النهائية هي: $(-d, -c), (b, a)$. أما إذا أُجري الانعكاس حول المستقيم $y = x$ أولًا، فإن إحداثيات طرفَي الصورة الأولى $(d, c), (b, a)$. وإذا أُجري لهذه الصورة انعكاس حول المحور x، فإن إحداثيات طرفَي الصورة النهائية هي $(d, -c), (b, -a)$، وهما مختلفان عن النتيجة النهائية في الحالة الأولى.

الصفحتان 155 ,154، الدرس 5-7
(تحقق من فهمك)

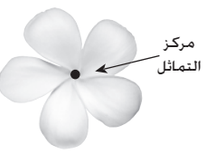
1B) نعم؛ 1



1C) نعم؛ 3



2A) نعم؛ $360° \div 5 = 72°$

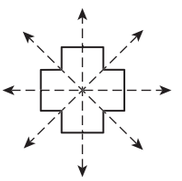


2B) نعم؛ $360° \div 8 = 45°$

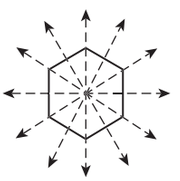


الصفحة 157، الدرس 5-7

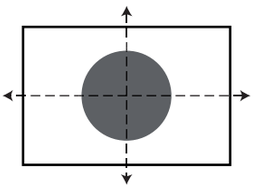
9) نعم؛ 4



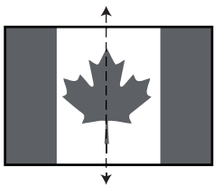
10) نعم؛ 6



11) نعم؛ 2

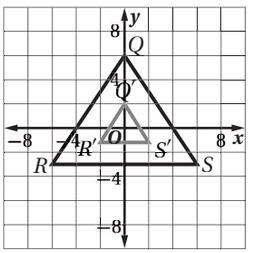


13) نعم؛ 1

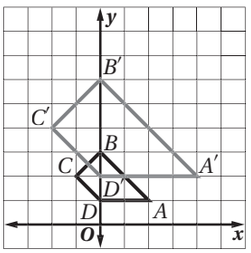


الصفحات 164–163، الدرس 6-7
(تحقق من فهمك)

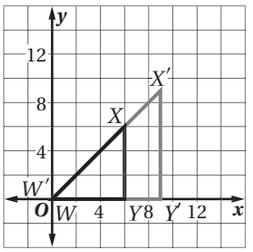
3A)



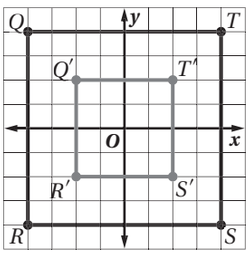
3B)



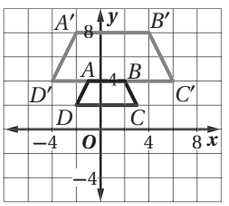
5)



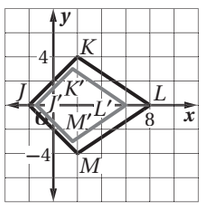
6)



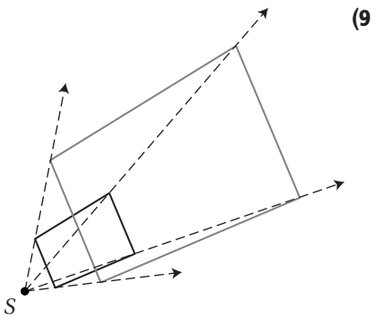
7)



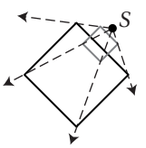
8)



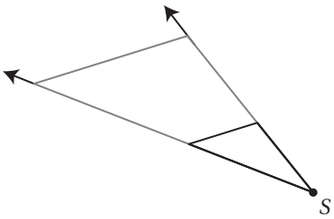
9)



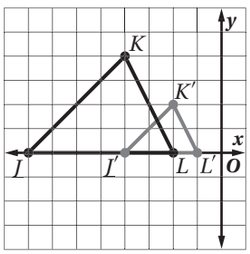
10)



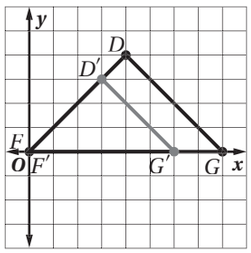
11)



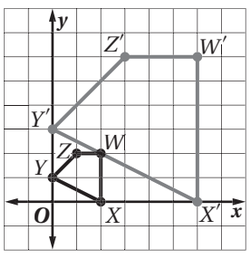
16)



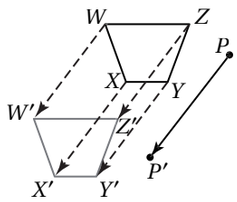
17)



18)



13)



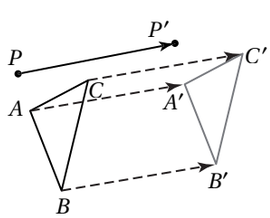
الصفحة 171، اختبار الفصل

3)

الطول	العرض
$K = \frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الأصل}}$	$K = \frac{\text{عرض الصورة}}{\text{عرض الأصل}}$
$150\% = \frac{X'Y'}{3}$	$150\% = \frac{X'Y'}{2}$
$X'Y' = 4.5 \text{ in}$	$X'Y' = 3 \text{ in}$
كبر الصورة الجديدة	كبر الصورة الجديدة
$150\% = \frac{X''Y''}{4.5}$	$150\% = \frac{X''Y''}{3}$
$X''Y'' = 6.75$	$X''Y'' = 4.5$
$6 < 6.75$	$4 < 4.5$
لذا ابحث عن نسبة تكبير أقل من 150%؛ لتحصل على الطول المطلوب للصورة	لذا ابحث عن نسبة تكبير أقل من 150%؛ لتحصل على العرض المطلوب للصورة
$K = \frac{6}{4.5}$	$K = \frac{4}{3}$
$K = 1.33$	$K = 1.33$

إذن النسبتان اللتان يمكن استعمالهما لتكبير الصورة، بحيث تصبح أبعادها 4 in, 6 in هي: 133%, 150%

12)



ملحوظات المعلم

الفصل 8

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع، ص (177)

	الدرس 8-1 / حصتان	الدرس 8-2 / حصتان	الدرس 8-3 / حصتان	الدرس 8-4 / حصتان
العنوان	الدائرة ومحيطها	قياس الزوايا والأقواس	الأقواس والأوتار	الزوايا المحيطية
الأهداف	• تعرُّف عناصر الدائرة واستعمالها . • حل مسائل تتضمن محيط الدائرة.	• تعيين الزاوية المركزية والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى ونصف الدائرة وإيجاد قياسها. • إيجاد طول القوس.	• تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار واستعمالها . • تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار واستعمالها.	• إيجاد قياسات الزوايا المحيطية. • إيجاد قياسات زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.
المفردات	الدائرة المركز نصف القطر الوتر القطر الدوائر المتطابقة الدوائر المتحدة في المركز محيط الدائرة باي(π) المضلع المُحاط بدائرة الدائرة الخارجية	الزاوية المركزية القوس القوس الأصغر القوس الأكبر نصف دائرة الأقواس المتطابقة الأقواس المتجاورة طول القوس		الزاوية المحيطية القوس المقابل
التمثيلات المتعددة	ص (183)	ص (192)		ص (207)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (22) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (23) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (24) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (25) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (179)	السبورة التفاعلية، ص (187)	السبورة التفاعلية، ص (195)	انترنت، ص (204)
تنويع التعليم	ص (180, 181)	ص (188, 189, 192)	ص (200)	ص (202, 203)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (208)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

الدائرة

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(17) حصة	(4) حصص	(21) حصة

الدرس 8-5 حصتان	الدرس 8-6 حصتان	الدرس 8-7 حصتان	استكشاف 8-8 حصة واحدة	الدرس 8-8 حصتان
المماسات	**القاطع والمماس وقياسات الزوايا**	**قطع مستقيمة خاصة في الدائرة**	**معمل الحاسبة البيانية: معادلة الدائرة**	**معادلة الدائرة**
• استعمال خصائص المماسات؛ لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة. • حل مسائل تتضمن المضلعات المحيطة بدائرة.	• إيجاد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان داخل الدائرة أو عليها. • إيجاد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان خارج الدائرة.	• إيجاد قياسات الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة. • إيجاد قياسات القطع المستقيمة المتقاطعة خارج الدائرة.	• استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire ؛ لاستكشاف معادلة الدائرة.	• كتابة معادلة الدائرة • تمثيل الدائرة بيانيًا في المستوى الإحداثي.
المماس نقطة التماس المماس المشترك	القاطع			الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة
	ص (222)			ص (235)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (26) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (27) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (36) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (38) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (39) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (40) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (28) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • الحاسبة البيانية TI-nspire	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (41) دون ضمن • تدريبات المهارات، ص (43) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (44) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (45) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (29) دون ضمن فوق
مدونة، ص (212)	تسجيل مرئي، ص (219)	مدونة، ص (227)		السبورة التفاعلية، ص (232)
ص (211, 212)	ص (217, 218, 223)	ص (225, 226)		ص (233, 235)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (240-236)
- اختبار الفصل، ص (241)

التقويم والمعالجة

الفصل 8

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 8**	
	التهيئة للفصل 8 ، ص (177)	مخطط المعالجة، ص (177)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك كل مثال	**مستوى المعالجة 1**
	تأكد	تدريبات المهارات، الفصول 8-1
	مسائل مهارات التفكير العليا	www.obeikaneducation.com
	مراجعة تراكمية	**مستوى المعالجة 2**
	أمثلة إضافية	تنويع التعليم
	تنبيه!	تنويع الواجبات المنزلية
	الخطوة 4، التقويم	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 8-1
	الاختبارات القصيرة ، ص(68, 69)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص(208)	**مستوى المعالجة 1**
	اختبار منتصف الفصل، ص(70)	تدريبات المهارات، الفصول 8-1
	www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com
		مستوى المعالجة 2
		تدريبات إعادة التعليم، الفصول 8-1
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص(236-240)	**مستوى المعالجة 1**
	اختبار الفصل، ص(241)	تدريبات المهارات، الفصول 8-1
	اختبار تراكمي، ص(244, 245)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 2**
		تدريبات إعادة التعليم، الفصول 8-1
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 8**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص(72-77)	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 8-1
	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص(78-79)	www.obeikaneducation.com
	اختبار المفردات ، ص(71)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص(80)	
	الاختبار التراكمي (الفصول 8-1) ، ص(81-83)	
	www.obeikaneducation.com	

كتاب الطالب | دليل المعلم | مصادر المعلم للأنشطة الصفية | دليل التقويم | شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

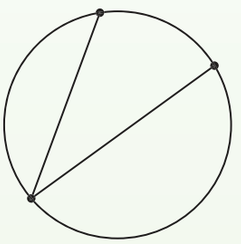
المتعلمون الحركيون / التفاعليون: ارسم دوائر كبيرة على أرضية مواقف السيارات، أو على أيّ منطقة في ساحات المدرسة. ولرسم دائرة مكتملة، اربط طبشورة بحبل، واطلب إلى أحد الطلاب الإمساك بالحبل جيدًا، وتثبيته عند نقطة تمثل مركز الدائرة، ويمسك طالب آخر الطبشورة في الطرف الآخر للحبل، ويتحرك بشكل دائريٍّ محافظًا على الحبل مشدودًا.

إذا كان بالإمكان ارسم عدة دوائر، وسمِّها A, B, C, D وهكذا، ثم اطلب إلى الطلاب العمل معًا لإيجاد محيط كل دائرةٍ. يدوِّن الطلاب نتائجهم في أوراق مثبتة على لوح صغير، اطلب إليهم عرض نتائجهم والاستراتيجيات التي استعملوها أمام زملائهم عند عودتهم إلى غرفة الصف.

المتعلمون الحركيون / المنطقيون: هيّء للطلاب فرصة ليست لرسم دائرة باستعمال الفرجار فقط، وإنما لفهم تعريف الدائرة من خلال استعماله، ثم اطلب إليهم أن يكونوا مبدعين ويفكّروا في أدواتٍ يمكن استعمالها لرسم دائرة تامة من دون استعمال الفرجار، واطلب إليهم استعمال هذه الأدوات قبل بداية الفصل، ووضع تعريفٍ خاصٍّ بهم لمصطلح الدائرة.

البديل 2 دون المتوسط دون

نظّم الطلاب مجموعات صغيرة متفاوتة القدرات، استعمل لوحًا من الفلّين، ودبابيس، ودوائر مقصوصة وحلقات مطاطية لنمذجة الزوايا المحيطية. ضع الدائرة على لوح الفلّين، وضع عليها دبّوسين لتمثيل طرفَي القوس المحدود بالزاوية المحيطية، ثم قم بلَفّ حلقة المطاط حول الدبّوسين، ثم استعمل قلم الرصاص واسحب حلقة المطاط إلى الجهة المقابلة من الدائرة؛ لتمثيل رأس الزاوية المحيطية. يمكن للطلاب تحريك القلم على الدائرة، واستعمال المنقلة لقياس الزاوية في كل مرةٍ، سيجدون أن قياس الزاوية يبقى ثابتًا.



البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب رسم دائرة في قطعة من الورق باستعمال قرص مدمج، ثم اطلب إليهم وضع مسطرتين بمحاذاة الدائرة من أجل تمثيل مماسين، واطلب إليهم تقريب المسطرتين، بحيث تتقاطعان خارج الدائرة مع بقائهما مماسين لها، وأن يرسموا المماسين من نقطة التقاطع إلى الدائرة، وأن يقيسوا المسافتين من الدائرة إلى نقطة التقاطع لإثبات أن القياسين متساويان.

قراءة الرياضيات

الدراسة

مهارة الدراسة

عندما تبدأ تدريس درس أو فصل جديد، من المفيد للطلاب أن يُكملوا جدولًا مثل الجدول المجاور. اطلب إليهم أن يتصفحوا الدرس بشكلٍ سريعٍ وأن يلاحظوا الأهداف والمفردات لتكوين فكرة عمّا سيدرسونه. ثم بعد ذلك اطلب إليهم تدوين ما يعرفونه وما يرغبون أو يتوقعون تعلُّمه. وبعد انتهائهم من دراسة الدرس، اطلب إليهم إجراء أي تصويبات لمحتويات عمود "ما أعرفه" وتسجيلها في عمود "ما تعلمته"، بالإضافة إلى الإجابات عن أسئلة "ما أريد أن أعرفه".

يحتوي الجدول على المعلومات التي سجَّلها الطالب قبل وبعد دراسة الدرس 1-8 حول الدائرة ومحيطها

ما أعرفه	ما أريد أن أعرفه	ما تعلمته
• يوجد للدائرة مركز. • المسافة بين المركز ونقطة على الدائرة تسمّى نصف القطر (r). • القطر هو المسافة عبر الدائرة مرورًا بالمركز ويساوي $2r$. محيط الدائرة يساوي πd^2، حيث $\pi = 3.14$. • أعتقد أن الوتر هو جزء من الدائرة. • الدائرة تتكون من 360°	ما الفرق بين محاط بدائرة والدائرة المحيطة؟	• وجدت أن $C = \pi d$ وليس πd^2. الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة، ولكنه ليس جزءًا من الدائرة. • الدوائر المتحدة في المركز تقع في المستوى نفسه ولها المركز نفسه. • المثلث مُحاط بدائرة. والدائرة تحيط بالمثلث.

يُسهم هذا النشاط وما شابهه في بناء استقلالية الطلاب، من خلال استعمالهم الاستراتيجيات الخاصة بهم.

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 8

- تقريب قيمة الأعداد غير النسبية أينما وردت (مثل $\sqrt{2}$، π).
- التعبير عن الأفكار الرياضية باستعمال اللغة والأدوات الفعّالة والوحدات المناسبة والتمثيل البياني أو العددي أو المادّي أو النماذج الجبرية.

الفصل 8

موضوعات ذات علاقة من الهندسة

- إيجاد مساحة القِطاعات الدائرية وأطوال الأقواس في الدائرة باستعمال التبرير التناسبي .
- استعمال الأنماط العددية والهندسية؛ لصياغة تعميمات حول الخصائص الهندسية التي تتضمن خصائص علاقات الزوايا في الدائرة.

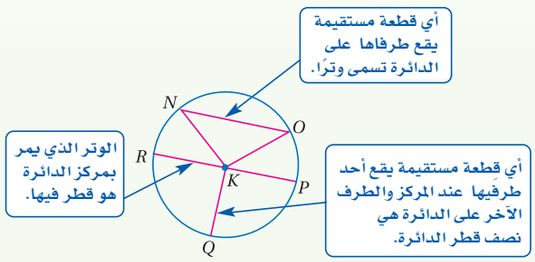
مابعد الفصل 8

- التعبير عن الأنماط باستعمال المتتابعات والمسلسلات الحسابية والهندسية، واستعمالها في حل مسائل واقعية.
- تحديد أنواع القطوع المخروطية، بتحليل معادلاتها وكتابتها وتمثيلها بيانيًّا.
- إيجاد مساحة منطقة محصورة بمنحني معادلة معطاة على الصورة القطبية، وإيجاد حجوم الأجسام الدورانية.

ملخص الدروس

8-1 الدائرة ومحيطها

الدائرة هي المحل الهندسي نقاط في المستوى، والتي تبعد مسافات متساويةً عن نقطة معلومة تُسمى المركز. وتُسمى الدائرة بمركزها. وأي قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة تسمى وترًا. والوتر الذي يمر بالمركز يكون قطرًا للدائرة، وأي قطعة مستقيمة يقع أحد طرفَيها في مركز الدائرة والطرف الآخر على الدائرة تُسمى نصف قطرٍ لها. وأنصاف أقطار الدائرة الواحدة جميعها متطابقة وكذلك أقطارها.



محيط الدائرة هو طول الخط الممثل للدائرة، والنسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها تساوي دائمًا π. فللدائرة التي محيطها C وحدة وطول قطرها d وحدة، وطول نصف قطرها r وحدة، يكون: $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$.

8-2 قياس الزوايا والأقواس

الزاوية المركزية في دائرة هي زاوية رأسها مركز الدائرة، وضلعاها يحويان نصفَي قطرين في الدائرة. ومجموع قياسات الزوايا المركزية للدائرة، والتي لا تحوي نقاطًا داخليةً مشتركةً بينها يساوي $360°$ والزاوية المركزية تقسم الدائرة إلى قسمين، يُسمَّى كل قسم قوسًا. وقياس كلٍّ من هذين القوسين يرتبط بقياس زاويته المركزية. فقياس القوس الأصغر بالدرجات يساوي قياس زاويته المركزية ويكون أقل من $180°$

وقياس القوس الأكبر بالدرجات يساوي 360 مطروحًا منه قياس القوس الأصغر، ويكون قياس القوس الأكبر أكبر من $180°$ يمكن اعتبار نصف الدائرة قوسًا قياسه $180°$

وفي الدائرة نفسها أو الدوائر المتطابقة، يكون القوسان متطابقين "إذا وفقط إذا" كانت الزاويتان المركزيتان المناظرتان لهما متطابقتين.

وفي التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية، تقسم الزوايا المركزية الدائرة إلى قطاعاتٍ لتمثيل بياناتٍ معينةٍ، تُمثَّل بنسب مئوية عادةً. وقياس الزاوية المركزية يتناسب مع النسبة المئوية الممثلة لها. ويمكن إيجاد قياس الزاوية المركزية، بضرب نسبتها المئوية في $360°$، وهناك طريقة أخرى لإيجاد قياس القوس وهي حساب طوله. وبما أن القوس جزء من الدائرة، فإن طول هذا القوس هو جزء من مُحيطِها.

والنسبة بين قياس القوس بالدرجات إلى 360 يساوي النسبة بين طول القوس إلى محيط الدائرة، ويمكن استعمال هذه النسبة لإيجاد طول القوس.

الدائرة

8-3 الأقواس والأوتار

في أي دائرة، يكون طرفا وتر فيها هما طرفَي قوسٍ أيضًا.

ويرتبط الوتر والقوس بعلاقةٍ خاصةٍ.

ففي الدائرة نفسها أو الدوائر المتطابقة، يكون القوسان الأصغران متطابقين "إذا وفقط إذا" كان الوتران المناظران لهما متطابقين، ويكون الوتران متطابقين "إذا وفقط إذا" كانا على بُعدين متساويين من مركز الدائرة.

وينتج عن الأقطار المتعامدة مع الأوتار علاقات بين (الأقواس والأوتار والأقطار). ففي الدائرة، إذا كان القطر أو نصف القطر عموديًّا على وترٍ، فإنه ينصّف ذلك الوتر وقوسه.

8-4 الزوايا المحيطية

الزاوية المحيطية في دائرة هي زاوية يقع رأسها على تلك الدائرة، وضلعاها يحويان وترين في الدائرة، فإذا رُسمت زاوية محيطية داخل دائرة، فإن قياس هذه الزاوية يساوي نصف قياس القوس الذي تقابله (أو قياس القوس الذي تقابله يساوي مثلَي قياس تلك الزاوية). وإذا قابلت زاويتان محيطيتان في دائرة قوسين متطابقين أو القوس نفسه، فإن الزاويتين متطابقتان. والمضلع المحاط بدائرة له خصائص خاصة أيضًا، فالمثلث المحاط بدائرة، والذي يكون أحد أضلاعه قطرًا في الدائرة هو نوع خاص من المثلثات، وإذا قابلت زاوية محيطية نصف دائرة، فإن قياس هذه الزاوية يساوي $90°$، وإذا رُسم شكل رباعي داخل دائرة، فإن زواياه المتقابلة تكون متكاملةً.

8-5 المماسات

يقطع المماس الدائرة في نقطة واحدة فقط تُسمّى نقطة التماس. ومماسُّ الدائرة يكون عموديًّا على نصف قطرها المار بنقطة التماس. وعكس هذه العبارة صحيح أيضًا؛ أيْ أن المستقيم العمودي على نصف قطر الدائرة عند نقطة التقاء نصف القطر مع الدائرة، يكون مماسًّا للدائرة عند تلك النقطة، ويمكن أيضًا أن يكون للدائرة الواحدة أكثر من مماسٍّ.

القطعتان المماستان لدائرةٍ من نقطة خارجها متطابقتان، وبما أنه يمكن رسم مضلع محاطٍ بدائرةٍ، فإنه يمكن أيضًا رسم مضلعٍ محيطٍ بدائرةٍ، ويكون المضلع محيطًا بدائرةٍ، إذا كانت أضلاعه مماساتٍ لتلك الدائرة.

8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا

المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطتين بالضبط يُسمَّى قاطعًا، وإذا تقاطع قاطعان داخل دائرة، فإن الزوايا الناتجة عن التقاطع ترتبط بعلاقةٍ مع الأقواس التي تقطعها هذه الزوايا، فإذا تقاطع قاطعان داخل دائرة، فإن قياس إحدى الزاويتين الناتجتين عن تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية، والقوس المقابل للزاوية المقابلة لها بالرأس.

ويمكن أن يتقاطع قاطعٌ مع مماسٍّ عند نقطة التماس، وفي هذه الحالة يكون قياس كلٍّ من الزوايا الناتجة عن التقاطع نصف قياس القوس الذي تحصره، ويمكن أيضًا للماسٍّ والقاطع أن يتقاطعا خارج الدائرة، فإذا تقاطع قاطعان، أو مماسان أو مماس وقاطع خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتكونة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.

8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولَي قطعتَي كل وتر يكون متساويًا.

إذا رُسم قاطعان لدائرةٍ من نقطةٍ خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه، يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.

وإذا رُسم قاطع ومماسٌّ من نقطةٍ خارج دائرة، فإن مربع طول المماس يُساوي حاصل ضرب طول القاطع في الجزء الخارجي منه.

8-8 معادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) وطول نصف قطرها r وحدةً هي: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$، ويمكنك تحليل معادلة دائرةٍ؛ لتجد المعلومات التي تساعدك على رسم الدائرة في المستوى الإحداثي. فإذا علمت إحداثيات مركز الدائرة وطول نصف قطرها، يمكنك رسم تلك الدائرة في المستوى الإحداثي. وفي الحقيقة إذا علمت ثلاث نقاط على دائرة، يمكنك رسمها بيانيًّا، وكتابة معادلة تلك الدائرة.

فإذا اعتبرت هذه النقاط الثلاث رؤوس مثلث ورسمت عمودين منصّفين لضلعين من أضلاعه، فإن نقطة تقاطعهما تكون مركز الدائرة. وأخيرًا يمكنك كتابة معادلة تلك الدائرة.

مشروع الفصل

رشاشات الري المحورية

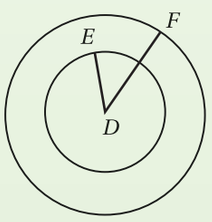
يستعمل الطلاب ما تعلَّموه عن خصائص الدائرة؛ لرسم دوائر تمثل محاصيل يتم ريّها باستعمال رشاشاتٍ محوريةٍ.

- تعد الرشاشات المحورية من أهم أنظمة الري الحديثة، حيث يمكن من خلالها ريّ مساحات كبيرة من الأراضي بكميات محدودة من المياه.
  اطلب إلى الطلاب أن يبحثوا عن تاريخ استعمال هذه التقنية في الزراعة، وأن يُجيبوا عن الأسئلة:
  ما أنواع المحاصيل الزراعية التي تُروى باستعمال الرشاشات المحورية؟
  إلى أيِّ مدى يصل طول الرشاشات المحورية؟
- اطلب إلى الطلاب رسم دوائر تمثل محاصيل متجاورة ومتفاوتة الأقطار في ورقة مقواة باستعمال القلم والخيط والمسطرة، وأن يُجيبوا عن الأسئلة:
  كيف يمكنك أن تستعمل الخيط والقلم لرسم دوائر بأقطار مختلفة؟ كيف يمكنك استعمال المماسات والمثلثات في تحديد مراكز دوائر جديدة في تصميمك؟
- اطلب إليهم عرض تصاميم دوائر المحاصيل التي رسموها، وتوضيح كيف استعملوا الخصائص الهندسية للدائرة في إنشاء هذا التصميم.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي.

التعريف: الدوائر المتحدة في المركز هي دوائر تقع في المستوى نفسه، ولها المركز نفسه.

مثال:



سؤال: هل الدوائر المتحدة في المركز متشابهة أم متطابقة؟ وضح إجابتك.
متشابهة؛ لأن لها الشكل نفسه، ولكن هذه الدوائر ليست متطابقة؛ لأن لها أنصاف أقطار مختلفة.

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم، وعنونتها كما هو موضح.

غرضها: يدوّن الطلاب عن الدوائر والزوايا والمستقيمات المرتبطة بها.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب استعمال الجزء المناسب من مطوياتهم لكتابة ملاحظاتهم عن الدوائر والزوايا والأقواس والأوتار والمماسات والقواطع والقطع المستقيمة الخاصة بالدائرة، وشجّعهم على تطبيق هذه المفاهيم، برسم الأمثلة وتطبيق المفاهيم الرياضية المرتبطة بها.

وقت استعمالها: شجّع الطلاب أثناء دراستهم الفصل على إضافة ملاحظات إلى الصفحات المناسبة في مطوياتهم، على أن تتضمن التعريفات، والمفاهيم الأساسية، والمفردات الصعبة، وأن يُدعّموها برسوم توضيحية لكل مفردةٍ.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66) .
يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.



فيما سبق:
درستُ أنواعًا من القطع المستقيمة الخاصة، وعلاقات الزوايا في المثلث.

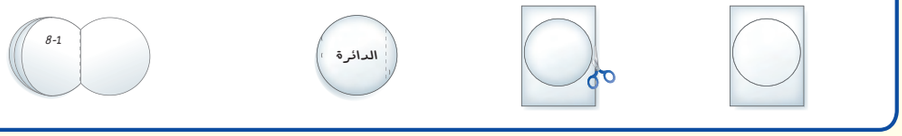
والآن:
- أتعرّف العلاقة بين الزوايا المركزية، والأقواس، والزوايا المحيطية في الدائرة.
- أعرّف القاطع والمماس وأستعملهما.
- أعرّف الدائرة أو أصفها؛ مستعملاً معادلتها.

لماذا؟
علوم: الشكل الحقيقي لقوس المطر هو دائرة كاملة، ويُسمّى الجزء الذي يمكن رؤيته منها فوق الأفق قوسًا.

المطويات منظم أفكار

الدائرة: اعمل هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 8، مبتدئًا بتسع أوراق A4 .

1. **ارسم دائرة قطرها 18 cm في كل ورقة باستعمال الفرجار.**
2. **قُصّ هذه الدوائر.**
3. **ثبّت الأوراق من الجهة اليمنى كما في الشكل، واكتب عنوان الفصل على الورقة الأولى.**
4. **اكتب أرقام الدروس في أعلى الصفحة في بقية الأوراق.**



التهيئة للفصل 8

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

(يستعمل مع الدرس 2-8)

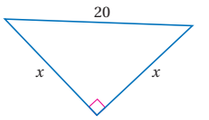
أوجد النسبة المئوية من العدد المعطى في كلّ ممّا يأتي:

1) 26% من 500 **130**
2) 79% من 623 **492.17**
3) 19% من 82 **15.58**
4) 10% من 180 **18**
5) 92% من 90 **82.8**
6) 65% من 360 **234**

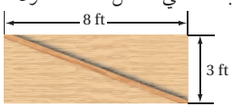
7) **مطاعم:** يُضيف مطعمٌ رسم توصيل قدره 5% على كل طلبٍ. ما رسم خدمة توصيل وجبة غداء سعرها 65 ريالًا؟ **3.25 ريالاتٍ**

(يستعمل مع الدرس 5-8)

8) أوجد قيمة x، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر. **14.1**



9) **نجارة:** أراد أحمد أن يضع دعامة على لوح من الخشب، كما في الشكل أدناه. ما طول هذه الدعامة؟ **8.5 ft تقريبًا**



(يستعمل مع الدرس 7-8)

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك.

10) $5x^2 + 4x - 20 = 0$ **1.6, −2.4**

11) $x^2 = x + 12$ **−3, 4**

12) **ألعاب نارية:** أطلقت ألعاب نارية في الهواء احتفاءً باليوم الوطني، ولم تنفجر إحدى هذه الألعاب، فارتدت إلى الأرض، إذا كان ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية يُعطى بالمعادلة $d = 80t - 16t^2$، فبعد كم ثانية وصلت سطح الأرض؟ **5 ثوانٍ**

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد قيمة 15% من 35

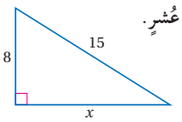
تحويل النسبة المئوية إلى كسر عشري: 15% من 35 $= (0.15)(35)$

بالضرب: $= 5.25$

إذن 15% من 35 تساوي 5.25

مثال 2

أوجد قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.



نظرية فيثاغورس: $a^2 + b^2 = c^2$

بالتعويض: $x^2 + 8^2 = 15^2$

بالتبسيط: $x^2 + 64 = 225$

خاصية الطرح للمساواة: $x^2 = 161$

$x = \sqrt{161} \approx 12.7$

مثال 3

حُلّ المعادلة: $x^2 + 3x - 40 = 0$، باستعمال القانون العام مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.

القانون العام: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض: $= \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$

بالتبسيط: $= \dfrac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$

بالتبسيط: $= 5$ أو -8

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، والعبارة "إذا ... فقم" في الجدول، تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى	ضمن المتوسط
1	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،
فقم	بمراجعة حساب النسبة المئوية من عدد، وتطبيقات نظرية فيثاغورس مع الطلاب.
	www.obeikaneducation.com

المستوى	دون المتوسط
2	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
	www.obeikaneducation.com

8-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-1

تعرُّف عناصر الأشكال الرباعية واستعمالها.

الدرس 8-1

تعرُّف عناصر الدائرة واستعمالها. حل مسائل تتضمن محيط الدائرة.

ما بعد الدرس 8-1

تعيين زوايا وأقواس الدائرة وإيجاد قياساتها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ماذا تمثل المسافة التي يقطعها راكب العجلة الدوارة في الدورة الواحدة؟ محيط الدائرة.
- كيف يمكننا استعمال العجلة الدوارة لقياس المسافة التي قطعها راكب اللعبة بعد عددٍ من الدورات؟ أجد محيط العجلة الدوارة، وأضربه في عدد الدورات التي يدورها الراكب لقطع المسافة المُراد قياسها.
- كيف تُستعمل فكرة قياس المسافة باستعمال العجلة الدوارة في الحياة؟ إجابة ممكنة: في جهاز قياس المسافة في السيارة، تستعمل دورات عجلات السيارة لقياس المسافة المقطوعة، ويستعمل المسَّاحون أيضًا عجلة لقياس المسافة وهكذا.
- لماذا يكون استعمال العجلة في القياس، أفضل من القياس باستعمال المتر أو شريط القياس؟ إجابة ممكنة: يكون القياس بالعجلة متصلًا، أما المتر أو شريط القياس فيجب رفعه ونقله، ويمكن إيجاد قياسات المسافات التي يوجد فيها انحناءات بواسطة العجلة، ولكن القياس بواسطة شريط القياس أو المتر، لا يكون دقيقًا حول المنحنيات.

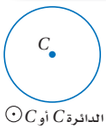
8-1 الدائرة ومحيطها
Circle and Circumference



لماذا؟

إذا ركبت العجلة الدوَّارة، فإن بُعدك عن مركز دورانها يكون ثابتًا، فإذا كانت المسافة بين موقعك ومركزها 44 ft، فيمكنك أن تجد المسافة التي تقطعها في دورة واحدة.

القطع المستقيمة في الدائرة **الدائرة** هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطةٍ معلومةٍ تُسمّى **مركز** الدائرة. وعادة ما تسمى الدائرة بمركزها، والشكل المجاور يبين الدائرة C التي يمكن أن يرمز لها بالرمز $\odot C$.



الدائرة C أو $\odot C$

وللقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة أسماء خاصة.

فيما سبق:
درستُ عناصر الأشكال الرباعية واستعملتها.
(الدرس 2-5)

والآن:
- أتعرف عناصر الدائرة وأستعملها.
- أحل مسائل تتضمّن محيط الدائرة.

المفردات:
- الدائرة — circle
- المركز — center
- نصف القطر — radius
- الوتر — chord
- القطر — diameter
- الدوائر المتطابقة — congruent circles
- الدوائر المتحدة في المركز — concentric circles
- محيط الدائرة — circumference
- باي (π) — pi
- المضلع المُحاط بدائرة — inscribed with a circle
- الدائرة الخارجية — circumscribed

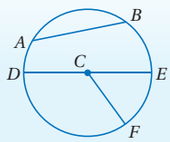
www.obeikaneducation.com

مفهوم أساسي
أضف إلى مطويتك

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

نصف القطر هو قطعة مستقيمة يقع أحد طرفَيها على المركز والطرف الآخر على الدائرة.
أمثلة: $\overline{CF}$, $\overline{CE}$, $\overline{CD}$ أنصاف أقطار في $\odot C$.

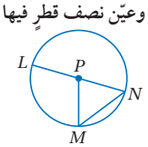
الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة.
أمثلة: $\overline{DE}$, $\overline{AB}$ وتران في $\odot C$.



القطر هو وتر يمر بمركز الدائرة، ويتكوّن من نصفَي قطرين يقعان على استقامةٍ واحدة.
مثال: $\overline{DE}$ قطر في $\odot C$، ويتكون القطر $\overline{DE}$ من نصفَي القطرين $\overline{CE}$, $\overline{CD}$ الواقعين على استقامةٍ واحدةٍ.

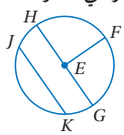
مثال 1
تعيين القطع المستقيمة في الدائرة

a) سمِّ الدائرة، وعيّن نصف قطرٍ فيها.



مركز الدائرة هو P؛ إذن يمكن تسميتها الدائرة P، أو $\odot P$. تظهر في الشكل ثلاثة أنصاف أقطار هي: $\overline{PL}$, $\overline{PN}$, $\overline{PM}$.

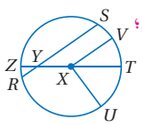
b) عيّن وترًا وقطرًا في الدائرة.



يظهر في هذه الدائرة وتران هما: $\overline{HG}$, $\overline{JK}$، ويمر $\overline{HG}$ بالمركز؛ إذن $\overline{HG}$ قطر.

تحقق من فهمك

1) سمِّ الدائرة، ونصف قطر، ووترًا، وقطرًا فيها. الدائرة X أو $\odot X$؛ نصف القطر $\overline{XZ}$ أو $\overline{XU}$ أو $\overline{XT}$ أو $\overline{XV}$؛ الوتر $\overline{TZ}$ أو $\overline{RS}$؛ القطر $\overline{TZ}$



مصادر الدرس 8-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (181)	• تنويع التعليم ص (180, 181)	• تنويع التعليم ص (180)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (22)	• كتاب التمارين ص (22)	• كتاب التمارين ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

ومن تعريف الدائرة، فإن المسافة بين مركز الدائرة وأيّ نقطة عليها ثابتة دائمًا؛ إذن أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة . وبما أن قطر الدائرة يتكوّن من نصفَي قطرين؛ فإن أقطار الدائرة جميعها متطابقة.

قراءة الرياضيات

القطر ونصف القطر:
تستعمل الكلمتان (القطر، ونصف القطر) للتعبير عن الطول وعن القطع المستقيمة.
وبما أن للدائرة عدة أنصاف أقطار وعدة أقطار أيضًا، فإن قولنا نصف قطر أو قطر يعني القياس، وليس القطعة المستقيمة.

تنبيه!

القطر أو نصف القطر:
في المسائل التي تتضمن الدوائر، انتبه جيدًا إلى ما إذا كانت المعطيات تتعلق بنصف قطر الدائرة أم بقطرها.

مفهوم أساسي — العلاقة بين القطر ونصف القطر

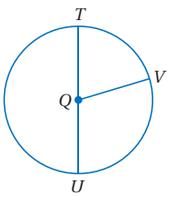
أضف إلى مطويتك

إذا كان نصف قطر الدائرة r وقطرها d فإن:

صيغة نصف القطر: $r = \frac{1}{2}d$ أو $r = \frac{d}{2}$ صيغة القطر: $d = 2r$

مثال 2 إيجاد نصف القطر والقطر

إذا كان $QV = 8\text{ cm}$، فأوجد قطر $\odot Q$؟



صيغة القطر $d = 2r$

بالتعويض والتبسيط $= 2(8) = 16$

القطر في $\odot Q$ يساوي 16 cm .

تحقق من فهمك

2A) إذا كان $TU = 14\text{ ft}$، فأوجد نصف قطر $\odot Q$؟ 7 ft

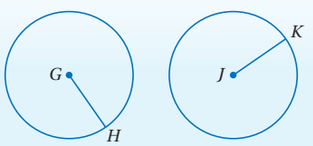
2B) إذا كان $QT = 11\text{ m}$، فأوجد QU . 11 m

كما هو الحال في الأشكال الأخرى، يمكن أن تكون أزواج الدوائر متطابقة، أو أن تربطهما بعض العلاقات الخاصة.

مفهوم أساسي — أزواج الدوائر

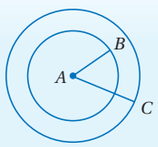
أضف إلى مطويتك

تكون **الدائرتان متطابقتين** إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين.



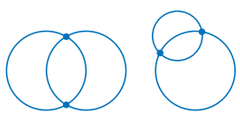
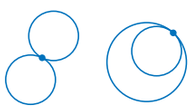
مثال: $\overline{GH} \cong \overline{JK}$ ؛ إذن $\odot G \cong \odot J$

الدائرتان المتحدتان في المركز هما الدائرتان اللتان تقعان في المستوى نفسه، ولهما المركز نفسه.



مثال: $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AB}$ و $\odot A$ التي نصف قطرها $\overline{AC}$ دائرتان متحدتان في المركز.

إذا تقاطعت دائرتان، فإنه يمكن أن تتقاطعا بطريقتين مختلفتين، والجدول التالي يوضح الأوضاع المختلفة بين دائرتين.

تقاطع في نقطتين	تقاطع في نقطة واحدة	لا يوجد تقاطع
		

القطع المستقيمة في الدائرة

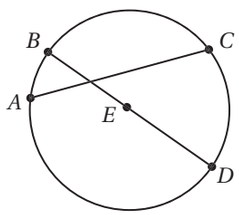
الأمثلة 3-1 تبيّن كيفية تعيين قطع مستقيمة في الدائرة وإيجاد قياساتها.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

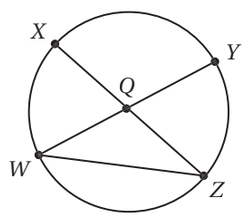
مثال إضافي

1



a) سمِّ الدائرة وعيّن نصف قُطرٍ فيها.

الدائرة E أو $\odot E$ ، ويظهر في الشكل نصفا قطرين هما: $\overline{EB}$, $\overline{ED}$



b) عيّن وترًا وقطرًا في الدائرة.

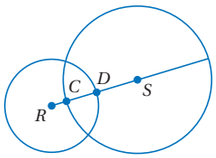
يظهر في الشكل ثلاثة أوتار هي : $\overline{WY}, \overline{XZ}, \overline{WZ}$
وقطران هما: $\overline{WY}, \overline{XZ}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعليّة: اعرض دائرة على السبورة، واستعملها نموذجًا لترسم فيها أنصاف أقطار وأقطارًا وأوتارًا.

القطعة المستقيمة التي تصل بين مركزَي دائرتين متقاطعتين يمكن أن تحوي نصفَي قطرَي الدائرتين.

مثال 3 إيجاد قياسات في دائرتين متقاطعتين



قطر S⊙ يساوي 30 وحدةً، وقطر R⊙ يساوي 20 وحدةً، و DS يساوي 9 وحداتٍ، أوجد CD.

بما أن قطر S⊙ يساوي 30، فإن $CS = 15$. و $\overline{CD}$ هو جزء من نصف القطر $\overline{CS}$.

$CD + DS = CS$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$CD + 9 = 15$	بالتعويض
$CD = 6$	بطرح 9 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

3) استعمل الشكل أعلاه لإيجاد RC . 4 وحداتٍ.

محيط الدائرة: محيط الدائرة هو طول المنحنى المغلق الذي يُمثّل الدائرة، ويُرمز له بالرمز C، وتُعرف النسبة $\frac{C}{d}$ بأنها عدد غير نسبي يُسمّى باي (π)، ويساوي 3.14 أو $\frac{22}{7}$ تقريبًا، ويمكن استنتاج صيغتين لحساب محيط الدائرة باستعمال هذا التعريف.

$\frac{C}{d} = \pi$	تعريف π باي
$C = \pi d$	بضرب كلا الطرفين في d
$C = \pi(2r)$	بالتعويض $d = 2r$
$C = 2\pi r$	بالتبسيط

مفهوم أساسي محيط الدائرة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان قطر الدائرة يساوي d، أو نصف قطرها يساوي r، فإن محيطها C يساوي حاصل ضرب القطر في π، أو مثلَي نصف القطر في π .

الرموز: $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

مثال 4 من واقع الحياة إيجاد محيط الدائرة

تنس: أوجد محيط المهبط الدائري الموصوف في فقرة الربط مع الحياة المجاورة.

$C = \pi d$	صيغة محيط الدائرة
$= \pi(79)$	بالتعويض
$= 79\pi$	بالتبسيط
≈ 248.19	باستعمال الحاسبة

محيط المهبط الدائري يساوي 79π ft، أو 248.19 ft تقريبًا.

تحقق من فهمك

أوجد محيط كلٍّ من الدائرتين الآتيتين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

4A) نصف القطر يساوي 2.5 cm 15.71 cm **4B)** القطر يساوي 16 ft 50.27 ft

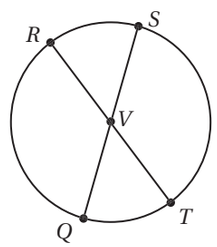


الربط مع الحياة

أُقيمت في عام 2005 م مباراة دولية في التنس على مهبط للطائرات العمودية فوق قمة فندق برج العرب في الإمارات العربية المتحدة، ويرتفع هذا المهبط الدائري 700 ft تقريبًا عن سطح الأرض، وقطره 79 ft

مثالان إضافيان

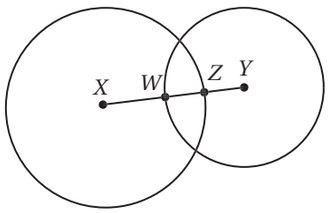
2 إذا كان $RT = 21$ cm ، فأوجد طول $\overline{QV}$ ؟



10.5 cm

3 إذا كان قطر X⊙ يساوي 22 وحدةً، وقطر Y⊙ يساوي 16 وحدةً، وطول $\overline{WZ}$ يساوي 5 وحداتٍ، فأوجد XY.

14 وحدةً.



الأمثلة 4-6 تبيّن كيفية إيجاد محيط الدائرة واستعماله.

مثال إضافي

4 زراعة: أوجد محيط حقل قمح دائري الشكل، يُروى بواسطة رشاش محوريٍّ نصف قطره يساوي 30 ft

188.50ft تقريبًا.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب الإجابة عن السؤال الآتي: لحل مشكلة الإزدحام المروري على أحد التقاطعات، قررت إدارة بلدية المدينة تنفيذ ميدان دائري عند هذا التقاطع، على أن يضم وسطه حديقة دائرية محيطها 100 πm، ويحيط بها طريقٌ عرضه 40 m، أوجد محيط هذا الميدان؟. 140 πm

يمكنك استعمال إحدى صيغتَي محيط الدائرة، لحساب قطر الدائرة؛ ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها.

مثال 5 إيجاد القطر ونصف القطر

أوجد القطر ونصف القطر مقرّبين إلى أقرب جزءٍ من مئة للدائرة التي محيطها 106.4 mm

صيغة محيط الدائرة	$C = \pi d$	صيغة نصف القطر	$r = \frac{1}{2}d$
بالتعويض	$106.4 = \pi d$		$d \approx 33.87$ $\approx \frac{1}{2}(33.87)$
بقسمة كلا الطرفين على π	$\frac{106.4}{\pi} = d$	باستعمال الحاسبة	≈ 16.94 mm
باستعمال الحاسبة	$33.87 \text{ mm} \approx d$		

تحقق من فهمك

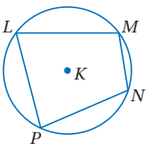
5) إذا كان محيط دائرة يساوي 77.8 cm، فأوجد قطر الدائرة ونصف قطرها مقرّبين إلى أقرب جزء من مئة.

24.76 cm; 12.38 cm

يكون المضلّع **محاطًا بدائرة** إذ وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة.

وتسمى هذه الدائرة **الدائرة الخارجية**.

- الشكل الرباعي $LMNP$ مُحاط بـ $\odot K$.
- $\odot K$ دائرة خارجية للمضلع $LMNP$.

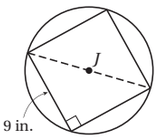


مثال 6 من اختبار

إجابة قصيرة: إذا كانت الدائرة J تحيط بمربعٍ طول ضلعه 9 in، وقطره يمثّل قطرها، فما القيمة الدقيقة لمحيط $\odot J$.

اقرأ سؤال الاختبار

احسب قطر الدائرة، واستعمله لحساب محيطها.



حُلّ سؤال الاختبار

ارسم شكلًا توضيحيًّا فيه: قطر المربع يُمثّل قطرًا للدائرة أيضًا، ويكون وترًا لمثلث قائم الزاوية.

نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بالتعويض	$9^2 + 9^2 = c^2$
بالتبسيط	$162 = c^2$
بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين	$9\sqrt{2} = c$

قطر الدائرة يساوي $9\sqrt{2}$ in

أوجد المحيط بدلالة π، بتعويض $9\sqrt{2}$ لقيمة d في الصيغة $C = \pi d$.

محيط الدائرة يساوي $9\pi\sqrt{2}$ in

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

6A) إذا كانت تحيط بمثلثٍ قائم الزاوية طولا ساقيه 7 m, 3 m $\pi\sqrt{58}$ m

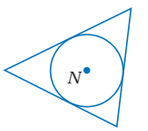
6B) إذا كانت مُحاطَة بمربعٍ طول ضلعه 10 ft 10π ft

إرشادات للدراسة

مستويات الدّقة: بما أن π عدد غير نسبي، إذان لا يمكن كتابته على صورة كسر عشري منته، ولكن لأغراض الحصول على تقدير سريع في الحسابات، يمكن اعتبار قيمته 3، وإذا استعملت القيمة 3.14 أو $\frac{22}{7}$، فستحصل على تقريب أكثر دقة، وللحصول على القيمة الدقيقة، استعمل مفتاح π في الحاسبة.

إرشادات للدراسة

الدائرة الخارجية والدائرة الداخلية: تسمى الدائرة التي تمرّ بجميع رؤوس المضلع الدائرة الخارجية، أما الدائرة التي تمسّ جميع أضلاع المضلع، فتسمّى الدائرة الداخلية، حيث تكون محاطة بالمضلع، كالدائرة في الشكل أدناه.



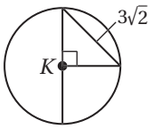
مثالان إضافيان

5 أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا كان محيطها يساوي 65.4 ft مقربًا الإجابة إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

القطر 20.82 ft تقريبًا.

نصف القطر 10.41 ft تقريبًا.

6 أوجد محيط $\odot K$ أدناه. 6π وحدةً



المحتوى الرياضي

الدائرة الخارجية والدائرة الداخلية: أي مثلث يمكن أن يُحاط بدائرةٍ تُسمَّى الدائرة الخارجية، مع العلم بأنه يُحيط بدائرة تسمى الدائرة الداخلية. والأشكال الرباعية (باستثناء شكل الطائرة الورقية) يمكن أن تحيط بدائرة أو تحاط بدائرة، فقط عندما تكون زاويتا الشكل الرباعي المتقابلتين متكاملتين. ويمكن أيضًا أن تُحيط جميع أشكال الطائرات الورقية بدوائر، ولكنها لا يمكن أن تُحاط بدوائر.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيُّون: وجّه الطلاب إلى أن يستعملوا خيطًا؛ لتقدير محيط قرصٍ أو أسطوانةٍ. وراجع معهم صيغة محيط الدائرة باستعمال قطرها أو نصف قطرها، ثم اطلب إليهم حساب محيط الدائرة باستعمال قطر الدائرة أو نصف قطرها، ثم اطلب إليهم مقارنة النتيجة التي حصلوا عليها حسابيًّا بالتقدير الذي حصلوا عليه باستعمال الخيط.

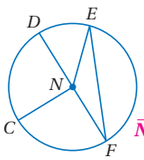
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 9–1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تأكد

المثالان 2 , 1 استعمل الدائرة في الشكل المجاور؛ للإجابة عن الأسئلة الآتية:



1) سمِّ هذه الدائرة. $\odot N$

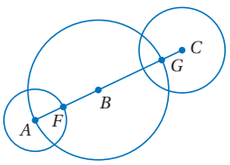
2) عيّن كلًّا ممّا يأتي:

a) وترًا $\overline{EF}, \overline{DF}$ b) قطرًا $\overline{DF}$ c) نصف قطر $\overline{NC}, \overline{ND}, \overline{NE}, \overline{NF}$

3) إذا كان $CN = 8$ cm ، فأوجد DN. **8 cm**

4) إذا كان $EN = 13$ ft ، فما قطر الدائرة؟ **26 ft**

المثال 3 قطر كلٍّ من $\odot A, \odot B, \odot C$ يساوي **8 cm , 18 cm , 11 cm** على الترتيب. أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

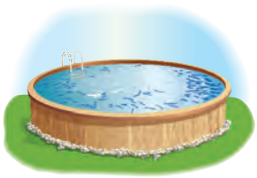


5) FG **14 cm**

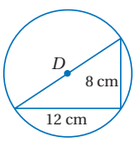
6) FB **5 cm**

المثال 4 7) **عجلة دوارة:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. ما قطر هذه العجلة الدوارة؟ وما محيطها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك. **88 ft ; 276.46 ft**

المثال 5 8) **بركة سباحة:** محيط بركة السباحة الدائرية في الشكل المجاور يساوي 56.5 ft تقريبًا، ما قطر هذه البركة؟ وما نصف قطرها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. **17.98 ft; 8.99 ft**

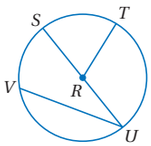


المثال 6 9) **إجابة قصيرة:** المثلث القائم الزاوية في الشكل المجاور مُحاط بالدائرة D ، أوجد القيمة الدقيقة لمحيط $\odot D$. **$4\pi\sqrt{13}$ cm**



تدرب وحل المسائل

المثالان 2 , 1 عُد إلى $\odot R$ في الشكل المجاور؛ للإجابة عن الأسئلة الآتية.



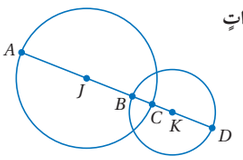
10) ما مركز الدائرة؟ R

11) عيّن وترًا يكون قطرًا. $\overline{SU}$

12) هل $\overline{VU}$ نصف قطر؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش**

13) إذا كان $SU = 16.2$ cm ، فأوجد RT؟ **8.1 cm**

المثال 3 إذا كان نصف قطر $\odot J$ يساوي **10** وحداتٍ، ونصف قطر $\odot K$ يساوي **8** وحداتٍ و BC يساوي **5.4** وحداتٍ، فأوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:



14) CK **2.6** وحدة

15) AB **14.6** وحدة

16) JK **12.6** وحدة

17) AD **30.6** وحدة

إجابة:

12) لا، لأن $\overline{VU}$ وترًا يقع طرفاه على محيط الدائرة، بينما نصف القطر أحد طرفَيه يقع على مركز الدائرة.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	10-27 ، 35 ، 36 ، 38 ، 40-55
ضمن ضمن المتوسط	11-31 فردي ، 32-36 ، 38 ، 40-55
فوق فوق المتوسط	28-52 ، (اختياري: 53-55)

المثال 4

18) بيتزا: أوجد نصف قطر قرص البيتزا ومحيطها في الشكل المجاور، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك. **7 in; 43.98 in**



19) دراجات: قطر إطار دراجة يساوي 26 in، أوجد نصف قطر الإطار ومحيطه، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك. **13 in; 81.68 in**

22) **119.46 cm; 59.73 cm**

23) **830.23 m; 415.12 m**

المثال 5

أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

20) $C = 18$ in **5.73 in; 2.86 in**

21) $C = 124$ ft **39.47 ft; 19.74 ft**

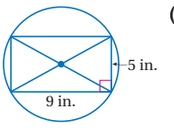
22) $C = 375.3$ cm

23) $C = 2608.25$ m

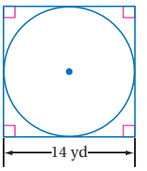
المثال 6

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كلٍّ من الدوائر الآتية باستعمال المضلّع الذي تحيط به أو الذي يُحيط بها.

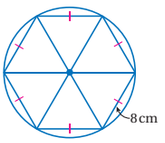
24)



25)



26)

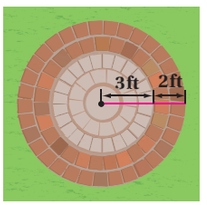


24) $\sqrt{106}\,\pi$ in

25) 14π yd

26) 64π

27) فناء: أراد مصطفى أن يرصف فناءً، دائري الشكل، كما في الشكل المجاور.



a) ما المحيط التقريبي لهذا الفناء؟ **31.42 ft**

b) إذا غيَّر مصطفى خطة إنشاء هذا الفناء، بحيث يصبح محيط الدائرة الداخلية 25 ft تقريبًا، فكم يكون نصف قطر الدائرة مقرّبًا إلى أقرب قدمٍ؟ **4 ft**

في كلٍّ من الأسئلة 31–28، عُلِم نصف قطر أو قطر أو محيط دائرة. أوجد القياسين المجهولين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

28) $d = 8\frac{1}{2}$ in, $r =$?, $C =$?

29) $r = 11\frac{2}{5}$ ft, $d =$?, $C =$?

30) $C = 35x$ cm, $d =$?, $r =$?

31) $r = \frac{x}{8}$, $d =$?, $C =$?

28) **4.25 in; 26.70 in**

29) **22.80 ft; 71.63 ft**

30) **$11.14x$ cm; $5.57x$ cm**

31) **$0.25x$; $0.79x$**

32) حدائق: يُراد إنشاء رصيف عرضه 4 m حول بركة دائرية الشكل محيطها 68 m، فما محيط الرصيف؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. **93.13 m**

33) تمثيلات متعدّدة: في هذا السؤال ستستكشف أثر تغيير الأبعاد في الدائرة.

a) هندسيًّا: مستعملًا الفرجار ارسم ثلاث دوائر متحدة المركز، بحيث تكون نسبة طول نصف قطر كل دائرة إلى طول نصف قطر الدائرة الأكبر منها تساوي $\frac{1}{2}$. **انظر الهامش**

b) جدوليًّا: احسب محيط كلٍّ من الدوائر السابقة مقربًا إلى أقرب جزء من مئة، وسجّل في جدول نصف القطر والمحيط لكلٍّ منها. **انظر الهامش**

c) لفظيًّا: فسّر لماذا تكون الدوائر الثلاث متشابهة هندسيًّا. **انظر الهامش**

d) لفظيًّا: ضع تخمينًا حول النسبة بين محيطَي الدائرتين، عندما تكون النسبة بين نصفَي قطريهما تساوي 2. **النسبة بين محيطَيهما تساوي 2.**

e) تحليليًّا: معامل التشابه من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{b}{a}$. اكتب معادلة تربط محيط $\odot A$ (C_A) بمحيط $\odot B$ (C_B). **$(C_B) = \frac{b}{a}(C_A)$**

f) عدديًّا: إذا كان معامل التشابه من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{1}{3}$، ومحيط $\odot A$ يساوي 12 in، فما محيط $\odot B$؟ **4 in**

قراءة الرياضيات

الرمزان C_A و C_B:
يقرأ الرمز C_A محيط الدائرة A، ويقرأ الرمز C_B محيط الدائرة B.

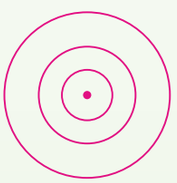
تنبيه لحل سؤال

الفرجار: حل السؤال 33 يتطلب استعمال الفرجار.

تمثيلات متعددة: يستعمل الطلاب الهندسة والجداول والوصف اللفظي والحسابات العددية في السؤال 33؛ لاستكشاف أثر تغيُّر الأبعاد في الدائرة.

إجابات:

33a) إجابة ممكنة:

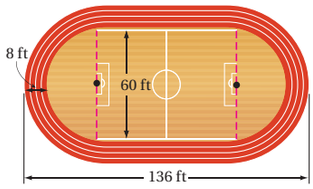


33b) إجابة ممكنة :

المحيط (cm)	نصف القطر (cm)
3.14	0.5
6.28	1
12.57	2

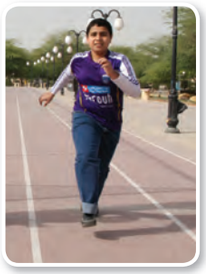
33c) إجابة ممكنة: لأن لها الشكل الدائري نفسه، إلَّا أنها تختلف في القياس.

34) رياضة: يظهر في الصورة أدناه مضمار جري.



a) كم تزيد المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الخارجي للمضمار، عن المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الداخلي؟ **50.27 ft**

b) كم دورة تقريبًا يجب أن يركض شخص على المسار الخارجي للمضمار؛ ليقطع ميلًا واحدًا؟ **15 دورةً تقريبًا**



الربط مع الحياة

يمكن أن يحرق الشخص الذي يزن 68 kg حوالي 240 سعرًا حراريًّا، إذا ركض بسرعة 9 km/h مدة 20 min، وذلك أكثر من مثلَي عدد السعرات التي يحرقها إذا سار بسرعة 7.2 km/h المدة الزمنية نفسها.

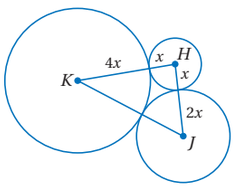
مسائل مهارات التفكير العليا

35) مسألة مفتوحة: ارسم دائرة يكون محيطها بين 8 cm و 12 cm، ما نصف قطر هذه الدائرة؟ **انظر الهامش**

36) اكتشف الخطأ: رسم كلّ من حمود وسلمان شكلًا يُمثّل مجموعة النقاط التي تبعد 4 cm عن النقطة J، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ برِّر إجابتك.

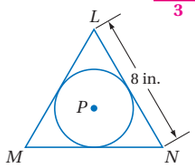


37) تحدٍّ: مجموع محيطات الدوائر H, J, K التي تظهر في الشكل المجاور يساوي 56π. أوجد KJ. **24 وحدةً.**



38) تبرير: هل المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة داخلها أقل من نصف قطرها دائمًا أو أحيانًا أو لا تكون كذلك أبدًا؟ فسّر إجابتك.

39) تحدٍّ: $P\odot$ مُحاطة بالمثلث المتطابق الأضلاع LMN، كما في الشكل أدناه، ما محيط $P\odot$، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ؟ $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3} \approx 14.5$



40) اكتب: بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الدوائر المتطابقة والدوائر المتحدة في المركز. **انظر الهامش**

إجابات:

35) انظر إجابات الطلاب. يجب أن يكون نصف القطر بين 1.27 cm و 1.91 cm

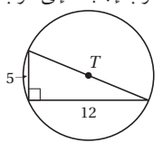
40) إجابة ممكنة: الدوائر المتطابقة لها مراكز مختلفة، ولكن أنصاف أقطارها متطابقة؛ في حين أن الدوائر المتحدة في المركز لها المركز نفسه، ولكن أنصاف أقطارها مختلفة.

36) كلاهما إجابته صحيحة. مجموعة النقاط التي عيّنها سلمان تبعد 4 cm عن J، ولكنها واقعة في مستوى ثنائي الأبعاد. أمّا النقاط التي عيّنها حمود فتبعد 4 cm عن J، ولكنها تقع داخل شكل ثلاثي الأبعاد.

38) دائمًا؛ لأن نصف قطر الدائرة قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة ونقطة عليها؛ لذا فإن طول القطعة التي تصل مركز الدائرة بنقطة داخلها، يكون أقل من نصف قطر الدائرة.

تدريب على اختبار

41) ما محيط $\odot T$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر. **40.8**



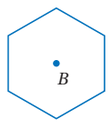
42) جبر: أحاط إبراهيم حديقته الدائرية الشكل بسياج. إذا كان طول السياج 50 m ، فما نصف قطر الحديقة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عددٍ صحيحٍ. **C**

A 10 **B** 9 **C** 8 **D** 7

مراجعة تراكمية

استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدّد مركزه B ومعامله k المحدّد في كل من الأسئلة الآتية. (الدرس 6-7) **43–46)** انظر الهامش

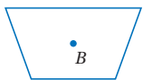
43) $k = \frac{1}{5}$



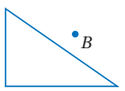
44) $k = \frac{2}{5}$



45) $k = 2$

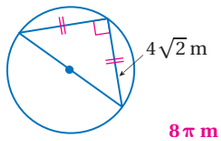


46) $k = 3$



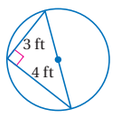
أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كل دائرة ممّا يأتي: (الدرس 1-8)

47)



8π m

48)



5π ft

حدّد ما إذا كان يبدو لصورة كلٍّ من الأشكال الآتية تماثل دوراني أم لا؟ وإذا كان كذلك، فانسخ الشكل في دفترك، وحدّد عليه مركز التماثل، واذكر رتبته ومقداره. (الدرس 5-7)

49)



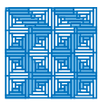
لا

50)



نعم؛ $90°, 4$

51)



لا

52)

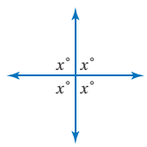


لا

استعد للدرس اللاحق

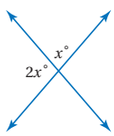
أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

53)



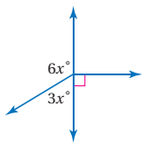
90

54)



60

55)



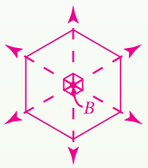
20

4 التقويم

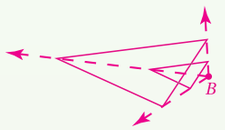
فهم الرياضيات: يمكن للطلاب التدرب على مصطلحات ومفردات هذا الدرس، عن طريق وصف دوائر مختارة وتعريف المصطلحات بصوتٍ واضحٍ.

إجابات:

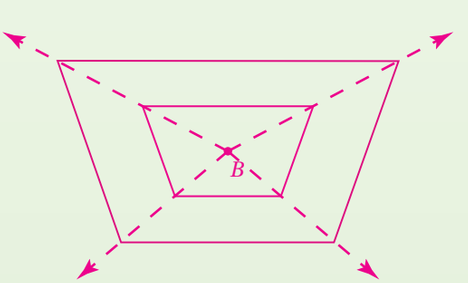
43)



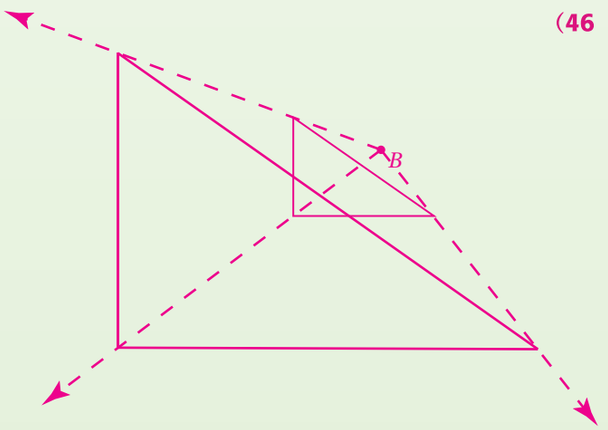
44)



45)



46)



مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-1 تدريبات إعادة التعليم

الدائرة ومحيطها

قطع مستقيمة في الدائرة:

الدائرة هي المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، بحيث تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطةٍ معلومةٍ تسمّى مركز الدائرة.

للقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة أسماء خاصة.

- القطعة المستقيمة التي يقع أحد طرفيها على الدائرة والآخر عند مركز الدائرة، تسمّى **نصف قطر**.
- القطعة المستقيمة التي يقع طرفاها على الدائرة تسمّى **وترًا**.
- الوتر المار بمركز الدائرة يسمّى **قطرًا**، وينتكون من نصفَي قطرين يقعان على استقامةٍ واحدةٍ.

تكون العلاقات الآتية صحيحة في الدائرة التي نصف قطرها r وقطرها d:

$d = 2r$ ، $r = \frac{1}{2}d$ أو $r = \frac{d}{2}$



وتر: $\overline{BD}, \overline{AE}$

نصف قطر: $\overline{FD}, \overline{FC}, \overline{FB}$

قطر: $\overline{BD}$

مثال

a) سمِّ الدائرة في الشكل المجاور.



اسم هذه الدائرة $\odot O$

b) عيّن أنصاف أقطار الدائرة.

أنصاف أقطار في هذه الدائرة: $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{DO}$

c) عيّن أوتار الدائرة.



وتران في هذه الدائرة: $\overline{AB}, \overline{CD}$

تمارين

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 1 – 7.

1) سمِّ الدائرة.

$\odot R$

2) عيّن أنصاف أقطار الدائرة.

$\overline{RA}, \overline{RB}, \overline{RY}, \overline{RX}$

3) عيّن أوتار الدائرة.

$\overline{BY}, \overline{AX}, \overline{AB}, \overline{XY}$

4) عيّن أقطار الدائرة.

$\overline{XY}$ و $\overline{AB}$

5) إذا كان $AR = 18$ mm، فأوجد AB.

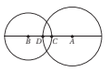
9 mm

6) إذا كان $RY = 10$ in، فأوجد AR و AB.

$AR = 10$ in; $AB = 20$ in

7) هل $\overline{AB} \cong \overline{XY}$؟ فسّر إجابتك. **نعم؛ أقطار الدائرة الواحدة متطابقة كلها.**

8) قطر A $\odot$ يساوي 40 وحدةً، وقطر B $\odot$ يساوي 32 وحدةً، و AC يساوي 14 وحدةً. أوجد قياس كلٍّ من CD و BD.



$CD = 6, BD = 10$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) — دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الدائرة ومحيطها

محيط الدائرة:

محيط الدائرة هو طول المنحنى المغلق الذي يمثل الدائرة ويرمز له بالرمز C.

محيط الدائرة	إذا كان محيط الدائرة يساوي C، وقطرها يساوي d، أو نصف قطرها يساوي r، فإنه يمكننا التعبير عن المحيط بالعلاقتين الآتيتين: $C = 2\pi r$ ، $C = \pi d$، حيث π عدد غير نسبي ويساوي 3.14 أو $\frac{22}{7}$ تقريبًا، ويكون المضلع محاطًا بالدائرة إذا وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة، وتسمى هذه الدائرة **الدائرة الخارجية**.

مثال

أوجد محيط الدائرة المجاورة، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مائةٍ.



$C = 2\pi r$	صيغة محيط الدائرة
$= 2\pi(13)$	$r = 13$
$= 26\pi$	بالتبسيط
≈ 81.68	مستعملًا الآلة الحاسبة

محيط هذه الدائرة يساوي 26π cm أو 81.68 cm تقريبًا.

تمارين

أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا كان محيطُها كما هو مبيّن في الأسئلة 1–6، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مائةٍ.

1) $C = 40$ in — **12.73 in, 6.37 in**

2) $C = 256$ ft — **81.49 ft, 40.74 ft**

3) $C = 15.62$ m — **4.97 m, 2.49 m**

4) $C = 9$ cm — **2.86 cm, 1.43 cm**

5) $C = 29.5$ yd — **25.31 yd, 12.65 yd**

6) $C = 204.16$ m — **64.99 m, 32.49 m**

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة في كلٍّ من مما يأتي:

7) 10π cm

8) $5\pi\sqrt{2}$ in



9) $\pi\sqrt{58}$ mm

10) 11π m



11) 13π cm

12) 2π cm

تدريبات المهارات (8) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-1 تدريبات المهارات

الدائرة ومحيطها

استعمل $\odot P$ في الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 1 – 7.



1) سمِّ مركز الدائرة. P

2) عيّن نصف قطر في الدائرة. $\overline{PA}$ و $\overline{PB}$ و $\overline{PC}$

3) عيّن وترًا في الدائرة. $\overline{AB}$ أو $\overline{DE}$

4) عيّن قطرًا في الدائرة. $\overline{AB}$

5) عيّن نصف قطر في الدائرة، لا يكون جزءًا من قطرٍ مرسومٍ فيها. $\overline{PC}$

6) إذا كان قطر الدائرة يساوي 16 سم، فأوجد نصف قطرها.

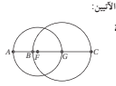
8 cm

7) إذا كان $PC = 11$ in ، فأوجد AB. **22 in**

إذا كان قطرا $\odot F$ و $\odot G$ هما 5 و6 وحداتٍ على الترتيب، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

8) BF **0.5 وحدة**

9) AB **2 وحدة**



أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها المُعطَى محيطُها فيما يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مائةٍ:

10) $C = 36$ cm — $d = 11.46$ cm; $r = 5.73$ cm

11) $C = 17.2$ ft — $d = 5.47$ ft; $r = 3.74$ ft

12) $C = 81.3$ cm — $d = 25.88$ cm; $r = 12.94$ cm

13) $C = 5$ yd — $d = 1.59$ yd; $r = 0.80$ yd

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كلِّ دائرةٍ من الدائرتين الآتيتين:

14)



$3\pi\sqrt{2}$ cm

15)



17π ft

تدريبات حل المسألة (9) — دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-1 تدريبات حل المسألة

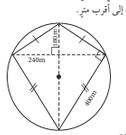
الدائرة ومحيطها

1) عجلات: يقوم سالم بتصميم إطارات سيارة، إذا كان قطر الإطار يساوي 18 in، وأراد أن يضع دعامات تمتد من مركز الإطار إلى حافته، فما طول كلٍّ من هذه الدعامات؟

9 in



2) حدائق: حديقة دائرية الشكل، صمّمت فيها الطرقات الرئيسة الموضحة في الشكل أدناه، أوجد محيط الحديقة مقربًا إجابتك إلى أقرب مترٍ.



1758 m

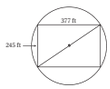
3) نقود: وضعت ثلاث قطع نقود من فئة نصف الريال في صفٍّ واحدٍ كما في الشكل أدناه.



إذا كانت المسافة بين مركزَي القطعتين (الأولى والثالثة) تساوي 5.6 cm، فما نصف قطر قطعة النقود من فئة النصف ريال؟

1.4 cm

4) ساحة عامة: أُحيطت ساحة عامة مستطيلة الشكل بسياجٍ دائريٍّ على أن يصل كلّ من قُطْرَي المستطيل بين نقطتين، على السياج مرورًا بمركز الدائرة كما في الشكل أدناه، ما طول قطر السياج؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرة من القدم.



449.6 ft

5) أطواق التمرين: يريد حسّان أن يصنع طوقًا دائريًّا يدوّره حول جسمه للتمرينات الرياضية، ومن أجل ذلك استعمل أنبوبًا طوله 2.5 m.



a) ما طول قطر الطوق الذي صنعه حسّان؟ قرّب إجابتك إلى أقرب سنتمترٍ.

80 cm

b) ما طول نصف قطر الطوق الذي صنعه حسّان؟ قرّب إجابتك إلى أقرب سنتمترٍ.

40 cm

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر الدرس 1 - 8

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-1 التدريبات الإثرائية

القطاع الدائري:

يمكنك إيجاد مساحة الدائرة مستعملًا القانون $A = \pi r^2$، والقطاع الدائري جزءٌ من الدائرة، ويتحصر بين نصفَي قطرين وقوس من الدائرة.

والزاوية المركزيّة للقطاع الدائري زاويةٌ يقع رأسها عند مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة.

وتتناسب مساحة القطاع الدائري ذي الزاوية المركزيّة θ مع الجزء الذي تمثله θ من $360°$ أي أن:

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\theta}{360°}$$ ، أو مساحة القطاع $= \frac{\theta}{360°}\pi r^2$



مثال أوجد مساحة القطاع الدائري في الشكل المجاور.



$$A = \frac{\theta}{360°}\pi r^2$$
$$= \frac{90°}{360°}\pi(2)^2 \quad r = 2 \quad \theta = 90°$$
$$= \frac{1}{4}(4\pi) = \pi$$

إذن مساحة القطاع الدائري تساوي $\pi\ \text{in}^2$ أو $3.14\ \text{in}^2$ تقريبًا.

تمارين:

1) أوجد مساحة القطاع الدائري، إذا كان قياس زاويته المركزيّة $72°$، ونصف قطر الدائرة فيه $10\ \text{cm}$

$20\pi\ \text{cm}^2$

2) أوجد مساحة القطاع الدائري، إذا كان قياس زاويته المركزيّة $60°$، ونصف قطر الدائرة فيه $5\ \text{in}$

$\frac{25}{6}\pi\ \text{in}^2$

3) إذا كانت مساحة قطاع دائري $15\pi\ \text{cm}^2$، ونصف قطر الدائرة يساوي $5\ \text{cm}$، فأوجد قياس الزاوية المركزيّة للقطاع.

$216°$

4) إذا كانت مساحة قطاع دائريٍّ تساوي $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة، فأوجد قياس زاويته المركزية.

$120°$

كتاب التمارين (22)　دون ضمن فوق

الفصل الثامن: الدائرة

8 - 1 الدائرة ومحيطها

استعمل الدائرة في الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 1–7:



1) اسمّ الدائرة. $\odot L$

2) عيّن نصف قطر. $\overline{LR}$ أو $\overline{LT}$ أو $\overline{LW}$

3) عيّن وترًا. $\overline{RT}$ أو $\overline{RS}$ أو $\overline{ST}$

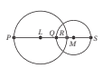
4) عيّن قطرًا. $\overline{RT}$

5) اسمّ نصف قطر لا يكون جزءًا من قطر. $\overline{LW}$

6) إذا كان نصف قطر الدائرة يساوي $3.5\ \text{m}$، فما قطرها؟ $7\ \text{m}$

7) إذا كان $RT = 19\ \text{m}$، فأوجد LW. $9.5\ \text{m}$

إذا كان $QR = 4\ \text{cm}$، وقطر $\odot L$ يساوي $20\ \text{cm}$، وقطر $\odot M$ يساوي $13\ \text{cm}$، فأوجد القياس المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:



8) LQ $6\ \text{cm}$

9) RM $2.5\ \text{cm}$

10) الساعة الشمسية (المزولة)، اشترى عمر ساعة شمسية؛ ليضعها وسط حديقته. إذا كان قطر هذه الساعة يساوي $9.5\ \text{in}$، فأوجد:

a) نصف قطر الساعة. $4.75\ \text{in}$

b) محيط الساعة مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ. $29.85\ \text{in}$

أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها، إذا عُلِم محيطها في كلٍّ من السؤالين الآتيين، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ:

11) $C = 21.2\ \text{ft}$ $6.75\ \text{ft};\ 3.37\ \text{ft}$

12) $C = 5.9\ \text{m}$ $1.88\ \text{m};\ 0.94\ \text{m}$

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كلٍّ من الدائرتين الآتيتين:

13) $25\pi\ \text{cm}$



14) $58\pi\ \text{mi}$



1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-2

قياس الزوايا وتعيين الزوايا المتطابقة .

الدرس 8-2

تعيين الزوايا المركزية والأقواس الكبرى والأقواس الصغرى ونصف الدائرة وإيجاد قياسها.

ما بعد الدرس 8-2

تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار في الدائرة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما النقطة التي تبعدُ مسافات متساوية عن الأعداد من 12 – 1؟ مركز الساعة.
- افترض أن محيط الساعة (الخط الأزرق المنحني المثبت عليه الأرقام من 1 – 12) يساوي 44 in، فكم تبعُد تقريبًا كل نقطة على هذا الخط عن المركز؟ 7 in تقريبًا.
- ضع تخمينًا حول سبب بقاء الزاوية المحصورة بين عقربي الساعات والدقائق واللذان يُشيران لوقتٍ ما. في الساعة ثابتة، بغض النظر عن كِبَر أو صِغَر الدائرة. لأن الانفراج بين عقربي الساعة عندما يُشيران إلى الوقت نفسه، لا يتغير بتكبير محيط الساعة أو تصغيره، فمثلًا عندما يُشير عقربا الساعة إلى تمام الثالثة، فإنه تتكون زاوية قائمة في جميع الساعات مهما اختلفت قياسات دوائر الساعات.

مصادر الدرس 8-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (192)	• تنويع التعليم ص (188, 189, 192)	• تنويع التعليم ص (188, 189, 192)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (23)	• كتاب التمارين ص (23)	• كتاب التمارين ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

8-2 قياس الزوايا والأقواس
Measuring Angles and Arcs

فيما سبق:
درستُ إيجاد قياسات الزوايا وتحديد الزوايا المتطابقة.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أعيّن الزوايا المركزية، والأقواس الكبرى، والأقواس الصغرى، ونصف الدائرة وأجد قياسها.
- أجد طول القوس.

المفردات:
الزاوية المركزية
central angle
القوس
arc
القوس الأصغر
minor arc
القوس الأكبر
major arc
نصف دائرة
semicircle
الأقواس المتطابقة
congruent arcs
الأقواس المتجاورة
adjacent arcs
طول القوس
arc length

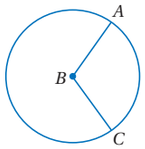
www.obeikaneducation.com

لماذا؟



معظم الساعات في الأجهزة الإلكترونية عبارة عن ساعات رقمية، وهي الساعات التي تُظهر الوقت على شكل أرقام. وتُستعمل الساعات العادية في تزيين المنازل، أو استعمالها ساعات يدوية. وهذه الساعات لها عقارب أو مؤشرات متحركة تشير إلى الساعة والدقيقة، وأحيانًا هناك مؤشر أو عقرب للثواني.
ووجه هذه الساعة عبارة عن دائرة، وتكوّن العقارب الثلاث زوايا مركزية فيها.

الزوايا والأقواس **الزاوية المركزية** في الدائرة هي زاوية يقع رأسها في المركز، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة. في الشكل المجاور $\angle ABC$ هي زاوية مركزية في $\odot B$.

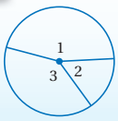


تذكّر أن مجموع قياسات الزوايا المتجمّعة حول نقطة يساوي $360°$؛ لذا فإن الدرجة الواحدة تساوي $\frac{1}{360}$ من الدورة الكاملة حول نقطة، ويؤدي هذا إلى المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي مجموع قياسات الزوايا المركزية

أضف إلى مطويتك

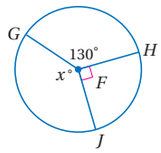
التعبير اللفظي: مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة، والتي لا تحوي نقاطًا داخلية مشتركة يساوي $360°$.



مثال: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$

مثال 1 إيجاد قياس الزاوية المركزية

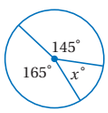
أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



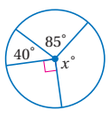
$m\angle GFH + m\angle HFJ + m\angle GFJ = 360°$	مجموع قياسات الزوايا المركزية
$130° + 90° + x = 360°$	بالتعويض
$220° + x = 360°$	بالتبسيط
$x = 140°$	بطرح $220°$ من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

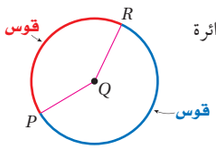
(1A) 50



(1B) 145



القوس هو جزءٌ من دائرة يُحدَّد بنقطتَي طرفَيه، وعند رسم زاوية مركزية، تنقسم الدائرة إلى قوسين، يرتبط قياس كلٍّ منهما بقياس الزاوية المركزية المقابلة له.



الزوايا والأقواس

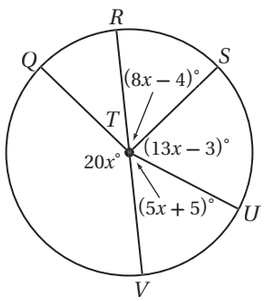
الأمثلة 1-4 تبيّن كيفية استعمال النظريات والمسلّمات؛ لإيجاد قياسات الأقواس والزوايا في الدائرة.

التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد قيمة x في الشكل أدناه. 7



المحتوى الرياضي

مصطلحات: إن قياس القوس وطول القوس مصطلحان مختلفان لا يُستعمَل أحدهما بدل الآخر، فقياس القوس يُعطى بالدرجات كما تُقاس الزوايا. ويُرمز لقياس القوس بالرمز $m\overset{\frown}{AC}$، في حين أن طول القوس هو المسافة على طول المنحنى، كما هو الحال في طول القطعة المستقيمة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم دائرة على السبورة، وعيّن فيها قطرًا وعدة أنصاف أقطار وضع قياسات زوايا معلومةٍ. اختر طالبًا ليوضح كيفية إيجاد قياس أحد الأقواس الصغرى، ثم اختر طالبًا آخر ليجد قياسات الأقواس الصغرى المتبقية.

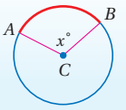
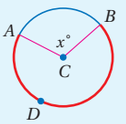
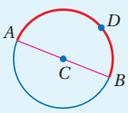
إرشادات للدراسة

تسمية الأقواس: يُسمّى القوس الأصغر بنقطتَي طرفيه، أما القوس الأكبر ونصف الدائرة فيسميان بنقطتَي الطرفين بالإضافة إلى نقطة على القوس بينهما.

مفاهيم أساسية

الأقواس وقياسها

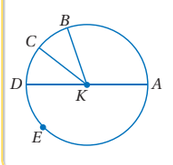
أضف إلى مطويتك

القوس	قياسه
القوس الأصغر هو القوس الأقصر الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يقل قياس القوس الأصغر عن 180°، ويساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له. $m\overset{\frown}{AB} = m\angle ACB = x^\circ$ 
القوس الأكبر هو القوس الأطول الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يزيد قياس القوس الأكبر على 180°، ويساوي 360° مطروحًا منه قياس القوس الأصغر الذي يصل بين النقطتين نفسيهما. $m\overset{\frown}{ADB} = 360^\circ - m\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - x^\circ$ 
نصف الدائرة هي قوس تقع نقطتا طرفيه على قطر الدائرة.	قياس نصف الدائرة يساوي 180° $m\overset{\frown}{ADB} = 180^\circ$ 

قراءة الرياضيات

الرمز

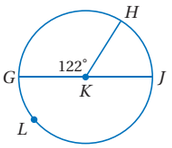
يقرأ الرمز $\overset{\frown}{\ }$ القوس. في الدائر أدناه $\overset{\frown}{AB}$ يقرأ القوس AB، أما $\overset{\frown}{AEC}$ فيقرأ القوس AEC، وكذلك $\overset{\frown}{AED}$ فيقرأ القوس AED.



مثال 2

تصنيف الأقواس وإيجاد قياساتها

$\overline{GJ}$ قطر في $\odot K$، حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرةٍ، ثم أوجد قياسه.



a $\overset{\frown}{GH}$

$\overset{\frown}{GH}$ قوس أصغر، وقياسه: $m\overset{\frown}{GH} = m\angle GKH = 122^\circ$.

b $\overset{\frown}{GLH}$

$\overset{\frown}{GLH}$ هو القوس الأكبر الذي يشترك مع القوس الأصغر $\overset{\frown}{GH}$ في نقطتَي طرفيه.

$m\overset{\frown}{GLH} = 360^\circ - m\overset{\frown}{GH}$

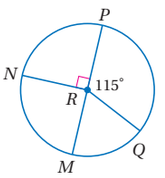
$= 360^\circ - 122^\circ = 238^\circ$

c $\overset{\frown}{GLJ}$

$\overset{\frown}{GLJ}$ هو نصف دائرة، إذن: $m\overset{\frown}{GLJ} = 180^\circ$.

تحقق من فهمك

$\overline{PM}$ قطر في $\odot R$، حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



2A $\overset{\frown}{MQ}$ قوس أصغر، 65°

2B $\overset{\frown}{MNP}$ نصف دائرة، 180°

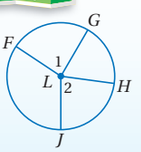
2C $\overset{\frown}{MNQ}$ قوس أكبر، 295°

الأقواس المتطابقة هي الأقواس التي تقع في الدائرة نفسها، أو في دائرتين متطابقتين، ويكون لها القياس نفسه.

نظرية 8.1

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان متطابقين، إذا وفقط إذا كانت الزاويتان المركزيّتان المقابلتان لهما متطابقتين.



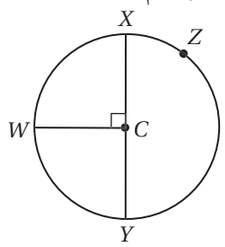
مثال: إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\overset{\frown}{FG} \cong \overset{\frown}{HJ}$.

إذا كان $\overset{\frown}{FG} \cong \overset{\frown}{HJ}$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.

ستبرهن النظرية 8.1 في السؤال 44

أمثلة إضافية

2 $\overline{WC}$ نصف قطر في $\odot C$ الموضحة في الشكل أدناه، حدد ما إذا كان القوس المعطى في كلٍّ مما يأتي قوسًا أكبر أو قوسًا أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه .



a) $\overset{\frown}{XZY}$

نصف دائرة؛ $m\overset{\frown}{XZY} = 180°$

b) $\overset{\frown}{WZX}$

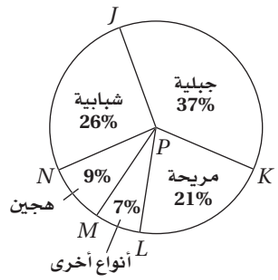
قوس أكبر؛ $m\overset{\frown}{WZX} = 270°$

c) $\overset{\frown}{XW}$

قوس أصغر؛ $m\overset{\frown}{XW} = 90°$

3 **دراجات هوائية:** استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية أدناه؛ لإيجاد كلٍّ ممَّا يأتي:

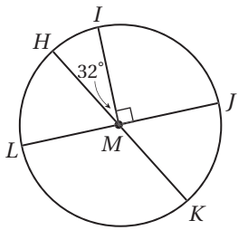
أنواع الدرَّاجات الهوائية



a) $m\overset{\frown}{KL}$. $75.6°$

b) $m\overset{\frown}{NJL}$. $302.4°$

4 أوجد كلًّا من القياسات الآتية في $\odot M$ الموضحة أدناه:



a) $m\overset{\frown}{LHI}$ $90°$

b) $m\overset{\frown}{IJK}$ $148°$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلِّمون المتفاعلون: ارسم دائرةً وقسِّمها إلى زوايا مركزية مختلفة القياس، ثم ظلل كل جزءٍ من أجزاء الدائرة بلونٍ مختلفٍ، كرر هذه العملية مع دائرتين لهما نفس طول القطر، ولكن باستعمال زوايا مركزية مختلفة. اقطع أجزاء الدوائر الثلاثة جميعها واخلطها. أعط هذه الأجزاء لمجموعات من الطلاب؛ لإعادة ترتيبها في ثلاث دوائر، ثم اطلب إليهم إيجاد قياسات الزوايا المركزية لهذه القطاعات وقياس الأقواس ومحيط هذه الدوائر وأطوال الأقواس. يمكن أن تقارن المجموعات أعمالها؛ للتحقق من النتائج، و/أو لتحديد المجموعة الأكثر دقةً في إيجاد القياسات جميعها.



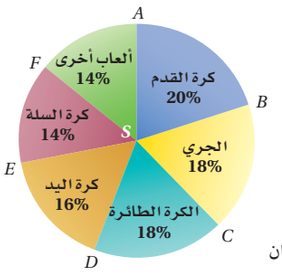
الربط مع الحياة

عُرفت لعبة كرة الطائرة لأول مرة في الولايات المتحدة الأمريكية، ثم انتقلت إلى كندا عام 1900 م، لتصبح بعد ذلك من أكثر الرياضات شعبية في العالم.

مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد قياس القوس من القطاعات الدائرية

رياضة: استعمل التمثيل بالقطاعات الدائرية المجاور، لإيجاد كلٍّ من القياسات الآتية:

النشاطات الرياضية المدرسية



a) $m\overset{\frown}{CD}$

$\overset{\frown}{CD}$ هو قوس أصغر.

إذن $m\overset{\frown}{CD} = m\angle CSD$

$\angle CSD$ تُمثّل 18% من الكل أو 18% من الدائرة.

$m\angle CSD = 0.18(360°)$ إيجاد 18% من $360°$

$= 64.8°$ بالتبسيط

b) $m\overset{\frown}{BC}$

النسبتان المئويتان للكرة الطائرة والجري متساويتان؛ إذن الزاويتان المركزيتان متطابقتان. والقوسان المقابلان لهما متطابقان.

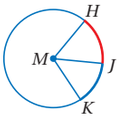
$m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{CD} = 64.8°$

تحقق من فهمك

3A) $m\overset{\frown}{EF}$ $50.4°$

3B) $m\overset{\frown}{FA}$ $50.4°$

الأقواس المتجاورة هي أقواس في الدائرة تشترك مع بعضها في نقطة واحدة فقط. $\overset{\frown}{JK}$, $\overset{\frown}{HJ}$ قوسان متجاوران في $\odot M$ ، وكما هي الحال في الزوايا المتجاورة، يمكنك جمع قياس الأقواس المتجاورة.

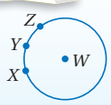


مسلّمة 8.1 — مسلّمة جمع الأقواس

أضف إلى مطويتك

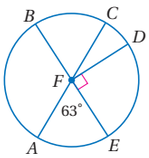
التعبير اللفظي: قياس القوس المتكوّن من قوسين متجاورين يساوي مجموع قياسَي هذين القوسين.

مثال: $m\overset{\frown}{XZ} = m\overset{\frown}{XY} + m\overset{\frown}{YZ}$



مثال 4 — إيجاد قياس القوس باستعمال مسلمة جمع الأقواس

أوجد كلًّا من القياسات الآتية في $\odot F$:



a) $m\overset{\frown}{AD}$

$m\overset{\frown}{AD} = m\overset{\frown}{AE} + m\overset{\frown}{ED}$ مسلّمة جمع الأقواس

$= m\angle AFE + m\angle EFD$ $m\overset{\frown}{AE} = m\angle AFE, m\overset{\frown}{ED} = m\angle EFD$

$= 63° + 90° = 153°$ بالتعويض

b) $m\overset{\frown}{ADB}$

$m\overset{\frown}{ADB} = m\overset{\frown}{AE} + m\overset{\frown}{EDB}$ مسلّمة جمع الأقواس

$= 63° + 180° = 243°$ $\overset{\frown}{EDB}$ نصف دائرة؛ إذن: $m\overset{\frown}{EDB} = 180°$

تحقق من فهمك

4A) $m\overset{\frown}{CE}$ $117°$

4B) $m\overset{\frown}{ABD}$ $207°$

تنبيه!

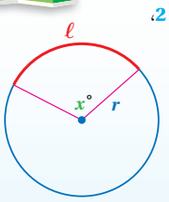
طول القوس: يُعطى طول القوس بوحدات الطول مثل السنتمترات، أما قياس القوس فيعطى بالدرجات.

طول القوس: **طول القوس** هو المسافة على الدائرة بين نقطتَي طرفيه، ويُقاس بوحدات الطول، وبما أن القوس جزء من الدائرة، فإن طوله جزءٌ من محيطها.

مفهوم أساسي — طول القوس

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان طول القوس يساوي ℓ ومحيط الدائرة يساوي $2\pi r$، وقياس القوس بالدرجات يساوي x° فإن نسبة طول القوس إلى محيط الدائرة يساوي نسبة قياس القوس بالدرجات إلى 360°



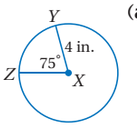
الرموز: $\frac{\ell}{2\pi r} = \frac{x^\circ}{360^\circ}$

أي أن: $\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

مثال 5 إيجاد طول القوس

أوجد طول $\overset{\frown}{ZY}$ في كلٍّ ممَّا يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ:

(a)

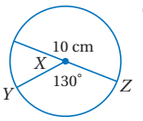


صيغة طول القوس: $\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

بالتعويض: $= \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(4)$

باستعمال الحاسبة: ≈ 5.24 in

(b)

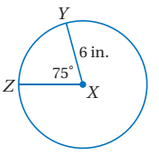


صيغة طول القوس: $\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

بالتعويض: $= \frac{130^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(5)$

باستعمال الحاسبة: ≈ 11.34 cm

(c)



صيغة طول القوس: $\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

بالتعويض: $= \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi(6)$

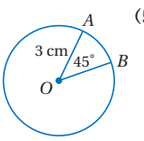
باستعمال الحاسبة: ≈ 7.85 in

لاحظ أن $\overset{\frown}{ZY}$ له القياس نفسه في المثالين 5c ,5a، ويساوي 75°، إلّا أن لهما طولين مختلفين؛ بسبب وجودهما في دائرتين نصفا قطريهما مختلفان.

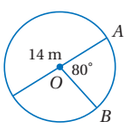
تحقق من فهمك

أوجد طول $\overset{\frown}{AB}$ في كلٍّ ممَّا يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ:

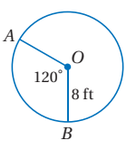
(5A) 2.36 cm



(5B) 9.77 m



(5C) 16.76 ft



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب إيجاد طول القوس الأصغر المتكون في دائرة ساعة قطرها 14 ft وَ 8 in، عندما تُشير عقارب الساعة إلى الخامسة، وقياس الزاوية المركزية التي يقابلها ذلك القوس.

طول القوس يساوي 230 in تقريبًا أو 19 ft و 2 in، وقياس الزاوية المركزية 150°

طول القوس

بما أن القوس جزء من الدائرة، فإن طوله جزء من محيط الدائرة.

المثال 5 يبيّن كيفية إيجاد طول القوس باستعمال صيغة طول القوس.

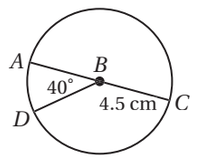
إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي بيّن للطلاب أنه يمكن أن يكون لقوسين القياس نفسه، مع اختلاف طولَيهما، وضح ذلك باستعمال صيغة طول القوس، وبيّن للطلاب أن طول القوس يعتمد على نصف قطر الدائرة.

مثال إضافي

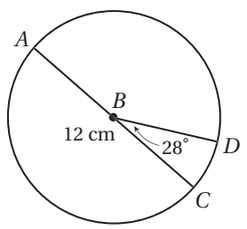
5 أوجد طول $\overset{\frown}{DA}$ في كلٍّ مما يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

(a)



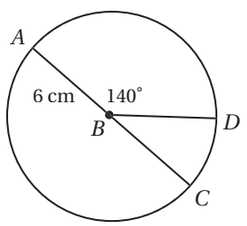
3.14 cm

(b)



15.92 cm

(c)



14.66 cm

3 التدريب

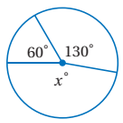
التقويم التكويني

استعمل التمارين 11–1؛ للتأكّد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

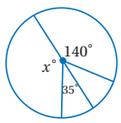
تأكد

المثال 1 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

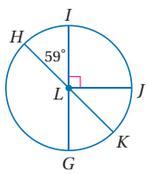
1) 170°



2) 150°



المثال 2 $\overline{HK}$, $\overline{IG}$ قطران في $\odot L$، حدّد ما إذا كان كلّ قوس فيما يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



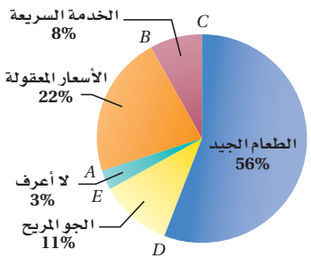
3) $\widehat{IHJ}$ قوس أكبر؛ 270°

4) $\widehat{HI}$ قوس أصغر؛ 59°

5) $\widehat{HGK}$ نصف دائرة؛ 180°

المثال 3 6) **مطاعم:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول ما يطلبه روّاد المطاعم.

ما يطلبه روّاد المطاعم

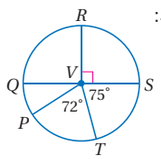


a) أوجد $m\widehat{AB}$. 79.2°

b) أوجد $m\widehat{BC}$. 28.8°

c) صف نوع قوس قطاع الطعام الجيد. قوس أكبر

المثال 4 $\overline{QS}$ قطر في $\odot V$، أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



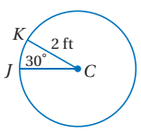
7) $m\widehat{STP}$ 147°

8) $m\widehat{QRT}$ 255°

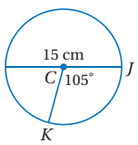
9) $m\widehat{PQR}$ 123°

المثال 5 أوجد طول $\widehat{JK}$ مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

10) 1.05 ft



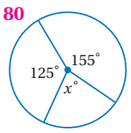
11) 13.74 cm



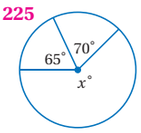
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

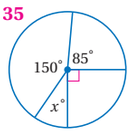
12) 80



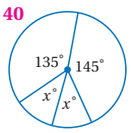
13) 225



14) 35



15) 40

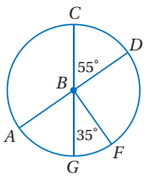


تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	34–12 ، 50–47 ، 63–53
ضمن ضمن المتوسط	35–13 فردي ، 43–37 فردي ، 51–44 ، 63–53
فوق فوق المتوسط	60–35 ، (اختياري: 63–61)

المثال 2

$\overline{AD}$, $\overline{CG}$ قطران في $\odot B$، حدّد ما إذا كان كلّ قوسٍ ممَّا يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



16) $\overset{\frown}{CD}$ قوس أصغر، $55°$

17) $\overset{\frown}{AC}$ قوس أصغر، $125°$

18) $\overset{\frown}{CG}$ نصف دائرة، $180°$

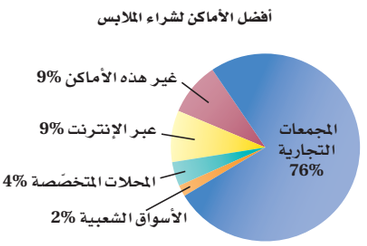
19) $\overset{\frown}{CGD}$ قوس أكبر، $305°$

20) $\overset{\frown}{GCF}$ قوس أكبر، $325°$

21) $\overset{\frown}{ACF}$ قوس أكبر، $270°$

المثال 3

22) تسوّق: يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاعٍ حول المكان المفضل لشراء الملابس، شمل مجموعة من الشباب.



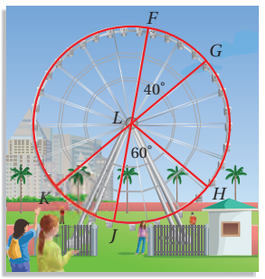
a) ما قياس القوس المقابل لفئة التسوق في كلٍّ من المجمعات التجارية والمحلات المتخصصة؟
$273.6°, 14.4°$

b) صِفْ نوع القوس المقابل لفئة المجمعات التجارية وفئة الأسواق الشعبية.
قوس أكبر، قوس أصغر

c) هل توجد أقواس متطابقة في هذا الشكل؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

المثالان 2, 4

تسلية: استعمل العجلة الدوارة في الشكل المجاور، لإيجاد كلٍّ من القياسات الآتية:



23) $m\overset{\frown}{FG}$ $40°$

24) $m\overset{\frown}{JH}$ $60°$

25) $m\overset{\frown}{JKF}$ $180°$

26) $m\overset{\frown}{JFH}$ $300°$

27) $m\overset{\frown}{GHF}$ $320°$

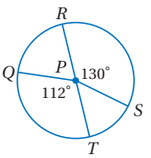
28) $m\overset{\frown}{GHK}$ $180°$

29) $m\overset{\frown}{HK}$ $100°$

30) $m\overset{\frown}{JKG}$ $220°$

المثال 5

$\overline{RT}$ قطر في $\odot P$، أوجد طول كل قوس ممّا يأتي مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



31) $\overset{\frown}{RS}$، إذا كان نصف القطر يساوي 2 in. 4.54 in

32) $\overset{\frown}{QT}$، إذا كان القطر يساوي 9 cm. 8.80 cm

33) $\overset{\frown}{QR}$، إذا كان $PS = 4$ mm. 4.75 mm

34) $\overset{\frown}{QRS}$، إذا كان $RT = 11$ ft. 19.01 ft



الربط مع الحياة

تُعد ساعة مكة المكرمة أكبر ساعة في العالم، إذ يزيد قُطر واجهتها عن 40 m، ويبلغ طول عقرب الدقائق 22 m، وطول عقرب الساعات 17 m، وتبلغ كتلة كلٍّ منهما 6 أطنان تقريبًا.



ساعات: يعرض الشكل المجاور الساعة التي وردت في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس.

35) ما قياس الزاوية المركزية الصغرى المحصورة بين عقربَي الساعات والدقائق؟ فسّر الطريقة التي توصَّلت بها إلى إجابتك. انظر الهامش

36) إذا تضاعف قطر الدائرة، فما تأثير ذلك في طول القوس الأصغر بين الرقم 1 ، والرقم 12؟ يتضاعف طول القوس.

إجابات:

22c) نعم؛ القوسان المقابلان للفئتين "عبر الإنترنت" "وغير هذه الأماكن" لهما القياس نفسه؛ لأن كلًّا من هاتين الفئتين لها النسبة المئوية 9% نفسها من الدائرة.

35) قياس الزاوية بين كل رقمين متتاليين يساوي $360° \div 12 = 30°$ ؛ لذا فإن قياس الزاوية المركزية الصغرى المحصورة بين عقربَي الساعة يساوي $60°$

تنبيه لحل سؤال

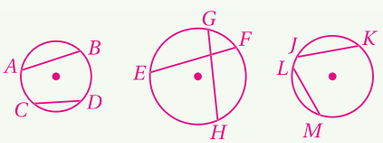
الفرجار والمسطرة والمقص:

يتطلب السؤالان 46 ,51 استعمال فرجار ومسطرة ومقصٍّ.

تمثيلات متعددة في السؤال 46، يستعمل الطلاب رسومات هندسية وقياسات الأطوال والوصف اللفظي؛ لاستقصاء العلاقة بين الأوتار والأقواس في الدائرة.

إجابات:

46a) إجابة ممكنة :



46c) إجابة ممكنة: عندما يكون الوتران في الدائرة متطابقين؛ فإن القوسين المحدودين بهذين الوترين يكونان متطابقين.

افترض أن G مركز الدائرة.

$GD = GC = GB = GA$ (أنصاف أقطار)

المثلثان: AGB , CGD متطابقان بثلاثة أضلاع.

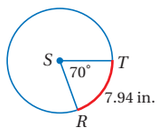
وينتج عنه أن: $m\angle AGB = m\angle CGD$

الزاويتان AGB , CGD زاويتان مركزيتان متطابقتان،

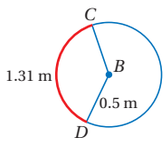
إذن الأقواس المقابلة لها متطابقة وبالتالي يكون: $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

أوجد قياس كلّ ممّا يأتي مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة وقياسات الأقواس إلى أقرب درجة.

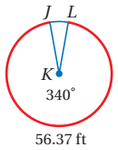
37) محيط $\odot S$ **40.83°**



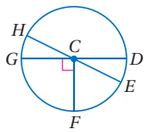
38) $m\overset{\frown}{CD}$ **150°**



39) نصف قطر $\odot K$ **9.50 ft**

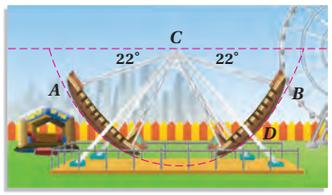


جبر: في $\odot C$، إذا كان $m\angle HCG = (2x)°, m\angle HCD = (6x + 28)°$، فأوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي:



40) $\overset{\frown}{EF}$ **52°** **41)** $\overset{\frown}{HD}$ **142°** **42)** $\overset{\frown}{HGF}$ **128°**

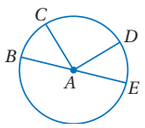
43) ألعاب: يأخذ مسار لعبة السفينة في مدينة ألعاب شكل نصف دائرة كما في الشكل المجاور.



a) أوجد $m\overset{\frown}{AB}$ **136°**

b) إذا كان $CD = 62$ ft، فما طول $\overset{\frown}{AB}$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. **147.17ft**

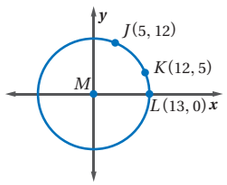
44) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية **8.1**. انظر ملحق الإجابات



المعطيات: $\angle BAC \cong \angle DAE$

المطلوب: $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{DE}$

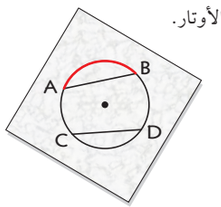
45) هندسة إحداثية: تُمثّل النقطة M نقطة الأصل في الشكل المجاور. أوجد كلًّا مما يأتي في $\odot M$، مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة، وقياسات الأقواس إلى أقرب عُشر درجة.



a) $m\overset{\frown}{JL}$ **67.4°** **b)** $m\overset{\frown}{KL}$ **22.6°** **c)** $m\overset{\frown}{JK}$ **44.8°**

d) طول $\overset{\frown}{JL}$ **15.29 وحدة** **e)** طول $\overset{\frown}{JK}$ **10.16 وحداتٍ**

46) تمثيلات متعدّدة: في هذا السؤال ستستقصي العلاقة بين الأقواس والأوتار.



a) هندسيًّا: ارسم دائرة فيها وتران متطابقان مثل $\overline{AB}$, $\overline{CD}$، حدّد مركز هذه الدائرة. كرّر العملية مع دائرتين أُخريين ووترين متطابقين في كلٍّ منهما، على أن تكون أطوال الأوتار في الدوائر الثلاث مختلفة.

b) حسيًّا: قُصّ ثلاث قطع من الورق الشفّاف أكبر من كلٍّ من الدوائر الثلاث، ثم ثبّت ورقة شفافة من منتصفها مستعملًا دبّوسًا عند مركز كل دائرة، ارسم القوس المقابل لأحد الوترين في كل دائرة على الورقة الشفافة، ثم قم بتدوير قطعة الورق الشفّاف حول الدبّوس؛ لمقارنة طول القوس الذي رسمته بطول القوس المقابل للوتر الآخر. انظر أعمال الطلاب

c) لفظيًّا: ضع تخمينًا حول العلاقة بين الأقواس التي تقابل أوتارًا متطابقةً في الدائرة. انظر الهامش

46a) انظر الهامش

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

توسع: إن استعمال التمثيل بالقطاعات الدائرية طريقة بسيطة وفعّالة لعرض البيانات، وبما أن الطلاب الموهوبين يشكّلون باحِثِي المستقبل في مجالات متعددة؛ إذن أعطِهم فرصةً لتطوير سؤال بحثِيٍّ يتعلق بمجالات اهتماماتهم والإجابة عنه، ثم اطلب إليهم عرضَ النتائج باستعمال القطاعات الدائرية، بحيث تكون قياسات الأقواس التي تمثل البيانات التي جمعوها دقيقةً وصحيحةً.

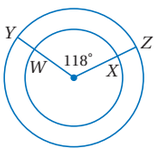
مسائل مهارات التفكير العليا

48) صحيحة دائمًا؛ لأن تعريف القوس الأصغر هو القوس الذي قياسه أقل من $180°$

49) غير صحيحة أبدًا؛ الزاوية المنفرجة تُحدّد قوسًا قياسه بين $90°$ و $180°$

50) غير صحيحة أبدًا؛ يعتمد مجموع قياسَي قوسين متجاورين على قياس كلٍّ منهما.

47) اكتشف الخطأ: يقول إبراهيم: إن $\overset{\frown}{WX}$, $\overset{\frown}{YZ}$ متطابقان؛ لأن زاويتَيهما المركزيتين متطابقتان، بينما يقول سالم: إنهما غير متطابقين. هل أيٌّ منهما على صواب؟ برِّر إجابتك.



سالم؛ بما أن الدائرتين غير متطابقتين؛ لأن نصفَي قطريهما مختلفان، فإن القوسين غير متطابقين.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة دائمًا أو أحياناً أو ليست صحيحة أبدًا. برّر إجابتك.

48) قياس القوس الأصغر أقل من $180°$.

49) إذا كانت الزاوية المركزية منفرجة، فإن القوس المقابل لها قوس أكبر.

50) يعتمد مجموع قياسَي قوسين متجاورين في دائرةٍ، على قياس نصف قطر تلك الدائرة.

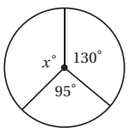
51) مسألة مفتوحة: ارسم دائرةً وعيّن عليها ثلاث نقاط، قدّر قياس الأقواس الثلاثة الناتجة وغير المتداخلة، ثم استعمل المنقلة لإيجاد قياس كلٍّ منها، واكتب على كل قوس قياسه. انظر الهامش

52) تحدٍّ: تشير عقارب ساعة إلى 8:10، ما قياس الزاوية المقابلة للقوس الأصغر بين عقربَي الساعة؟ $175°$

53) اكتب: صِفِ الأنواع الثلاثة للأقواس في الدائرة، وطريقة إيجاد قياس كلٍّ منها. انظر الهامش

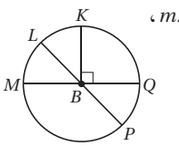
تدريب على اختبار

54) أوجد قيمة x؟ **B**



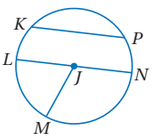
A 120 **B** 135 **C** 145 **D** 160

55) في $\odot B$ ، إذا كان: $m\angle LBM = (3x)°$ ، $m\angle LBQ = (4x + 61)°$ ، فما قياس $\angle PBQ$؟ $51°$



مراجعة تراكمية

عُد إلى $\odot J$ في الشكل المجاور للإجابة عن كلٍّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 1-8)



56) سمِّ مركز الدائرة. J

57) عيّن وترًا يكون قطرًا أيضًا. $\overline{LN}$

58) إذا كان $LN = 12.4$ ، فأوجد JM؟ **6.2**

مثّل بيانيًّا المضلع المعطاه إحداثيات رؤوسه، ثم مثّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله k المُعطى في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 6-7) **59, 60** انظر الهامش

59) $X(-1, 2)$, $Y(2, 1)$, $Z(-1, -2)$ ؛ $k = 3$

60) $A(-4, 4)$, $B(4, 4)$, $C(4, -4)$, $D(-4, -4)$ ؛ $k = 0.25$

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

61) $24^2 + x^2 = 26^2$ **10, −10**

62) $x^2 + 5^2 = 13^2$ **12, −12**

63) $30^2 + 35^2 = x^2$ **46.1, −46.1**

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 47، يجب أن يدرك الطلاب أن الزاوية المركزية المشتركة بين الدائرتين المتَّحدتين في المركز، يكون لها قياس القوس نفسه، ولكن عندما تكبر الدائرة تزداد المسافة بين نقطتَي تقاطع ضلعَي الزاوية مع الدائرة، لذلك يزداد طول القوس طرديًّا مع قطر الدائرة، وعليه فإن إجابة سالم صحيحة.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب رسم دائرة، فيها زاوية مركزية معلومة، ثم اطلب إليهم تحديد طول نصف قطر الدائرة، ووضع قياس الزاوية المركزية بالدرجات على الشكل، ثم اطلب إليهم إيجاد طول أحد القوسين الأكبر أو الأصغر، وأن يسلّموا أعمالهم قبل مغادرة غرفة الفصل.

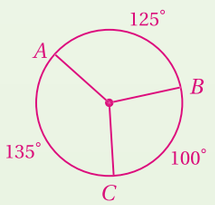
التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 1–8, 2–8، بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (68)

إجابات:

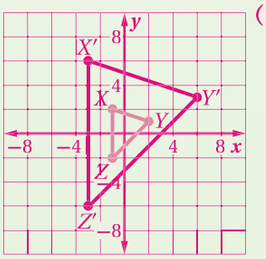
51) إجابة ممكنة :



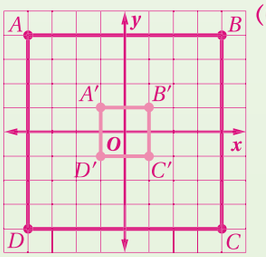
للتقدير: انظر إجابات الطلاب

53) إجابة ممكنة : الأنواع الثلاثة هي: القوس الأصغر، القوس الأكبر، نصف الدائرة، وقياس القوس الأصغر يساوي قياس الزاوية المركزية المناظرة له، وقياس القوس الأكبر يساوي $360°$ مطروحًا منه قياس القوس الأصغر الذي له الطرفان نفساهما، وقياس نصف الدائرة يساوي $180°$

59)



60)





مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-2 تدريبات إعادة التعليم
قياس الزوايا والأقواس

الزوايا والأقواس،

الزاوية المركزية زاوية يقع رأسها عند مركز الدائرة، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة، والزاوية المركزية تقسم الدائرة إلى قوسين؛ **قوس أكبر** وقوس أصغر.

وهذه بعض خصائص الزوايا المركزية والأقواس:

- مجموع قياسات الزوايا المركزية غير المتداخلة في الدائرة يُساوي $360°$
- قياس القوس الأصغر أقل من $180°$ ويساوي قياس زاويته المركزية.
- قياس القوس الأكبر يساوي $360°$ مطروحًا منها قياس القوس الأصغر الذي له نفس الطرفين.
- قياس نصف الدائرة يساوي $180°$
- **القوسان المتطابقان** هما قوسان إذا وفقط إذا وقعا في الدائرة نفسها، أو في دائرتين متطابقتين، وكانت الزاويتان المركزيتان المناظرتان لهما متطابقتين.
- قياس القوس المكوّن من قوسين متجاورين، يساوي مجموع قياسَي هذين القوسين، وتسمّى هذه الخاصية (مسلّمة جمع الأقواس).



$\overset{\frown}{GF}$ قوس أصغر.
$\overset{\frown}{CHG}$ قوس أكبر.
$\angle GEF$ زاوية مركزية.

$m\angle HEC + m\angle CEF + m\angle FEG + m\angle GEH = 360°$.

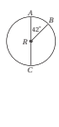
$m\overset{\frown}{CF} = m\angle CEF$.

$m\overset{\frown}{CGF} = 360° - m\overset{\frown}{CF}$

$\overset{\frown}{FG} \cong \overset{\frown}{CF}$ إذا وفقط إذا كانت $\angle FEG \cong \angle CEF$.

$m\overset{\frown}{CF} + m\overset{\frown}{FG} = m\overset{\frown}{CG}$

مثال إذا كان $\overline{AC}$ قطرًا في $\odot R$ الموضحة في الشكل المجاور، فأوجد $m\overset{\frown}{AB}$ و $m\overset{\frown}{ACB}$.



$\angle ARB$ زاوية مركزية و $m\angle ARB = 42°$، إذن $m\overset{\frown}{AB} = 42°$

لذا فإن: $m\overset{\frown}{ACB} = 360° - 42° = 318°$

تمارين

أوجد قيمة x في السؤالين الآتيين:

1) $80°$ 

2) $150°$ 

إذا كان $\overline{BD}$ و $\overline{AC}$ قطرين في $\odot O$، فحدّد إذا كان كلٌّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أم قوسًا أصغر أم نصف دائرة، ثم أوجد قياسه:



3) $\overset{\frown}{BA}$ قوس أصغر؛ $44°$
4) $\overset{\frown}{BC}$ قوس أصغر؛ $136°$
5) $\overset{\frown}{CD}$ قوس أصغر؛ $44°$
6) $\overset{\frown}{ACB}$ قوس أكبر؛ $316°$
7) $\overset{\frown}{BCD}$ نصف دائرة؛ $180°$
8) $\overset{\frown}{AD}$ قوس أصغر؛ $136°$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)
قياس الزوايا والأقواس

طول القوس،

القوس جزء من الدائرة، وطوله جزء من محيطها.

يمكنك إيجاد طول القوس ℓ مستعملًا المعادلة الآتية: $\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$.



مثال أوجد طول $\overset{\frown}{AB}$ الموضّح في الشكل المجاور، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



يمكنك إيجاد طول $\overset{\frown}{AB}$ مستعملًا المعادلة الآتية: $\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$

$\ell = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$	معادلة طول القوس
$= \frac{135°}{360°} \cdot 2\pi(8)$	بالتعويض
≈ 18.85	باستعمال الآلة الحاسبة

تمارين

استعمل $\odot O$ الموضحة في الشكل المجاور، لإيجاد طول كلّ قوس ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة:



1) $\overset{\frown}{DE}$، إذا كان نصف القطر يساوي 2 m. **4.19 m**
2) $\overset{\frown}{DEA}$، إذا كان القطر يساوي 7 in. **12.83 in**
3) $\overset{\frown}{CB}$، إذا كان $BE = 24$ ft. **9.42 ft**
4) $\overset{\frown}{CBA}$، إذا كان $DO = 3$ mm. **7.07 mm**

استعمل $\odot P$ الموضحة في الشكل المجاور؛ لإيجاد طول كلّ قوس ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة:



5) $\overset{\frown}{RT}$، إذا كان $MT = 7$ m. **3.05 m**
6) $\overset{\frown}{NR}$، إذا كان $MP = 13$ ft. **8.15 ft**
7) $\overset{\frown}{MST}$، إذا كان $MP = 2$ in. **6.28 in**
8) $\overset{\frown}{MRS}$، إذا كان $NS = 10$ cm. **20.07 cm**

تدريبات المهارات (13) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-2 تدريبات المهارات
قياس الزوايا والأقواس

$\overline{AC}$ و $\overline{EB}$ قطران في $\odot R$ الموضحة في الشكل المجاور، حدّد ما إذا كان كلّ قوسٍ ممّا يأتي قوسًا أكبر أم قوسًا أصغر أم نصف دائرة، ثم أوجد قياسه:



1) $\overset{\frown}{EA}$ قوس أصغر؛ $50°$
2) $\overset{\frown}{CB}$ قوس أصغر؛ $50°$
3) $\overset{\frown}{DC}$ قوس أصغر؛ $100°$
4) $\overset{\frown}{DEB}$ قوس أكبر؛ $210°$
5) $\overset{\frown}{AB}$ قوس أصغر؛ $130°$
6) $\overset{\frown}{CDA}$ نصف دائرة؛ $180°$

$\overline{PR}$ و $\overline{QT}$ قطران في $\odot A$ الموضحة في الشكل المجاور، أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:



7) $m\overset{\frown}{UPQ}$ $130°$
8) $m\overset{\frown}{PQR}$ $180°$
9) $m\overset{\frown}{UTS}$ $90°$
10) $m\overset{\frown}{RS}$ $50°$
11) $m\overset{\frown}{RSU}$ $140°$
12) $m\overset{\frown}{STP}$ $130°$
13) $m\overset{\frown}{PQS}$ $230°$
14) $m\overset{\frown}{PRU}$ $320°$

استعمل $\odot D$ الموضحة في الشكل المجاور؛ لإيجاد طول كلّ قوس ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة:



15) $\overset{\frown}{LM}$ إذا كان نصف القطر يساوي 5 in. **8.73 in**
16) $\overset{\frown}{MN}$ إذا كان القطر يساوي 3 m. **2.09 m**
17) $\overset{\frown}{KL}$ إذا كان $JD = 7$ cm. **7.33 cm**
18) $\overset{\frown}{NJK}$ إذا كان $NL = 12$ ft. **12.57 ft**
19) $\overset{\frown}{KLM}$ إذا كان $DM = 9$ mm. **25.13 mm**
20) $\overset{\frown}{JK}$ إذا كان $KD = 15$ in. **13.09 in**

تدريبات حل المسألة (14) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-2 تدريبات حل المسألة
قياس الزوايا والأقواس

1) **الأنشطة اليومية،** التمثيل بالقطاعات الدائرية أدناه، يبيّن نتائج استطلاع حول أنشطة ومهام الفرد اليومية، أوجد قياس القوس المقابل للعمل؟ وما هما النشاطان اللذان يقابلان قوسين متطابقين؟



144°، الطعام والتنقل

2) **ساعات،** يعتقد اليابانيُّون أن كلّ عضو من أعضاء الجسم المختلفة يكون أكثر نشاطًا في وقت معين خلال اليوم، ولتمثيل ذلك استعانوا بالساعة الصينية التي تعتمد على دائرة مقسمة إلى 12 قسمًا متساويًا برسم أنصاف أقطار فيها كما في الشكل أدناه، ما قياس كلّ من هذه الزوايا المركزية الاثنتي عشرة المتطابقة؟



30°

3) **هندسة،** قطّعت خديجة فطيرة تفاح دائرية الشكل إلى أربع قطع على طول 4 أنصاف أقطار، فكانت الزوايا المركزية للأقسام الأربعة هي:
$(3x)°$، $(5x)°$، $(6x - 10)°$، $(4x + 10)°$، فما قياس كلّ من الزوايا المركزية الأربع؟

60°, 100°, 110°, 90°

4) **شريط،** لفّت آمنة شريط تزيين طوله 60 in حول علبة هدية أسطوانية الشكل قطرها 15 in لفة واحدة، ثم تابعت آمنة لفّ الجزء المتبقي من الشريط بعدما وصلت إلى نقطة البداية كما في الشكل أدناه، ما قياس الزاوية المركزية التي تكونت بين طرفَي الشريط؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرةٍ من الدرجة؟ **98.4°**

5) **إطارات الدراجة الهوائية،** اشترى عمر إطارًا لدراجته الهوائية قطره يساوي 20 in.

a) إذا تدحرج الإطار على الأرض بحيث دار دورة كاملة، فما المسافة التي يقطعها الإطار؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئةٍ من البوصة. **62.83 in**

b) إذا تدحرج الإطار على الأرض بحيث دار 45°، فما المسافة التي يقطعها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من البوصة. **7.85 in**

c) إذا تدحرج الإطار على الأرض مسافة 10 in، فما قياس زاوية دورانه؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الدرجة. **57.30°**



مصادر الدرس 2 - 8

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-2 التدريبات الإثرائية

منحنيات ذات عرض ثابت

تُعدّ الدائرة من المنحنيات ذات العرض الثابت؛ لأنه كيفما وضعت الدائرة، تبقى أكبر مسافة عبرها ثابتة دائمًا، ولكن الدائرة ليست الشكل الوحيد الذي له هذه الخاصية.
تأمل الشكل المجاور، الذي يُسمّى **مثلث ريلوكس**، نسبة للعالِم الألماني فرانس ريلوكس.

1) استعمل المسطرة لقياس المسافة من P إلى أيّ نقطة على الجهة المقابلة. **4.6 cm**

2) ما المسافة من Q إلى الجهة المقابلة؟ **4.3 cm**

3) ما المسافة من R إلى الجهة المقابلة؟ **4.3 cm**

يتألف مثلث ريلوكس من ثلاثة أقواس، ففي المثال السابق مركز $\overset{\frown}{PQ}$ هو R، ومركز $\overset{\frown}{QR}$ هو P، ومركز $\overset{\frown}{PR}$ هو Q.

4) انسخ مثلث ريلوكس أعلاه على قطعة من الورق ثم قُصّه، وارسم مربعًا طول ضلعه يساوي الطول الذي وجدته في السؤال 1. بيّن أنه بإمكانك تدوير المثلث داخل المربع، مع بقاء جوانبه ملامسةً لأضلاع المربع.
انظر عمل الطلاب

5) كوّن منحنًى آخر يكون ذا عرض ثابت، مستعملًا النقاط الخمس أدناه، متّبعًا الخطوات الآتية:

الخطوة 1: ثبّت رأس الفرجار عند النقطة D، وافتحه فتحة تساوي DA، وارسم قوسًا طرفاه هما النقطتان A و B.

الخطوة 2: ارسم قوسًا آخر من B إلى C مركزه E.

الخطوة 3: استمر في هذه العملية حتى ترسم خمسة أقواس.
انظر عمل الطلاب

تستعمل بعض الدول هذا النوع من الأشكال في تصميم قطع نقودها المعدنية، والفائدة في ذلك تكمن في سهولة تمييزها باللمس، ويمكن استعمالها في أجهزة البيع الآلية أيضًا؛ لأن عرضها ثابت.

6) قِس عرض الشكل الذي رسمته في السؤال 5، وارسم مستقيمين متوازيين، المسافة بينهما تساوي العرض الذي وجدته، واسنح الشكل ذا الجوانب الخمسة في قطعة من الورق وقصه، وبيّن أنه يتدحرج بسهولة بين المستقيمين اللذين رسمتهما.
انظر عمل الطلاب

كتاب التمارين (23)　دون ضمن فوق

8 - 2 قياس الزوايا والأقواس

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

1) 170°

2) 70°

$\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ قطران في $\odot Q$ الموضحة في الشكل المجاور، حدد ما إذا كان القوس المُعطى في كلٍّ مما يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه :

3) $\overset{\frown}{AE}$ قوس أصغر، 50°

4) $\overset{\frown}{AB}$ قوس أصغر، 80°

5) $\overset{\frown}{EDC}$ قوس أصغر، 130°

6) $\overset{\frown}{ADC}$ نصف دائرة، 180°

7) $\overset{\frown}{ABC}$ نصف دائرة، 180°

8) $\overset{\frown}{BC}$ قوس أصغر، 100°

9) **واجب منزلي** استعمل الجدول المجاور الذي يبين عدد الساعات التي تقضيها مجموعة من الطلاب في حل واجباتهم كل ليلة، للإجابة عن السؤالين الآتيين:

الواجب المنزلي	
النسبة المئوية	الزمن (h)
8%	0–1
29%	1–2
58%	2–3
3%	3–4
2%	4–5

a) إذا مُثّلت البيانات باستعمال القطاعات الدائرية، فكم درجةً تقابل كل فئة؟
$28.8^\circ, 104.4^\circ, 208.8^\circ, 10.8^\circ, 7.2^\circ$

b) صِفْ القوس الذي يقابل كل فئة.
القوس المقابل للفئة 2–3 ساعات قوس أكبر، وكل من الأقواس الأخرى قوس أصغر .

$\overline{EG}, \overline{FH}$ قطران في $\odot P$ الموضحة في الشكل المجاور، أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

10) $m\overset{\frown}{EF}$ 38

11) $m\overset{\frown}{DE}$ 52

12) $m\overset{\frown}{FG}$ 142

13) $m\overset{\frown}{DHG}$ 128

14) $m\overset{\frown}{DFG}$ 232

15) $m\overset{\frown}{DGE}$ 308

استعمل $\odot Z$ الموضحة في الشكل المجاور؛ لإيجاد طول كل قوس ممّا يأتي، ثمّ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة:

16) $\overset{\frown}{QPT}$ ، حيث $QZ = 10$ in　20.94 in

17) $\overset{\frown}{QR}$ ، حيث $PZ = 12$ ft　12.57 ft

18) $\overset{\frown}{PQR}$ ، حيث $TR = 15$ m　19.63 m

19) $\overset{\frown}{QPS}$ ، حيث $ZQ = 7$ cm　17.10 cm

8-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-8

استعمال العلاقات بين الأقواس والزوايا؛ لإيجاد القياسات المجهولة.

الدرس 3-8

تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار واستعمالها.

تمييز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار واستعمالها.

ما بعد الدرس 3-8

إيجاد قياسات الزوايا المحيطية بما فيها زوايا المضلعات المرسومة داخل دائرة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- يتكون إطار التطريز من ستِّ زوايا مركزية متطابقة، فما قياس كلٍّ منها؟ 60°
- افترض أن قطر إطار التطريز يساوي 12 in، فما طول القوس الذي يقابل إحدى الزوايا المركزية؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ. ثم ضع تخمينًا لأطول الأوتار المقابلة للزوايا المركزية للتطريز. 6.28 in، متطابقة.
- افترض أن قطر إطار التطريز ازداد بنسبة 125%، وضع تخمينًا لطول الوتر والقوس الجديدين. سيزداد طول كلٍّ منهما بنسبة 125%

8-3 الأقواس والأوتار
Arcs and Chords

فيما سبق:

درستُ استعمال العلاقات بين الأقواس والزوايا لإيجاد قياسات مختلفة.

(الدرس 2-8)

والآن:

- أميّز العلاقات بين الأقواس والأوتار وأستعملها.
- أميّز العلاقات بين الأقواس والأوتار والأقطار وأستعملها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



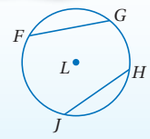
يستعمل الخيَّاطون إطارًا دائريًّا لشد الأقمشة ثم تطريز الزخارف عليها. ويُظهر الشكل المجاور إطارًا دائريًّا، مثبتًا عليه تطريز على شكل نجمة، ويمثِّل كل رأسين متجاورين من رؤوس النجمة نهايتَي قوسٍ في الدائرة، أو نهايتي وترٍ يكوّن أحد أضلاع شكل سداسي رؤوسه على الدائرة.

الأقواس والأوتار: لقد تعلمت في الدرس 1-8 أن الوتر هو قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة، وإذا لم يكن الوتر قطرًا للدائرة، فإن طرفَيه يقسمانها إلى قوسين؛ أحدهما قوس أكبر والآخر أصغر.

نظرية 8.2

أضف إلى مطويتك

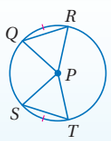
التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون القوسان الأصغران متطابقين، إذا وفقط إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقين.



مثال: $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$، إذا وفقط إذا كان $\overset{\frown}{FG} \cong \overset{\frown}{HJ}$.

ستبرهن الجزء 2 من النظرية 8.2 في السؤال 21

برهان نظرية 8.2 (الجزء 1: دائرة واحدة)



المعطيات: $\overset{\frown}{QR} \cong \overset{\frown}{ST}$ في $\odot P$.

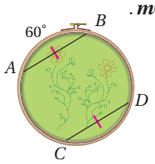
المطلوب: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overset{\frown}{QR} \cong \overset{\frown}{ST}$ في $\odot P$	1) معطيات
2) $\angle QPR \cong \angle SPT$	2) إذا تطابقت الأقواس، فإن الزوايا المركزية المقابلة لها تكون متطابقة.
3) $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$	3) أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة.
4) $\triangle PQR \cong \triangle PST$	4) SAW
5) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$	5) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

مثال 1 من واقع الحياة استعمال الأوتار المتطابقة لإيجاد قياس القوس

حرف يدوية: إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $m\overset{\frown}{AB} = 60°$ في الشكل المجاور، فأوجد $m\overset{\frown}{CD}$.



$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ وتران متطابقان؛ إذن القوسان المقابلان لهما $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ متطابقان

أي أنّ: $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD} = 60°$

تحقق من فهمك

1) إذا كان $m\overset{\frown}{AB} = 78°$ في الشكل أعلاه، فأوجد $m\overset{\frown}{CD}$. 78°

مصادر الدرس 3-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (200)	• تنويع التعليم ص (200)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (24)	• كتاب التمارين ص (24)	• كتاب التمارين ص (24)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

الأقواس والأوتار

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية استعمال الأقواس والأوتار المتطابقة؛ لإيجاد قياس الأقواس وأطوال الأوتار.

التقويم التكويني

أستعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثالٍ؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

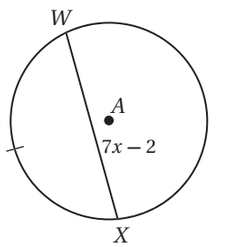
مثالان إضافيان

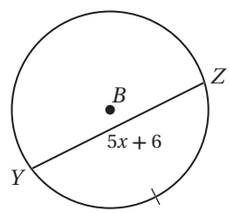
1 **مجوهرات:** يمثل الشكل أدناه قطعةً فضةً دائريةً معلقةً في سلسلةٍ، إذا علمت أنَّ: $\overline{JM} \cong \overline{KL}$, $m\widehat{KL} = 90°$، فأوجد $m\widehat{JM}$.



$m\widehat{KL} = m\widehat{JM} = 90°$

2 **جبر:** في الشكلين أدناه، إذا كان: $\widehat{WX} \cong \widehat{YZ}$، $\odot A \cong \odot B$، فأوجد WX.

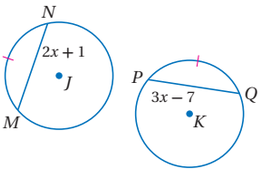




$WX = 26$

مثال 2 استعمال الأقواس المتطابقة لإيجاد أطوال الأوتار

جبر: إذا كان: $\odot J \cong \odot K$, $\widehat{MN} \cong \widehat{PQ}$ ، فأوجد PQ.



$\widehat{MN}$, $\widehat{PQ}$ قوسان متطابقان في دائرتين متطابقتين؛ لذا فإن الوترين $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ متطابقان.

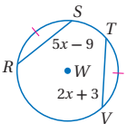
$MN = PQ$ تعريف القطع المتطابقة

$2x + 1 = 3x - 7$ بالتعويض

$8 = x$ بالتبسيط

إذن: $PQ = 3(8) - 7 = 17$.

تحقق من فهمك

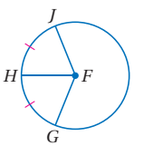


2) في $\odot W$ ، إذا كان $\widehat{RS} \cong \widehat{TV}$، فأوجد RS. **11**

تنصيف الأقواس والأوتار: إذا قسم مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم قوسًا إلى قوسين متطابقين؛ فإنه يُنصّف القوس.

إرشادات للدراسة

منصّف القوس: في الشكل الآتي $\overline{FH}$ منصّف للقوس $\widehat{JHG}$.

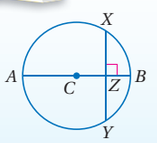


نظريات

أضف إلى مطويتك

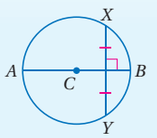
8.3 إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًا على وتر فيها، فإنه يُنصّف ذلك الوتر، ويُنصّف قوسه.

مثال: إذا كان القطر $\overline{AB}$ عموديًا على $\overline{XY}$ في النقطة Z، فإن: $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}$, $\widehat{XB} \cong \widehat{BY}$.



8.4 العمود المنصّف لوتر في الدائرة هو قطر (أو نصف قطر) لها.

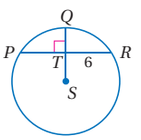
مثال: إذا كان $\overline{AB}$ عمودًا منصّفًا للوتر $\overline{XY}$ ، فإن $\overline{AB}$ قطر في $\odot C$.



ستبرهن النظريتين 8.4 , 8.3 في السؤالين 22, 24 على الترتيب

مثال 3 استعمال نصف القطر العمودي على الوتر

في $\odot S$ ، إذا كان $m\widehat{PR} = 98°$ ، فأوجد $m\widehat{PQ}$.



نصف القطر $\overline{SQ}$ يعامد الوتر $\overline{PR}$؛ لذا وبحسب النظرية 8.3 فإن $\overline{SQ}$ يُنصّف $\widehat{PR}$ ؛ إذن $m\widehat{PQ} = m\widehat{QR}$

$m\widehat{PQ} = \frac{m\widehat{PR}}{2} = \frac{98°}{2} = 49°$

تحقق من فهمك

3) أوجد PR في $\odot S$. **12 وحدة**

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: استعمل أحد برامج الرسم في حاسوبك، واعرضه على السبورة، وسيساعدك هذا على توفير الوقت وإنشاء رسوم أكثر دقةً.

الدرس 3-8 الأقواس والأوتار 195

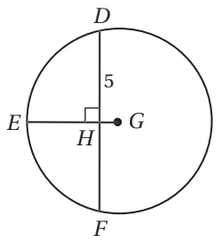
تنصيف الأقواس والأوتار

العمود المنصّف للوتر يكوّن نوعًا خاصًّا من العلاقات بين القطع المستقيمة والأقواس.

الأمثلة 5-3 تبيّن كيفية استعمال النظريات لإيجاد قياسات عناصر الدائرة.

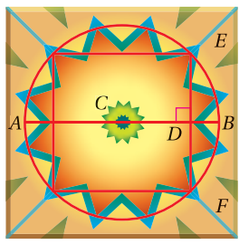
مثالان إضافيان

3 في $\odot G$ الموضحة في الشكل أدناه، $m\widehat{DEF} = 150°$. فأوجد $m\widehat{DE}$.



$m\widehat{DE} = 75°$

4 **سيراميك:** في بلاطة السيراميك الآتية طول القطر $\overline{AB}$ يساوي 18 in، وطول الوتر $\overline{EF}$ يساوي 8 in أوجد CD.



$CD = \sqrt{65} \approx 8.06$ in

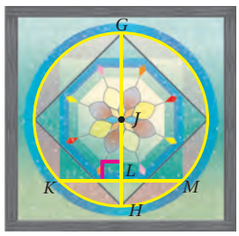


الربط مع الحياة

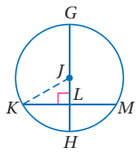
عند صناعة الزجاج الملون، يتمُّ تسخينه حتى درجة حرارة 2000°، حتى يصبح لزجًا، ثم تضاف أكاسيد بعض المعادن فتكسبه لونًا.

مثال 4 من واقع الحياة — **استعمال القطر العمودي على الوتر**

زجاج ملون: يبين الشكل المجاور تصميمًا على نافذة ذات زجاج ملوّن، إذا كان $\overline{GH}$ قطرًا طوله 30 in، و $\overline{KM}$ وترًا طوله 22 in، فأوجد JL.



الخطوة 1: ارسم نصف القطر $\overline{JK}$.



فيتكوّن $\triangle JKL$ القائم الزاوية.

الخطوة 2: أوجد KL, JK.

بما أن $GH = 30$، فإن $JH = 15$ in، وبما أن أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة، فإن $JK = 15$ in.

بما أن القطر $\overline{GH}$ عمودي على $\overline{KM}$، فإن $\overline{GH}$ يُنصّف الوتر $\overline{KM}$ وفق النظرية 8.3 إذن: $KL = \frac{1}{2}(22) = 11$ in.

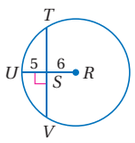
الخطوة 3: أوجد JL باستعمال نظرية فيثاغورس.

$KL^2 + JL^2 = JK^2$	نظرية فيثاغورس
$11^2 + JL^2 = 15^2$	بالتعويض
$121 + JL^2 = 225$	بالتبسيط
$JL^2 = 104$	بطرح 121 من كلا الطرفين
$JL = \sqrt{104}$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

إذن: $JL = \sqrt{104} \approx 10.20$ in.

تحقق من فهمك

4) أوجد TV في $\odot R$ مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. **18.44 وحدة**



إرشادات للدراسة

رسم القطع المستقيمة: يمكنك إضافة أي معلومة معروفة إلى الشكل؛ لمساعدتك على حل السؤال، ففي المثال 4، رُسم نصف القطر $\overline{JK}$.

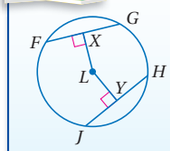
بالإضافة إلى النظرية 8.2، يمكنك استعمال النظرية الآتية؛ لتحديد ما إذا كان وتران في دائرة متطابقين.

نظرية 8.5

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: في الدائرة نفسها أو في دائرتين متطابقتين، يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان بُعداهما عن مركز الدائرة متساويين.

مثال: $LX = LY$ إذا وفقط إذا كان $\overline{FG} \cong \overline{JH}$.

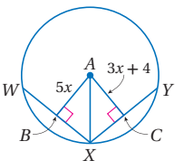


ستبرهن النظرية 8.5 في السؤالين 25, 26

إرشادات للمعلم الجديد

توضيح المعطيات على الشكل: ضع أيَّ معلومة معطاة على الشكل للمساعدة على حل المسألة، فيمكنك إضافة زوايا وأطوال القطع المستقيمة والأقواس وأنصاف الأقطار والأقطار؛ لأنها قد لا تكون موجودة على الشكل، وذكّر الطلاب أيضًا بوجوب اتباع الخصائص الهندسية والتعريفات عند إضافة عناصر على الشكل.

مثال 5 الأوتار المتساوية البُعد عن المركز



جبر: في $\odot A$ إذا كان $WX = XY = 22$ ، فأوجد AB.

بما أن الوترين $\overline{WX}, \overline{XY}$ متطابقان. فإن بعديهما عن A متساويان.

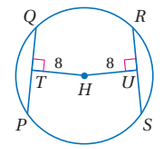
إذن:

$AB = AC$

$5x = 3x + 4$ بالتعويض

$x = 2$ بالتبسيط

إذن $AB = 5\,(2) = 10$



تحقق من فهمك

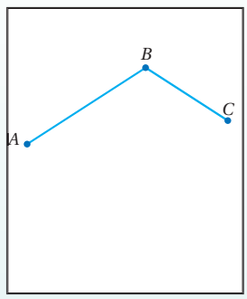
5) في $\odot H$ إذا كان: $RS = 14$ ، $PQ = 3x - 4$ ، فأوجد قيمة x **6**

يمكنك استعمال النظرية 8.4؛ لإيجاد النقطة التي تبعد مسافات متساوية عن ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، أو لتعيين مركز دائرة غير معلومة المركز.

إنشاءات هندسية

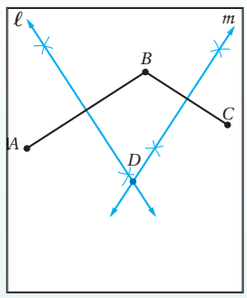
رسم الدائرة التي تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

الخطوة 1:



ارسم ثلاث نقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}, \overline{BC}$.

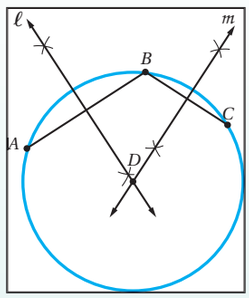
الخطوة 2:



أنشئ العمودين m, ℓ المنصفين للقطعتين $\overline{AB}, \overline{BC}$.

وسمِّ نقطة تقاطعهما D.

الخطوة 3:

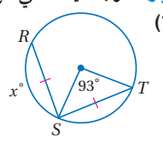


المستقيمان m, ℓ يحويان قطرين في الدائرة المارة بالنقاط الثلاث بحسب النظرية 8.4 ، ونقطة تقاطعهما هي مركز الدائرة. ضع رأس الفرجار عند النقطة D ، وارسم دائرة تمرُّ بالنقاط A, B, C.

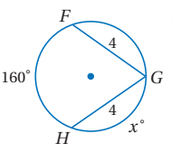
تأكد

المثالان 1, 2 **جبر:** أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

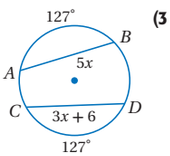
1) **93**



2) **100**



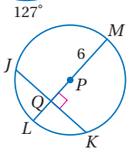
3) **3**



المثالان 3, 4 في $\odot P$ ، إذا كان: $JK = 10$ ، $m\widehat{JLK} = 134°$ ، فأوجد القياسات الآتية، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

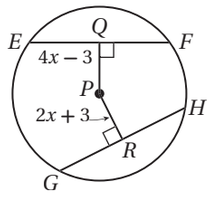
4) $m\widehat{JL}$ **67°**

5) PQ **3.32**



مثال إضافي

5 **جبر:** في $\odot P$ الموضحة في الشكل أدناه، إذا كان: $EF = GH = 24$، فأوجد PQ.



$PQ = 9$

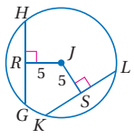
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 6–1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم .

المثال 5

6) في $\odot J$، إذا كان: $GH = 9, KL = 4x + 1$، فأوجد قيمة x. **2**

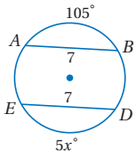


تدرب وحل المسائل

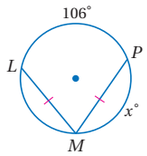
المثالان 1, 2

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

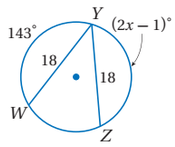
7) **21**



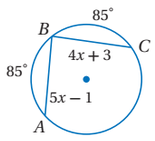
8) **127**



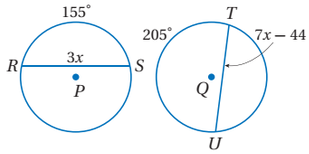
9) **72**



10) **4**



11) $\odot P \cong \odot Q$ **11**

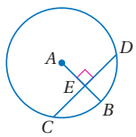


المثالان 3, 4

إذا كان طول نصف قطر $\odot A$ يساوي 14 و $CD = 22$، فأوجد القياسين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

12) CE **11**

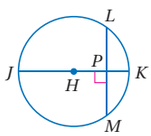
13) EB **5.34**



إذا كان طول قطر $\odot H$ يساوي 18 و $LM = 12$ و $m\widehat{LM} = 84°$، فأوجد القياسين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

14) $m\widehat{LK}$ **42°**

15) HP **6.71**

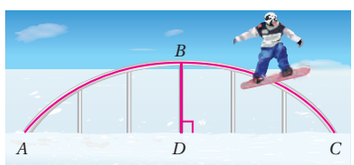




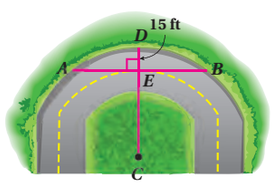
الربط مع الحياة

في مناطق التزلج، يتم تثبيت سكّة تمكّن المتزلّجين من القيام بحركاتٍ بهلوانية.

16) **تزلج:** سكة التزلّج في الشكل المجاور تأخذ شكل قوس من دائرة، حيث $\overline{BD}$ جزء من قطرها. إذا كان قياس $\widehat{ABC}$ يساوي 32% من الدائرة الكاملة، فأوجد $m\widehat{AB}$؟ **57.6°**



17) **طُرق:** الحافة الخارجية للطريق المنحنية المبيّنة في الشكل المجاور جزء من $\odot C$ التي نصف قطرها 88 ft. أوجد AB مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ. **98.3 ft**



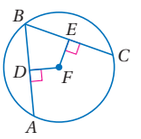
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	19–7 ، 37–29
ضمن ضمن المتوسط	19–7 فردي ، 25–20 ، 37–29
فوق فوق المتوسط	35–20 ، (اختياري: 37 ، 36)

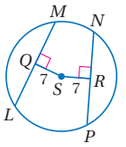
المثال 5

18) جبر: في $\odot F$، إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، $DF = 3x - 7, FE = x + 9$، فأوجد قيمة x.

8

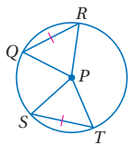


19) جبر: في $\odot S$، إذا كان: $LM = 16, PN = 4x$، فأوجد قيمة x. 4

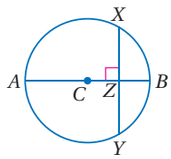


برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: **20, 21) انظر الهامش**

20) برهان حرّ للجزء الثاني من النظرية 8.2، **المعطيات:** $\overline{ST} \cong \overline{QR}$ في $\odot P$. **المطلوب:** $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$

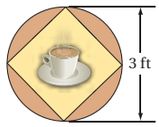


21) برهان ذو عمودين للنظرية 8.3، **المعطيات:** $\overline{XY} \perp \overline{AB}$ في $\odot C$. **المطلوب:** $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}, \widehat{XB} \cong \widehat{YB}$



22) قياس كل قوسٍ $90°$، وطول كل وترٍ 2.12 ft

22) تصميم: صمَّم زيد شعارًا لمقهىً كما في الشكل المجاور. إذا كانت أطوال الأوتار جميعها متساوية، فما قياس كل قوس؟ وما طول كل وتر؟



23) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 8.4 **25–23) انظر ملحق الإجابات.**

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للجزء المُشار إليه من النظرية **8.5** في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

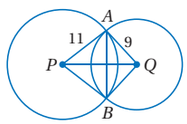
24) إذا تساوَى بُعدا وترين في دائرةٍ عن مركزها، فإن هذين الوترين متطابقان.

25) إذا تطابق وتران في دائرةٍ، فإن بعدَيهما عن مركزها متساويان.

مسائل مهارات التفكير العليا

26) انظر ملحق الإجابات.

26) تحدٍّ: الوتر $\overline{AB}$ المشترك بين $\odot P, \odot Q$ يعُامد القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي هاتين الدائرتين، إذا كان $AB = 10$، فما طول $\overline{PQ}$؟ وضّح ذلك.



27) صحيحة أحيانًا؛ إذا كان القطر عموديًّا على الوتر فإنه يُنصّفه.

27) تبرير: $\overline{AB}$ قطر في الدائرة و $\overline{HG}$ وتر يتقاطع مع $\overline{AB}$ في النقطة X، فهل العبارة $HX = GX$ صحيحة دائمًا، أم أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟

إجابات:

20) البرهان:

بما أن أنصاف أقطار الدائرة متطابقة فإن: $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$، ومن المعطيات تعلم أن $\overline{QR} \cong \overline{ST}$، إذن $\triangle PQR \cong \triangle PST$ بحسب SSS. إذن $\angle QPR \cong \angle SPT$؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

ولأن للزوايا المركزية القياس نفسه، فإن للأقواس المقابلة لها القياس نفسه أيضًا، ومن ثَمَّ فهي متطابقة، وعليه فإن: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$.

21) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\odot C, \overline{AB} \perp \overline{XY}$	1) معطيات
2) $\overline{CX} \cong \overline{CY}$	2) أنصاف أقطار الدائرة متطابقة
3) $\overline{CZ} \cong \overline{CZ}$	3) خاصية الانعكاس
4) $\angle XZC, \angle YZC$ قائمتان	4) تعريف المستقيمين المتعامدين
5) $\angle XZC \cong \angle YZC$	5) جميع الزوايا القائمة متطابقة
6) $\triangle XZC \cong \triangle YZC$	6) HL
7) $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$, $\angle XCZ \cong \angle YCZ$	7) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
8) $\widehat{XB} \cong \widehat{YB}$	8) إذا تطابقت زاويتان مركزيتان، فإن القوسين المقابلين لهما متطابقين

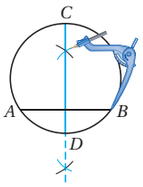
4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقرةً يشرحون فيها كيف ساعدهم درس قياس الزوايا والأقواس على فهم درس الأقواس والأوتار.

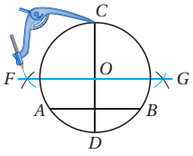
إرشادات للدراسة

البرهان غير المباشر: تذكّر أن البرهان غير المباشر هو برهان بالتناقض تفترض فيه أن المطلوب غير صحيح، ثم تصل إلى نتيجة تناقض المعطيات أو حقيقة مثبتة من قبل أو مسلمة أو تعريف.

28) تحدٍّ: الإنشاء الهندسي أدناه يوضح طريقة تعيين مركز دائرة معطاة. انظر ملحق الإجابات



الخطوة 1: ارسم الوتر $\overline{AB}$، وأنشئ العمود المنصف للوتر $\overline{AB}$ وسمّه $\overline{CD}$.



الخطوة 2: أنشئ العمود المنصّف للوتر $\overline{CD}$ وسمّه $\overline{FG}$. سمِّ نقطة تقاطع العمودين O.

a) استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن $\overline{CD}$ يمرّ بمركز الدائرة، مفترضًا أن مركز الدائرة لا يقع على $\overline{CD}$.

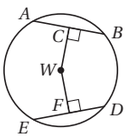
b) أثبت أن O هي مركز الدائرة.

29) اكتب: إذا أصبح قياس قوس في دائرة ثلاثة أمثال قياسه الأصلي، فهل يصبح طول الوتر المقابل لهذا القوس الجديد ثلاثة أمثال طول الوتر المقابل للقوس الأصلي؟ ارسم شكلًا يؤيّد استنتاجك. انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار

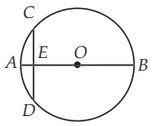
30) إذا كان: $CW = WF, ED = 30$ ، فأوجد DF؟ **D**

A 60
B 45
C 30
D 15



31) في $\odot O$ ، $\overline{AB}$ قطر عمودي على الوتر $\overline{CD}$ ، ويقطعه في النقطة E، إذا كان: $OB = 10$، $AE = 2$، فما طول $\overline{CD}$ ؟ **D**

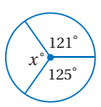
A 4
B 6
C 8
D 12



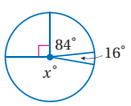
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-8)

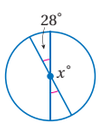
32) 114



33) 170



34) 152



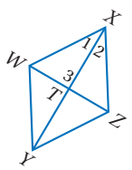
35) حرف يدوية: صمّمت شيماء مخططًا لتطريز 10 ورداتٍ على قطعة قماش، فرسمت 10 أشكال خماسية منتظمة طول ضلع كلٍّ منها 3.5 in ، ثم رسمت نصف دائرة على كل ضلع، فتشكّلت 10 ورداتٍ لكلٍّ منها خمس بتلاتٍ، فكم بوصةً طول الشريط الذهبي الذي تحتاجه لتزيين حواف جميع الوردات؟ قرّب إجابتك إلى أقرب بوصةٍ. (الدرس 1-8) 275 in

استعد للدرس اللاحق

جبر: أجب عن السؤالين الآتيين مستعينًا بالمعين $WXZY$:

36) إذا كان: $m\angle 3 = (y^2 - 31)°$ ، فأوجد y. ± 11

37) إذا كان: $m\angle XZY = 56°$ ، فأوجد $m\angle YWZ$. 28



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلبة رسم دائرتين في ورقةٍ، ورسم وترٍ في أيِّ مكانٍ في الدائرة الأولى، ثم اطلب إليهم أن يرسموا العمود المنصّف لهذا الوتر، أما بالنسبة للدائرة الثانية، فاطلب إليهم أن يرسموا قطعتين مستقيمتين من مركز الدائرة، بحيث يكون الوتران العموديان على هاتين القطعتين متطابقين.

انظر أعمال الطلاب.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-3 تدريبات إعادة التعليم

الأقواس والأوتار

الأقواس والأوتار:

تحدد النقاط على الدائرة الأقواس والأوتار، وهناك خصائص متعددة تتعلق بالنقاط على الدائرة.

في الدائرة نفسها أو في الدائرتين المتطابقتين، يكون القوسان الأصغران متطابقين، إذا وفقط إذا كان الوتران المناظران لهما متطابقين.



إذا كان $\overline{RS} \cong \overline{TV}$ إذا وفقط إذا كان $\overset{\frown}{RS} \cong \overset{\frown}{TV}$.

مثال إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ في $\odot K$ الموضحة في الشكل المجاور، فأوجد AB.



$\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ قوسان متطابقان في دائرة واحدة؛ لذا فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

$CD = AB$	تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
$2x + 3 = 8x$	بالتعويض
$x = \frac{1}{2}$	بالتبسيط

إذن $AB = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

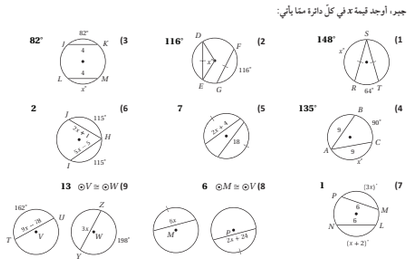
تمارين

جبر، أوجد قيمة x في كلّ دائرة ممّا يأتي:

1) $148°$ 2) $116°$ 3) $82°$

4) $135°$ 5) 7 6) 2

7) 1 8) 6 9) 13



تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الأقواس والأوتار

تنصيف الأقواس والأوتار:

إذا قسم مستقيم أو قطعة مستقيمة أو نصف مستقيم قوسًا إلى قوسين متطابقين؛ فإنه ينصّف القوس.

8.3	إذا كان قطر (أو نصف قطر) الدائرة عموديًا على وتر فيها، فإنه ينصف الوتر وينصف قوسه أيضًا.	إذا كان: $\overline{WZ} \perp \overline{AB}$، فإن: $\overline{AX} \cong \overline{XB}$، $\overset{\frown}{AW} \cong \overset{\frown}{BW}$.
8.4	العمود المنصف للوتر في الدائرة، هو قطر (أو نصف قطر) لها.	إذا كان: $OX = OY$، فإن: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$.
8.5	يتطابق الوتران في الدائرة نفسها أو في الدائرتين المتطابقتين، إذا وفقط إذا كان بُعداهما عن المركز متساويين.	إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$، فإن: $\overline{RS}, \overline{AB}$ يبعدان المسافة نفسها عن النقطة O.



مثال في $\odot O$ الموضحة في الشكل المجاور: $\overline{OE} \perp \overline{CD}$، $CD = 24$، $OD = 15$، أوجد OE.

القطر أو نصف القطر العمودي على وتر الدائرة ينصف الوتر، إذن ED يساوي نصف CD.

$ED = \frac{1}{2}(24)$

$= 12$

استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد OE في ΔOED.

$OE^2 + ED^2 = OD^2$	نظرية فيثاغورس
$OE^2 + 12^2 = 15^2$	بالتعويض
$OE^2 + 144 = 225$	بالتبسيط
$OE^2 = 81$	بطرح 144 من الطرفين
$OE = 9$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

تمارين

في $\odot P$ الموضحة في الشكل المجاور، نصف القطر يساوي 13، و $RS = 24$، أوجد طول كلٍّ ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة.



1) RT 12 2) PT 5 3) TQ 8

في $\odot A$ الموضحة في الشكل المجاور، القطر يساوي 12، و $CD = 8$، و $m\overset{\frown}{CD} = 90°$، أوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة.



4) $m\overset{\frown}{DE}$ $45°$ 5) FD 4 6) AF 4.47

7) في $\odot R$ الموضحة في الشكل المجاور، $UV = 3x$، $TS = 21$. ما قيمة x؟ 7



8) في $\odot Q$ الموضحة في الشكل المجاور: $\overline{BC} \cong \overline{DC}$، $GQ = x + 5$، و $EQ = 3x - 6$. ما قيمة x؟ 5.5



تدريبات المهارات (18) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

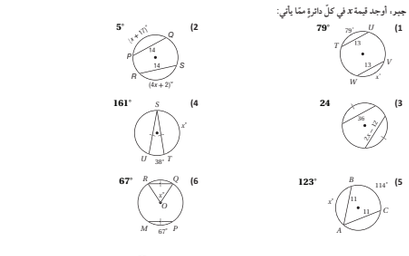
8-3 تدريبات المهارات

الأقواس والأوتار

جبر، أوجد قيمة x في كلّ دائرة ممّا يأتي:

1) $79°$ 2) $5°$ 3) 24

4) $161°$ 5) $123°$ 6) $67°$



نصف قطر $\odot Y$ الموضحة في الشكل المجاور، يساوي 34، و $AB = 60$، $m\overset{\frown}{AC} = 71°$. أوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مائة.



7) $m\overset{\frown}{BC}$ $71°$ 8) $m\overset{\frown}{AB}$ $142°$

9) AD 30 10) BD 30

11) YD 16 12) DC 18

13) في $\odot U$ الموضحة في الشكل المجاور، $VW = 20$، و $XZ = 5x$، أوجد قيمة x. 4



14) في $\odot Z$ الموضحة في الشكل المجاور، $\overline{TR} \cong \overline{TV}$، $ZS = x + 4$، و $UZ = 2x - 1$، أوجد قيمة x. 5

تدريبات حل المسألة (19) دون ضمن فوق

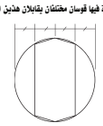
الاسم _____ التاريخ _____

8-3 تدريبات حل المسألة

الأقواس والأوتار

1) **مضلع سداسي**، أُنشئ مضلع سداسي بالطريقة الموضحة في الشكل أدناه، كم طولاً مختلفًا للأوتار التي تشكّل أضلاع هذا السداسي؟ وضّح إجابتك.

2؛ لأن الدائرة فيها قوسان مختلفان يقابلان هذين الوترين.



2) **علامات مائية**، تقوم شركة مجوهرات بطبع علامة مائية سرّية على الشعار في وثائقها الرسمية كتأكيد لملكيّة الحقوق ولأغراض أمنيّة، وهذه العلامة المائية هي وتر يبعد 0.7 cm عن مركز طوقٍ دائريٍّ نصف قطره 2.5 cm، ما طول هذا الوتر إلى أقرب جزء من عشرة؟

4.8 cm

3) **علم الآثار**، أثناء القيام بحفريات أثرية عُثِر على قطعةٍ واحدةٍ فقط من طبق مكسور، استعمل صورة القطعة الفخارية أدناه في توضيح طريقة رسم الطبق بحجمه الأصلي عن طريق إنشاء الأوتار والأعمدة المنصّفة.



ارسم وترين على القوس، ثم أنشئ العمود المنصف لكلٍّ منهما. سيلتقي العمودان المنصفان في مركز الدائرة الأصلية. ثم استعمل المِسْطَرة ونصف القطر في رسم الدائرة التي تمثل الطبق الأصلي.

4) **مراكز**، أراد سعود أن يجد مركز دائرةٍ كبيرة، فقام برسم ما يعتقد أنه قطر لهذه الدائرة، ثم وضع علامة على نقطةٍ منتصف هذه القطعة المستقيمة، وأعلن أنه وجد مركز الدائرة، فسأله معلّمه: كيف عرفت أن المستقيم الذي رسمته هو بالفعل قطر لهذه الدائرة وليس وترًا؟ فأدرك سعود أنه غير متأكد من صحة استنتاجه، فماذا يتعين عليه أن يعمل للتأكد من أن هذا المستقيم هو قطر للدائرة.

يستطيع تعيين أن يرسم مستقيمًا عموديًا على المستقيم الذي رسمه، على أن يمر بالنقطة التي وضع علامة عندها. فإذا كانت نقطة منتصف القطعة الأولى هي نفسها نقطة منتصف القطعة الثانية، فإنه يثبت أن القطعة قطر للدائرة.

5) **صناعة اللُّحف**، تتبّع رغد الخطوات الآتية لتكوين نمط للحاف. "في دائرة قطرها 10 in، فرسمت الوتر $\overline{AB}$ الذي يبعد 3 in عن مركز الدائرة وبعامد نصف القطر، ثم قصّت القماش على طول الوتر". قامت رغد بإعادة هذه الخطوات على الجهة الأخرى من القطر للوتر $\overline{CD}$، ثم قصّت على طول الوترين $\overline{DB}$ و $\overline{AC}$، فحصلت في النهاية على أربع قطع منحنية وشكلٍ رباعيٍّ واحد.



a) إذا اتبعت رغد التعليمات، هل تضمن أن يكون الشكل الرباعي مستطيلًا؟ فسّر إجابتك.

لا؛ لأن الطريقة تُنتج الوترين المتطابقين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$، ولكنهما ليسا متوازيين بالضرورة.

b) افترض أن الشكل الرباعي الناتج مستطيل، وأن قياس قوس إحدى القطع المنحنية يساوي 74°، فما قياس أقواس القطع المنحنية الثلاث الأخرى؟

106°, 106°, 74°

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 8

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

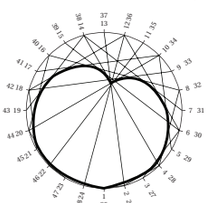
التدريبات الإثرائية (20)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-3 التدريبات الإثرائية

تكوين أنماط من أوتار الدائرة:

يمكننا الحصول على أنماط جميلة، إذا قمنا برسم أوتار تصل بين نقاط مُثبّت على الدائرة، المسافة بين كلّ نقطتين متتاليتين منها ثابتة. يوجد على الدائرة أدناه 24 نقطةً تقسم الدائرة إلى 24 قسماً متساوياً، وقد وُضعت الأرقام من 1 إلى 48 على جوار هذه النقاط، تأمّل الشكل لترى كيف وُضعت هذه الأرقام.

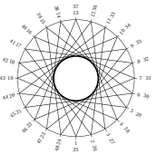


1) استعمل قلم رصاص ومسطرة لرسم أوتار تصل بين النقاط المرقمة على النحو: 1 إلى 2، 2 إلى 4، 3 إلى 6، 4 إلى 8، وهكذا. استمر في عملية المضاعفة ورسم الأوتار الممكنة جميعها. ما نوع النمط الذي حصلت عليه؟

انظر الشكل أعلاه. يكون النمط الناتج على شكل قلب.

2) استعمل الدائرة ذاتها بنقاطها وأرقامها، وجرّب استعمال أنماط مختلفة للتوصيل بين النقاط. يمكنك ضرب رقم النقطة في ثلاثة للحصول على رقم النقطة التي تصلها معها، أو إضافة رقم معينا إلى رقم النقطة للحصول على رقم النقطة التي تصل معها. احتفظ بالأنماط المميزة لعرضها في غرفة الصف.

انظر إجابات الطلاب.



إجابة ممكنة:

استعمل قلم رصاص ومسطرة لرسم أوتار تصل بين النقاط المرقمة على النحو: 1 إلى 10، 2 إلى 11، 3 إلى 12، 4 إلى 13، 5 إلى 14، 6 إلى 15 وهكذا استمر في الاضافة. فيكون النمط الناتج دائرة كما في الشكل المجاور

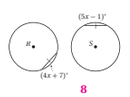
كتاب التمارين (24)　دون ضمن فوق

جبر، أوجد قيمة x في كلٍّ من الدوائر الآتية :

1) 
7

2) 
145

3) 
4.5

4) $\odot R \cong \odot S$

8

إذا كان طول نصف قطر $\odot N$ الموضحة في الشكل المجاور يساوي 18، $NK = 9, m\widehat{DE} = 120°$ ، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية :



5) $m\widehat{GE}$ 60°

6) $m\angle HNE$ 60°

7) $m\angle HEN$ 30°

8) HN 9

9) في $\odot P$ الموضحة في الشكل المجاور، إذا كان: $TS = 3x, QR = 7x - 20$، فما قيمة x؟ 5



10) جبر، في $\odot K$ الموضحة في الشكل المجاور، إذا كان: $KP = 2x + 1, KN = 3x - 2, \overline{JL} \cong \overline{LM}$، فما قيمة x؟ 3



11) ممرات حديقة، حديقة دائرية تُحيط بها ممرات محددة بأطوال الأقواس التي تظهر في الشكل المجاور، ولها أيضًا أربعة ممرات مستقيمة محددة بالقطع المستقيمة $\overline{DE}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BE}$ ، أيُّ الممرات المستقيمة لها الطول نفسه؟ $\overline{AC}, \overline{DE}$



8-4 الزوايا المحيطية
Inscribed Angles

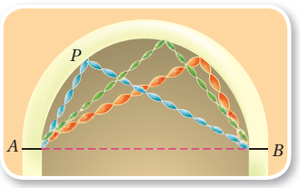
فيما سبق:
درستْ إيجاد قياس الزوايا الداخلية للمضلعات.
(الدرس 1-5)

والآن:
- أجد قياسات الزوايا المحيطية.
- أجد قياسات زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.

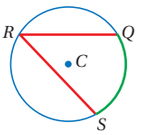
المفردات:
الزاوية المحيطية
inscribed angle
القوس المقابل
intercepted arc

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



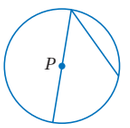
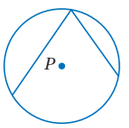
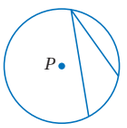
يعلو مدخل قاعة احتفالات قوس على شكل نصف دائرة. زُيّن هذا المدخل بأشرطة ملونة، بحيث ثُبِّت أحد طرفَي كل شريط عند النقطة A، والطرف الآخر عند النقطة B. ثم رفعت الأشرطة، وتم تثبيت كلٍّ منها عند نقطة مختلفة على القنطرة مثل P، كما في الشكل المجاور. لاحظ أن الزوايا المتكوّنة من هذه الأشرطة تبدو متطابقة، بغض النظر عن موقع النقطة P.



الزوايا المحيطية: **الزاوية المحيطية** هي زاوية يقع رأسها على الدائرة، ويحتوي ضلعاها على وترين في الدائرة. فالزاوية QRS هي زاوية محيطية في $\odot C$

القوس المقابل للزاوية المحيطية هو قوس يقع داخل الزاوية المحيطية، ويقع طرفاه على ضِلْعَيها. القوس الأصغر $\overset{\frown}{QS}$ في $\odot C$ هو القوس المقابل للزاوية QRS.

توجد ثلاث حالات للزاوية المحيطية في الدائرة.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
يقع مركز الدائرة P على أحد ضلعَي الزاوية المحيطية.	يقع مركز الدائرة P داخل الزاوية المحيطية.	يقع مركز الدائرة P خارج الزاوية المحيطية.

في الحالة الأولى يكون أحد ضلعَي الزاوية المحيطية قطرًا للدائرة

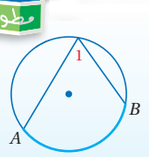
والنظرية الآتية صحيحة لهذه الحالات الثلاث جميعها.

نظرية 8.6 نظرية الزاوية المحيطية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AB}$, $m\overset{\frown}{AB} = 2m\angle 1$



ستبرهن النظرية 8.6 للحالتين الثانية والثالثة للزاوية المحيطية في السؤالين 28, 29 على الترتيب

مصادر الدرس 4-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (203)	• تنويع التعليم ص (202, 203)	• تنويع التعليم ص (202)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (25)	• كتاب التمارين ص (25)	• كتاب التمارين ص (25)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-8
إيجاد قياسات الزوايا الداخلية للمضلعات.

الدرس 4-8
إيجاد قياسات الزوايا المحيطية.
إيجاد قياسات زوايا المضلعات المحاطة بدائرة.

ما بعد الدرس 4-8
استعمال خصائص المماسات لحل مسائل تتضمن مضلعات تحيط بدوائر.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- ما قياس قوس القنطرة؟ $180°$
- إذا كان قياس القوس من النقطة A إلى النقطة P المثبت عندها الشريط على القنطرة يساوي $60°$، فما قياس القوس من النقطة B إلى النقطة P المثبت عندها الشريط على القنطرة؟ $120°$
- أفترض أن عرض مدخل القاعة يساوي 3 ft، فكيف يمكنك إيجاد طول القوس الذي يعلو المدخل؟ إجابة ممكنة: نصف القطر يساوي نصف عرض هذا الباب، أو 18 in، وبما أن القوس عبارة عن نصف دائرة، فإن قياسه يساوي $180°$ ، عوّض نصف القطر وقياس القوس في قانون حساب طول القوس.
$\ell = \frac{180°}{360°} \cdot 2\pi\,(18) = 18\pi$

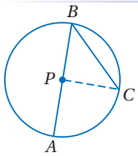
الزوايا المحيطية

الأمثلة 3-1 تبيّن كيفية إيجاد قياسات الزوايا المحيطية وكتابة براهين باستعمال النظريات الخاصة بالزوايا المحيطية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

برهان نظرية الزاوية المحيطية (الحالة الأولى)



المعطيات: $\angle B$ محيطية في $\odot P$.

المطلوب: $m\angle B = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AC}$

البرهان: تعلم أن $\angle B$ محيطية في $\odot P$، وأن $\overline{PB}$ نصف قطر في $\odot P$.

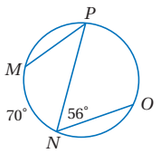
ارسم نصف قطر آخر $\overline{PC}$ حيث إن كل نقطتين تحددان مستقيمًا واحدًا، وهذا سيقودنا إلى:

العبارات	المبررات
1) $\overline{PB} \cong \overline{PC}$	1) أنصاف أقطار الدائرة جميعها متطابقة.
2) $\triangle PBC$ متطابق الضلعين.	2) تعريف المثلث المتطابق الضلعين
3) $m\angle B = m\angle C$	3) نظرية المثلث المتطابق الضلعين
4) $m\angle APC = m\angle B + m\angle C$	4) نظرية الزاوية الخارجية
5) $m\angle APC = 2m\angle B$	5) بالتعويض (من الخطوة 3 في الخطوة 4 ثم الجمع)
6) $m\overset{\frown}{AC} = m\angle APC$	6) تعريف قياس القوس
7) $m\overset{\frown}{AC} = 2m\angle B$	7) بالتعويض (من الخطوة 5 في الخطوة 6)
8) $2m\angle B = m\overset{\frown}{AC}$	8) خاصية التماثل للمساواة
9) $m\angle B = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AC}$	9) خاصية القسمة للمساواة

مثال 1 استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات

أوجد القياسين الآتيين مستعملًا الشكل المجاور:

a) $m\angle P$ b) $m\overset{\frown}{PO}$



$m\angle P = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{MN}$

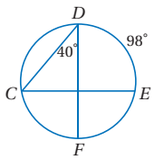
$= \frac{1}{2}(70°) = 35°$

$m\overset{\frown}{PO} = 2m\angle N$

$= 2(56°) = 112°$

تحقق من فهمك

أوجد القياسات الآتية مستعملًا الشكل المجاور:



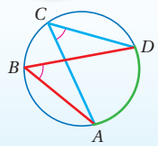
1A) $m\overset{\frown}{CF}$ 80° 1B) $m\angle C$ 49°

هناك علاقة بين الزاويتين المحيطيَّتين اللتين تقابلان القوس نفسه في دائرة.

نظرية 8.7

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا قابلت زاويتان محيطيَّتان في دائرة القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.

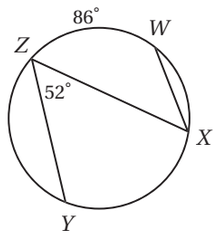


مثال: $\angle B$, $\angle C$ تقابلان $\overset{\frown}{AD}$، إذن $\angle B \cong \angle C$.

ستبرهن النظرية 8.7 في السؤال 30

مثالان إضافيان

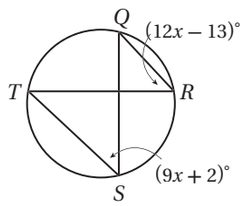
1 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين مستعملًا الشكل أدناه.



a) $m\angle X$ 43°

b) $m\overset{\frown}{YX}$ 104°

2 **جبر:** أوجد $m\angle R$ مستعملًا الشكل أدناه.



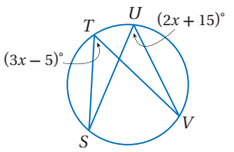
47°

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: يتضمن الدرس 4-8 براهين تحوي عدة حالات، حدّد أمثلةً أخرى مستعينًا بكتبٍ هندسيةٍ متقدمةٍ أو بالإنترنت، للنظريات التي تستعمل هذا النوع من البراهين، وذلك لمساعدة الطلاب الموهوبين على تطوير قدراتهم، وتحسين فهمهم وإدراكهم للأسباب التي تستدعي الأخذ بعين الاعتبار حالات متعددة عند إثبات بعض النظريات.

مثال 2 استعمال الزوايا المحيطية لإيجاد قياسات



جبر: أوجد $m\angle T$ مستعملًا الشكل المجاور.

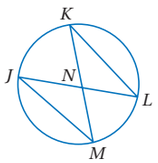
$\angle T \cong \angle U$	$\angle T$, $\angle U$ كلاهما تقابلان $\overset{\frown}{SV}$
$m\angle T = m\angle U$	تعريف تطابق الزوايا
$3x - 5 = 2x + 15$	بالتعويض
$x = 20$	بالتبسيط

إذن: $m\angle T = (3(20) - 5)^\circ = 55^\circ$.

تحقق من فهمك

2) إذا كان: $m\angle V = (x + 16)^\circ$, $m\angle S = (3x)^\circ$ ، فأوجد $m\angle S$ مستعملًا الشكل أعلاه. 24°

مثال 3 استعمال الزوايا المحيطية في البراهين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overset{\frown}{JM} \cong \overset{\frown}{KL}$

المطلوب: $\triangle JMN \cong \triangle KLN$

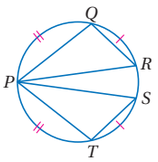
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overset{\frown}{JM} \cong \overset{\frown}{KL}$	1) معطيات
2) $\overline{JM} \cong \overline{KL}$	2) إذا كانت الأقواس متطابقة؛ فإن الأوتار المقابلة لها تكون متطابقة أيضًا.
3) $\angle M$ تقابل $\overset{\frown}{JK}$	3) تعريف القوس المقابل.
$\angle L$ تقابل $\overset{\frown}{JK}$	4) الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون متطابقة.
4) $\angle M \cong \angle L$	5) الزوايا المتقابلة بالرأس تكون متطابقة.
5) $\angle JNM \cong \angle KNL$	6) AAS
6) $\triangle JMN \cong \triangle KLN$	

تحقق من فهمك

انظر ملحق الإجابات

3) اكتب برهانًا ذا عمودين:



المعطيات: $\overset{\frown}{QR} \cong \overset{\frown}{ST}$, $\overset{\frown}{PQ} \cong \overset{\frown}{PT}$

المطلوب: $\triangle PQR \cong \triangle PTS$

إرشادات للدراسة

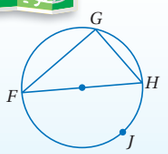
المضلعات المحاطة بدائرة:
يكون المضلع محاطًا بدائرة، إذا وقعت رؤوسه جميعها على الدائرة نفسها.

زوايا المضلعات المحاطة بدائرة: للمثلثات والأشكال الرباعية المحاطة بدائرة خصائص خاصة.

النظرية 8.8

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تقابل الزاوية المحيطية في مثلث قطرًا أو نصف دائرة، إذا وفقط إذا كانت هذه الزاوية قائمة.



مثال: إذا كانت $\overset{\frown}{FJH}$ نصف دائرة، فإن $m\angle G = 90^\circ$.

إذا كان $m\angle G = 90^\circ$ ، فإن $\overset{\frown}{FJH}$ هي نصف دائرة، ويكون $\overline{FH}$ قطرًا فيها.

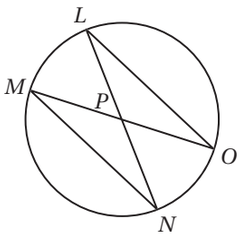
ستبرهن النظرية 8.8 في السؤال 31

مثال إضافي

3 اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overset{\frown}{LO} \cong \overset{\frown}{MN}$

المطلوب: $\triangle MNP \cong \triangle LOP$



تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الفرديون: اختر أمثلةً تُغطّي كل مفهوم من مفاهيم هذا الدرس وقدمها للطلاب، بحيث يجلس كل طالب منفردًا ويحل هذه الأسئلة، ثم اطلب إليهم وَضْعَ ملاحظاتهم حول الأسئلة التي يجدون صعوبة في حلّها، وشجّعهم على إعادة قراءة الأمثلة والنظريات التي تساعدهم على فهم الأسئلة وحلّها .

إجابة مثال إضافي:

3)البرهان:

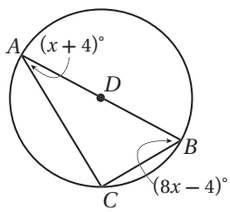
العبارات	المبررات
1) $\overset{\frown}{LO} \cong \overset{\frown}{MN}$	1) معطيات
2) $\overline{LO} \cong \overline{MN}$	2) إذا كانت الأقواس متطابقة ، فإن الأوتار المقابلة لها تكون متطابقة
3) $\angle M$ تقابل $\overset{\frown}{NO}$ و $\angle L$ تقابل $\overset{\frown}{NO}$	3) تعريف القوس المقابل
4) $\angle M \cong \angle L$	4) الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون متطابقة
5) $\angle MPN \cong \angle OPL$	5) الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة
6) $\triangle MNP \cong \triangle LOP$	6) AAS

زوايا المضلعات المحاطة بدائرة

المثالان 5 ,4 يبيِّنان كيفية إيجاد قياسات زوايا المضلع المحاط بدائرة باستعمال النظريَّتين 8.9, 8.8.

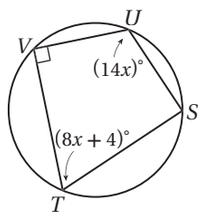
مثالان إضافيان

4 **جبر:** أوجد $m\angle B$ مستعملًا الشكل أدناه.



$m\angle B = 76°$

5 **شارات:** الشارة علامة مميزة تدل على مرتبة أو عمل الشخص في حقلٍ ما أو عضويته أو إنجازاته. والشارة المبيّنة أدناه هي شكل رباعي محاط بدائرة، أوجد $m\angle S, m\angle T$.



$m\angle S = 90°$

$m\angle T = 68°$

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير: هناك استراتيجية أخرى يمكن استعمالها؛ لإيجاد قياسات الزوايا المجهولة؛ وتعتمد على مجموع قياسات الزوايا الداخلية في الشكل الرباعي. إذ يمكن إيجاد قياس الزاوية المجهولة، بطرح مجموع قياسات الزوايا الثلاث الأخرى من 360° ومن أمثلة ذلك استعمالها في إثبات أن شكلًا رباعيًّا ما محاط بدائرة أم لا.

التعليم باستعمال التقنيات

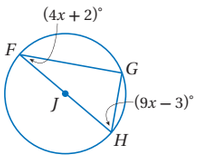
إنترنت: اطلب إلى الطلاب البحث في الإنترنت عن تطبيقٍ تفاعُليٍّ للزوايا المحيطية، ثم اطلب إليهم استكشاف المفهوم بسحب الزاوية، لملاحظة كيفيّة تغيّر قياس القوس.

المحتوى الرياضي

النقاط الدائرية: النقاط التي تقع على دائرة واحدة تسمى نقاطًا دائريةً، وأي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تكون دائريةً دائمًا؛ أي أنه يوجد دائرة واحدة دائمًا تحوي ثلاث نقاط لا تقع على استقامةٍ واحدةٍ، ويُسمى الشكل الرباعي دائريًّا إذا وُجدت دائرة تمرُّ برؤوسه الأربعة، ولكي يكون الشكل الرباعي دائريًّا، يجب أن تكون كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتين.

مثال 4 إيجاد قياسات زوايا المثلث المحاط بدائرة

جبر: أوجد $m\angle F$ مستعملًا الشكل المجاور.



$\triangle FGH$ قائم الزاوية؛ لأن $\angle G$ محيطية تقابل نصف دائرة.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$(4x + 2)° + 90° + (9x - 3)° = 180°$	بالتعويض
$(13x)° + 89° = 180°$	بالتبسيط
$13x = 91$	بطرح 89 من كلا الطرفين
$x = 7$	بقسمة كلا الطرفين على 13

إذن: $m\angle F = (4(7) + 2)° = 30°$.

تحقق من فهمك

4) إذا كان $m\angle F = (7x + 2)°, m\angle H = (17x - 8)°$، فأوجد قيمة x مستعملًا الشكل أعلاه. **4**

يمكنك إحاطة مختلف أنواع المثلثات، بما فيها المثلث القائم الزاوية بدائرة إلاّ أن أنواعًا معينة فقط من الأشكال الرباعية يمكنك إحاطتها بدائرة.

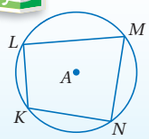
إرشادات للدراسة

الأشكال الرباعية: يمكن إثبات نظرية 8.9، بإثبات أن القوسين المقابلين لكل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي المحاط بدائرة يكوّنان دائرةً كاملةً.

نظرية 8.9

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان الشكل الرباعي محاطًا بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

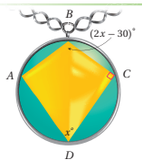


مثال: إذا كان الشكل الرباعي $KLMN$ محاطًا بـ $\odot A$، فإن $\angle L, \angle N$ متكاملتان و $\angle K, \angle M$ متكاملتان أيضًا.

سوف تُبرهن النظرية 8.9 في السؤال 27

مثال 5 من واقع الحياة إيجاد قياسات الزوايا

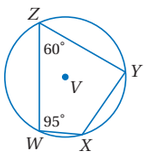
مجوهرات: يحتوي العقد الظاهر في الشكل على جوهرة بصورة مضلع رباعي محاط بدائرة، أوجد $m\angle A, m\angle B$.



بما أن $ABCD$ شكل رباعي محاط بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

$m\angle A + m\angle C = 180°$ $\quad m\angle B + m\angle D = 180°$	كل زاويتين متقابلتين في الرباعي الدائري متكاملتين
$m\angle A + 90° = 180°$ $\quad (2x - 30)° + x° = 180°$	بالتعويض
$m\angle A = 90°$ $\quad (3x)° - 30° = 180°$	بالتبسيط
$3x = 210$	بإضافة 30° لكلا الطرفين
$x = 70$	بقسمة كلا الطرفين على 3

إذن: $m\angle A = 90°, m\angle B = (2(70) - 30)° = 110°$.



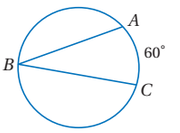
تحقق من فهمك

5) المضلع $WXYZ$ شكل رباعي محاط بِـ $\odot V$، أوجد $m\angle X, m\angle Y$. **120°; 85°**

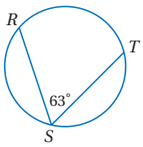
تأكـد

المثال 1 أوجد كل قياس ممّا يأتي:

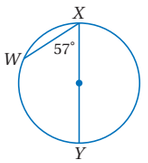
1) $m\angle B$ **30°**



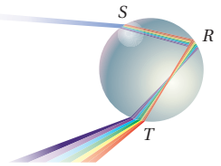
2) $m\widehat{RT}$ **126°**



3) $m\widehat{WX}$ **66°**

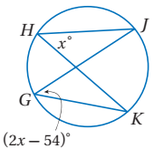


4) علوم: يُبيّن الشكل المجاور انكسار أشعة الضوء في قطرة مطر لإنتاج ألوان الطيف، فإذا كان $m\widehat{ST} = 144°$، فأوجد $m\angle R$؟ **72°**

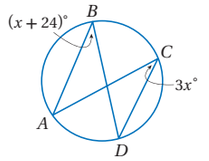


المثال 2 **جبر:** أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

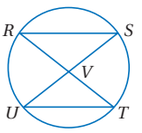
5) $m\angle H$ **54°**



6) $m\angle B$ **36°**



المثال 3 **7) برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. انظر الهامش

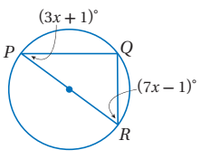


المعطيات: $\overline{RT}$ تُنصِّف $\overline{SU}$.

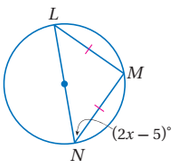
المطلوب: $\triangle RVS \cong \triangle UVT$

المثالان 4, 5 **جبر:** أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

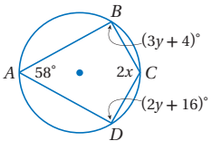
8) $m\angle R$ **62°**



9) x **25°**



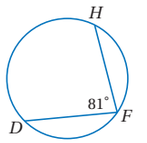
10) $m\angle C, m\angle D$ **122°; 80°**



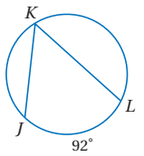
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد كل قياس ممّا يأتي:

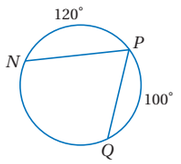
11) $m\widehat{DH}$ **162°**



12) $m\angle K$ **46°**



13) $m\angle P$ **70°**



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 10–1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

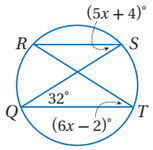
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	11–26، 33–36، 38–48
ضمن ضمن المتوسط	11–27 فردي، 29–36، 38–48
فوق فوق المتوسط	27–46، (اختياري: 47, 48)

7) البرهان:

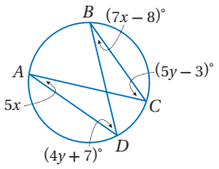
العبارات	المبررات
1) $\overline{RT}$ ينصف $\overline{SU}$	1) معطيات
2) $\overline{SV} \cong \overline{VU}$	2) تعريف منصف القطعة المستقيمة
3) $\angle SRT$ تقابل $\widehat{ST}$. $\angle SUT$ تقابل $\widehat{ST}$	3) تعريف القوس المقابل
4) $\angle SRT \cong \angle SUT$	4) الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه متطابقة
5) $\angle RVS \cong \angle UVT$	5) الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة
6) $\triangle RVS \cong \triangle UVT$	6) AAS

المثال 2 **جبر:** أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:



14) $m\angle R$ **32°**

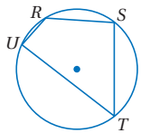
15) $m\angle S$ **34°**



16) $m\angle A$ **20°**

17) $m\angle C$ **47°**

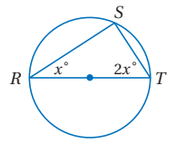
المثال 3 **18) برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. **انظر ملحق الإجابات.**



المعطيات: $m\angle T = \frac{1}{2} m\angle S$

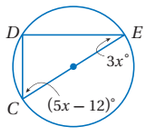
المطلوب: $m\overset{\frown}{TUR} = 2m\overset{\frown}{US}$

المثال 4 **جبر:** أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:



19) x **30**

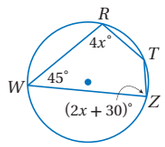
21) $m\angle T$ **60°**



20) x **12.75**

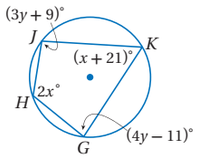
22) $m\angle C$ **51.75°**

المثال 5 **جبر:** أوجد كلّ قياسٍ ممّا يأتي:



23) $m\angle T$ **135°**

25) $m\angle Z$ **80°**



24) $m\angle H$ **106°**

26) $m\angle G$ **93°**

27) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 8.9 . **انظر ملحق الإجابات.**

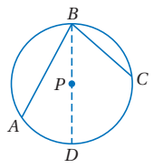
برهان: برهن النظرية **8.6** لحالتَي الزاوية المحيطية في الدائرة فيما يأتي:

28) الحالة الثانية: **انظر ملحق الإجابات.**

المعطيات: يقع المركز P داخل $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC}$

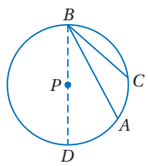


29) الحالة الثالثة: **انظر الهامش**

المعطيات: يقع المركز P خارج $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC}$



برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد لكلٍّ من النظريتين الآتيتين: **انظر ملحق الإجابات**

30) النظرية 8.7 ، برهانًا ذا عمودين.

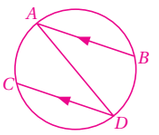
31) النظرية 8.8 ، برهانًا حرًّا.

إجابة:

29) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $m\angle ABC = m\angle DBC - m\angle DBA$	1) مسلمة جمع الزوايا، خاصية الطرح
2) $m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{DC} - m\overset{\frown}{DA}$	2) مسلمة جمع الأقواس، خاصية الطرح
3) $\frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DC} - \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DA}$	3) خاصية الضرب
4) $m\angle DBA = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DA}$, $m\angle DBC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DC}$	4) قياس الزاوية المحيطية التي يكون أحد ضلعَيها قطرًا في الدائرة، يساوي نصف قياس القوس المقابل لها (الحالة 1).
5) $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DC} - \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DA}$	5) بالتعويض (الخطوتان 1, 4)
6) $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AC}$	6) بالتعويض (الخطوتان 3,5)

32a)



32b) إجابة ممكنة: $m\angle A = 30°, m\angle D = 30°$؛ $m\overset{\frown}{AC} = 60°, m\overset{\frown}{BD} = 60°$؛ القوسان متطابقان؛ لأن قياسيهما متساويان.

32c) إجابة ممكنة: يحصر الوتران المتوازيان في الدائرة قوسين متطابقين.

39) انظر إجابات الطلاب.

32) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا السؤال ستستقصي العلاقة بين القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

a) هندسيًّا: ارسم دائرة تحوي وترين متوازيين هما $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ مستعملًا الفرجار، ثم صِلْ A, D برسم $\overline{AD}$.

b) عدديًّا: أوجد $m\angle A, m\angle D$ مستعملًا المنقلة، ثم حدّد $m\overset{\frown}{AC}, m\overset{\frown}{BD}$، ما العلاقة بين هذين القوسين؟ فسّر إجابتك.

c) لفظيًّا: ارسم دائرةً أخرى وكرّر الخطوتين **a**, **b**، ثم ضع تخمينًا حول القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدِّد ما إذا كان يمكن إحاطة كلٍّ من الأشكال الرباعية الآتية بدائرة دائمًا أو أحيانًا أو لا يمكن أبدًا. برّر إجابتك. **36–33)** انظر ملحق الإجابات

33) المربع **34)** المستطيل **35)** المعين **36)** شكل الطائرة الورقية

37) تحدٍّ: إذا كان مربع ما محاطًا بدائرة، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟ $\frac{\pi}{2}$

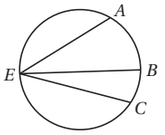
38) اكتب: إذا كان مثلث قائم زواياه $90°–45°–45°$ محاطًا بدائرة، وأُعطيت نصف قطر الدائرة، فاشرح طريقة لإيجاد طولَي ساقَي هذا المثلث. انظر ملحق الإجابات

39) مسألة مفتوحة: أوجد شعارًا من واقع الحياة يحوي مضلعًا محاطًا بدائرة، وارسمه.

40) اكتب: بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في الدائرة، وإذا كانت هاتان الزاويتان تقابلان القوس نفسه، فما العلاقة بينهما؟ انظر ملحق الإجابات

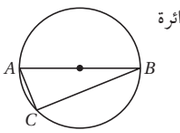
تدريب على اختبار

41) إذا كان: $m\overset{\frown}{AC} = 160°$، $m\angle BEC = 38°$، فأوجد قيمة $m\angle AEB$ مستعملًا الدائرة المجاورة:



A $42°$ **B** $61°$ **C** $80°$ **D** $84°$

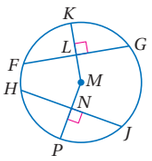
42) إجابة قصيرة: $\overline{AB}$ قطر في الدائرة المجاورة، وAC يساوي 8 in، وBC يساوي 15 in، أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها ومحيطها.



$d = 17$ in, $r = 8.5$ in, $C = 17\pi \approx 53.4$ in

مراجعة تراكمية

إذا كان: $m\overset{\frown}{HP} = 65°$, $HJ = 48$ in, $FL = 24$ in، فأوجد كلَّ قياسٍ ممَّا يأتي مستعملاً $\odot M$: (الدرس 3-8)



43) FG 48 in **44)** $m\overset{\frown}{PJ}$ $65°$

45) NJ 24 in **46)** $m\overset{\frown}{HJ}$ $130°$

استعد للدرس اللاحق

جبر: افترض أن B نقطة منتصف $\overline{AC}$، استعمل المعلومات المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي لإيجاد القياسات المجهولة:

47) $AB = 4x - 5, BC = 11 + 2x, AC = ?$ 54

48) $AB = 10s + 2, AC = 49 + 5s, BC = ?$ 32

تنبيه لحل سؤال

الفرجار والمنقلة والمسطرة:
السؤال 32 يتطلب استعمال فرجار، ومنقلة ومسطرة.

تمثيلات متعددة:
في السؤال 32، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية، والقياسات، والوصف اللفظي؛ لاستقصاء العلاقة بين القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

4 التقويم

تعلُّم لاحق: اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة توضح كيف يساعدهم الدرس 4-8، حول الزوايا المحيطية، على فهم مماسات الدائرة.

التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة الدرسين 4–8, 3–8، بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (68)



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-4 تدريبات إعادة التعليم

الزوايا المحيطية

الزوايا المحيطية:

الزاوية المحيطية زاوية يقع رأسها على الدائرة، ويحتوي ضلعاها على وترين في الدائرة، ففي $\odot G$، القوس الأصغر $\overset{\frown}{DF}$ هو القوس المقابل للزاوية المحيطة $\angle DEF$.

توجد ثلاث حالات للزاوية المحيطية في الدائرة.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
يقع مركز الدائرة P على أحد ضلعَي الزاوية المحيطية.	يقع مركز الدائرة P داخل الزاوية المحيطية.	يقع مركز الدائرة P خارج الزاوية المحيطية.

والنظرية الآتية صحيحة لهذه الحالات الثلاث جميعها.

8.6	نظرية الزاوية المحيطية	قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها. في $\odot G$ أعلاه: $m\angle DEF = \frac{1}{2}\, m\overset{\frown}{DF}$

إذا قابلت زاويتان محيطيّتان القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.

مثال في $\odot G$ أعلاه: $m\overset{\frown}{DF} = 90°$، أوجد $m\angle DEF$.

$\angle DEF$ زاوية محيطة؛ لذا فإن قياسها يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

$$m\angle DEF = \frac{1}{2}\, m\overset{\frown}{DF}$$
$$= \frac{1}{2}\,(90°) = 45°$$

تمارين

أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

1) $m\overset{\frown}{AC}$ $72°$ 2) $m\angle N$ $31°$ 3) $m\overset{\frown}{QSR}$ $226°$

جبر، أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

4) $m\angle U$ $30°$ 5) $m\angle T$ $19°$ 6) $m\angle A$ $58°$ 7) $m\angle C$ $45°$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الزوايا المحيطية

زوايا المضلعات المحاطة بدائرة:

المضلّع المحاط بدائرة: هو مضلع تقع رؤوسه كلُّها على الدائرة نفسها، والمضلّعات المُحاطة بدائرةٍ لها عدة خصائص منها:

8.8	تقابل الزاوية المحيطة في المثلث قطرًا أو نصف دائرة، إذا وفقط إذا كانت هذه زاوية قائمة.	إذا كان $\overset{\frown}{BCD}$ نصف دائرة، فإن $m\angle BCD = 90°$، وإذا كان $m\angle C = 90°$، فإن $\overset{\frown}{BCD}$ نصف دائرة، ويكون $\overline{BD}$ قطرًا فيها.
8.9	كلّ زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي المحاط بدائرةٍ متكاملتان.	في الشكل الرباعي $ABCD$ المحاط بدائرة $m\angle A + m\angle C = 180°$ و $m\angle ABC + m\angle ADC = 180°$

مثال أوجد $m\angle K$ في الشكل المجاور.

$\overset{\frown}{KL} \cong \overset{\frown}{KM}$ إذن $KL = KM$، فيكون هذا المثلث متطابق الضلعين،

لذا فإن: $m\angle L = m\angle M = (3x + 5)°$.

$m\angle L + m\angle M + m\angle K = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$(3x + 5)° + (3x + 5)° + (5x + 5)° = 180°$	بالتعويض
$11x + 15 = 180$	بالتبسيط
$11x = 165$	بطرح 15 من الطرفين
$x = 15$	بقسمة كلّ طرف على 11

إذن: $m\angle K = (5 + 5(15))° = 80°$.

تمارين

جبر، أوجد كلّ قيمة أو قياس ممّا يأتي:

1) x $39°$ 2) $m\angle W$ $51°$ 3) x 16 4) $m\angle T$ $58°$ 5) $m\angle R$ $105°$ 6) $m\angle S$ $70°$ 7) $m\angle W$ $72°$ 8) $m\angle X$ $86°$

تدريبات المهارات (23) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-4 تدريبات المهارات

الزوايا المحيطية

أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

1) $m\overset{\frown}{XY}$ $46°$ 2) $m\angle E$ $81°$ 3) $m\angle R$ $50°$ 4) $m\overset{\frown}{MP}$ $118°$

جبر، أوجد كلّ قياس ممّا يأتي:

5) $m\angle N$ $17°$ 6) $m\angle C$ $43°$ 7) $m\angle L$ $54°$ 8) $m\angle A$ $89°$ 9) $m\angle J$ $58°$ 10) $m\angle S$ $95°$ 11) $m\angle K$ $32°$ 12) $m\angle R$ $110°$

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-4 تدريبات حل المسألة

الزوايا المحيطية

1) **سيوف،** تُضاء حلبة السيرك الدائرية بخمسة مصابيح موضوعة على أبعاد متساوية أحدها عن الآخر حول الحلبة كما في الشكل أدناه، أوجد $m\angle 1$، ووضّح إجابتك.

$72°$، لأن الدائرة قسمت إلى خمسة أقواس زاوية كلّ منها $72° = \frac{360°}{5}$ ؛ $\angle 1$ زاوية محيطية تقابل قوسين من الأقواس الخمسة قياس كلّ منهما $72°$؛ أي أن: $m\angle 1 = 72°$

2) **مجال الرؤية،** يبيّن الشكل أدناه منظرًا علويًّا لشخصين يقفان أمام جدار مستطيل عالٍ جدًّا، ويمثل الجدار وترًا في دائرة تمرُّ بموقعَي الشخصين، أيّ الشخصين حجب الجدار عنه قدرًا أكبر من مجال رؤيته الأفقية؟

الجدار

لا أحد، كلاهما متساويان في مقدار مجال الرؤية المحجوبة عنهما، فكلاهما يقفان عند زاويتين محيطتين على نفس القوس، وبالتالي تكونان متساويتين.

3) **مَعين،** يحاول عبد الله أن يرسم دائرةً تُحيط بمعين ليس مربعًا، ولكنه يجد صعوبةً في ذلك، فهل تستطيع أن تساعده؟ فسّر إجابتك.

لا؛ لأنه من المستحيل عمل ذلك؛ لأن الزوايا المتقابلة في المعين تكون متطابقة، إذا كان المعين محاطًا بدائرة، فإن مجموع قياسَي كل زاويتين متقابلتين يساوي $180°$، وهذا يحتم أن تكون كل واحدة من زواياه $90°$، والمعين ذو الزوايا القائمة يكون مربعًا.

4) **شوارع،** في الشكل أدناه، البُعد بين نقطة تقاطع شارعَي الزهراء والفيحاء ونقاطع شارعي الزهراء والأمل، يساوي ثلاثة كيلومترات.

الأمل

ما بُعدُ نقطة تقاطع شارعي الفيحاء والأمل عن نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتي تقاطع شارعَي الفيحاء والزهراء ونقاطع شارعي الأمل والزهراء؟ ووضّح إجابتك.

1.5 km ؛ بما أن $\angle A$ قائمة، فإن $\angle BDC$ زاوية مستقيمة، إذن $\angle BDC$ زاوية مركزية في الدائرة التي مركزها D، أي أن $\overline{AD} = \overline{BD}$

إذن $AD = 1.5\,km$

5) **المضلع السداسي المحاط بدائرة،** ستبرهن أن مجموع قياسات الزوايا الثلاث الداخلية غير المتتالية في المضلع السداسي المحاط بدائرةٍ يساوي $360°$

a) ما العلاقة بين $\angle A$ و $\angle BCF$؟ **متكاملتان**

وما العلاقة بين $\angle E$ و $\angle DCF$؟ **متكاملتان**

b) أثبت أن: $m\angle A + m\angle BCD + m\angle E = 360°$.

$= m\angle A + m\angle BCD + m\angle E$

$= m\angle A + (m\angle BCF + m\angle DCF) + m\angle E$

$= (m\angle A + m\angle BCF) + (m\angle DCF + m\angle E)$

$= 180° + 180° = 360°$



مصادر الدرس 4 - 8

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

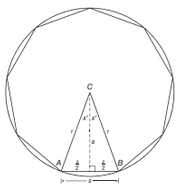
التدريبات الإثرائية (25)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-4 التدريبات الإثرائية

سبع للمضلعات المنتظمة:

افترض أن مضلّعًا منتظمًا عدد أضلاعه n محاط بدائرة نصف قطرها r، والشكل أدناه يبيّن أحد المثلثات المتطابقة الضلعين المتكونة من توصيل نهايتي أحد أضلاع المضلّع المنتظم بمركز الدائرة C، وفي هذا الشكل، s هي طول ضلع المضلّع المنتظم و a طول العمود النازل من C على $\overline{AB}$.



استعمل معلوماتك المتعلقة بالمثلثات والنسب المثلثية لحل المسائل الآتية:

1) أوجد صيغةً تعبّر عن x بدلالة عدد الأضلاع n.

$$x = \left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

2) أوجد صيغةً تعبّر عن s بدلالة n و r، مستعملًا النسب المثلثية.

$$s = 2r\sin\left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

3) أوجد صيغةً تعبّر عن a بدلالة n و r، مستعملًا النسب المثلثية.

$$a = r\cos\left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

4) أوجد صيغةً تعبّر عن محيط المضلّع المنتظم، بدلالة n و r.

$$P = 2nr\sin\left(\frac{180}{n}\right)^\circ$$

كتاب التمارين (25)　دون ضمن فوق

8 - 4 الزوايا المحيطية

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

1) $m\angle X$ = 45°

2) $m\widehat{AB}$ = 88°

3) $m\widehat{JK}$ = 128°

4) $m\angle Q$ = 64.5°

جبر، أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

5) $m\angle W, m\angle Y$ = 22°, 52°

6) $m\angle A, m\angle D$ = 29°, 41°

7) **برهان**، اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $m\angle D = 2m\angle B$

المطلوب: $m\widehat{ADC} = \frac{1}{2}m\widehat{ABC}$

العبارات	المبررات
1) $m\angle D = 2m\angle B$	1) معطيات
2) $m\angle B = \frac{1}{2}m\widehat{ADC}$ و $m\angle D = \frac{1}{2}m\widehat{ABC}$	2) قياس الزاوية المحيطة يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.
3) $2m\angle B = \frac{1}{2}m\widehat{ABC}$	3) بالتعويض من الخطوة 1 في الخطوة 2
4) $m\widehat{ADC} = \frac{1}{2}m\widehat{ABC}$	4) بالتعويض من الخطوة 2 في الخطوة 3

جبر، أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

8) $m\angle A, m\angle C$ = 69°, 21°

9) $m\angle G, m\angle H$ = 73°, 98°

اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-8 إلى 4-8

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يُجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إليهم مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

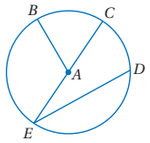
التقويم التكويني

اختبار منتصف الفصل، ص (70)

المطويات متابعة المطويات

شجّع الطلاب قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي دوّنوها في مطوياتهم حول الدروس من 1–8 إلى 4–8

أجب عن الأسئلة 1–3، مستعينًا بالدائرة أدناه. (الدرس 1-8)



1) سمّ الدائرة. $\odot A$

2) سمّ قطرًا. $\overline{EC}$

3) سمّ وترًا لا يكون قطرًا. $\overline{ED}$

4) **دراجة هوائية:** قطر إطار دراجة هوائية يساوي 24 in (الدرس 1-8)

a) أوجد محيط إطار الدراجة. **75.4 in** تقريبًا

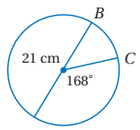
b) ما المسافة بالبوصات التي تقطعها الدراجة عندما يدور إطارها 100 دورة؟ **7540 in** تقريبًا

أوجد قطر ونصف قطر الدائرة المُعطَى محيطها في كلٍّ من السؤالين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 1-8)

5) $C = 23$ cm **7.32 cm; 3.66 cm**

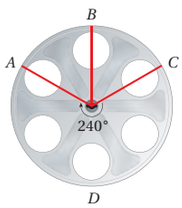
6) $C = 78$ ft **24.83 ft; 12.41 ft**

7) **اختيار من متعدد:** أوجد طول $\overset{\frown}{BC}$ في الشكل أدناه مقربًا إلى أقرب جزء من مئة: (الدرس 2-8) **A**



A 2.20 cm
B 4.40 cm
C 30.79 cm
D 61.58 cm

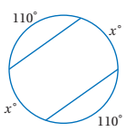
8) **أفلام:** قطر بكرة الفيلم الظاهرة في الشكل أدناه 14.5 in (الدرس 2-8)



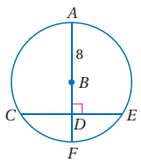
a) أوجد $m\overset{\frown}{ADC}$. **240°**

b) أوجد طول $\overset{\frown}{ADC}$. **30.4 in** تقريبًا

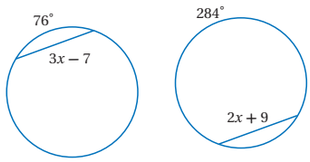
9) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. (الدرس 3-8) **70**



10) في $\odot B$، إذا كان $CE = 13.5$ cm، فأوجد BD مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 3-8) **4.29 cm**

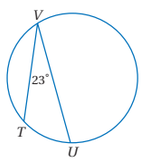


11) إذا كانت الدائرتان أدناه متطابقتين، فأوجد قيمة x وطول الوتر. (الدرس 3-8) **$x = 16$; 41**

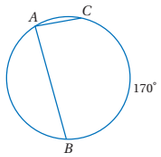


أوجد القياس المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-8)

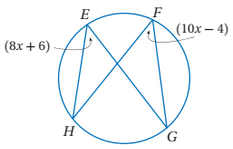
12) $m\overset{\frown}{TU}$ في الدائرة أدناه: **46°**



13) $m\angle A$ في الدائرة أدناه: **85°**



14) **اختيار من متعدد:** أوجد قيمة x في الشكل أدناه: (الدرس 4-8) **C**



A 1.8
B 46
C 5
D 90

15) رُسم مربع طول ضلعه 14 cm، بحيث تقع رؤوسه على دائرةٍ، فما قطر هذه الدائرة؟ (الدرس 4-8) **$14\sqrt{2}$ cm**

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 1-8 إلى 4-8		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

8-5 المماسات
Tangents

فيما سبق:
درستُ استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل خصائص المماسات لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة.
- أحل مسائل تتضمّن المضلعات المحيطة بدائرة.

المفردات:
المماس
tangent
نقطة التماس
point of tangency
المماس المشترك
common tangent

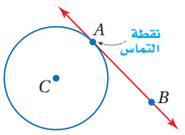
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

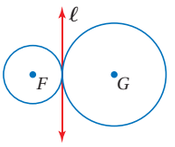


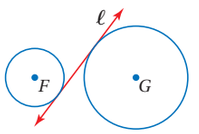
كانت الدراجات الهوائية تُحرّك سابقًا بدفع القدم على الأرض، أمّا الدّراجات الحديثة، فإنها تستعمل الدواسات والسلاسل والتروس، حيث تدور السلسلة حول تروس دائرية. ويُقاس طول السلسلة بين الترسين من نقطتَي تماسّ السلسلة مع الترسين.

المماسات: **المماس** هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة ويقطعها في نقطةٍ واحدةٍ فقط، تُسمّى **نقطة التماس**. $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لِـ $\odot C$ عند النقطة A، ويُسمّى كلٌّ من $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ مماسًا للدائرة أيضًا.



المماس المشترك هو مستقيم أو نصف مستقيم أو قطعة مستقيمة تمس الدائرتين في المستوى نفسه، وفي الشكلين أدناه المستقيم ℓ مماس مشترك للدائرتين F , G.

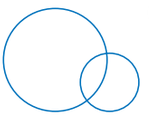




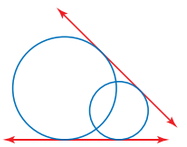
مثال 1 **تحديد المماسات المشتركة**

ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممَّا يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

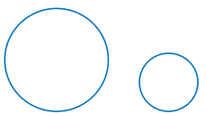
a)



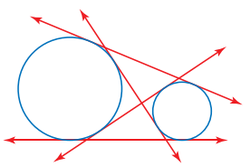
هاتان الدائرتان لهما مماسان مشتركان



b)



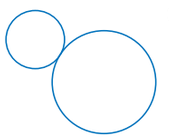
هاتان الدائرتان لهما 4 مماسات مشتركة



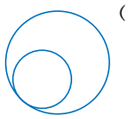
تحقق من فهمك

ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممَّا يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك". انظر الهامش

1A)



1B)



1 التركيز

الترابط الرأسي

قبل الدرس 8-5
استعمال نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية.

الدرس 8-5
استعمال خصائص المماسات؛ لإيجاد قياسات تتعلق بالدائرة.
حل مسائل تتضمن المضلعات المحيطة بدائرة.

ما بعد الدرس 8-5
إيجاد قياس الزوايا المتكونة من المستقيمات التي تتقاطع مع الدائرة.

2 التدريس

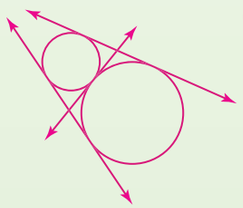
أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:
- ما الشكل الذي تمثله التروس؟ دائرة.
- كيف تشبه السلسلة التي في الدراجة الهوائية مماسَّ الدائرة؟
تمثل السلسلة مستقيمًا يصل الدائرتين معًا (الترسين) بنقطةٍ واحدةٍ على كلٍّ منهما، وهذا يشبه المماس المشترك وهو مستقيم أو نصف مستقيم أو قطعة مستقيمة تمس الدائرتين في المستوى نفسه.
- كيف تختلف السلسلة عن المماس؟
السلسلة تمس التروس في أكثر من نقطة، بينما المماس مستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط.

إجابات (تحقق من فهمك):

1A)



1B)



مصادر الدرس 8-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (212)	• تنويع التعليم ص (212, 211)	• تنويع التعليم ص (211)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (26)	• كتاب التمارين ص (26)	• كتاب التمارين ص (26)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

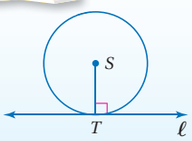
أقصر مسافة من المماس إلى مركز الدائرة هي نصف القطر المار بنقطة التماس.

النظرية 8.10

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون المستقيم مماسًّا لدائرةٍ في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عموديًّا على نصف القطر عند نقطة التماس.

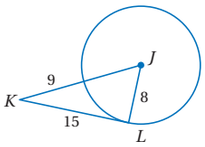
مثال: يكون المستقيم ℓ مماسًّا لـ $\odot S$، إذا وفقط إذا كان $\overline{ST} \perp \ell$.



ستبرهن جزأي النظرية 8.10 في السؤالين 24, 25

مثال 2 تحديد المماس

$\overline{JL}$ نصف قطر في $\odot J$، حدّد ما إذا كانت $\overline{KL}$ مماسًّا لـ $\odot J$ أم لا، برّر إجابتك.



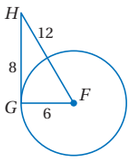
اختبر ما إذا كان $\triangle JKL$ قائم الزاوية.

$8^2 + 15^2 \stackrel{?}{=} (8+9)^2$ عكس نظرية فيثاغورس

$289 = 289$ ✓ بالتبسيط

لذا فإن $\triangle JKL$ قائم الزاوية في $\angle JLK$؛ أي أن $\overline{KL}$ عمودية على $\overline{JL}$ عند النقطة L.

وبحسب النظرية 8.10 يكون $\overline{KL}$ مماسًّا لـ $\odot J$



تحقق من فهمك

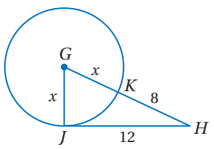
2) حدّد ما إذا كان $\overline{GH}$ مماسًّا لـ $\odot F$ أم لا، برّر إجابتك.

لا؛ $100 \neq 324$

يمكنك استعمال النظرية 8.10 لإيجاد قيمٍ مجهولةٍ.

مثال 3 استعمال المماس لإيجاد القيم المجهولة

$\overline{JH}$ مماس لـ $\odot G$ عند J، أوجد قيمة x.



وفقًا للنظرية 8.10، يكون $\overline{JH} \perp \overline{GJ}$، إذن $\triangle GHJ$ قائم الزاوية.

$GJ^2 + JH^2 = GH^2$ نظرية فيثاغورس

$x^2 + 144 = (x+8)^2$ $GJ = x, JH = 12, GH = x + 8$

$x^2 + 144 = x^2 + 16x + 64$ بالضرب

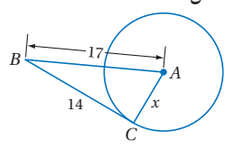
$80 = 16x$ بالتبسيط

$5 = x$ بقسمة كلا الطرفين على 16

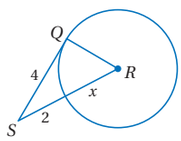
تحقق من فهمك

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًّا للدائرة، هي مماسٌّ فعلًا.

(3A)



(3B) $\sqrt{93} \approx 9.64$

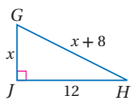


3

إرشادات لحل المسألة

حل مسألة أبسط:

يمكنك استعمال استراتيجية حل مسألة أبسط، برسم المثلث القائم من دون الدائرة وتسميته، والشكل أدناه يُبيّن رسم المثلث في المثال 3



المماسات

الأمثلة 1-4 تبيّن كيفية استعمال نظريات المماس لحل مسائل تتضمن مماسات.

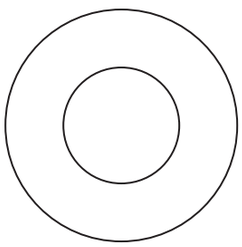
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

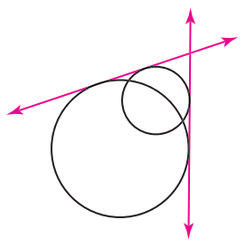
1 ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممَّا يأتي، وفي حالة عدم وجود مثل هذه المماسات، اكتب لا يوجد مماس مشترك.

(a)

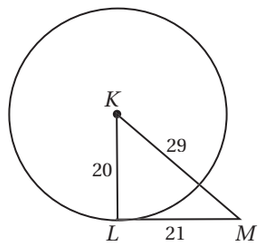


لا يوجد مماس مشترك

(b)



2 $\overline{KL}$ نصف قطر في $\odot K$ الموضحة في الشكل أدناه، حدد هل $\overline{LM}$ مماسٌّ لهذه الدائرة، برر إجابتك.

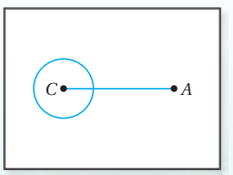


$\overline{LM}$ مماس للدائرة K بحسب عكس نظرية فيثاغورس.

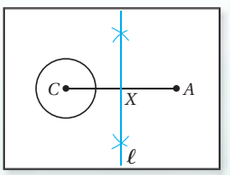
يمكنك استعمال النظريتين 8.10 , 8.8؛ لإنشاء مماسات الدائرة.

إنشاءات هندسية

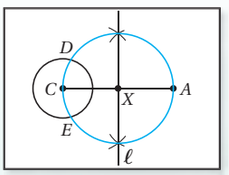
إنشاء مماسٍ لدائرةٍ من نقطة خارجها



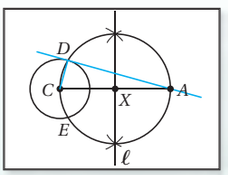
الخطوة 1: ارسم الدائرة C مستعملًا الفرجار، وحدّد نقطة A خارجها، ثم ارسم $\overline{CA}$.



الخطوة 2: أنشئ العمود المنصّف لِـ $\overline{CA}$ وسَمِّه ℓ ، وسمِّ نقطة تقاطع ℓ مع $\overline{CA}$ النقطة X .



الخطوة 3: أنشئ الدائرة X بنصف قطر $\overline{XC}$، وسمّ نقطتَي تقاطع الدائرتين D, E .



الخطوة 4: ارسم $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{DC}$. $\angle ADC$ تقابل قطرًا للدائرة X ؛ إذن فهي زاوية قائمة؛ لذا فإن $\overleftrightarrow{AD}$ مماسٌّ للدائرة C .

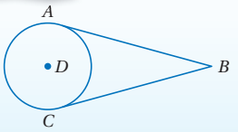
ستنشئ مماسًا لدائرةٍ من نقطةٍ عليها في السؤال 26

يمكنك أن ترسم مماسين للدائرة نفسها من نقطة واحدة خارجها.

نظرية 8.11

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان.



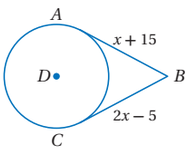
مثال: إذا كان $\overline{AB}, \overline{CB}$ مماسان لِـ $\odot D$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.

ستبرهن النظرية 8.11 في السؤال 22

مثال 4

استعمال المماسات المتطابقة لإيجاد قياسات

جبر: إذا كان $\overline{AB}, \overline{CB}$ مماسان للدائرة D ، فأوجد قيمة x .

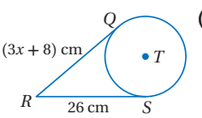


$AB = CB$	المماسان المرسومان من نقطة خارج الدائرة متطابقان
$x + 15 = 2x - 5$	بالتعويض
$15 = x - 5$	بطرح x من كلا الطرفين
$20 = x$	بإضافة 5 لكلا الطرفين

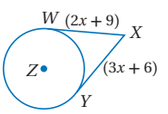
تحقق من فهمك

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين، مفترضًا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسًّا للدائرة هي مماسٌّ فعلًا.

(4A) 6



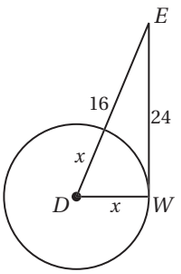
(4B) 3



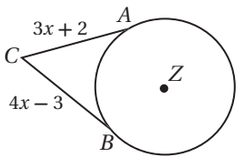
مثالان إضافيان

3 في الشكل أدناه، $\overline{WE}$ مماس لِـ $\odot D$ عند النقطة W، أوجد قيمة x .

$x = 10$



4 **جبر:** $\overline{AC}, \overline{BC}$ مماسان للدائرة Z، فأوجد قيمة x .



$x = 5$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الاجتماعيون: نظّم الطلاب مجموعات صغيرة، واشرح لهم أن شركةً ما تريد أن تسوّق لعبة قاعدتها دائرية الشكل قطرها 5 in ، وأن مهمتهم هي تصميم صندوق توضع داخله اللعبة، بحيث يأخذ الصندوق أقل مساحةٍ ممكنةٍ من رفِّ العرض، وتكون جوانبه مسطحةً وليست دائريةً. ثم اطلب إليهم أن يرسموا اللعبة الدائرية والصندوق الذي ستوضع فيه، وأن يسجلوا القياسات على الرسم. إذا كان طول الرف 10 ft وعرضه 3 ft ، فكم صندوقًا يمكن عرضه من طبقةٍ واحدةٍ على هذا الرف؟ وما شكل صندوق اللعبة الذي يسمح بعرض العدد الأكبر من اللُّعب على الرف؟ عرض الرف = 3 ft = 36 in، طول الرف = 10 ft = 120 in، قطر قاعدة اللعبة = 5 in، بقسمة كلٍّ من طول وعرض الرف على 5 in ينتج أنه يمكن وضع 24 × 7 صناديق على الرف؛ لذا فإن عدد الصناديق التي يمكن وضعها من طبقة واحدة = 168 صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات.

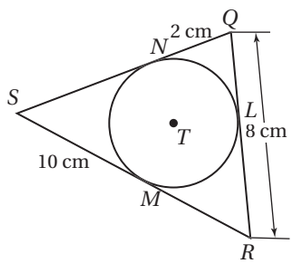
المضلعات التي تحيط بدائرة

يمكن للمضلعات أيضًا أن تحيط بدائرة.

مثال 5 يبيّن كيفية إيجاد محيط المثلث باستعمال النظريات المعروضة في هذا الدرس.

مثال إضافي

5 **تغليف:** تُباع قطع بسكويت دائرية مغلفة بأغلفة مثلثية الشكل، إذا أحاط $\triangle QRS$ الدائرة T، فأوجد محيط $\triangle QRS$.



36 cm

المحتوى الرياضي

المماسات: وضح للطلاب أنه بالرغم من أن المماس يقطع الدائرة، إلّا أنه لا يقع أيُّ جزءٍ منه داخلها، وأن النقطة الوحيدة المشتركة بين الدائرة والمماس هي نقطة التماس فقط.

التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة: اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة في مدوّنة الفصل؛ لمناقشة الأسباب التي تجعل رسم مضلع منتظم يحيط بالدائرة ممكنًا دائمًا، وأن يتعلم الطلاب أنه كُلَّما زاد عدد أضلاع المضلع، كان شكله أقرب إلى شكل الدائرة.

تنبيه!

تحديد المضلّعات المحيطة بدائرة: إذا مسّت الدائرة بعض أضلاع المضلع ولم تمسها جميعها، فلا يُعدُّ المضلع محيطًا بالدائرة، وهذا ما يتضح في الجدول.

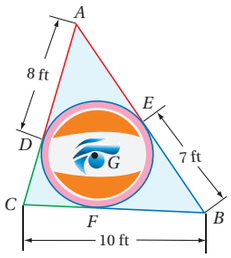
المضلّعات المحيطة بدائرة: يُحيط المضلّع بالدائرة، إذا كان كل ضلع من أضلاعه مماسًّا للدائرة.

مضلعات محيطة بدائرة	مضلعات ليست محيطة بدائرة
	

يمكنك استعمال النظرية 8.11؛ لإيجاد قياسات مجهولة في المضلّعات المحيطة بدائرة.

مثال 5 من واقع الحياة — إيجاد قياسات في المضلعات المحيطة بدائرة

تصميم مصور: صمَّم منصور الشعار المبيّن في الشكل المجاور، إذا كان $\triangle ABC$ محيطًا بالدائرة G، فأوجد محيطه.



الخطوة 1: أوجد القياسات المجهولة.

بما أن $\triangle ABC$ يحيط بالدائرة G، فإن $\overline{AE}, \overline{AD}$ مماسّان للدائرة G، وكذلك $\overline{BE}, \overline{BF}$ ، $\overline{CF}, \overline{CD}$ مماسات أيضًا.

إذن: $\overline{AE} \cong \overline{AD}, \overline{BF} \cong \overline{BE}, \overline{CF} \cong \overline{CD}$

لذا فإن: $AE = AD = 8\text{ ft}, BF = BE = 7\text{ ft}$.

وبتطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة ينتج أن $CF + FB = CB$

إذن: $CF = CB - FB = 10 - 7 = 3\text{ ft}$ ؛ لذا فإن: $CD = CF = 3\text{ ft}$.

الخطوة 2: أوجد محيط $\triangle ABC$.

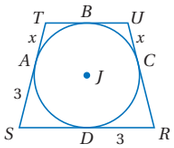
المحيط يساوي:

$$AE + EB + BC + CD + DA = 8 + 7 + 10 + 3 + 8 = 36$$

إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 36 ft.

تحقق من فهمك

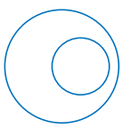
5) الشكل الرباعي $RSTU$ محيط بالدائرة J، إذا كان محيطه 18 وحدة، فأوجد قيمة x. **1.5 وحدة**



تأكد

المثال 1

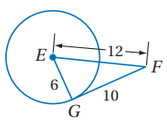
1) ارسم المماسات المشتركة للدائرتين المجاورتين، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك". **لا يوجد مماس مشترك.**



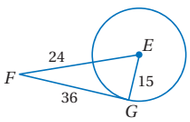
المثال 2

حدّد ما إذا كانت $\overline{FG}$ في كلٍّ من الشكلين الآتيين مماسًّا للدائرة E أم لا، وبرّر إجابتك.

2) لا؛ $136 \neq 144$



3) نعم؛ $1521 = 1521$



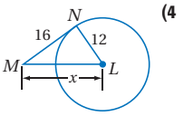
تنويع التعليم

دون ضمن

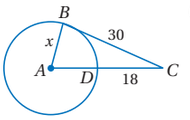
توسّع: رُسمت دائرة حول مربع، وكان نصف قطرها يساوي r، اطلب إلى الطلاب كتابة عبارة تمثل محيط المربع بدلالة r. $4r\sqrt{2} \approx 5.66r$

المثالان 3, 4 أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

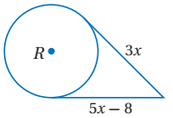
(4) 20



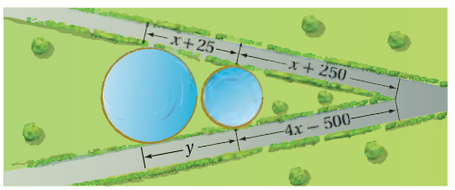
(5) 16



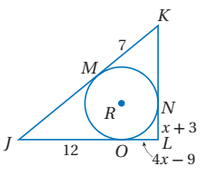
(6) 4



(7) **هندسة الحدائق:** خطط مهندس ممَّرين للمشاة يُشكّلان مماسين لبركتين دائريتين كما في الشكل أدناه. إذا كانت الأطوال معطاة بالأقدام، فأوجد قيمة كلٍّ من x و y. $x = 250; y = 275$



المثال 5 (8) **جبر:** المثلث JKL يُحيط بالدائرة R.



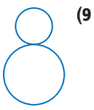
a) أوجد قيمة x. 4

b) أوجد محيط $\triangle JKL$. 52 وحدةً.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممَّا يأتي، وإذا لم يوجد مماس مشترك، فاكتب "لا يوجد مماس مشترك".

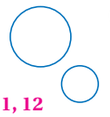
(9) انظر الهامش



(10) لا يوجد مماس مشترك



(11) 11, 12) انظر الهامش

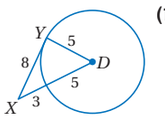


(12)

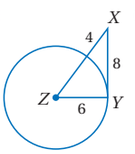


المثال 2 حدّد ما إذا كانت $\overline{XY}$ مماسًّا للدائرة المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين أم لا، وبرّر إجابتك.

(13) لا؛ $89 \neq 64$

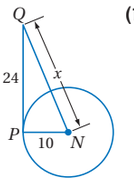


(14) نعم؛ $100 = 100$

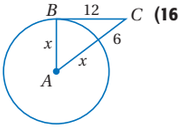


المثالان 3, 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

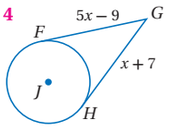
(15) 26



(16) 9



(17) 4



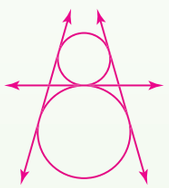
3 التدريب

التقويم التكويني

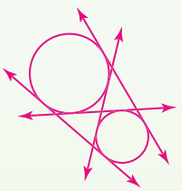
استعمل التمارين 8–1؛ للتحقق من فهم الطلاب؛ ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

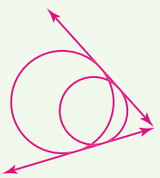
(9)



(11)



(12)

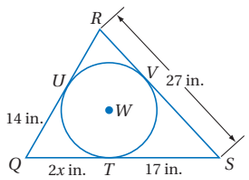


تنويع الواجبات المنزلية

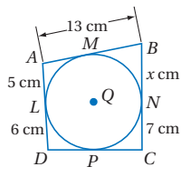
المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	19–9، 41–28
ضمن ضمن المتوسط	21–9 فردي، 26–22، 41–28
فوق فوق المتوسط	38–20، (اختياري: 41–39)

المثال 5 إذا كان المضلع يحيط بالدائرة، فأوجد قيمة x، ثم أوجد محيط المضلّع في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(18) **7; 82 in**



(19) **8; 52 cm**

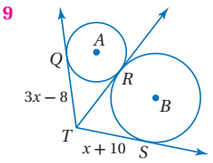


إرشادات للدراسة

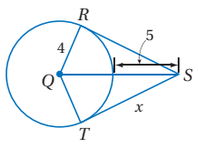
تحديد المماسات: لا تفترض أن القطع المستقيمة مماسات لمجرد أنها تبدو في الشكل كذلك إلا إذا طُلب إليك ذلك في السؤال. فيجب أن يحتوي الشكل على رمز الزاوية القائمة أو أن تكون الأطوال المبيّنة على الشكل تؤكّد أن الزاوية قائمة.

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

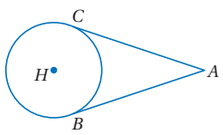
(20) **9**



(21) **8.06** تقريبًا



اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

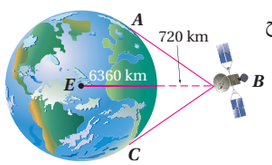


(22) برهان ذي عمودين للنظرية 8.11 **انظر ملحق الإجابات**

المعطيات: $\overline{AC}$ مماس لِـ $\odot H$ عند النقطة C.

$\overline{AB}$ مماس لِـ $\odot H$ عند النقطة B.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{AB}$



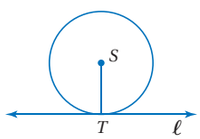
(23) أقمار اصطناعية: يرتفع قمر اصطناعيٌّ مسافة 720 km عن سطح الأرض التي نصف قطرها 6360 km، ويمكن منه رؤية المنطقة التي تقع بين المماسين $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ من سطح الأرض.

أوجد BA مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ. **3110.76 km**



الربط مع الحياة

يوجد أكثر من 8000 قطعة كبيرة من الركام المداري كالأقمار الاصطناعية ومخلفاتها التي تدور حول الأرض بسرعة 8 km في الثانية تقريبًا.

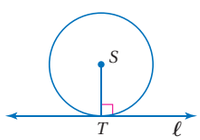


(24) برهان: اكتب برهانًا غير مباشر، لإثبات أنه إذا كان المستقيم مماسًّا للدائرة، فإنه يكون عموديًّا على نصف قطرها (الجزء 1 من النظرية 8.10)

المعطيات: ℓ مماس للدائرة S عند T؛ $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: $\ell \perp \overline{ST}$

(إرشاد: افترض أن ℓ ليس عموديًّا على $\overline{ST}$). **انظر الهامش**



(25) برهان: اكتب برهانًا غير مباشر؛ لإثبات أنه إذا كان المستقيم عموديًّا على نصف قطر الدائرة عند نقطة التقائهما على الدائرة؛ فإنه مماسٌّ لهذه الدائرة. (الجزء 2 من النظرية 8.10) **انظر ملحق الإجابات**

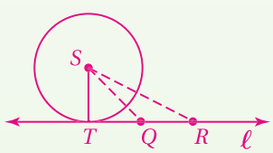
المعطيات: $\ell \perp \overline{ST}$، $\overline{ST}$ نصف قطر في $\odot S$.

المطلوب: إثبات أن ℓ مماس للدائرة S.

(إرشاد: افترض أن ℓ ليس مماسًا للدائرة S).

إجابات:

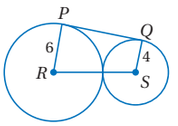
24) البرهان: افترض أن ℓ ليس عموديًّا على $\overline{ST}$، إذا لم يكن ℓ عموديًّا على $\overline{ST}$، فإنه توجد قطعة مستقيمة $\overline{SQ}$ أخرى تكون عمودية على ℓ. وأيضًا يوجد نقطة R على $\overrightarrow{TR}$ كما يظهر في الشكل أدناه، بحيث إن $\overline{QT} \cong \overline{QR}$. $\angle SQT$, $\angle SQR$ قائمتان من تعريف التعامد، ولذلك $\angle SQT \cong \angle SQR$, $\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$، إذن: $\triangle SQT \cong \triangle SQR$ بحسب SAS؛ وعليه فإن $\overline{ST} \cong \overline{SR}$؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، وبناءً عليه فإن كلًّا من T , R تقع على $\odot S$، لكن وجود نقطتين تقعان على ℓ وأيضًا تقعان على $\odot S$ أمرٌ يناقض الحقيقة المعطاة بأن ℓ مماس للدائرة $\odot S$ عند النقطة T؛ إذن $\ell \perp \overline{ST}$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.



26) **إنشاءات هندسية:** أنشئ مماسًّا لدائرة من نقطة واقعة عليها باتباع الخطوات الآتية: ارسم $\odot A$ مستعملًا الفرجار. اختر نقطة P على الدائرة وارسم $\overleftrightarrow{AP}$، ثم أنشئ مستقيمًا عموديًّا على $\overleftrightarrow{AP}$ يمر بالنقطة P، وسمِّ المماس المستقيم t. انظر الهامش

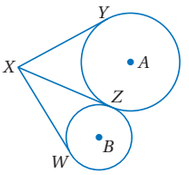
مسائل مهارات التفكير العليا

27) **تحدٍّ:** $\overline{PQ}$ مماس للدائرتين R, S كما في الشكل المجاور. أوجد PQ، وبرِّر إجابتك. انظر الهامش



28) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا يُحيط بدائرة، ومثلثًا محاطًا بدائرة. انظر الهامش

29) **تبرير:** $\overline{XY}, \overline{XZ}$ مماسان للدائرة A، و$\overline{XW}, \overline{XZ}$ مماسان للدائرة B كما في الشكل المجاور. فسّر لماذا تكون القطع المستقيمة $\overline{XY}, \overline{XZ}, \overline{XW}$ متطابقة رغم أن نصفَي قطرَي الدائرتين مختلفان.



30) **اكتب:** ما عدد مماسات الدائرة التي يمكن رسمها من نقطة خارجها، ومن نقطة عليها، ومن نقطة داخلها؟ برّر إجابتك. انظر الهامش

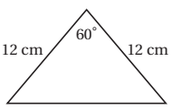
29) مماسّا الدائرة المرسومان من نقطة واحدة خارجها متطابقان، وفق النظرية 8.11؛ لذا فإن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$، وكذلك $\overline{XZ} \cong \overline{XW}$. إذن: $\overline{XW} \cong \overline{XZ} \cong \overline{XY}$، وذلك وفق خاصية التعدي.

تدريب على اختبار

31) نصف قطر $\odot P$ يساوي 10 cm، و$\overline{ED}$ مماسٌّ لها عند D، وتقع F على $\odot P$ وعلى القطعة المستقيمة $\overline{EP}$. إذا كان $ED = 24$ cm، فما طول $\overline{EF}$؟ **B**

A 10 cm **B** 16 cm **C** 21.8 cm **D** 26 cm

32) ما محيط المثلث المجاور؟ **C**

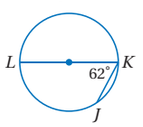


A 24 cm **B** 34.4 cm **C** 36 cm **D** 104 cm

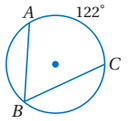
مراجعة تراكمية

أوجد كلّ قياس ممّا يأتي: (الدرس 4-8)

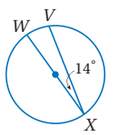
33) $m\widehat{JK}$ **56°**



34) $m\angle B$ **61°**



35) $m\widehat{VX}$ **152°**

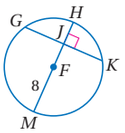


في $\odot F$، إذا كان: $m\widehat{GK} = 142°$, $GK = 14$ cm، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية: (الدرس 3-8)

36) $m\widehat{GH}$ **71°**

37) JK **7cm**

38) $m\widehat{KM}$ **109°**



استعد للدرس اللاحق

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

39) $15 = \frac{1}{2}[(360 - x) - 2x]$ **110**

40) $x + 12 = \frac{1}{2}[(180 - 120)]$ **18**

41) $x = \frac{1}{2}[(180 - 64)]$ **58**

تنبيه لحل سؤال

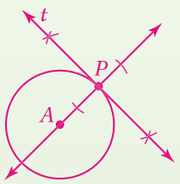
الفرجار والمسطرة:
يتطلب السؤالان 28 ,26 استعمال فرجار ومسطرة.

4 التقويم

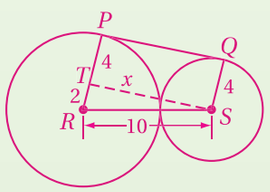
بطاقة مكافأة: اكتب مثالًا على السبورة لمثلث يتكون من المماس ونصف القطر والمستقيم المرسوم من مركز الدائرة إلى نقطةٍ واقعةٍ على المماس، ثم ضع أطوالًا على الشكل وحدّد مجهولًا، واطلب إلى الطلاب كتابة المعادلة اللازمة لإيجاد قيمة المجهول، وأن يقدموا الإجابة قبل مغادرتهم غرفة الصف.

إجابات:

26) إجابة ممكنة:



27) إجابة ممكنة:



باستعمال نظرية فيثاغورس ينتج أن: $2^2 + x^2 = 10^2$، إذن $x \approx 9.8$، وبما أن $TPQS$ مستطيل، فإن: $PQ = x = 9.8$.

28) إجابة ممكنة:



مثلث يحيط بدائرة



مثلث مُحاط بدائرة

30) يمكن رسم مماسين من نقطة خارج الدائرة حيث إن كلًّا منهما يمس الدائرة في نقطةٍ واحدةٍ، وفي جهتين متقابلتين، في حين يمكن رسم مماسٍّ واحد فقط من نقطة على الدائرة؛ لأن المماس هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطةٍ واحدةٍ فقط، بينما لا يمكن رسم أي مماسٍّ من نقطة داخل الدائرة؛ لأن المستقيم المار بداخل الدائرة يقطعها في نقطتين.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-5 تدريبات إعادة التعليم

المماسات

المماسات، مماس الدائرة

المِماس هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة، ويقطعها في نقطةٍ واحدةٍ فقط، تسمّى **نقطة المماس**، وهنالك علاقات مهمة عدة تتعلق بالمماسات.

المماس المشترك مستقيم أو نصف مستقيم أو قطعة مستقيمة تمس دائرتين واقعتين في المستوى نفسه.

8.10	يكون المستقيم مماسًا للدائرة في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر المار بنقطة التماس.	إذا كان $\overline{RP} \perp \overline{RS}$، فإن $\overline{RS}$ مماس لـ $\odot P$، وإذا كان $\overline{SR}$ مماسًا لـ $\odot P$، فإن $\overline{RS} \perp \overline{RP}$
8.11	إذا رسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها، فإنهما متطابقتان.	إذا كان $\overline{ST}$ و $\overline{SR}$ مماسين لـ $\odot P$، فإن $\overline{SR} \cong \overline{ST}$.

مثال

$\overline{AB}$ مماس لـ $\odot C$ عند B. أوجد قيمة x.

$\overline{AB}$ عماس لـ $\odot C$، وعليه فإن $\overline{AB}$ يعامد نصف القطر $\overline{BC}$. $\overline{CD}$ نصف قطر، إذن $CD = 8$ و $AC = 9 + 8 = 17$، وباستعمال نظرية فيثاغورس مع المثلث القائم ΔABC ينتج أن:

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ نظرية فيثاغورس

$x^2 + 8^2 = 17^2$ بالتعويض

$x^2 + 64 = 289$ بالتبسيط

$x^2 = 225$ بطرح 64 من الطرفين

$x = 15$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

تمارين

أوجد قيمة x، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

1) 4 — 8 — $x+3$ — 7 — 15

2) 25 — 20 — 15 — H — x

3) 12 — N — 12 — M — P — x — Q

4) 39 — 36 — T — x — S — U — 15 — R

5) 20 — Y — 21 — X — A — B — Z — x

6) P — 24 — Q — 17 — R

$\sqrt{865} \approx 29.41$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المماسات

المضلعات المُحيطة بدائرة:

يكون المضلّع مُحيطًا بدائرة، إذا كانت جميع أضلاعه مماسات للدائرة.

السداسي $ABCDEF$ محيط بـ $\odot P$، AB ، FA ، EF ، DE ، CD ، BC مماسات لـ $\odot P$.

المربع $GHJK$ محيط بـ $\odot Q$. KG ، JK ، JH ، GH مماسات لـ $\odot Q$.

مثال

ΔABC الموضح في الشكل المجاور محيط بـ $\odot O$.

أوجد محيط ΔABC.

ΔABC محيط بالدائرة $\odot O$، لذا فالنقاط D, E, F نقاط تماس.

إذن: $AD = AF,\ BE = BD,\ CF = CE$.

إذن محيط ΔABC يساوي:

$AD + AF + BE + BD + CF + CE = 12 + 12 + 6 + 6 + 8 + 8 = 52$

المحيط يساوي 52 وحدة.

تمارين

إذا كان المضلع يحيط بالدائرة، فأوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، ثم أوجد محيط المضلّع.

1) 23; 80 — 17 — 13 — x — 10

2) 8; 80 — 26 — 18 — 14

3) 4; 64 — $2x$ — 8 — 16

4) 10; 24 — 6 — x

5) 8; 24 — 8 — x

6) 6; 52 — 5 — $x+2$ — 9 — 4

تدريبات المهارات (28) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-5 تدريبات المهارات

المماسات

حدّد ما إذا كانت القطعة المستقيمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين مماسًا للدائرة المعطاة أم لا. وبرّر إجابتك.

1) $\overline{HI}$ — 40 — 9 — 41 — H — G — I

نعم؛ $9^2 + 40^2 = 41^2$

2) $\overline{AB}$ — 12 — 5 — 13 — A — C — B

لا؛ $4^2 + 12^2 \neq 13^2$

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم ذلك:

3) 8 — P — $3x-6$ — R — W — Q — $x+10$

4) 3 — B — $4x+2$ — A — $2x+8$ — C

5) 15 — F — x — E — G — 12

6) 26 — W — Y — 24 — 10 — Z

إذا كان المضلع يحيط بالدائرة، فأوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين، ثم أوجد محيط المضلّع.

7) Q — 4 — U — 9 — T — P — $2x$ — S — 13 — R

$x = 4.5$؛ المحيط $= 52$ وحدة

8) S — 5 — T — 13 — V — H — x — R — K — U — 13 — I

$x = 13$؛ المحيط $= 72$ وحدة

تدريبات حل المسألة (29) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-5 تدريبات حل المسألة

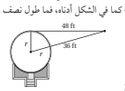
المماسات

1) قنوات: الجزء السفلي من قناة أسمنتية يشبه شكل الحرف "V"، وأثناء سير ياسر بمحاذاة القناة، سقط منه أنبوب أسطواني الشكل في القناة التي كانت جافة حينها فلامس جانبَي القناة. ويظهر الشكل أدناه مقطعًا عرضيًا للأنبوب في أسفل القناة. قارن بين الطولين AV و BV، ووضّح إجابتك.



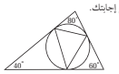
متساويان؛ لأن المماسين المرسومان من نقطة خارج الدائرة متطابقان.

2) بركة سباحة: يقف حمد على مسافة 36 ft من حافة بركة دائرية، إذا كانت المسافة بين حمد ونقطة التماس على البركة 48 ft كما في الشكل أدناه، فما طول نصف قطر البركة؟



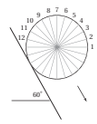
14 ft

3) مثلثات: رُسمت دائرة داخل مثلث قياسات زواياه $80°$، $60°$، $40°$، إذا رُسم من كل نقطة من نقاط التماس مثلثٌ محاطٌ بدائرة، كما في الشكل أدناه، فما قياسات زوايا المثلث الداخلي؟ ووضّح إجابتك.



بما أن كل مماسين مرسومين من نقطة خارج دائرة متطابقان، إذن سينتج ثلاثة مثلثات، كل منها متطابق الضلعين سيحيطون بالمثلث الداخلي، وباستعمال خصائص زوايا المثلث المتطابق الضلعين، ينتج أن قياسات زوايا المثلث الداخلي هي: $50°$ ، $60°$ ، $70°$

4) دحرجة: يندحرج إطار على سطح مائل، ودعامات الإطار المرقمة من 1 إلى 12 تمثل أقطارًا على أبعاد متساوية بعضها عن بعض، كما في الشكل أدناه. أيُّ دعامة ستكون عمودية على السطح المائل، عندما تكون الدعامة رقم 2، رأسيةً؟ ووضّح إجابتك.



الدعامة رقم 10؛ لأنه لاحظ من الشكل أن الدعامة الرأسية هي الدعامة رقم 7، والدعامة على السطح المائل هي الدعامة رقم 3 بالدوران في اتجاه عقارب الساعة.

الدعامة الرأسية	7	8	9	10	11	12	1	2
الدعامة على السطح المائل	3	4	5	6	7	8	9	10

5) تصميم: رسم محمود التصميم المبيّن أدناه، والمكوّن من دوائر مرسومة داخل مثلث متطابق الأضلاع.



a) ما طول نصف قطر الدائرة الكبرى، مقربًا إلى أقرب جزء من مائة من البوصة؟ ووضّح إجابتك.

2.89 in

b) ما أطوال أنصاف أقطار الدوائر الصغرى، مقربًا إلى أقرب جزء من مائة من البوصة؟ ووضّح إجابتك.

0.96 in



مصادر الدرس 5 - 8

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30) — ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

5-8 التدريبات الإثرائية

الدوائر المتماسة:

تكون الدائرتان المرسومتان في المستوى نفسه متماستين إذا اشتركتا في نقطة واحدة فقط، والدائرتان المتماستان غير المشتركتين في نقاط داخلية تسميان دائرتين متماستين من الخارج، وإذا كانت الدائرتان المتماستان مشتركتين في نقاط داخلية فتسميان دائرتين متماستين من الداخل، وتكون ثلاثة دوائر أو أكثر متماسة، إذا كانت كلّ دائرتين منها متماستين.



1) ارسم أشكالاً تمثل كلّ الأوضاع المختلفة لثلاث دوائر متماسة.



2) ارسم أشكالاً تمثل كلّ الأوضاع المختلفة لأربع دوائر متماسة.



3) ارسم أشكالاً تمثل كلّ الأوضاع المختلفة لخمس دوائر متماسة.

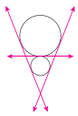


كتاب التمارين (26) — دون ضمن فوق

5 - 8 المماسات

ارسم المماسّات المشتركة للدائرتين في كلٍّ ممّا يأتي، وإذا لم يوجد مماسٌّ مشترك، فاكتب "لا يوجد مماسٌّ مشترك".

1) 
(لايوجد مماسّ مشترك)

2) 

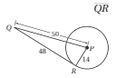
حدّد ما إذا كانت القطعة المستقيمة المحددة في كلٍّ من السؤالين 3, 4 مماسًّا للدائرة المعطاة، وبرر إجابتك:

3) $\overline{MP}$



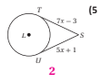
لا؛ $20^2 + 21^2 \neq 28^2$

4) $\overline{QR}$



نعم؛ $14^2 + 48^2 = 50^2$

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشرٍ إذا لزم ذلك:

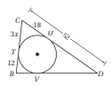
5) 

2

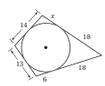
6) 

18.0

إذا كان المضلع يحيط بالدائرة، فأوجد قيمة x، ثم أوجد محيط المضلع في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

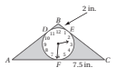
7) 

6, 128

8) 

7, 76

9) **ساعات حائط:** يوضح الشكل المجاور الوجه الدائري لساعة حائط محاطًا بقاعدة مثلثة الشكل. إذا كان AF, FC متساويين، فأوجد كلًّا مما يأتي:



a) AB 9.5 in

b) محيط الساعة. 34 in

8-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-6

إيجاد أطوال القطع المستقيمة المتكونة من مماسات الدائرة.

الدرس 8-6

إيجاد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان داخل الدائرة أو عليها.

إيجاد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان خارج الدائرة.

ما بعد الدرس 8-6

إيجاد أطوال القطع المستقيمة االمتكونة من تقاطع مستقيمين داخل الدائرة أوخارجها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:

- ما النسبة المئوية للقياس 180° من الدائرة؟ 50%
- إذا كانت زاوية الرؤية لآلة تصوير 50°، فكم درجةً تقل هذه الزاوية عن معدل زاوية الرؤية للإنسان؟ 130°

8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا
Secant, Tangent, and Angle Measures

فيما سبق:
درست إيجاد أطوال القطع المستقيمة المتكوّنة من مماساتٍ للدائرة.
(الدرس 5-8)

والآن:
- أجد قياسات الزوايا المتكوّنة من مستقيمين يتقاطعان داخل الدائرة أو عليها.
- أجد قياسات الزوايا المتكونة من مستقيمين يتقاطعان خارج الدائرة.

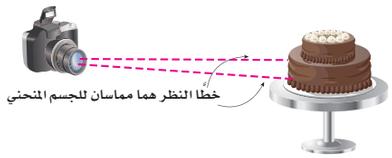
المفردات:
القاطع
secant

www.obeikaneducation.com

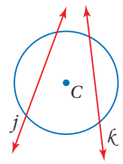
لماذا؟



معدل مجال الرؤية عند الإنسان يساوي 180° تقريبًا، ولكن زاوية الرؤية في معظم آلات التصوير أضيق من ذلك بكثير، فهي تتراوح بين 20° و50°. وتُحدّد زاوية الرؤية في آلات التصوير مقدار ما يمكن أن تلتقطه آلة التصوير على الفيلم من الأجسام المنحنية.



التقاطع على الدائرة أو داخلها: القاطع هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين فقط، فالمستقيمان j, k هما قاطعان للدائرة C.

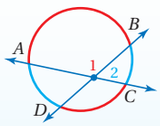


عندما يتقاطع قاطعان داخل دائرة؛ فإن الزوايا المتكوّنة ترتبط بالأقواس التي تقابلها.

نظرية 8.12

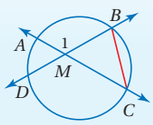
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.



مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD})$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{DA} + m\overset{\frown}{BC})$

برهان



المعطيات: $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ قاطعان للدائرة ويتقاطعان داخلها في M.

المطلوب: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD})$

البرهان: تعلم أن $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ قاطعان للدائرة، وأنهما يتقاطعان داخلها في M.

ارسم القطعة المستقيمة BC؛ لتحصل على المثلث MBC وهذا سيقودنا إلى ما يلي:

العبارات	المبررات
1) $m\angle 1 = m\angle MBC + m\angle MCB$	1) نظرية الزاوية الخارجية للمثلث
2) $m\angle MBC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DC}, m\angle MCB = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BA}$	2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.
3) $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DC} + \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BA}$	4) بالتعويض
4) $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{DC} + m\overset{\frown}{BA})$	4) خاصية التوزيع

مصادر الدرس 8-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (217, 218)	• تنويع التعليم ص (217, 218, 223)	• تنويع التعليم ص (217, 218, 223)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (27)	• كتاب التمارين ص (27)	• كتاب التمارين ص (27)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

التقاطع على الدائرة أو في داخلها

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية استعمال نظريات هذا الدرس في إيجاد قياسات الزوايا والأقواس الناتجة عن تقاطع قاطعين أو وترين داخل الدائرة أو عليها.

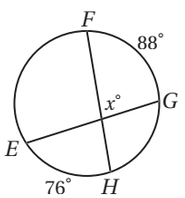
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

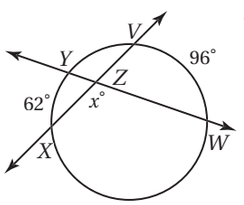
1 أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال أدناه:

(a



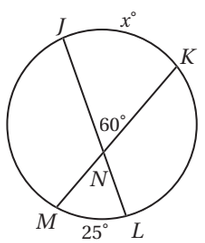
$x^\circ = 82^\circ$

(b



$x^\circ = 101^\circ$

(c



$x^\circ = 95^\circ$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة:
في المثال 1b، يمكنك إيجاد $m\angle DEB$ بحساب مجموع قياسَي $\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{BD}$ أولًا.

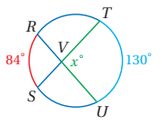
$m\overset{\frown}{AC} + m\overset{\frown}{BD}$
$= 360^\circ - (m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD})$
$= 360^\circ - (143^\circ + 75^\circ)$
$= 142^\circ$

$m\angle DEB$
$= \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AC} + m\overset{\frown}{BD})$
$= \frac{1}{2}(142^\circ) = 71^\circ$

مثال 1 استعمال القاطعين أو الوترين المتقاطعين

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية:

(a

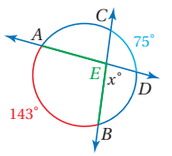


النظرية 8.12 $m\angle TVU = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{RS} + m\overset{\frown}{UT})$

بالتعويض $x^\circ = \frac{1}{2}(84^\circ + 130^\circ)$

بالتبسيط $= \frac{1}{2}(214^\circ) = 107^\circ$

(b



الخطوة 1: أوجد $m\angle AEB$.

النظرية 8.12 $m\angle AEB = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{DC})$

بالتعويض $= \frac{1}{2}(143^\circ + 75^\circ)$

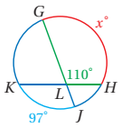
بالتبسيط $= \frac{1}{2}(218^\circ) = 109^\circ$

الخطوة 2: أوجد قيمة x؛ أي قياس $\angle DEB$.

$\angle AEB$, $\angle DEB$ زاويتان متكاملتان.

$x^\circ = 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$

(c



النظرية 8.12 $m\angle GLH = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{HG} + m\overset{\frown}{KJ})$

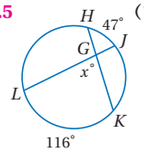
بالتعويض $110^\circ = \frac{1}{2}(x^\circ + 97^\circ)$

بضرب كلا الطرفين في 2 $220^\circ = (x^\circ + 97^\circ)$

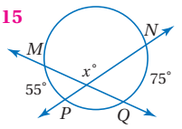
بطرح 97 من كلا الطرفين $123^\circ = x^\circ$

تحقق من فهمك

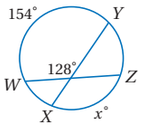
(1A 81.5



(1B 115



(1C 102

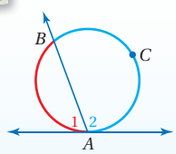


تذكّر النظرية 8.6، والتي تنصُّ على أن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها، وتبقى هذه النظرية صحيحة إذا كان أحد ضلعَي الزاوية مماسًّا للدائرة، وتسمى الزاوية في هذه الحالة الزاوية المماسية.

نظرية 8.13 نظرية الزاوية المماسية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متكونة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.



مثال: $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ACB}$ و $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AB}$

ستبرهن النظرية 8.13 في السؤال 27

تنويع التعليم

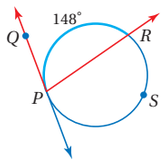
دون ضمن فوق

المتعلمون الطبيعيون: وضِّح للطلاب أن العلاقات التي ذُكرت وعُرِّفت في هذا الدرس هي علاقات تحدث في الطبيعة وفي حياتنا اليومية، وقد تمَّ تعريفها وشرحها رياضيًّا، وأخبرهم أن العلماء على اختلاف تخصُّصاتهم يستعملون هذه العلاقات؛ لتفحُّص أشياء مختلفة كقطرة الماء أو فقاعة الصابون أو الخلايا أو الأحياء الدقيقة، كما أنها تستخدم في التصميمات الهندسية لبناء الجسور والأبراج والميادين وتقاطعات الطرق المحيطة بها، وما إلى ذلك من الأشياء الدائرية. ثم اطلب إليهم إعطاء أمثلة من واقع حياتهم اليومية تستخدم فيها تلك العلاقات.

مثال 2 استعمال القاطع والمماس المتقاطعين

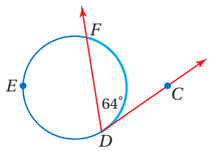
أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

a) $m\angle QPR$



$m\angle QPR = \frac{1}{2}\, m\widehat{PR}$	النظرية 8.13
$= \frac{1}{2}\,(148°) = 74°$	بالتعويض والتبسيط

b) $m\widehat{DEF}$

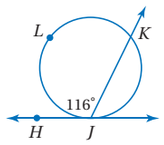


$m\angle CDF = \frac{1}{2}\, m\widehat{FD}$	النظرية 8.13
$64° = \frac{1}{2}\, m\widehat{FD}$	بالتعويض
$128° = m\widehat{FD}$	بضرب كلا الطرفين في 2

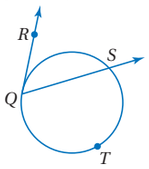
$m\widehat{DEF} = 360° - m\widehat{FD} = 360° - 128° = 232°$

تحقق من فهمك

2A) أوجد $m\widehat{JLK}$. **232°**



2B) إذا كان: $m\widehat{QTS} = 238°$، فأوجد $m\angle RQS$. **61°**



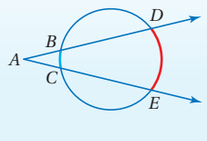
التقاطع خارج الدائرة: يمكن أن يتقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان خارج الدائرة أيضًا، وهنا يرتبط قياس الزوايا المتكونة بقياسَي القوسين المقابلين لها.

نظرية 8.14

أضف إلى مطويتك

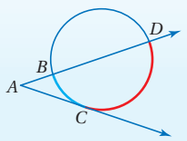
التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان في نقطة خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.

أمثلة:



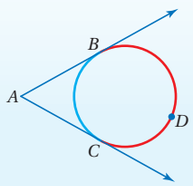
قاطعان

$m\angle A = \frac{1}{2}\,(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$



قاطع ومماس

$m\angle A = \frac{1}{2}\,(m\widehat{DC} - m\widehat{BC})$



مماسان

$m\angle A = \frac{1}{2}\,(m\widehat{BDC} - m\widehat{BC})$

ستبرهن النظرية 8.14 في الأسئلة 24–26

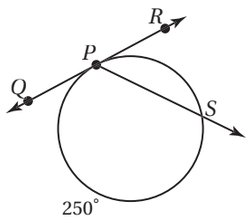
إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة: يمكن التعبير عن قياس $\angle A$ في الحالات جميعها بنصف القيمة المطلقة للفرق بين قياسَي القوسين، وهكذا لا يؤثّر ترتيب القوسين في نتيجة الحسابات.

مثال إضافي

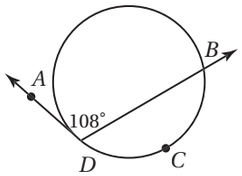
2 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

a) $m\angle QPS$



$m\angle QPS = 125°$

b) $m\widehat{BD}$



$m\widehat{BCD} = 144°$

المحتوى الرياضي

الوتر مقابل القاطع: قد يسألك بعض الطلاب عن الفرق بين الوتر والقاطع، ولماذا يوجد تسميتان لشيءٍ واحد يقطع الدائرة في نقطتين، وهذا السؤال يتطلب مراجعة موضوع القطعة المستقيمة التي هي جزء من مستقيم، وهكذا بالنسبة للوتر، فهو قطعة من القاطع، فالقاطع هو مستقيم يقطع الدائرة. أخبر الطلاب أن كل وترٍ يحويه قاطع، وأن كل قاطعٍ يحوي وترًا.

تنويع التعليم

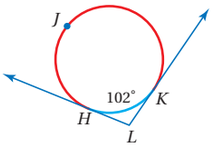
دون ضمن فوق

تنويع التعليم: امنح الطلاب الوقت الكافي لتكوين أمثلةٍ على النظريات مثل نظرية 8.14؛ إذ إن هناك صعوبةً في تذكُّر هذه النظريات، فعندما يرسم الطلاب أمثلتهم، نجد أنه قد يسهل عليهم تذكُّر هذه النظريات، أو اشتقاق هذه العلاقات لاحقًا.

مثال 3 استعمال المماسات والقواطع التي تتقاطع خارج الدائرة

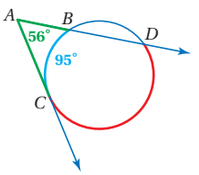
أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

a $m\angle L$



النظرية 8.14	$m\angle L = \frac{1}{2}(m\widehat{HJK} - m\widehat{HK})$
بالتعويض	$= \frac{1}{2}[(360° - 102°) - 102°]$
بالتبسيط	$= \frac{1}{2}(258° - 102°) = 78°$

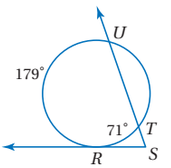
b $m\widehat{CD}$



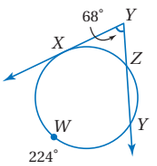
النظرية 8.14	$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - m\widehat{BC})$
بالتعويض	$56° = \frac{1}{2}(m\widehat{CD} - 95°)$
بضرب كلا الطرفين في 2	$112° = m\widehat{CD} - 95°$
بإضافة 95 لكلا الطرفين	$207° = m\widehat{CD}$

تحقق من فهمك

3A $m\angle S$ $54°$



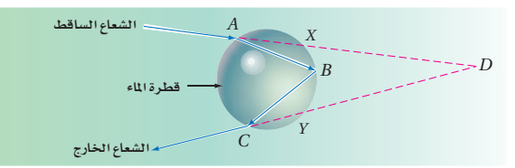
3B $m\widehat{XZ}$ $88°$



يمكنك تطبيق خصائص القواطع المتقاطعة، لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة تطبيق خصائص القواطع المتقاطعة خارج الدائرة

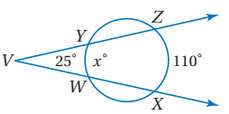
علوم: يُبيّن الشكل أدناه انكسار شعاع ضوء في قطرة ماء، وانحرافه عن مساره عند النقاط A, B, C، إذا كان $m\widehat{AC} = 128°$ و $m\widehat{XY} = 84°$ ، فما قيمة $m\angle D$؟

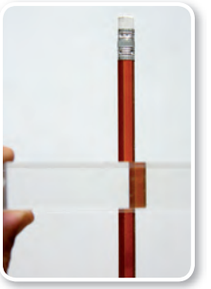


نظرية 8.14	$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} - m\widehat{XY})$
بالتعويض	$= \frac{1}{2}(128° - 84°)$
بالتبسيط	$= \frac{1}{2}(44°) = 22°$

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. **60**





الربط مع الحياة

يتفاوت معامل الانكسار من وسط إلى آخر، ويُعبّر عن معامل الانكسار N لوسطٍ شفافٍ ما بالصيغة $N = \frac{c}{V}$، حيث c سرعة الضوء في الفراغ و V سرعة الضوء في ذلك الوسط.

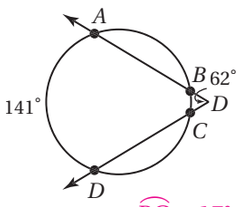
التقاطع خارج الدائرة

المثالان 3, 4 يبيّنان كيفية استعمال النظريات المتعلقة بالقاطع والمماس؛ لإيجاد قياس الزاوية أو طول القوس الناتج عن التقاطع خارج الدائرة.

مثالان إضافيان

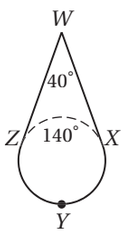
3 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

a $m\widehat{BC}$



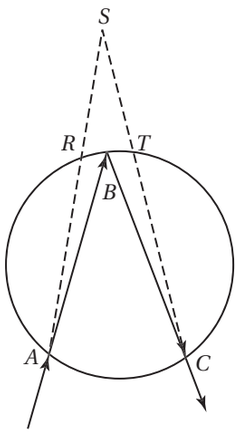
$m\widehat{BC} = 17°$

b $m\widehat{XYZ}$



$m\widehat{XYZ} = 220°$

4 فيزياء: يبيّن الرسم الآتي مسار شعاع ضوئي عندما يسقط على قطعة من الألماس، فيغير الشعاع مساره أو ينكسر عند النقاط A, B, C، إذا كان: $m\widehat{AC} = 96°$, $m\angle S = 35°$ ، فأوجد $m\widehat{RT}$؟



$m\widehat{RT} = 26°$

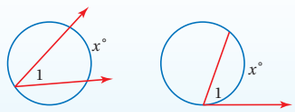
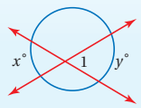
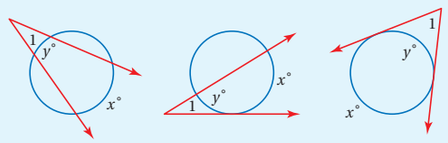
التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: اطلب إلى الطلاب العمل ضمن مجموعات؛ لعمل مقطع تسجيل مرئيٍّ يوضحون خلاله النظريات الثلاث لحالات تقاطع القواطع والمماسات خارج الدائرة، ثم اطلب إليهم تحديد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين هذه النظريات.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

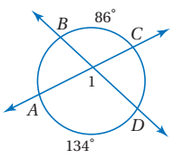
الدائرة وعلاقات الزوايا

موقع رأس الزاوية	نماذج	قياس الزاوية
على الدائرة		نصف قياس القوس المقابل $m\angle 1 = \frac{1}{2}x^\circ$
داخل الدائرة		نصف مجموع قياسَي القوس المقابل للزاوية، والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس. $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x^\circ + y^\circ)$
خارج الدائرة		نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلَين لها $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x^\circ - y^\circ)$

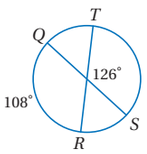
تأكد

المثالان 1, 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا.

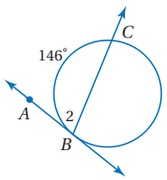
1) $m\angle 1$ 110°



2) $m\overset{\frown}{TS}$ 144°

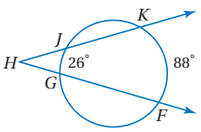


3) $m\angle 2$ 73°

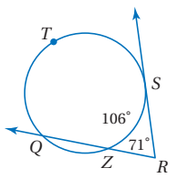


المثالان 3, 4

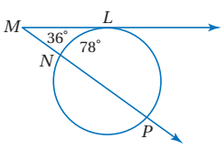
4) $m\angle H$ 31°



5) $m\overset{\frown}{QTS}$ 248°



6) $m\overset{\frown}{LP}$ 150°



7) **ألعاب بهلوانية:** ثُبّت سطح مائل على البرميل الأول من مجموعة براميل رُبطت مع بعضها؛ ليقدم عليها لاعب السيرك عروضه المثيرة على دراجة نارية. ما قياس الزاوية التي يصنعها السطح المائل مع الأرض؟ 15°



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 7-1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

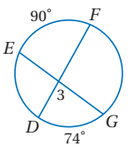
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	18–8 ، 29 ، 31 ، 42–32
ضمن ضمن المتوسط	19–9 فردي، 29–24 ، 31 ، 42–32
فوق فوق المتوسط	39–20 ، (اختياري: 42–40)

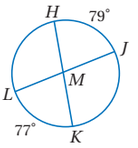
تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

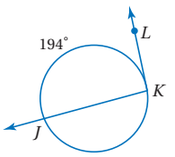
8) $m\angle 3$ **82°**



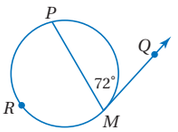
9) $m\angle JMK$ **102°**



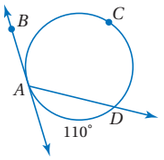
10) $m\angle K$ **97°**



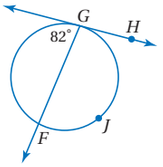
11) $m\overset{\frown}{PM}$ **144°**



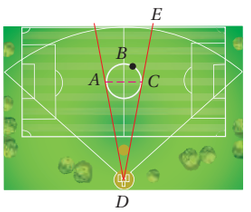
12) $m\angle DAB$ **125°**



13) $m\overset{\frown}{GJF}$ **196°**



14) رياضة: يُمثّل الشكل المجاور ملعبًا رياضيًّا متعدّد الأغراض، إذا كان: $m\overset{\frown}{ABC} = 200°$ ، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

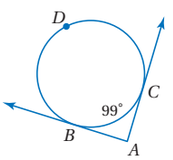


a) $m\angle ACE$ **100°**

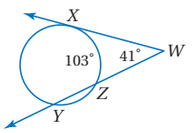
b) $m\angle ADC$ **20°**

المثالان 3, 4 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

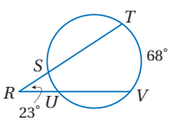
15) $m\angle A$ **81°**



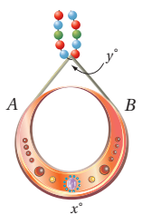
16) $m\overset{\frown}{XY}$ **185°**



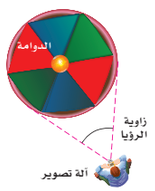
17) $m\overset{\frown}{SU}$ **22°**



18) مجوهرات: يظهر في الشكل المجاور جزء من قلادة، A و B نقطتا تماسٍّ فيها، إذا كانت $x° = 260°$ ، فأوجد قيمة $y°$؟ **80°**



19) تصوير: استعدّ مصوِّر لالتقاط صورة بآلة التصوير للعبة الدوّامة الدائرية، بحيث كان خطّا النظر مماسين لها، كما في الشكل المجاور .



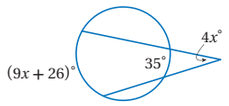
a) إذا كانت زاوية الرؤية لآلة التصوير تساوي 35°، فما قياس قوس الدوّامة الذي سيظهر في الصورة؟ **145°**

b) إذا أردت التقاط صورة لقوسٍ قياسه 150°، فما قياس زاوية الرؤية التي يجب استعمالها؟ **30°**

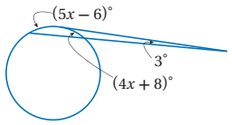
221 الدرس 6-8 القاطع والمماس وقياس الزوايا

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

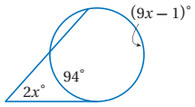
20) 9



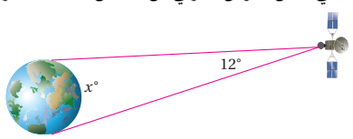
21) 20

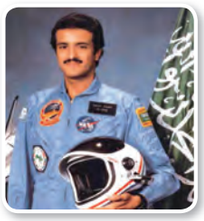


22) 19



23) فضاء: يدور قمر اصطناعي في مدار فوق خط الاستواء، أوجد قيمة x°، وهي قياس القوس المرئي من الأرض بالنسبة للقمر الاصطناعي. **168°**





الربط مع الحياة

أول رائد فضاء سعودي هو صاحب السمو الملكي الأمير سلطان بن سلمان بن عبدالعزيز على متن مكوك الفضاء (ديسكفري) رحلة رقم STS–51G في 29 من رمضان 1405هـ الموافق 17 يونيو 1985م.

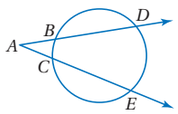
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلّ حالة من حالات النظرية **8.14** **24, 25)** انظر ملحق الإجابات.

(إرشاد: ارسم وترًا يصل نقطتي تقاطع القاطعان أو القاطع والمماس أو المماسان مع الدائرة).

24) حالة 1

المعطيات: $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ قاطعان للدائرة

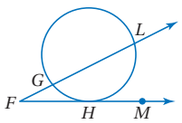
المطلوب: $m\angle A=\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{DE}-m\overset{\frown}{BC})$



25) حالة 2

المعطيات: $\overrightarrow{FM}$ مماس للدائرة و $\overrightarrow{FL}$ قاطع لها

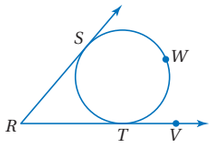
المطلوب: $m\angle F=\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{LH}-m\overset{\frown}{GH})$



26) حالة 3 انظر ملحق الإجابات.

المعطيات: $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{RV}$ مماسان للدائرة

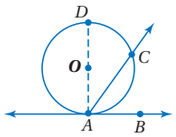
المطلوب: $m\angle R=\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{SWT}-m\overset{\frown}{ST})$



27) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 8.13

a) المعطيات: $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لِـ $\odot O$، $\overleftrightarrow{AC}$ قاطع لِـ $\odot O$

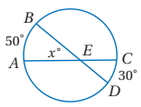
المطلوب: إثبات أن $m\angle CAB=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CA}$. انظر ملحق الإجابات.



b) برهن نظرية 8.13 إذا كانت الزاوية في فرع (a) زاويةً منفرجةً. انظر ملحق الإجابات.

28) تمثيلات متعدّدة: في هذا السؤال ستستكشف العلاقة بين النظريتين 8.6، 8.12 **a–d)** انظر الهامش.

a) هندسيًّا: انقل الشكل المجاور إلى دفترك. ثم ارسم ثلاثة أشكال متتالية بحيث يتحرّك موقع D مقتربًا من C، مع بقاء C, A, B ثابتة في مواقعها.



b) جدوليًّا: قدِّر قياس $\overset{\frown}{CD}$ لكلٍّ من الدوائر المتتالية، سجّل قياسات $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ في جدول، ثم أوجد قيمة x لكلٍّ من هذه الدوائر.

c) لفظيًّا: صِفِ العلاقة بين $m\overset{\frown}{AB}$ وقيمة x° عندما يقترب $m\overset{\frown}{CD}$ من الصفر. ما نوع $\angle AEB$ عندما يكون $m\overset{\frown}{CD}=0$ ؟

d) تحليليًّا: اكتب برهانًا جبريًّا لإثبات ما توصّلت إليه في الفقرة **c**.

تنبيه لحل سؤال

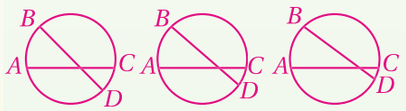
الفرجار والمسطرة:

يتطلب السؤالان 28 ,32 استعمال فرجار ومسطرة.

تمثيلات متعددة: في السؤال 28، يستعمل الطلاب الأشكال الهندسية، والجداول، وكذلك الوصف اللفظي؛ لاستقصاء العلاقة بين النظريتين 8.5 ,8.11

إجابات:

28a) إجابة ممكنة:



28b)

القوس	الدائرة 1	الدائرة 2	الدائرة 3
$\overset{\frown}{CD}$	25	15	5
$\overset{\frown}{AB}$	50	50	50
x	37.5	32.5	27.5

28c) عندما يقترب $m\overset{\frown}{CD}$ من الصفر، فإنَّ قيمة x° تقترب من نصف $m\overset{\frown}{AB}$، وعندما يصبح $m\overset{\frown}{CD}=0$، فإن $\angle AEB$ تصبح زاويةً محيطيةً.

28d)

$$x=\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{CD})$$

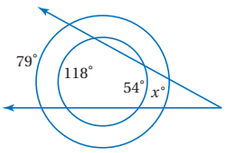
$$(x=\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AB}+0)$$

$$x=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{AB}$$

مسائل مهارات التفكير العليا

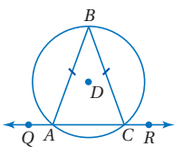
29) اكتب: اشرح كيفية إيجاد قياس الزاوية المكوّنة من تقاطع القاطع والمماس خارج الدائرة.

30) تحدٍّ: إذا كانت الدائرتان أدناه متحدتين في المركز، فما قيمة $x°$؟ **15**



31) تبرير: $\triangle ABC$ متطابق الضلعين محاط بالدائرة D، ماذا تستنتج عن $\overset{\frown}{mAB}$ و $\overset{\frown}{mBC}$؟ وضّح إجابتك.

انظر الهامش



32) مسألة مفتوحة: ارسم دائرةً ومماسَّين لها متقاطعين، واستعمل المنقلة لقياس الزاوية المتكوّنة، ثم أوجد قياس كلٍّ من القوسين الأكبر والأصغر المتكوّنين. برّر إجابتك. انظر الهامش

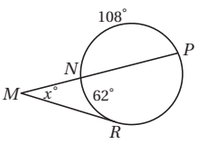
33) اكتب: رُسِمت دائرة محاطة بالمثلث PQR. إذا كان: $m\angle P = 50°, m\angle Q = 60°$ ، فصف طريقة إيجاد قياس الأقواس الثلاثة الصغرى المتكوّنة من نقاط التماس.

تدريب على اختبار

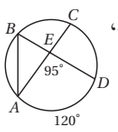
34) إذا كان: $\overset{\frown}{mNR} = 62°, \overset{\frown}{mNP} = 108°$

فما قيمة x؟ **C**

A 23° **B** 31° **C** 64° **D** 128°



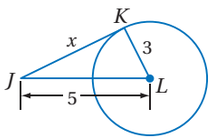
35) إذا كان: $\overset{\frown}{mAD} = 120°, m\angle AED = 95°$، فأوجد $m\angle BAC$؟ **35°**



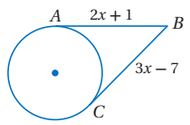
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلّ ممّا يأتي، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا. (الدرس 5-8)

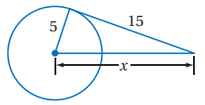
36) **4**



37) **8**



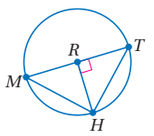
38) $5\sqrt{10}$



39) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 4-8)

المعطيات: $\overset{\frown}{MHT}$ نصف دائرة، $\overline{RH} \perp \overline{TM}$.

المطلوب: $\frac{TR}{RH} = \frac{TH}{HM}$ انظر ملحق الإجابات



استعد للدرس اللاحق

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

40) $x^2 + 13x = -36$ **−4, −9**

41) $x^2 - 6x = -9$ **3**

42) $x^2 + 5x = -\frac{25}{4}$ $-\frac{5}{2}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: إذا قطع وتران في الدائرة قوسين، قياس كلٍّ منهما 75°، فما العلاقة بين هذين الوترين؟

إذا كان لكلٍّ من القوسين نقطتَي طرفين مختلفين عند كلٍّ من الوترين، فإن الوترين متوازيان أو متقاطعان أو غير متوازيين، وإذا وقع طرفا كلِّ قوسٍ على الوتر نفسه، فإن الوترين متطابقان، وإذا اشترك القوسان في أحد الطرفين، فإن الوترين متقاطعان عند ذلك الطرف.

4 التقويم

فهم الرياضيات: اختر أمثلةW، ثم اطلب إلى الطلاب أن يذكروا أسماء القطع المستقيمة المرسومة في الشكل قبل مغادرة غرفة الصف.

التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلبة الدرسين 6–8, 5–8، بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (69)

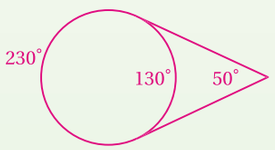
إجابات:

29) أجد الفرق بين القوسين المحدودين وأقسمه على 2

33) إجابة ممكنة: باستعمال النظرية 8.14، نجد أن: $60° = \frac{1}{2}((360° - x°) - x°)$، وبحل المعادلة، نجد أن قياس القوس الأول 120°؛ وبتكرار هذه العملية بالنسبة للزاوية 50°، نجد أن قياس القوس الثاني 130°، ويمكن إيجاد قياس القوس الثالث بجمع 120°+130° وطرح الناتج من 360°، فيكون قياس القوس الثالث 110°

31) إجابة ممكنة: $\overset{\frown}{mAB} = \overset{\frown}{mBC}$ ، $m\angle BAC = m\angle BCA$؛ لأن المثلث متطابق الضلعين؛ إذن: $m\angle QAB = m\angle RCB$ ؛ لأن الزوايا المُكمِّلة لزوايا متطابقة تكون متطابقة. وبما أن: $m\angle QAB = m\angle RCB$، إذن: $\overset{\frown}{mAB} = \overset{\frown}{mBC}$.

32) إجابة ممكنة:



بتطبيق النظرية 8.13 ، يكون $m\angle 1 = \frac{1}{2}(x° - y°)$.

إذن $50° = \frac{1}{2}[(360° - x°) - x°]$،

إذن (قياس القوس الأصغر) $x° = 130°$،

(قياس القوس الأكبر) $y = 360° - 130°$

$= 230°$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-6 تدريبات إعادة التعليم

القاطع والمماس وقياسات الزوايا

التقاطع على الدائرة أو داخلها:

القاطع هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين فقط، وترتبط قياسات الزوايا المتكونة من القاطع والمماس بالأقواس التي تقابلها.

8.12 إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتكونة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابل لهذه الزاوية، والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.

$m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{PR} + m\widehat{QS})$

8.13 إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متكونة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

$m\angle XTV = \frac{1}{2}m\widehat{TUV}$

$m\angle YTV = \frac{1}{2}m\widehat{TV}$

مثال 1 أوجد قيمة x في الشكل أدناه.

يتقاطع الوتران داخل الدائرة؛ لذا فإن قيمة x تساوي نصف مجموع قياسي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية المقابلة لها بالرأس.

$x° = \frac{1}{2}(30° + 55°)$

$= 42.5° = \frac{1}{2}(85°)$

مثال 2 أوجد قيمة y في الشكل أدناه.

يتقاطع الوتر والمماس عند نقطة التماس؛ لذا فإن قياس الزاوية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

$y° = \frac{1}{2}(168°)$

$= 84°$

تمارين

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

1) $m\angle 1$ = 46°

2) $m\widehat{GH}$ = 62°

3) $m\angle 3$ = 110°

4) $m\widehat{RT}$ = 148°

5) $m\angle 5$ = 70°

6) $m\angle 6$ = 100°

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (32) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

القاطع والمماس وقياسات الزوايا

التقاطع خارج الدائرة:

يمكن أن يتقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان خارج الدائرة، ويرتبط قياس الزاوية المتكونة بقياسي القوسين المقابلين لها.

8.14 إذا تقاطع قاطعان، أو قاطع ومماس، أو مماسان خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتكونة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

مماسان $\overline{RN}$، $\overline{RM}$	قاطع $\overline{QJ}$ ومماس $\overline{QG}$	قاطعان $\overline{PE}$، $\overline{PB}$
$m\angle R = \frac{1}{2}(m\widehat{MTN} - m\widehat{MN})$	$m\angle Q = \frac{1}{2}(m\widehat{GJ} - m\widehat{GH})$	$m\angle P = \frac{1}{2}(m\widehat{BE} - m\widehat{AD})$

مثال أوجد $m\angle MPN$ في الشكل المجاور.

تكوّن $\angle MPN$ من تقاطع قاطعين خارج الدائرة.

$m\angle MPN = \frac{1}{2}(m\widehat{MN} - m\widehat{RS})$

$= \frac{1}{2}(34° - 18°)$

$= \frac{1}{2}(16°) = 8°$

قياس $\angle MPN$ يساوي 8°.

تمارين

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

1) $m\angle 1$ = 20°

2) $m\angle 2$ = 40°

3) $m\angle 3$ = 40°

4) $m\widehat{JP}$ = 30°

5) $m\widehat{LN}$ = 130°

6) $m\angle V$ = 15°

تدريبات المهارات (33) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-6 تدريبات المهارات

القاطع والمماس وقياسات الزوايا

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

1) $m\angle 1$ = 53°

2) $m\angle 2$ = 137°

3) $m\angle 3$ = 99°

4) $m\angle 4$ = 118°

5) $m\angle 5$ = 122°

6) $m\angle 6$ = 66°

7) $m\angle R$ = 40°

8) $m\angle K$ = 12°

9) $m\angle U$ = 48°

10) $m\angle S$ = 45°

11) $m\widehat{DPA}$ = 264°

12) $m\widehat{LJ}$ = 146°

تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-6 تدريبات حل المسألة

القاطع والمماس وقياسات الزوايا

1) **تلسكوب**، نظر محمد من خلال تلسكوب إلى منطقة جبلية، والشكل أدناه يبيّن ما رآه محمد. مستعينًا بالشكل أدناه، ما القيمة التقريبية لقياس الزاوية التي يصنعها جانب الجبل الممتد من A إلى B مع الأفق؟

60°

2) **رادار**، رصد رادار مسازيّ طائرتين، فظهر المساران على الشاشة كما في الشكل أدناه، فما قياس الزاوية الحادة بين مسازي الطائرتين؟

67.5°

3) **حامل اللوحة**، يعمل فارس رسّامًا، فوضع لوحة رسم دائرية على حامل على شكل الحرف A، وثبّتها بدقة في وسط الحامل تمامًا، إذا كان قياس زاوية رأس الحامل 30° وقياس القوس BC يساوي 22°، فما قياس القوس AB؟

مد ضلعي رأس الحامل بحيث تتقاطع الدائرة عند النقطتين A و D، وبما أن التقاطعين تقاطعا خارج الدائرة يكون

$30° = \frac{1}{2}(x° - 22°)$

$60° = x° - 22$

أو $x° = 82°$، وبما أن الدائرة في وسط الحامل تمامًا فإن $m\widehat{AB}$ يساوي $m\widehat{CD}$

أي أن $m\widehat{AB} = \frac{360° - (82° + 22°)}{2} = 128°$

4) **طيران**، عند الطيران على ارتفاع 5 أميال، يصنع خطًّا النظر إلى الأفق في اتجاهي الشمال والجنوب زاوية قياسها 173.7° تقريبًا، ما قياس الجزء الذي يمكننا رؤيته من ارتفاع 5 أميال من خط الطول الواقع تحت الطائرة مباشرة؟ **6.3°**

5) **زجاج ملوّن**، صمّم إبراهيم النافذة المبينة أدناه من الزجاج الملوّن، وقد استعمل في تصميمها مربعًا، ومثلثًا متطابق الأضلاع، محاطين بدائرة.

a) اكتب قياسات الزوايا الناتجة عن تقاطع أضلاع المثلث مع أضلاع المربع.

انظر الشكل

b) اكتب قياسات جميع الأقواس بالدرجات؟

انظر الشكل

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة



مصادر الدرس 6 - 8

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

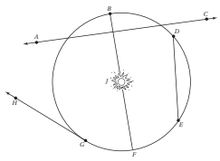
التدريبات الإثرائية (35)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-6 التدريبات الإثرائية

الأجسام التي تدور في مدارات:

تدور الأرض حول الشمس في مدار إهليلجي. وبرغم ذلك يُعدُّ هذا المدار دائريًّا في أحيان كثيرة.



استعمل الشكل أعلاه الذي يمثل مدار الأرض حول الشمس؛ لتسمّي المستقيم أو القطعة المستقيمة لكل وصف مما يأتي، وحدّد ما إذا كان نصف قطر أم قطرًا أم وترًا أم مماسًّا أم قاطعًا لهذا المسار:

1) مسار كويكب. $\overleftrightarrow{AC}$ ؛ **قاطع**

2) المسافة بين موقع الأرض في يوليو وموقعها في أكتوبر. $\overline{DE}$ ؛ **وتر**

3) المسافة بين موقع الأرض في ديسمبر وموقعها في يونيو. $\overline{BF}$ ؛ **قطر**

4) مسار صاروخ منطلق نحو زُحَل. $\overleftrightarrow{GH}$ ؛ **مماس**

5) مسار شعاع الشمس. $\overline{JF}$ ؛ $\overline{JB}$ ؛ **نصف قطر**

6) إذا كان للكوكب قمر، فإن القمر يدور حول هذا الكوكب مثلما يدور الكوكب حول الشمس، ولرؤية مسار هذا القمر قصّ دائرتين من الورق المقوّى، قطر إحداهما يساوي 4 in، وقطر الأخرى يساوي 1 in.

ألصق الدائرة الكبيرة على قطعة من الورق، ثم اثقب طرف الدائرة الصغيرة عند حافتها وأدخل رأس قلم رصاص في الثقب، ثم قم بدحرجة الدائرة الصغيرة حول الدائرة الكبيرة من الخارج، وسيرسم القلم مسار القمر حول الكوكب في أثناء ذلك. ويسمى هذا المدار الدوري، ولرؤية مسار الكوكب حول الشمس، اثقب الدائرة الصغيرة (تمثل هنا الكوكب) في مركزها، وأدخل فيه رأس القلم الرصاص، وقم بدحرجة الدائرة الصغيرة حول الكبيرة (تمثل الشمس)، وسيرسم القلم المسار المطلوب.

انظر إجابات الطلاب



كتاب التمارين (27)　دون ضمن فوق

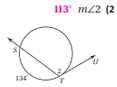
8 - 6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

1) $m\angle 1 = 79^\circ$



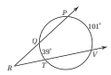
2) $m\angle 2 = 113^\circ$



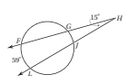
3) $m\angle 3 = 72^\circ$



4) $m\angle R = 31^\circ$



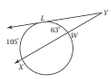
5) $m\widehat{GJ} = 29^\circ$



6) $m\angle R = 60^\circ$



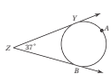
7) $m\angle Y = 21^\circ$



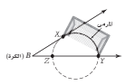
8) $m\widehat{CE} = 128^\circ$



9) $m\widehat{YAB} = 217^\circ$



10) **ألعاب،** يتعين على ماجد في لعبة ابتكرها أن يركل الكرة لتدخل في مرمى على هيئة نصف دائرة كما في الشكل المجاور. إذا كان $m\widehat{XZ}=58^\circ$ و $m\widehat{XY}=122^\circ$، فما الزاوية التي يجب عليه أن يركل بها الكرة ليسجل هدفًا؟ وضّح إجابتك.



يجب أن يركل الكرة بزاوية أقل من 32؛ لأن قياس الزاوية التي يصنعها المماس المرسوم من موقع الكرة على الأرض إلى القوس الذي يمثل حدود المرمى يساوي 32°.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 7-8

إيجاد أطوال أقطار متوازي الأضلاع.

الدرس 7-8

إيجاد قياسات الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة.

إيجاد قياسات القطع المستقيمة المتقاطعة خارج الدائرة.

ما بعد الدرس 7-8

كتابة معادلة الدائرة.

تمثيل الدائرة في المستوى الإحداثي.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

أسأل:

- ما عناصر الدائرة التي تمثِّلها الحافَّتان (المستقيمة والمنحنية) لقطعة الكعك؟
  وتر وقوس على الترتيب.
- ما القياسات التي عليك أن تعرفها؛ لإيجاد قياس قوس قطعة الكعك المتبقية؟
  طول الوتر (الحافة المستقيمة لقطعة الكعك) ونصف قطر الكعكة.

7-8 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة
Special Segments in a Circle

فيما سبق:
درستُ إيجاد قياس الأقطار التي تتقاطع داخل متوازي الأضلاع.
(الدرس 2-5)

والآن:
- أجد قياسات الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة.
- أجد قياسات القطع المستقيمة المتقاطعة خارج الدائرة.

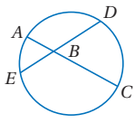
www.obeikaneducation.com

لماذا؟



قُطِّعت كعكة دائرية كبيرة طوليًّا لتكفي أكبر عدد ممكن من المدعوين إلى حفلة، ولم يبقَ منها إلا قطعة صغيرة. يمكنك إيجاد قطر الكعكة الأصلية باستعمال الخصائص الهندسية للدائرة.

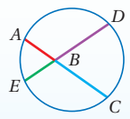
الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة: عندما يتقاطع وتران داخل دائرة، ينقسم كلٌّ منهما جزأين، ففي الشكل المجاور، انقسم الوتر $\overline{AC}$ إلى $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ ، وكذلك انقسم الوتر $\overline{ED}$ إلى $\overline{EB}$ و $\overline{BD}$.



تصف النظرية الآتية العلاقة بين القطع المستقيمة الأربع التي تكوّنت من تقاطع وترين داخل دائرة.

نظرية 8.15 نظرية قِطَع الوتر

أضف إلى مطويتك



التعبير اللفظي: إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الثاني.

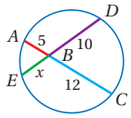
مثال: $AB \cdot BC = DB \cdot BE$

ستبرهن النظرية 8.15 في السؤال 15

مثال 1 استعمال تقاطع الوترين

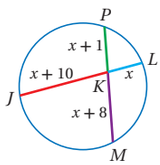
أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

a)



$AB \cdot BC = EB \cdot BD$	النظرية 8.15
$5 \cdot 12 = x \cdot 10$	بالتعويض
$60 = 10x$	بالضرب
$6 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 10

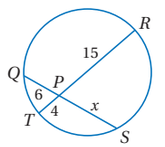
b)



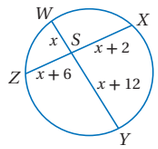
$JK \cdot KL = PK \cdot KM$	النظرية 8.15
$(x + 10) \cdot x = (x + 1)(x + 8)$	بالتعويض
$x^2 + 10x = x^2 + 9x + 8$	بالضرب
$10x = 9x + 8$	بطرح x^2 من كلا الطرفين
$x = 8$	بطرح $9x$ من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

(1A) 10



(1B) 3

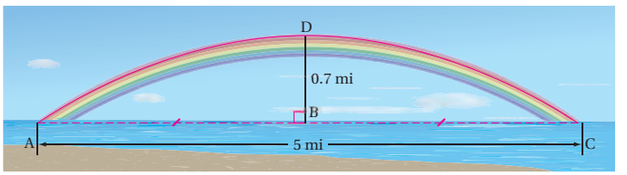


مصادر الدرس 7-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (225, 226)	• تنويع التعليم ص (225, 226)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (28)	• كتاب التمارين ص (28)	• كتاب التمارين ص (28)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)	• تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)

مثال 2 من واقع الحياة — إيجاد قياس قطع مستقيمة في الدائرة

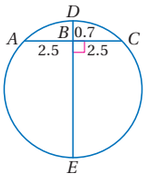
علوم: شكل قوس المطر الحقيقي دائرة كاملة، ولا يظهر لنا منها إلا القوس الذي يظهر فوق أفق الكرة الأرضية. ما نصف قطر الدائرة التي تحوي قوس المطر الظاهر في الشكل أدناه؟



افهم: **المعطيات:** قوس المطر الظاهر جزء من دائرة
$\overline{AC}$ وتر في الدائرة
$\overline{DB}$ عمود منصف للوتر $\overline{AC}$

المطلوب: إيجاد طول نصف قطر الدائرة التي تحوي قوس المطرّ الظاهر.

خطط: ارسم نموذجًا للمسألة، بما أن $\overline{DE}$ تُنصّف الوتر $\overline{AC}$ ، فإن $\overline{DE}$ قطرٌ في الدائرة. استعمل ناتج ضرب أطوال الأوتار المتقاطعة لإيجاد طول قطر الدائرة.

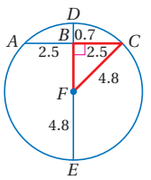


حُل:

$AB \cdot BC = DB \cdot BE$	النظرية 8.15
$2.5 \cdot 2.5 = 0.7 \cdot BE$	بالتعويض
$6.25 = 0.7BE$	بالضرب
$8.9 \approx BE$	بقسمة كلا الطرفين على 0.7
$DE = DB + BE$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$\approx 0.7 + 8.9$	بالتعويض
$= 9.6$	بالجمع

بما أن قطر الدائرة يساوي 9.6 mi تقريبًا، فإن نصف قطرها يساوي $9.6 \div 2 \approx 4.8$

تحقّق: استعمل عكس نظرية فيثاغورس؛ للتحقّق من أن المثلث المتكوّن من نصف القطر وجزءٍ من الوتر وجزءٍ من القطر في الدائرة قائم الزاوية.



$DB + BF = DF$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$0.7 + BF = 4.8$	بالتعويض
$BF = 4.1$	بطرح 0.7 من الطرفين

$BF^2 + BC^2 = CF^2$	نظرية فيثاغورس
$4.1^2 + 2.5^2 \stackrel{?}{=} 4.8^2$	بالتعويض
$23.06 \approx 23.04$ ✓	بالتبسيط

تحقق من فهمك

2) مصلّى قبة الصخرة: هو أحد أهم معالم المسجد الأقصى المبارك في مدينة القدس، وتعتبر قبته من أهم وأبرز المعالم المعمارية الإسلامية، فهي عبارة عن قبة كروية قطر الدائرة التي تحتوي على القوس المار بالقمة هي 20 m، ويبلغ ارتفاع أعلى نقطة فيها عن الجزء الأسطواني الذي يحملها 15m، أوجد المسافة بين طرفَي القبة؟ **17.32m تقريبًا**





الربط مع الحياة

كلما كانت الشمس قريبة من الأفق، زاد الجزء الذي تراه من قوس المطر. وعند غروب الشمس، يمكنك رؤية قوس المطر على شكل نصف دائرة، بحيث تصنع أعلى نقطة في هذا القوس زاوية مقدراها 42 درجة فوق الأفق.

إرشادات لحل المسألة

ارسم شكلًا: عند حلّ المسائل اللفظية المتعلّقة بالدوائر، يُفضّل أن ترسم شكلًا وتضع عليه قياسات كل عناصر الدائرة المعطاة، وأن تسمّي القياس المجهول برمز متغير لمساعدتك على اختيار خطة الحل المناسبة.

الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية استعمال نظرية "قِطَع الوَتر"؛ لإيجاد أطوال أجزاء الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة.

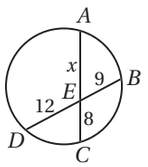
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

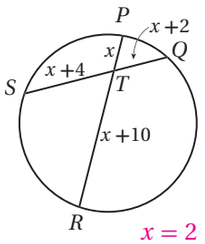
مثالان إضافيان

1 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين أدناه.

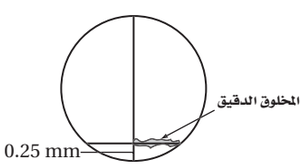
a $x = 13.5$



b $x = 2$



2 **أحياء:** يفحص عالم أحياء مخلوقًا دقيقًا باستعمال ميكروسكوب، ومجال الرؤيا في الميكروسكوب يمثل دائرةً قطرها 2 mm، أوجد طول المخلوق الدقيق إذا وُضع على بُعدِ 0.25 mm أسفل مجال الرؤية، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ. 0.66 mm



تنويع التعليم

ضمن فوق

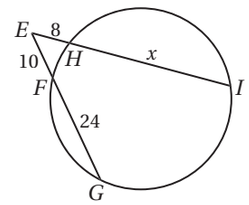
المتعلمون المنطقيون: وجِّه الطلاب للرجوع إلى المثال 1 صفحة 224 ، ثم اطلب إليهم رسم أوتار تربط بين النقاط المتقابلة التي تمثل نهايات القطع المستقيمة المتقاطعة، ثم اطلب إليهم وضع تخمينات حول علاقة التناسب بين المثلثات الناتجة.

قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة

المثالان 3, 4 يبينان استعمال الخصائص والنظريات؛ لإيجاد أطوال أجزاء قاطعين يتقاطعان خارج الدائرة، أو أطوال أجزاءٍ ناتجةٍ عن تقاطع مماسٍّ وقاطعٍ في نقطةٍ خارج الدائرة.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة x في الشكل أدناه. 34.5



المحتوى الرياضي

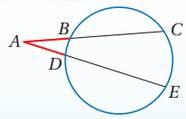
منصف الوتر: ذكّر الطلاب بأنه يمكن تنصيف أي وترٍ في الدائرة برسم قطرٍ يكون عموديًّا عليه.

قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة: الأوتار غير المتوازية في الدائرة وغير المتقاطعة داخلها، يمكن أن تمتد لتشكّل قواطع تتقاطع خارج الدائرة.

نظرية 8.16

أضف إلى مطويتك

نظرية القاطع



التعبير اللفظي: إذا رُسم قاطعان لدائرةٍ من نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه، يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.

مثال: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$

ستبرهن النظرية 8.16 في السؤال 16

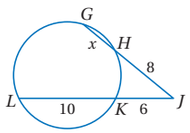
إرشادات للدراسة

تبسيط نص النظرية: كل طرفٍ من طرفَي المعادلة في مثال النظرية 8.16، هو ناتج ضرب طول الجزء الخارجي من القاطع في طول القاطع بكامله.

مثال 3

استعمال تقاطع القاطعين

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



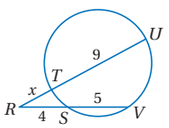
$JG \cdot JH = JL \cdot JK$	النظرية 8.16
$(x + 8)8 = (10 + 6)6$	بالتعويض
$8x + 64 = 96$	بالضرب
$8x = 32$	بطرح 64 من كلا الطرفين
$x = 4$	بقسمة كلا الطرفين على 8

تنبيه!

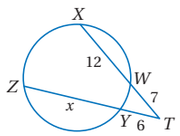
استعمال المعادلة الصحيحة: تأكّد من أنك تجد ناتج ضرب طول القاطع في طول القطعة الخارجية منه. وليس في طول القطعة الداخلية منه.

تحقق من فهمك

(3A) 3



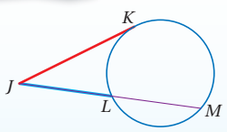
(3B) $16\frac{1}{6}$



يمكنك استعمال معادلة مشابهة لمعادلة النظرية 8.16 عندما يتقاطع مماس وقاطع خارج الدائرة، وفي هذه الحالة المماس أو قطعة المماس التي يقع أحد طرفيها على الدائرة تُمثّل قطعة المماس الخارجية، وقطعة المماس الكلية في آنٍ معًا.

نظرية 8.17

أضف إلى مطويتك



التعبير اللفظي: إذا رُسم مماسٌّ وقاطع لدائرة من نقطة خارجها، فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.

مثال: $JK^2 = JL \cdot JM$

ستبرهن النظرية 8.17 في السؤال 17

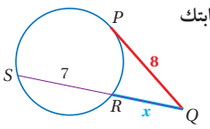
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى كل طالب أن يجد أمثلةً حياتيةً على قطع الدائرة في الإنشاءات، أو في الصناعة، أو في أي مجال آخر، ثم اطلب إليهم أيضًا كتابة شرح حول أمثلتهم، مع رسمٍ لكل مثالٍ، ووضع القياسات الصحيحة عليه إن أمكن، ثم كتابة معادلة مناسبة تربط بين القياسات.

مثال 4 استعمال المماس والقاطع

إذا كانت $\overline{PQ}$ مماسًّا للدائرة كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشْرٍ.



$PQ^2 = QR \cdot QS$	النظرية 8.17
$8^2 = x\,(x+7)$	بالتعويض
$64 = x^2 + 7x$	بالضرب
$0 = x^2 + 7x - 64$	بطرح 64 من كلا الطرفين

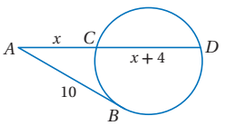
استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية؛ لأن المقدار غير قابل للتحليل.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	القانون العام
$= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-64)}}{2(1)}$	$a = 1, b = 7, c = -64$
$= \frac{-7 \pm \sqrt{305}}{2}$	بالتبسيط
≈ -12.2 أو 5.2	باستعمال الحاسبة

وبما أنه لا يمكن أن تكون الأطوال سالبةً، فإن قيمة x تساوي 5.2 تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) $\overline{AB}$ مماس للدائرة في الشكل المجاور، أوجد قيمة x مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشْرٍ. **6.1**

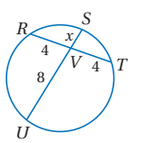


تأكد

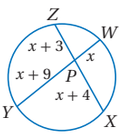
الأمثلة 1, 3, 4

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة، هي مماساتٌ فعلًا.

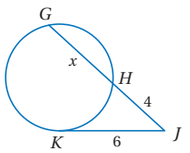
1) **2**



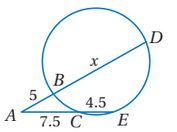
2) **6**



3) **5**

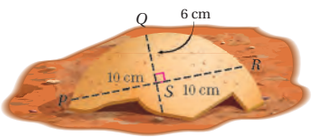


4) **13**



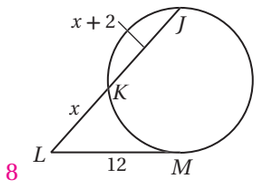
المثال 2

5) **آثار:** يبيِّن الشكل المجاور صورة جزء مكسور من إناءٍ فخاري دائري وُجِدَ في موقع أثري. إذا كانت $\overline{QS}$ جزءًا من قطر الدائرة، فما محيط الإناء الفخاري الأصلي؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ. **71.21 cm**



مثال إضافي

4 إذا كان $\overline{LM}$ مماسًّا للدائرة أدناه، فأوجد قيمة x مقرّبةً إلى أقرب عُشْرٍ.



8

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: انشر الملاحظات الخاصة بهذا الدرس في مدونة الصف، ثم اعمل على أن تشمل الملاحظات النظريات المختلفة الخاصة بالمماس والقاطع والوتر، وأضف روابط لأفضل ما كتبه الطلاب في المدونة، ولأفضل مقاطع فيديو أعدُّوها.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 5–1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

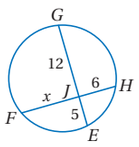
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	14–6 ، 31–19
ضمن ضمن المتوسط	13–7 فردي ، 18–15 ، 31-19
فوق فوق المتوسط	25–15 ، (اختياري: 31–26)

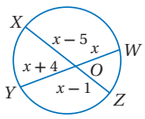
تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1, 3, 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة، هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.

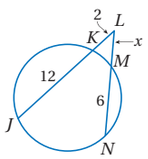
6) 10



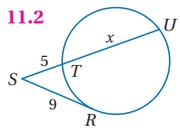
7) 0.5



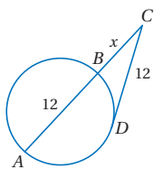
8) 3.1



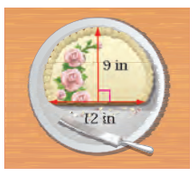
9) 11.2



10) 7.4

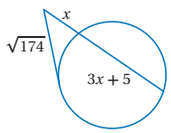


11) كعك: توزّع سلْمَى الكعك في حفلٍ. إذا كانت أبعاد القطعة المتبقية من الكعكة كما في الشكل المجاور، فما قطر الكعكة الأصلية؟ **13 in.**

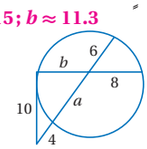


المثال 2 أوجد قيم المتغيرات في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرِّب إجابتك إلى أقرب عُشْرٍ.

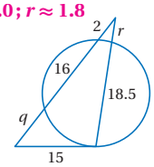
12) 6



13) $a = 15; b \approx 11.3$



14) $q = 9.0; r \approx 1.8$



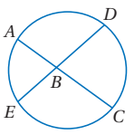
برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد لكلٍّ من النظريات الآتية: **16–15) انظر الهامش.**

(**إرشاد:** ارسم أوترًا تصل نقاط القطع المستقيمة المتقاطعة داخل الدائرة أو خارجها بالدائرة)

15) برهان ذي عمودين للنظرية 8.15

المعطيات: $\overline{AC}$ و $\overline{DE}$ وتران متقاطعان في B.

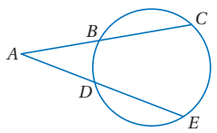
المطلوب: $AB \cdot BC = EB \cdot BD$



16) برهان حرّ للنظرية 8.16

المعطيات: $\overline{AC}$ و $\overline{AE}$ قاطعان لدائرة.

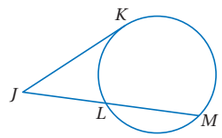
المطلوب: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$



17) برهان ذي عمودين للنظرية 10.17 **انظر ملحق الإجابات.**

المعطيات: $\overline{JK}$ مماس، $\overline{JM}$ قاطع

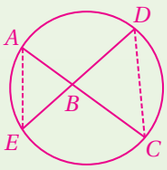
المطلوب: $JK^2 = JL \cdot JM$



إجابات:

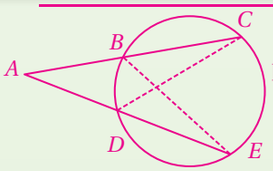
15) البرهان:

ارسم الوترين DC , AE



16) البرهان:

ارسم الوترين DC , BE



$\overline{AC}$, $\overline{AE}$ قاطعان للدائرة.

بتطبيق خاصية الانعكاس $\angle BAD \cong \angle DAB$،

وبما أن الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون متطابقة، فإن: $\angle AEB \cong \angle ACD$؛ إذن

$\triangle AEB \sim \triangle ACD$ بحسب مسلمة التشابه AA،

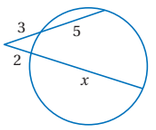
ومن تعريف تشابه المثلثات ينتج أن:

$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$ ، وبما أن نواتج الضرب التبادلي في التناسب تكون متساوية فإن:

$AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

العبارات	المبررات
1) $\overline{AC}$, $\overline{DE}$ وتران يتقاطعان في B	1) معطيات
2) $\angle A \cong \angle D, \angle E \cong \angle C$	2) الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون متطابقة
3) $\triangle ABE \sim \triangle DBC$	3) مسلمة التشابه AA
4) $\frac{AB}{BD} = \frac{EB}{BC}$	4) تعريف تشابه المثلثات
5) $AB \cdot BC = EB \cdot BD$	5) الضرب التبادلي

مسائل مهارات التفكير العليا



18) اكتشف الخطأ: يحسب كلٌّ من خالد وعبدالعزيز قيمة x في الشكل المجاور.
فكتب خالد المعادلة: $3(5) = 2x$، بينما كتب عبدالعزيز المعادلة: $3(8) = 2(2 + x)$. هل أيٌّ منهما كتب المعادلة الصحيحة؟ برّر إجابتك.

19) تبرير: إذا تقاطع وتران في مركز دائرة، فهل تكون قياسات الأقواس المحصورة بينهما متساوية أحيانًا، أم دائمًا، أو غير متساوية أبدًا؟

20) اكتب: إذا تقاطع وتران داخل الدائرة، فصِفِ العلاقة بين جزأَي الأول وجزأَي الثاني. انظر الهامش

18) عبد العزيز كتب المعادلة الصحيحة: يتقاطع قاطعان خارج الدائرة؛ لذا فإن المعادلة الصحيحة تتضمّن ناتج ضرب طول القاطع كاملًا في طول القطعة الخارجية منه.

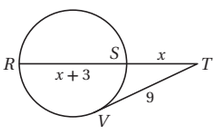
19) تكون متساوية أحيانًا؛ تتساوَى قياسات الأقواس، عندما يكون الوتران متعامدين.

تدريب على اختبار

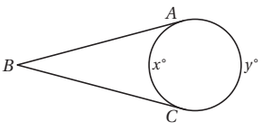
21) $\overline{TV}$ مماس للدائرة، و R, S نقطتان عليها، ما قيمة x مقربةً إلى أقرب عُشرٍ؟ **C**

A 7.6 **C** 5.7

B 6.4 **D** 4.8



22) إجابة مطوّلة: $\overline{BA}, \overline{BC}$ مماسان للدائرة في الشكل أدناه، $m\angle ABC = 70°$. انظر الهامش

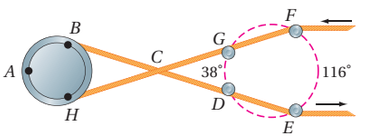


a) اكتب معادلتين تربطان بين $x°$ و $y°$.

b) أوجد قيمة كلٍّ من $x°$ و $y°$.

مراجعة تراكمية

23) نسيج: بعد أن تُغزل خيوط الصوف، يتم صبغها، ثم تُمرّر على مجموعة من البكرات لكي تجف، والشكل المجاور يُظهر إحدى مجموعات البكرات، لاحظ أن خيط الصوف يبدو كأنه يتقاطع بعضه مع بعض عند النقطة C، ولكنه في الواقع غير ذلك. أوجد $m\widehat{BH}$ مستعملًا معلومات الشكل. (الدرس 6-8) **141°**



هندسة إحداثية: مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-7) انظر الهامش

24) $\triangle KLM$ الذي رؤوسه: $M(0, 5), L(-3, -1), K(5, -2)$؛ إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أسفل.

25) الشكل الرباعي $PQRS$ الذي رؤوسه: $P(1, 4), Q(-1, 4), R(-2, -4), S(2, -4)$؛ إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و 3 وحدات إلى أعلى.

استعد للدرس اللاحق

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي عُلِم ميله ومقطع y له في كلٍّ ممَّا يأتي:

26) $m: 3$، المقطع y -4 $y = 3x - 4$

27) $m = 2, (0, 8)$ $y = 2x + 8$

28) $m = \frac{5}{8}, (0, -6)$ $y = \frac{5}{8}x - 6$

29) $m: \frac{2}{9}$، المقطع y $\frac{1}{3}$ $y = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$

30) $m = -1, b: -3$ $y = -x - 3$

31) $m = -\frac{1}{12}, b: 1$ $y = -\frac{1}{12}x + 1$

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 18، يجب أن يلاحظ الطلاب أن خالدًا استعمل المعادلة الخاصة بإيجاد أطوال الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة، وعليهم أيضًا ملاحظة أن معادلة عبدالعزيز هي الصحيحة؛ لأن القاطعين تقاطعا خارج الدائرة.

4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يصفوا كيف ساعدهم الدرس السابق عن القاطع والمماس وقياسات الزوايا على فهم درس اليوم حول القطع المستقيمة الخاصة في الدائرة.

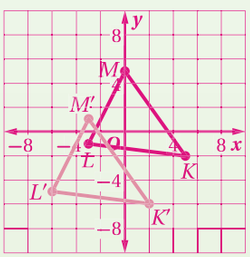
إجابات:

20) إجابة ممكنة: حاصل ضرب طولَي جزأَي أحد الوترين المتقاطعين يساوي حاصل ضرب طولَي جزأَي الوتر الآخر.

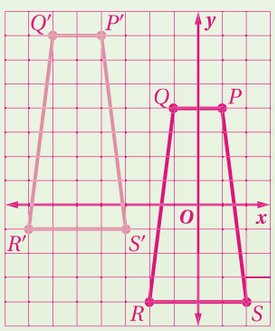
22a) $x° + y° = 360°, y° - x° = 140°$

22b) $x° = 110°, y° = 250°$

24)



25)





مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (36) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-7 تدريبات إعادة التعليم

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة:

8.15	إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولَي جزأَي الوتر الأول، يساوي حاصل ضرب طولَي جزأَي الوتر الثاني.	$a \cdot b = c \cdot d$

مثال أوجد قيمة x مستعملًا الشكل المجاور.

يتقاطع الوتران داخل دائرة. إذن،

$AB \cdot BC = EB \cdot BD$	النظرية 8.15
$8x = 8 \cdot 3$	بالتعويض
$6x = 24$	بالضرب
$x = 4$	بقسمة الطرفين على 6

تمارين

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة.

(1) 9 (2) 6 (3) 10.7 (4) 2 (5) 3 (6) 4.9 (7) 2.2 (8) 4

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (37) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة:

توضّح النظريتان الآتيتان العلاقة بين أطوال أجزاء قاطعين أو قاطع ومماس، عندما يتقاطعان خارج الدائرة.

8.16	إذا رُسم قاطعان لدائرة من نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه، يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.	$\overline{AC}$ و $\overline{AE}$ قاطعان للدائرة. $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ الجزءان الخارجان من القاطعين. $AC \cdot AB = AE \cdot AD$
8.17	إذا رُسم مماسٌ وقاطع لدائرة من نقطة خارجها، فإن مربع طول المماس، يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.	$\overline{AB}$ مماس للدائرة، $\overline{AD}$ قاطع للدائرة. $\overline{AC}$ الجزء الخارجي من القاطع $\overline{AD}$ $AB^2 = AD \cdot AC$

مثال 1 في الشكل المجاور، إذا علمت أن $PB = 9$ ، $PD = 12$، فما قيمة x؟

$PB \cdot PA = PD \cdot PC$	النظرية 8.16
$9(x+1) = 12 \cdot x$	بالتعويض
$9x + 9 = 12x$	بالضرب
$9 = 3x$	بطرح $9x$ من كلا الطرفين
$3 = x$	بقسمة الطرفين على 3

مثال 2 $\overline{AB}$ مماس للدائرة في الشكل المجاور، أوجد قيمة x مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر.

$\overline{AB}$ مماسٌ، و $\overline{BD}$ قاطع، وجزء القاطع الخارجي هو $\overline{BC}$

$AB^2 = BC \cdot BD$	النظرية 8.17
$18^2 = 15(15 + x)$	بالتعويض
$324 = 225 + 15x$	بالضرب
$99 = 15x$	بطرح 225 من الطرفين
$6.6 = x$	بقسمة الطرفين على 15

تمارين

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشر.

(1) 2.8 (2) 19.3 (3) 7.7 (4) 5 (5) 1 (6) 2

تدريبات المهارات (38) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-7 تدريبات المهارات

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات هي مماسات فعلًا.

(1) 14 (2) 13.5 (3) 10 (4) 6 (5) 3 (6) 6 (7) 12 (8) 10 (9) 8

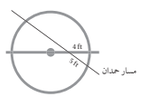
تدريبات حل المسألة (39) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-7 تدريبات حل المسألة

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

1) التزلج على الجليد: قام حمدان بالتزلج مارًّا خلال دائرة في حلبة التزلج، وكان مساره خلال الدائرة كما في الشكل أدناه، إذا علمت أن قطر الدائرة يساوي 15 ft، فما المسافة التي قطعها حمدان عبر هذه الدائرة أثناء تزلجه؟



13.8 ft

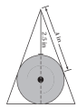
2) فلك: افترض أن الأرض كرويةٌ تمامًا وقطرها يساوي 7926 ميلًا، فما طول خط الأفق h من ارتفاع a ميلًا من الأرض؟



$h = \sqrt{a(a + 7926)}$

3) محور العجلة: يبين الشكل أدناه مقطعًا عرضيًّا لعجلة مثبتة بواسطة أنبوب معدني مثلث الشكل، يمتد كابح من رأس المثلث نحو العجلة، وعندما يبلغ مسافة 2.5 in بالماس محور العجلة، ما قطر المحور؟

3.9 in



4) علم الآثار: أزال علماء الآثار الأتربة عن حافة دائري، ثم أجروا بعض القياسات فكانت على الصورة الموضحة في الشكل أدناه. بناءً على هذه المعطيات، ما طول نصف قطر الدائرة؟



25.5 ft

5) خدمة توصيل الطعام: يقع مطعم عند تقاطع شارع غرناطة مع شارع الجامعة في مدينة تحتوي طريقًا سريعًا دائريًا يمر حول ضواحي المدينة جميعها، طول نصف قطر الطريق الدائري 8 km، ويضع المطعم الخريطة المبينة أدناه على إعلانات يوزّعها في المدينة.



a) كم يبعد المطعم عن تقاطع الطريق الدائري مع شارع غرناطة من جهة الشمال؟

1.6 km

b) إذا أنشأت طريقًا جديدًا على طول قطر الطريق الدائري، بحيث يمر بتقاطع شارع الجامعة مع شارع غرناطة، فاحسب المسافة الأقصر بين المطعم والطريق الدائري على هذا الطريق الجديد؟

1.29 km تقريبًا



مصادر الدرس 7 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (40) ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-7 التدريبات الإثرائية

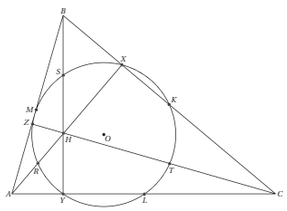
دائرة النقاط التسع:

يوضح الرسم أدناه حقيقةً مدهشةً حول المثلثات والدوائر. لأي ΔABC، توجد دائرة تحوي النقاط التسع الآتية جميعها:

(1) نقاط منتصفات أضلاع ΔABC وهي: M, L, K

(2) النقاط Z, Y, X، علمًا بأن $\overline{AX}, \overline{BY}$ و $\overline{CZ}$ ارتفاعات ΔABC.

(3) النقاط R, S, T، وهي نقاط منتصفات القطع المستقيمة التي تصل رؤوس ΔABC بملتقى ارتفاعاته H.



1) ارسم في ورقة منفصلة ΔABC المنفرج الزاوية، ثم أنشئ مستعملًا المسطرة والفرجار دائرةً تمرُّ بنقاط منتصفات الأضلاع. راعِ أن يكون الإنشاء دقيقًا، هل تحتوي دائرتك على النقاط الست الأخرى التي وُصفت أعلاه؟

نفذ: انظر رسومات الطلاب

2) ارسم $\overline{RK}$، $\overline{SL}$ و $\overline{TM}$ في الشكل الذي أنشأته في السؤال 1، ماذا تلاحظ؟

تتلاقى هذه القطع المستقيمة الثلاث عند مركز دائرة النقاط التسع.

كتاب التمارين (28) دون ضمن فوق

8 - 7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:

(1) 24.2

(2) 4.5

(3) 7.35

(4) 12

(5) 16

(6) 9

(7) 5.1

(8) 30

(9) 15.7

10) **بناء:** يُبنى قنطرة فوق مدخل عمارة في صورة قوس ارتفاعه 3 ft وعرضه 9 ft، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي تحوي القوس. 4.875 ft

1 التركيز

الهدف:
استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لاستكشاف معادلة الدائرة.

المواد
- الحاسبة البيانية TI–nspire

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
وزِّع الطلاب مجموعات تتكوّن من 3 أو 4 طلاب متفاوتي القدرات، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاط.

تدريب:
اطلب إلى الطلاب حل السؤالين 1, 2

3 التقويم

التقويم التكويني
استعمل السؤالين 3, 4؛ لتقويم فهم الطلاب استعمال الإحداثيات عند كتابة معادلة الدائرة.

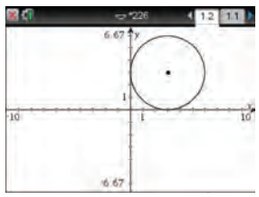
من المحسوس إلى المجرد
اسأل:
- ماذا يحدث للتمثيل البياني للدائرة عند إضافة 4 للإحداثي x ؟ تتحرك الدائرة 4 وحداتٍ إلى اليمين.
- ماذا يحدث عند إضافة 4 للإحداثي y ؟ تتحرك الدائرة إلى أعلى 4 وحداتٍ.
- ماذا يحدث عند إضافة 4 لكلا الإحداثيَّين؟ تتحرك الدائرة 4 وحداتٍ إلى اليمين، ثم 4 وحداتٍ إلى أعلى.

معادلة الدائرة
Equation of Circle

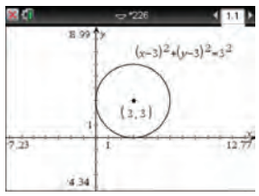
يمكنك استعمال TI–nspire لاستكشاف معادلة الدائرة.

نشاط رسم دائرة في المستوى الإحداثي

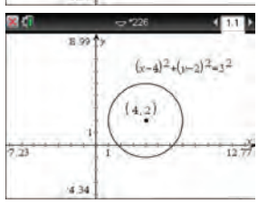
الخطوة 1: ارسم دائرة.
- افتح صفحة تطبيق الرسوم البيانية بالضغط على المفاتيح (esc) (on):
- ارسم دائرة بالضغط على مفتاح (menu) ثم اختار 8:الهندسة ومنها 2:الأشكال الهندسية واختر 1:الدائرة ، ثم ضع المؤشر في أي مكان خالٍ لا يقع على أي من المحورين واضغط لرسم نقطة المركز، ومن ثم اسحب لرسم الدائرة ثم اضغط (enter) ثم (esc) .



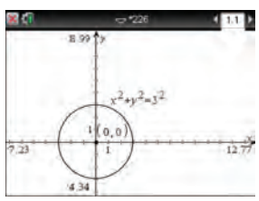
الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة.
- لعرض معادلة الدائرة، اضغط على المفتاح (menu) ، ثم اختر 1:الإجراءات ومنها 8:الإحداثيات والمعادلات ، ثم الضغط على محيط الدائرة لتظهر المعادلة، قم بوضع المؤشر في مكان مناسب لكتابة المعادلة فيه، ثم اضغط (enter) .
- بالمثل اضغط على مركز الدائرة، ثم ضع المؤشر في مكانٍ مناسبٍ لكتابة إحداثيَّ مركز الدائرة واضغط (enter) ثم (esc) .



الخطوة 3: غيّر معادلة الدائرة.
- استعمل المؤشّر واضغط على مركز الدائرة وحرّك المركز ثم لاحظ كيف تتغير معادلة الدائرة. أو ظلل إحداثيَّ مركز الدائرة واكتب إحداثيَّي آخرين لمركز دائرة آخرى ولاحظ كيف يتغير موقع الدائرة ومعادلتها.
- استعمل الأسهم لسحب الدائرة من نقطة المركز ونقلها للمكان الذي تريد، ثم اضغط (enter) .



الخطوة 4: ارسم دائرة مركزها نقطة الأصل.
- حرّك الدائرة كما فعلت في الخطوة 3، وضع مركزها عند نقطة الأصل، أو استعمل المؤشر واضغط على محيط الدائرة وفي الوقت نفسه اضغط على الأسهم ثم اطلق المؤشر واستعمل الأسهم لتكبير الدائرة أو تصغيرها ثم اضغط (enter) ولاحظ أثر ذلك في معادلة الدائرة.



تحليل النتائج: 4–1. انظر الهامش.

1) كيف تتغيّر معادلة الدائرة عند تحريك مركزها؟

2) كيف تتغيّر معادلة الدائرة عندما يزيد نصف قطرها أو ينقص؟

3) ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل، ونصف قطرها 4؟ فسِّر إجابتك.

4) ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند النقطة (h, k)، ونصف قطرها r ؟ فسِّر إجابتك.

إجابات:

1) إجابة ممكنة: يتغير العددان المضافان أو المطروحان إلى/ من x, y في المعادلة مع تغير موقع مركز الدائرة.

2) إجابة ممكنة: يتغير العدد المربع (الثابت) الذي يقع وحده في الطرف الأيمن من المعادلة كلَّما تغير نصف القطر.

3) إجابة ممكنة: $x^2 + y^2 = 16$، لقد تحرّك مركز الدائرة إلى نقطة الأصل، وتغيّر نصف قطرها إلى 4

4) إجابة ممكنة: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$؛ في المعادلة، يتم طرح قيمة الإحداثي x من x وقيمة الإحداثي y من y، والعدد المربع في هذه الصيغة يمثل نصف قطر الدائرة.

8-8 معادلة الدائرة
Equation of Circle

فيما سبق:
درست كتابة معادلة المستقيم وتمثيله بيانيًا في المستوى الإحداثي.
(الدرس 5-2)

والآن:
- أكتب معادلة الدائرة.
- أمثّل الدائرة بيانيًا في المستوى الإحداثي.

المفردات:
الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة
standard form of an equarion of a circle
www.obeikaneducation.com

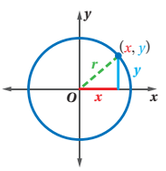
لماذا؟



تستعمل أبراج الاتصالات الهاتفية إشارات الراديو لبثّ مكالمات الهواتف النقالة. ويغطي كل برج منطقةً دائريةً. وتُصمَّم الأبراج بحيث تلتقط إشارات البث في أي مكان ضمن منطقة التغطية.

معادلة الدائرة: بما أن نقاط الدائرة جميعها تبعد مسافات متساوية عن مركزها، فإنه يمكنك إيجاد معادلتها باستعمال صيغة المسافة بين نقطتين أو نظرية فيثاغورس.

إذا مثّل (x, y) نقطة على دائرة مركزها عند نقطة الأصل كما في الشكل المجاور، فإنه يمكنك أن تستعمل نظرية فيثاغورس؛ لتجد أن معادلة هذه الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$.



وإذا لم يقع مركز الدائرة عند نقطة الأصل، ولكن عند النقطة (h, k) كما في الشكل المبيّن في المفهوم الأساسي أدناه، فإنه يمكنك أن تستعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحصل على معادلة الدائرة.

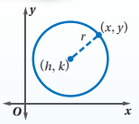
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$ $d = r, (x_1, y_1) = (h, k), (x_2, y_2) = (x, y)$

$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$ بتربيع كلا الطرفين

مفهوم أساسي الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة

أضف إلى مطويتك



الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k)، وطول نصف قطرها r هي: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة تُسمّى أيضًا صيغة المركز ونصف القطر.

مثال 1 كتابة معادلة الدائرة باستعمال المركز ونصف القطر

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

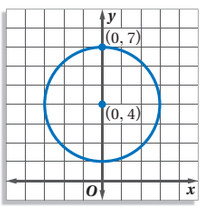
a) مركزها عند $(-8, 1)$، وطول نصف قطرها 7

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$(x - 1)^2 + [y - (-8)]^2 = 7^2$ $(h, k) = (1, -8), r = 7$

$(x - 1)^2 + (y + 8)^2 = 49$ بالتبسيط

b) الدائرة الممثلة بيانيًا في الشكل المجاور.



مركز الدائرة عند $(0, 4)$ وطول نصف قطرها 3

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ معادلة الدائرة

$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$ $(h, k) = (0, 4), r = 3$

$x^2 + (y - 4)^2 = 9$ بالتبسيط

تحقق من فهمك $x^2 + y^2 = 10$ **1B** $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$ **1A)** مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها $\sqrt{10}$. **1B)** مركزها النقطة $(4, -1)$، وقطرها 8

إرشادات للدراسة

معادلة الدائرة:
في المثال 1. لاحظ أن معادلة الدائرة بقيت على الصورة القياسية، إذ ليس من الضروري فك التربيع.

8-8 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 8-8
كتابة معادلة المستقيم باستعمال معلوماتٍ عن تمثيله البياني .

الدرس 8-8
كتابة معادلة الدائرة .
تمثيل الدائرة بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

ما بعد الدرس 8-8
تحديد أنواع القطوع المخروطية بتحليل معادلاتها وكتابتها وتمثيلها بيانيًّا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

اسأل:
- أين يوضع البُرج بالنسبة للمنطقة الدائرية التي سيغطِّيها؟ في المركز.
- ماذا تمثل المسافة بين البرج وأبعد نقطة يصلُها بثُّ البرج؟ نصف قطر الدائرة.
- إذا كان برج الإتصالات يبث من النقطة (2,5) ضمن منطقة دائرية، وكانت النقطة (26,5) تقع على محيط دائرة البث، فاكتب معادلة الدائرة التي تمثل منطقة بث برج الإتصالات؟

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$= \sqrt{(26 - 2)^2 + (5 - 5)^2}$
$= 24$

أي أن نصف قطر الدائرة يساوي 24
وعليه فإن معادلة دائرة منطقة البث هي:
$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = (24)^2$

مصادر الدرس 8-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (233, 235)	• تنويع التعليم ص (233, 235)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين ص (29)	• كتاب التمارين ص (29)	• كتاب التمارين ص (29)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (41) • تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (41) • تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)	• تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)

معادلة الدائرة

المثالان 1 , 2 يبيّنان كيفية استعمال المعلومات المُعطاة عن الدائرة لكتابة معادلتها.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثالٍ، للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

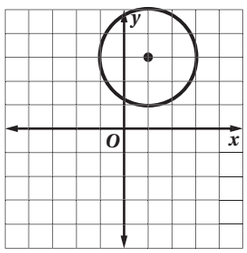
مثال إضافي

1 اكتب معادلة كلٍّ من الدائرتين الآتيتين:

a) مركزها $(-3, 3)$، ونصف قطرها يساوي 6 .

$(x-3)^2+(y+3)^2=36$

b) الدائرة الممثَّلة في المستوى الإحداثي أدناه.



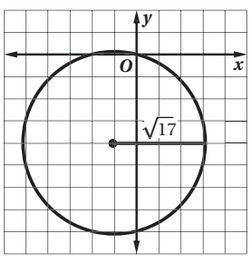
$(x-1)^2+(y-3)^2=4$

2 اكتب معادلة كلٍّ من الدائرتين الآتيتين:

a) مركزها $(-2, -3)$، وتمر بالنقطة $(1, -2)$

$(x+3)^2+(y+2)^2=16$

b) الدائرة الممثَّلة في المستوى الإحداثي أدناه.



$(x+2)^2+(y+4)^2=17$

مثال 2 كتابة معادلة الدائرة باستعمال مركزها ونقطة عليها

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) مركزها $(-2, 4)$ ، وتمر بالنقطة $(-6, 7)$.

الخطوة 1: أوجد نصف القطر باستعمال صيغة المسافة بين النقطتين.

صيغة المسافة بين نقطتين $r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$(x_1, y_1)=(-2, 4), (x_2, y_2)=(-6, 7)$ $=\sqrt{[-6-(-2)]^2+(7-4)^2}$

بالتبسيط $=\sqrt{25}=5$

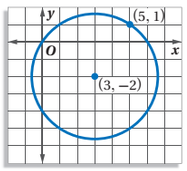
الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة باستعمال: $h=-2, k=4, r=5$.

معادلة الدائرة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$h=-2, k=4, r=5$ $[x-(-2)]^2+(y-4)^2=5^2$

بالتبسيط $(x+2)^2+(y-4)^2=25$

b) الدائرة الممثلة بيانيًّا جانبًا.



الخطوة 1: أوجد نصف القطر باستعمال صيغة المسافة بين النقطتين

صيغة المسافة بين نقطتين $r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

بالتعويض $=\sqrt{(5-3)^2+[1-(-2)]^2}$

بالتبسيط $=\sqrt{13}$

الخطوة 2: اكتب معادلة الدائرة باستعمال: $h=3, k=-2, r=\sqrt{13}$.

معادلة الدائرة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$h=3, k=-2, r=\sqrt{13}$ $(x-3)^2+[y-(-2)]^2=(\sqrt{13})^2$

بالتبسيط $(x-3)^2+(y+2)^2=13$

تحقق من فهمك

2A) مركزها $(5, 4)$، وتمر بالنقطة $(-3, 4)$. $(x-5)^2+(y-4)^2=64$

2B) مركزها $(-3, -5)$، وتمر بالنقطة $(0, 0)$. $(x+3)^2+(y+5)^2=34$

تمثيل الدوائر بيانيًّا: يمكنك تحليل معادلة الدائرة؛ لتجد معلوماتٍ تساعدك على تمثيلها بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

مثال 3 تمثيل الدائرة بيانيًّا

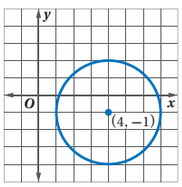
أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(x-4)^2+(y+1)^2=9$، ثم مثّلها بيانيًّا.

أعد كتابة المعادلة: $(x-4)^2+(y+1)^2=9$ بالصيغة القياسية لإيجاد المركز ونصف القطر بسهولة.

$(x-4)^2+[y-(-1)]^2=3^2$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

لذا فإن: $h=4, k=-1, r=3$. أي أن المركز عند النقطة $(4, -1)$ ونصف القطر 3 وحداتٍ.



تحقق من فهمك

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

3A) $x^2+y^2=4$

3B) $(x+4)^2+(y-7)^2=25$

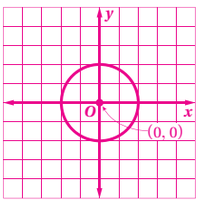
إرشادات للدراسة

صيغة الجذور: في المثال 2b، من الأفضل ترك نصف القطر على صورة الجذر؛ لأن نصف القطر سيُربع عند كتابة معادلة الدائرة.

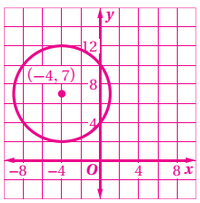
إرشادات للدراسة

مسلّمات إقليدس: لقد درست ثلاثًا من مسلّمات إقليدس في درس 5–2، وهناك مسلّمة أخرى لإقليدس، وهي أنه يمكنك رسم دائرة وحيدة بنصف قطر معلوم باختيار أي نقطة لتكون مركزًا لهذه الدائرة.

3A) $(0, 0); 2$



3B) $(-4, 7); 5$



تنبيه!

صيغة المسافة بين نقطتين: عند استعمال صيغة المسافة بين نقطتين، ذكّر الطلاب بأن ينتبهوا إلى تعويض الإحداثي x والإحداثي y بالترتيب الصحيح، وكذلك ضرورة الانتباه إلى إشارات هذه الإحداثيات.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اعرض المستوى الإحداثي على السبورة، وارسم دائرة مركزها نقطة الأصل، ثم اعرض إحداثيات المركز وطول نصف القطر ومعادلة الدائرة، ثم اطلب إلى الطلاب أن يقوموا بسحب هذه الدائرة؛ لتغيير مركزها أو تغيير أنصاف أقطارها بالتناوب. احفظ هذه النتائج ووزِّعها على طلاب الصف.

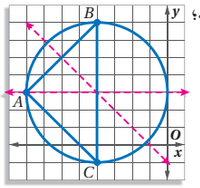
مثال 4 من واقع الحياة — استعمال ثلاث نقاط لكتابة معادلة الدائرة

أعاصير: وُضعت ثلاث صفارات للتحذير من الأعاصير في ثلاثة مواقع استراتيجية على دائرة حول مدينة، اكتب معادلة الدائرة التي وُضعت عليها الصفارات الثلاث إذا كانت إحداثيات مواقعها هي: $A(-8, 3)$, $B(-4, 7)$, $C(-4, -1)$.

افهم: **المعطيات:** إحداثيات ثلاث نقاط تقع على الدائرة هي:
$A(-8, 3)$, $B(-4, 7)$, $C(-4, -1)$

المطلوب: كتابة معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث.

خطط: مثّل $\triangle ABC$ بيانيًّا، ثم أنشئ عمودين منصّفين لاثنين من أضلاعه؛ لتعيين مركز الدائرة، حيث إن العمود المنصف لوتر في الدائرة هو قطر (أو نصف قطر) لها، وأوجد طول نصف قطر الدائرة، ثم استعمل المركز ونصف القطر لكتابة معادلتها.



حُلّ: أنشئ عمودين منصفين لضلعين، يظهر من الرسم أن مركز الدائرة يقع عند النقطة $(-4, 3)$، ونصف القطر 4

اكتب المعادلة:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-4)]^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

تحقّق: ارسم دائرة مركزها $(-4, 3)$ ونصف قطرها 4، ثم تحقق من أنها تمرّ بالنقاط الثلاث المعطاة.

تحقق من فهمك

4) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط: $R(1, 2)$, $S(-3, 4)$, $T(-5, 0)$. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$



الربط مع الحياة

في الولايات المتحدة يُسجَّل 1000 إعصار تقريبًا خلال السنة الواحدة. أكثر هذه الأعاصير تدميرًا هي الأعاصير التي تبلغ سرعتها 250 mi/h، أو أكثر، فقد يصل عرض مسارها التدميري إلى ميل، ويمتد إلى 50 mi.

تأكد

المثالان 1, 2 اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممّا يأتي:

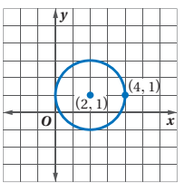
1) مركزها $(0, 9)$، ونصف قطرها 5

2) مركزها $(1, 3)$، وقطرها 14

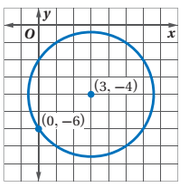
3) مركزها نقطة الأصل، وتمر بالنقطة $(2, 2)$.

4) مركزها $(-5, 3)$ ، وتمر بالنقطة $(1, -4)$.

5)



6)



1) $(x - 9)^2 + y^2 = 25$

2) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 49$

3) $x^2 + y^2 = 8$

4) $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 85$

5) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

6) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 13$

المثال 3 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا. 9–7) انظر ملحق الإجابات.

7) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$

8) $x^2 + (y + 1)^2 = 4$

9) $(x + 3)^2 + y^2 - 9 = 0$

المثال 4

10) اتصالات: مُثّلت ثلاثة أبراج هواتف نقالة بالنقاط: $X(6, 0)$, $Y(8, 4)$, $Z(3, 9)$، عيّن موقع برج آخر يبعد مسافات متساوية عن هذه الأبراج الثلاثة، ثم اكتب معادلة الدائرة التي تقع عليها الأبراج الثلاثة.

$(3, 4)$; $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

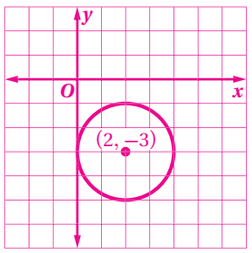
تمثيل الدوائر بيانياً

المثالان 3, 4 يبيّنان كيفية تحليل معادلة الدائرة؛ ممَّا يساعد على تمثيلها في المستوى الإحداثي.

مثالان إضافيان

3 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها:
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ ، ثم مثّلها بيانيًّا.

المركز $(2, -3)$، ونصف القطر يساوي 2



4 **كهرباء:** طريقة توزيع المحطات الفرعية لنقل الكهرباء وتوزيعها على المدن الشديدة الأهمية لشركات الطاقة. افترض أننا مثّلنا ثلاث محطات بالنقاط الآتية:
$D(3, 6)$, $E(-1, 0)$, $F(3, -4)$، ثم اكتب معادلة الدائرة التي تمرُّ بالنقاط الثلاث.

$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 26$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: وضِّح للطلاب أنهم سيعتمدون كثيرًا على معلوماتهم الهندسية ومهارات التبرير في حل مسائل هذا الدرس، واسمح لهم بأن يستكشفوا ويتعاونوا في أثناء حلِّهم الأمثلة والتمارين. اطلب إليهم استذكار التعريفات والمفاهيم والنظريات؛ لمساعدتهم على تفسير سبب استعمالهم طريقةً معينةً في حل الأسئلة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 10–1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل سؤال

ورق الرسم البياني تتطلب الأسئلة 20–24, 30, 33 استعمال ورق الرسم البياني.

إجابات:

11) $x^2 + y^2 = 16$

12) $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 49$

13) $(x-2)^2 + y^2 = 256$

14) $(x-8)^2 + (y+9)^2 = 11$

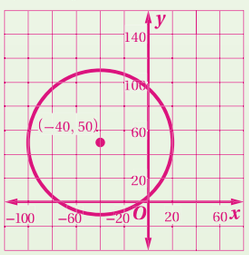
15) $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 9$

16) $(x-3)^2 + y^2 = 25$

17) $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 9$

18) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 18$

27a) $(x+40)^2 + (y-50)^2 = 3600$;



تدرب وحل المسائل

المثالان 2 ,1 اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممَّا يأتي: **11–18)** انظر الهامش.

11) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها 4

12) مركزها (6, 1)، ونصف قطرها 7

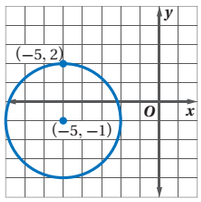
13) مركزها (−2, 0)، ونصف قطرها 16

14) مركزها (9, −8)، ونصف قطرها $\sqrt{11}$

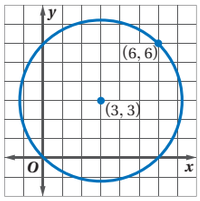
15) مركزها (−3, 6)، وتمُرّ بالنقطة (0, 6) .

16) طرفا قطرٍ فيها (0, 4) و (−4, 6) .

17)



18)



19) طقس: أظهرت شاشة رادار حلقات دائرية مركزها إعصار. إذا كان مركز شاشة الرادار هو نقطة الأصل، والحلقة الأولى تبعد 15 mi عن المركز، والمسافة بين كل حلقتين متتاليتين 15 mi، فما معادلة الحلقة الثالثة؟ $x^2 + y^2 = 2025$

المثال 3 أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا. **20–23)** انظر ملحق الإجابات.

20) $x^2 + y^2 = 36$

21) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

22) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$

23) $(x-8)^2 + y^2 = 64$

المثال 4 اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًّا. **24, 25)** انظر ملحق الإجابات

24) $A(1, 6), B(5, 6), C(5, 0)$

25) $F(3, -3), G(3, 1), H(7, 1)$

26) صواريخ: اختلاف حجم محرك الصاروخ، يؤدي إلى وصوله إلى ارتفاعات مختلفة، وكلما زاد الارتفاع الذي يصل إليه الصاروخ، كبرت الدائرة التي سيهبط فيها، وفي ظروف الرياح الطبيعية يكون طول نصف قطر دائرة الهبوط ثلاثة أمثال ارتفاع الصاروخ. **a)** $x^2 + y^2 = 810000$

a) اكتب معادلة دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 300 ft، مفترضًا أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل.

b) ما طول نصف قطر دائرة هبوط صاروخ وصل إلى ارتفاع 1000 ft؟ **3000 ft**

27) إذاعة: تبثّ إذاعةٌ محليةٌ برامجها، فتغطي منطقةً لايزيد بعدها عن برج البث أكبر من 60 km، إذا كان البرج يقع على بعد 40 km غربًا و 50 km شرقًا من منزل خالد.

a) إذا كان منزل خالد عند نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، فاكتب المعادلة التي تُمثّل الموقف ومثّلها بيانيًّا. انظر الهامش.

b) ماذا يُمثّل هذا المنحنى؟ وهل يمكن أن يلتقط خالد البث من البرج الإذاعي؟ اشرح إجابتك.

28) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها: $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$. **(−3, 1); 5**

29) اكتب معادلة الدائرة التي قطرها 12، ويقع مركزها في الربع الثاني، وتمسُّ كلًّا من المستقيمين $y = -4, x = 1$.

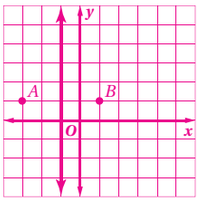
$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 36$

27b) إجابة ممكنة: تُمثّل الدائرة حدود منطقة البث الإذاعي. تلتقط المنازل جميعها الواقعة ضمن هذه الدائرة البث الإذاعي. وبما أن منزل خالد الواقع عند (0, 0) يقع خارج هذه الدائرة، فلن يستطيع خالد التقاط البث الإذاعي.

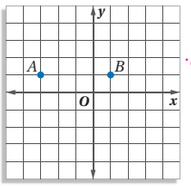
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	11–25 ، 32–39
ضمن ضمن المتوسط	11–25 فردي ، 26–29 ، 32–39
فوق فوق المتوسط	26–39

30b) إجابة ممكنة:



30) **تمثيلات متعدّدة:** في هذا السؤال ستستقصي المحل الهندسي المركّب لنقطتين، وهو المحل الهندسي الذي يُحقّق أكثر من شرطٍ مختلفٍ.



a) جدوليًّا: اختر نقطتين A و B في المستوى الإحداثي، واكتب إحداثيات 5 نقاطٍ في المستوى تبعد مسافات متساوية عن كلٍّ من A و B. انظر الهامش.

b) بيانيًّا: مثّل المحل الهندسي لهذه النقاط بيانيًّا.

c) لفظيًّا: صِفِ المحل الهندسي للنقاط جميعها التي تبعد مسافات متساوية عن زوجٍ من النقاط. انظر الهامش.

d) بيانيًّا: استعمل التمثيل البياني الذي حصلت عليه من الفرع b؛ لتحدد المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعُد مسافة AB عن النقطة B ، ومثِّله بيانيًّا.

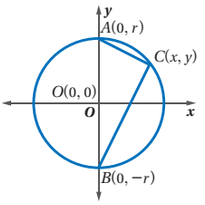
e) لفظيًّا: صِفِ المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى، والتي تبعد مسافات متساوية عن نقطة واحدة. ثم صِفِ المحل الهندسي المركب لجميع النقاط التي تبعُد مسافات متساوية عن A و B ، وتبعد مسافة AB عن B . واذكر ماذا يمثل بيانيًّا؟ انظر الهامش.

إرشادات للاختبار

استعمال الصيغ: تذكّر أنه إذا كان السؤال يوظف المستوى الإحداثي، فاستعمل صيغتي المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف وكذلك صيغة الميل لحل السؤال، وللتأكد من صحة حلك.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) تحدٍّ: اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أنه إذا قابلت الزاوية المحيطية قطرًا في الدائرة كما في الشكل المجاور ، فإنها قائمة. انظر ملحق الإجابات.

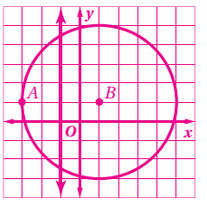


32) تبرير: معادلة دائرة هي: $(x-5)^2+(y+7)^2=16$.
إذا أُجريت إزاحة لمركزها بمقدار 3 وحداتٍ إلى اليمين و9 وحداتٍ إلى أعلى، فما معادلة الدائرة الجديدة؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش.

33) مسألة مفتوحة: عيّن ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي ليست على استقامةٍ واحدةٍ، وارسم مثلثًا رؤوسه هذه النقاط، ثم أنشئ الدائرة التي تحيط به. انظر ملحق الإجابات

34) اكتب: اشرح العلاقة بين صيغة المسافة بين نقطتين ومعادلة الدائرة . انظر الهامش.

30d) إجابة ممكنة:



تدريب على اختبار

35) أيُّ المعادلات الآتية تُمثّل معادلة الدائرة التي مركزها $(6, 5)$، وتمر بالنقطة $(2, 8)$؟ **A**

A $(x-6)^2+(y-5)^2=5^2$
B $(x-5)^2+(y-6)^2=7^2$
C $(x+6)^2+(y+5)^2=5^2$
D $(x-2)^2+(y-8)^2=7^2$

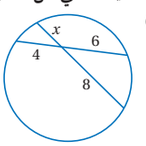
36) إذا كان نصف قطر $\odot F$ يساوي 4، وإحداثيًّا مركزها هما $(-4, 0)$، فأي النقاط الآتية تقع على $\odot F$؟ **D**

A $(4, 0)$
B $(0, 4)$
C $(4, 3)$
D $(-4, 4)$

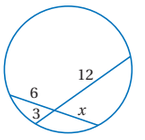
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 7 - 8)

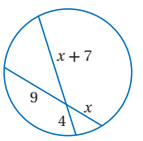
37) 3



38) 6



39) 5.6



تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: ما العلاقة بين الدوائر المتحدة في المركز، ولها نصف القطر نفسه؟ فسّر إجابتك.
هي الدائرة نفسها؛ لأن الدائرة تتحدد تمامًا بمعرفة المركز ونصف القطر. الدائرتان اللتان تشتركان في المركز نفسه، ويكون لهما نصف القطر نفسه، يجب أن تكونا متطابقتين.

34) إجابة ممكنة: يمكن اشتقاق معادلة الدائرة من صيغة المسافة بين نقطتين باستعمال النقطة المعطاة، والمركز المُعطَى أيضًا، حيث يمثل نصف القطر المسافة بين النقطتين.

تمثيلات متعددة: في السؤال 30، يستعمل الطلاب الجداول والتمثيل البياني والوصف اللفظي؛ لاستقصاء المحل الهندسي المركب لنقطتين.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب أن يتناوبوا على كتابة معادلات دوائر، ثم اطلب إليهم تسمية مراكز الدوائر، وتحديد أطوال أنصاف أقطارها.

التقويم التكوينيّ

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 8–8 ,7–8، بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (69)

إجابات:

30a) إجابة ممكنة:

x	y
−1	−3
−1	−1
−1	0
−1	2
−1	4

30c) مستقيم، وهو العمود المنصّف للقطعة الواصلة بين هاتين النقطتين.

30e) المحل الهندسي للنقاط في المستوى التي تبعد مسافات متساوية عن نقطة معلومة هو دائرة، والمحل الهندسي للنقاط التي تبعد مسافات متساوية من النقطتين A , B، وتبعد مسافة AB عن B، هو تقاطع المحل الهندسي للنقاط التي تبعد مسافات متساوية عن A , B، والمحل الهندسي للنقاط التي تبعد مسافة AB عن B. ويُمثَّل المحل الهندسي المركب بيانيًّا بنقطتين.

32) $(x-8)^2+(y-2)^2=16$ ؛ الدائرة الأولى يقع مركزها عند $(-7, 5)$، إذا أزحنا الدائرة 3 وحداتٍ إلى اليمين و 9 وحدات إلى أعلى، سيكون المركز الجديد للدائرة عند $(2, 8)$، وتصبح معادلتها:
$(x-8)^2+(y-2)^2=16$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 8 - 8

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (41) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-8 تدريبات إعادة التعليم

معادلة الدائرة

معادلة الدائرة:

الدائرة هي المحل الهندسي للنقاط المستوية التي تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطةٍ معلومةٍ، ويمكنك استعمال تعريف الدائرة لكتابة معادلتها.

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة	معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ، وطول نصف قطرها r وحدة هي: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



مثال اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(3, -1)$ ونصف قطرها 6.

استعمل المعادلة: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$، وعوّض: $h=3, k=-1, r=6$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ معادلة الدائرة

$[x-(-1)]^2+(y-3)^2=6^2$ بالتعويض

$(x+1)^2+(y-3)^2=36$ بالتبسيط

تمارين

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ من الحالات الآتية:

1) مركزها $(0, 0)$، ونصف قطرها 8.
$x^2+y^2=64$

2) مركزها $(3, -2)$، ونصف قطرها 5.
$(x+2)^2+(y-3)^2=25$

3) مركزها $(4, -2)$، ونصف قطرها 1.
$(x-2)^2+(y+4)^2=1$

4) مركزها $(4, -1)$، ونصف قطرها 2.
$(x+1)^2+(y+4)^2=4$

5) مركزها $(6, -2)$، وقطرها 8.
$(x+2)^2+(y+6)^2=16$

6) مركزها نقطة الأصل، وقطرها 4.
$x^2+y^2=4$

7) مركزها $(4, -3)$، وتمر بالنقطة $(4, -1)$.
$(x-3)^2+(y+4)^2=16$

8) مركزها $(3, 0)$، وتمر بالنقطة $(2, 0)$.
$x^2+(y-3)^2=13$

9)

$(x+2)^2+(y+2)^2=4$

10)

$(x-1)^2+(y-4)^2=9$

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (42) دون

الاسم _____ التاريخ _____

8-8 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

معادلة الدائرة

تمثيل الدوائر بيانيًا:

إذا أُعطيت معادلة دائرة، فإنه يمكنك تحليلها لإيجاد معلومات تساعدك على تمثيلها بيانيًا في المستوى الإحداثي.

مثال أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(x+3)^2+(y-1)^2=9$ ، ثم مثّلها بيانيًا.

قارن كلَّ مقدار جبري في المعادلة بنظيره في الصيغة القياسية؛ لإيجاد المركز (h, k) ونصف القطر r.

أعد كتابة معادلة الدائرة بالصيغة القياسية؛ لإيجاد المركز ونصف القطر بسهولة.

$[x-(-3)]^2+(y-1)^2=3^2$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

لذا فإن: $h=-3, k=1, r=3$

إذن مركز الدائرة هو $(-3, 1)$، ونصف قطرها 3 وحداتٍ.

ولتمثيلها عيّن المركز، وارسم الدائرة مستعملًا الفرجار بفتحة مقدارها 3 وحداتٍ من مربعات المستوى الإحداثي.

تمارين

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة الممثلة بيانيًا في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثّلها بيانيًا:

1) $x^2+y^2=16$; $(0, 0)$; $r=4$

2) $(x-2)^2+(y-1)^2=9$; $(2, 1)$; $r=3$

3) $(x+2)^2+y^2=16$; $(-2, 0)$; $r=4$

4) $x^2+(y-1)^2=9$; $(0, 1)$; $r=3$

اكتب معادلة الدائرة المارة بالنقاط المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًا:

5) $F(-2, 2)$, $H(-1, 3)$, $G(-1, 1)$
$(x+1)^2+(y-2)^2=1$

6) $R(-2, 1)$, $T(0, -1)$, $S(-4, -1)$
$(x+2)^2+(y+1)^2=4$

تدريبات المهارات (43) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-8 تدريبات المهارات

معادلة الدائرة

اكتب معادلة الدائرة في الحالات الآتية:

1) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها 6
$x^2+y^2=36$

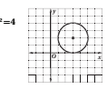
2) مركزها $(0, 0)$، ونصف قطرها 2.
$x^2+y^2=4$

3) مركزها $(4, 3)$، ونصف قطرها 9.
$(x-4)^2+(y-3)^2=81$

4) مركزها $(1, 7)$، وقطرها 24.
$(x-7)^2+(y-1)^2=144$

5) مركزها $(-1, -4)$، وتمر بالنقطة $(-2, 3)$.
$(x+4)^2+(y+1)^2=20$

6) مركزها $(2, -5)$، وتمر بالنقطة $(0, 4)$
$(x-5)^2+(y+2)^2=5$

7)

$(x-3)^2+(y-2)^2=4$

8)

$x^2+(y+2)^2=9$

عيّن إحداثيَّ مركز الدائرة الممثلة معادلتها في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًا:

9) $x^2+y^2=16$
$(0, 0)$; $r=4$

10) $(x-1)^2+(y-3)^2=4$
$(1, 3)$; $r=2$

اكتب معادلة الدائرة المارة بالنقاط المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًا:

11) $A(-2, 3)$, $B(1, 0)$, $C(4, 3)$
$(x-1)^2+(y-3)^2=9$

12) $F(3, 0)$, $G(5, -2)$, $H(1, -2)$
$(x-3)^2+(y+2)^2=4$

تدريبات حل المسألة (44) دون ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-8 تدريبات حل المسألة

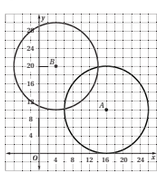
معادلة الدائرة

1) تصميم، يريد أحمد كتابة معادلة الدائرة المحاطة بالمربع الذي يظهر في الشكل أدناه، فما معادلة هذه الدائرة؟



$(x-4)^2+(y-3)^2=4$

2) اتصالات، عند إجراء مكالمة باستعمال الجوال، فإن برج الاتصالات يتلقّاها بحسب مدى استقبال دائريٍّ الشكل.



إذا كانت المعادلة: $(x-16)^2+(y-10)^2=100$ ، تمثل موقع برج الاتصالات (A) ومدى استقباله، فصف موقع البرج ومدى استقباله، ثم مثّل معادلة موقعه بيانيًا.

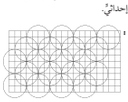
يقع البرج عند النقطة $(16, 10)$، ومدى استقباله 10 وحدات.

3) إذا تمّ بناء برج آخر للاتصالات (B) بموقع ومدى استقبال موضح على الشكل أعلاه، فاكتب معادلة تمثل موقع البرج (B) ومدى استقباله.

$(x-4)^2+(y-20)^2=100$

4) ورق جدران، يتكون تصميم لورق الجدران من دوائر يمكنك تمثيلها بالمعادلة: $(x-a)^2+(y-b)^2=4$، ارسم جزءًا من ورق الجدران في مستوًى إحداثيٍّ.

إجابة ممكنة:



5) مخطط هندسي، رُسم مُخطط منتزه على ورق رسم بياني، ومُثّل محيط المنتزه بالمعادلة: $(x-3)^2+(y-7)^2=225$، إذا كانت كلّ وحدة على المستوى البياني تمثل 10 ft، فما طول نصف قطر المنتزه الحقيقي؟ **150 ft**

6) مسافة، يبعد منزل مروان مسافات متساوية عن المسجد والمركز الصحي ومدرسته، والجدول أدناه يبيّن إحداثيات هذه المواقع الثلاثة على خريطة إحداثية، حيث تمثل كلّ وحدة على الخريطة 1 m.

الموقع	الإحداثيات
المسجد	$(-78, 202)$
المركز الصحي	$(111, 193)$
المدرسة	$(202, -106)$

a) ما إحداثيات موقع منزل مروان؟ ارسم الدائرة على خريطة، وعيّن عليها المواقع الثلاثة والمنزل. **$(7, -2)$**



b) كم مترًا يبعد منزل مروان عن المواقع المذكورة؟ **221 m**

c) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالمسجد والمركز الصحي والمدرسة؟ **$(x-7)^2+(y+2)^2=221^2$**



مصادر الدرس 8 - 8

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

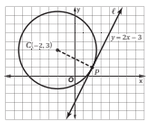
التدريبات الإثرائية (45)　ضمن فوق

الاسم _____ التاريخ _____

8-8 التدريبات الإثرائية

معادلة الدائرة والمماس:

تذكّر أن الدائرة التي نصف قطرها r وإحداثيات مركزها (h,k)، هي التمثيل البياني للمعادلة: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. يمكنك استعمال هذه الفكرة وما تعرفه عن الدوائر والمماسات لإيجاد معادلة الدائرة، إذا عُلِم مركزها ومعادلة مستقيم مُمَسٍّ.



اتبع الخطوات الآتية لإيجاد معادلة الدائرة التي مركزها $C(-2,\ 3)$، وتمسّ المستقيم ℓ الذي معادلته $y=2x-3$، مستعملًا الشكل أعلاه.

1) أوجد ميل المستقيم ℓ الذي معادلته $y=2x-3$.

2

2) إذا كانت $\odot C$ التي مركزها $C\,(-2,3)$ تمسّ المستقيم ℓ عند النقطة P، فما ميل نصف القطر $\overline{CP}$؟

$-\frac{1}{2}$

3) اكتب معادلة المستقيم الذي يحوي $\overline{CP}$.

$y=-\frac{1}{2}x+2$

4) استعمل المعادلة التي حصلت عليها من السؤال 3، والمعادلة $y=2x-3$، لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين اللذين يمثلان هاتين المعادلتين. ما إحداثيات هذه النقطة؟

$P.\,(2,1)$

5) أوجد طول نصف القطر $\overline{CP}$.

$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

6) استعمل إحداثيات المركز $C(-2,3)$، وإجابتك عن السؤال 5 لكتابة معادلة $\odot C$.

$(x+2)^2+(y-3)^2=20$

كتاب التمارين (29)　دون ضمن فوق

8 - 8 معادلة الدائرة

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ من الحالات الآتية:

1) مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها 7
$x^2+y^2=49$

2) مركزها النقطة $(0,0)$، وقطرها 18
$x^2+y^2=81$

3) مركزها النقطة $(-7,11)$، ونصف قطرها 8
$(x+7)^2+(y-11)^2=64$

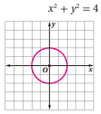
4) مركزها $(-9,12)$، وقطرها 22
$(x-12)^2+(y+9)^2=121$

5) مركزها النقطة $(-1,8)$ وتمر بالنقطة $(9,3)$.
$(x+1)^2+(y-8)^2=125$

6) مركزها $(-3,-3)$، وتمر بالنقطة $(-2,3)$.
$(x+3)^2+(y+3)^2=37$

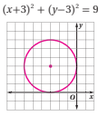
عيّن إحداثيّ مركز الدائرة المُمثلة معادلتها في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وأوجد نصف قطرها، ثم مثّلها بيانيًا:

7) $x^2+y^2=4$



$(0,0)$; 2

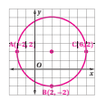
8) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$



$(-3,3)$; 3

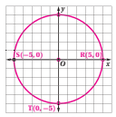
اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط المُعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم مثّلها بيانيًا:

9) $A\,(-2\,,\,2)\,,\,B\,(2\,,\,-2)\,,\,C\,(6\,,\,2)$



$(x-2)^2+(y-2)^2=16$

10) $S\,(-5\,,\,0)\;T\,(0\,,\,-5)\,,\,R\,(5\,,\,0)$



$x^2+y^2=25$

11) **زلازل،** تنطلق من مركز حدوث الزلزال موجات مرتدّة تتحرك في صورة دوائر متحدة في المركز، وقد رصدت إحدى محطات رصد الزلازل زلزالًا يبعد مركزه 50 km إلى الشرق منها. إذا كان موقع المحطة عند نقطة الأصل، فاكتب معادلة إحدى دوائر الموجات الزلزالية المرتدة. $(x-50)^2+y^2=2500$

التقويم التكويني

المفردات الأساسية رقم الصفحة بعد كل مفردةٍ يُشير إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة، فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 8–1، فوجههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (71)

الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدائرة ومحيطها (الدرس 8-1)

- محيط الدائرة يساوي πd أو $2\pi r$.

الزوايا والأقواس والأوتار والزوايا المحيطية (الدروس 8-2 إلى 8-4)

- مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة يساوي $360°$
- طول القوس يتناسب تناسبًا طرديًّا مع محيط الدائرة.
- قطر الدائرة العمودي على وترٍ فيها، ينصفه وينصف القوسين المقابلين لهذا الوتر.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تقابله.

المماس والقاطع وقياسات الزوايا (الدرسان 8-5 ,8-6)

- يقطع المماس الدائرة في نقطةٍ واحدةٍ بالضبط، ويكون عموديًّا على نصف القطر المار بنقطة التماس.
- مماسَّا الدائرة المرسومان من نقطة واحدة خارجها يكونان متطابقين.
- قياس الزاوية المتكوّنة من تلاقي قاطعين خارج الدائرة، يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.
- قياس الزاوية المتكوّنة من قاطعٍ ومماسٍّ يساوي نصف قياس القوس المقابل لهذه الزاوية.

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة ومعادلة الدائرة (الدرسان 8-7 ,8-8)

- يمكن إيجاد أطوال الأوتار المتقاطعة في الدائرة باستعمال حاصل ضرب أطوال أجزاء هذه الأوتار.
- معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



مفردات أساسية

الدائرة (ص. 178)
المركز (ص. 178)
نصف القطر (ص. 178)
الوتر (ص. 178)
القطر (ص. 178)
الدوائر المتطابقة (ص. 179)
الدائرتان المتحدتان في المركز (ص. 179)
محيط الدائرة (ص. 180)
باي (π) (ص. 180)
المضلع المحاط بدائرة (ص. 181)
الدائرة الخارجية (ص. 181)
الزاوية المركزية (ص. 186)
القوس (ص. 186)
القوس الأصغر (ص. 187)
القوس الأكبر (ص. 187)
نصف دائرة (ص. 187)
الأقواس المتطابقة (ص. 187)
الأقواس المتجاورة (ص. 188)
طول القوس (ص. 189)
الزاوية المحيطية (ص. 201)
القوس المقابل (ص. 201)
المماس (ص. 209)
نقطة التماس (ص. 209)
المماس المشترك (ص. 209)
القاطع (ص. 216)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فضع كلمة من القائمة أعلاه مكان الكلمة التي تحتها خط؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) أيُّ قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة فهي نصف قطر للدائرة. خطأ؛ وتر
2) الوتر المارُّ بمركز الدائرة هو قطر فيها. صحيحة
3) يقع رأس الزاوية المركزية عند مركز الدائرة، ويحتوي ضلعاها على نصفَي قطرين للدائرة. صحيحة
4) القوس الذي قياسه أقل من $180°$ هو قوس أكبر. خطأ؛ القوس الأصغر
5) القوس المقابل للزاوية المحيطية هو القوس الذي يقع طرفاه على ضلعَي الزاوية المحيطية، ويقع داخلها. صحيحة
6) النقطة الوحيدة التي يتقاطع فيها مستقيمٌ مع دائرةٍ في المستوى نفسه هي المماس المشترك. خطأ؛ نقطة التماس خطأ؛ نقطتين
7) القاطع هو المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة بالضبط.
8) تكون الدائرتان متحدتين في المركز، إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متطابقين. خطأ؛ متطابقتين

المطويات منظم أفكار

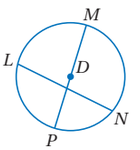
اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلةً لكل درسٍ.

واقترح عليهم أن يُبقُوا مطوياتهم في متناول أيديهم، عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

8-1 الدائرة ومحيطها (ص 185–178)

استعمل الدائرة في الشكل أدناه للإجابة عن الأسئلة 11–9:



9) سمِّ الدائرة. $\odot D$

10) سمِّ نصف قطر للدائرة. $\overline{DM}$ أو $\overline{DP}$

11) سمِّ وترًا لا يكون قطرًا. $\overline{LN}$

أوجد القطر ونصف القطر للدائرة المُعطى محيطها في كلٍّ ممَّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ. 15–12. انظر الهامش.

12) $C = 43$ cm

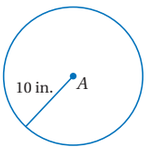
13) $C = 26.7$ yd

14) $C = 108.5$ ft

15) $C = 225.9$ mm

مثال 1

أوجد محيط $\odot A$.



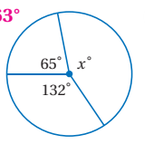
$C = 2\pi r$	صيغة محيط الدائرة
$= 2\pi(10)$	بالتعويض
≈ 62.83	باستعمال الحاسبة

محيط $\odot A$ يساوي 62.83 in تقريبًا.

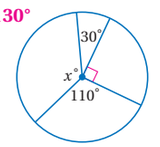
8-2 قياس الزوايا والأقواس (ص 193–186)

أوجد قيمة $x°$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

16) 163°

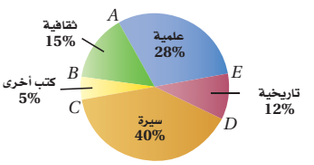


17) 130°



18) **كتب:** أجرى مُعلم مسحًا حول الكتب التي يفضّل طلابه قراءتها، ومثّل النتائج التي حصل عليها بالقطاعات الدائرية كما في الشكل أدناه، أجب عمّا يأتي:

الكتب التي يُفضّلها الطلاب



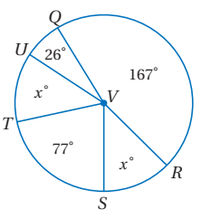
a) أوجد $m\widehat{AE}$ 100.8°

b) أوجد $m\widehat{BC}$ 18°

c) صِفْ قوس القطاع الدائري الذي يمثّل فئة السيرة.
قوس أصغر

مثال 2

أوجد قيمة $x°$ في الشكل الآتي:



$m\angle QVR + m\angle RVS + m\angle SVT + m\angle TVU + m\angle UVQ = 360°$	مجموع قياسات الزوايا المركزية
$167° + x° + 77° + x° + 26° = 360°$	بالتعويض
$270° + 2x° = 360°$	بالتبسيط
$2x° = 90°$	بالطرح
$x° = 45°$	بالقسمة

مراجعة الدروس

مراجعة: إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافيةً لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة 8–1، فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

12) 13.69 cm; 6.84 cm

13) 8.5 yd; 4.25 yd

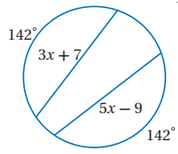
14) 34.54 ft; 17.27 ft

15) 71.91 mm; 35.95 mm

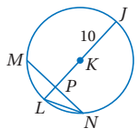
الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

8-3 الأقواس والأوتار (ص 194–200)

19) أوجد قيمة x في الشكل المجاور. **8**



في $\odot K$، إذا كان: $MN = 16,\ m\widehat{MLN} = 98°$، فأوجد كلّ قياس ممّا يأتي مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.



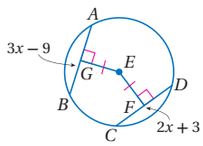
20) $m\widehat{NJ}$ **131°** **21)** LN **8.94**

22) بَسْتَنة: يُبيّن الشكل عريشًا يعلوه قوس من دائرة، إذا كان $\overline{CD}$ جزءًا من قطرها و $m\widehat{AB}$ يساوي 28% من الدائرة كاملةً، فأوجد $m\widehat{CB}$. **50.4°**



مثال 3

جبر: في $\odot E$، إذا كان $EG = EF$، فأوجد AB.



الوتران $\overline{EG}, \overline{EF}$ متطابقان، لأن بُعدَيهما عن E متساويان. إذن:

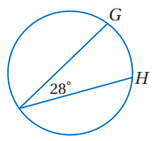
$AB = CD$	**النظرية 8.5**
$3x - 9 = 2x + 3$	**بالتعويض**
$3x = 2x + 12$	**بإضافة 9 لكلا الطرفين**
$x = 12$	**بطرح $2x$ من كلا الطرفين**

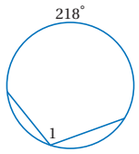
إذن: $AB = 3(12) - 9 = 27$.

8-4 الزوايا المحيطية (ص 201–207)

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

23) $m\angle 1$ **109°** **24)** $m\widehat{GH}$ **56°**

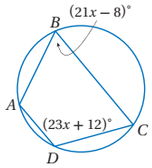




25) شعارات: إذا كان $m\angle 1 = 42°$ في الشعار المجاور، فأوجد $m\angle 5$. **42°**



مثال 4



أوجد $m\angle D$ و $m\angle B$.

بما أن $ABCD$ محاط بدائرة، إذن الزاويتان المتقابلتان متكاملتان.

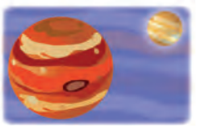
$m\angle D + m\angle B = 180°$	**تعريف الزوايا المتكاملة**
$(23x + 12)° + (21x - 8)° = 180°$	**بالتعويض**
$(44x + 4)° = 180°$	**بالتبسيط**
$44x = 176$	**بالطرح**
$x = 4$	**بالقسمة**

إذن: $m\angle D = (23(4) + 12)° = 104°$ و $m\angle B = (21(4) - 8)° = 76°$.

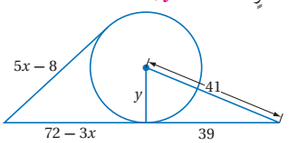
238 الفصل 8 الدائرة

8-5 المماسات (ص 209–215)

26) خيال علمي: كتب جابر قصةً قصيرةً، وذكر فيها أن الانتقال أو السفر الفوريَّ بين كوكب معيّن ثنائي الأبعاد وقمره، يكون ممكنًا إذا كان مسار الانتقال مماسًّا لها. ارسم المسارات الممكنة جميعها. انظر الهامش.

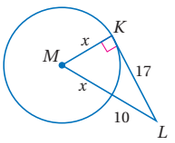


27) أوجد قيمة كلٍّ من x و y مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ. $x = 10, y = 12.6$



مثال 5

إذا كانت $\overline{KL}$ مماسًّا لِـ $\odot M$ عند K كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة x.



من النظرية 8.10: $\overline{MK} \perp \overline{KL}$ ؛ إذن $\triangle MKL$ مثلث قائم الزاوية.

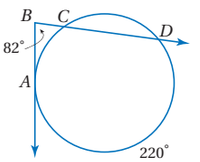
نظرية فيثاغورس	$KM^2 + KL^2 = ML^2$
بالتعويض	$x^2 + 17^2 = (x + 10)^2$
بالضرب	$x^2 + 289 = x^2 + 20x + 100$
بالتبسيط	$289 = 20x + 100$
بالطرح	$189 = 20x$
بالقسمة	$9.45 = x$

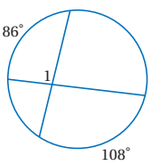
8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا (ص 216–223)

أوجد القياسين الآتيين:

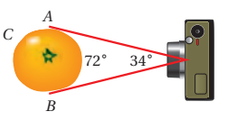
28) $m\angle 1$ 97°

29) $m\widehat{AC}$ 56°



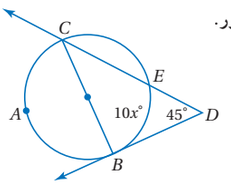


30) تصوير: أراد أحمد أن يلتقط صورةً لبرتقالة، فأخذ اللقطة كما في الشكل أدناه، حيث كان خطًّا النظر مماسين لها. إذا كان قياس زاوية الرؤية لآلة التصوير 34°، فأوجد $m\widehat{ACB}$. 140°



مثال 6

أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



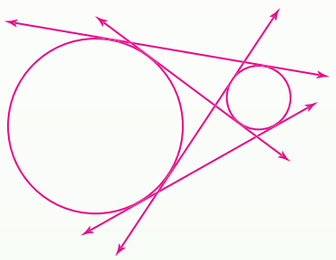
$\widehat{CAB}$ نصف دائرة؛ لأن $\overline{CB}$ قطرٌ فيها.

إذن: $m\widehat{CAB} = 180°$.

النظرية 8.14	$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{CB} - m\widehat{EB})$
بالتعويض	$45° = \frac{1}{2}(180 - 10x)°$
بالضرب	$90 = 180 - 10x$
بالطرح	$-90 = -10x$
بالقسمة	$9 = x$

إجابة:

26)



الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة 239

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 8 ص(65)، وناقشهم في تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابة:

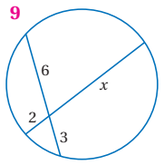
36) نصف قطر الدائرة يساوي $15 + 19$؛ أي يساوي 34 in، ومركزها (h, k) هو $(0, 0)$؛ إذن معادلة الدائرة هي: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 34^2$ أي: $x^2 + y^2 = 1156$.

الفصل 8 دليل الدراسة والمراجعة

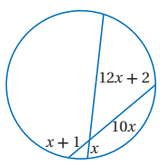
8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة (ص 224–229)

أوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

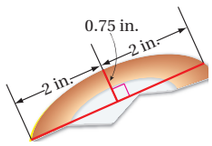
31) 9



32) 4

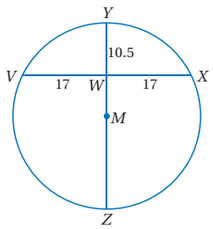


33) آثار: وجد حمزة جزءًا من طبقٍ أثريٍّ مكسورٍ في أثناء حَفره حفرةً لزراعة شجرة. ما محيط الطبق الأصلي؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ. **19.1 in**



مثال 7

أوجد قطر الدائرة M.



$VW \cdot WX = YW \cdot WZ$	النظرية **8.15**
$17 \cdot 17 = 10.5 \cdot WZ$	بالتعويض
$289 = 10.5 \cdot WZ$	بالتبسيط
$27.5 \approx WZ$	بقسمة كلا الطرفين على **10.5**
$YZ = YW + WZ$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
$YZ = 10.5 + 27.5$	بالتعويض
$YZ = 38$	بالتبسيط

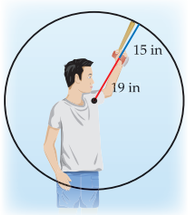
8-8 معادلة الدائرة (ص 231–235)

اكتب معادلة الدائرة في كلٍّ ممّا يأتي:

34) مركزها $(-2, 4)$ ونصف قطرها 5 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$

35) مركزها $(1, 2)$ وقطرها 14 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 49$

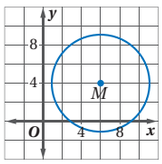
36) أخشاب: يتعلم عادل في موقع تدريب خارج البيت إجراءات السلامة عند قطع الأخشاب، يتضمّن هذا التدريب تكوين دائرة بذراعه الممدودة؛ للتأكد من عدم إصابة أي شيء فوقه عندما يقطع الأخشاب. إذا كان امتداد ذراعه يصل إلى 19 in وطول مقبض آلة قطع الخشب 15 in، فما معادلة دائرة السلامة بالنسبة لعادل مفترضًا أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل.



انظر الهامش.

مثال 8

اكتب معادلة الدائرة الممثّلة بيانيًّا أدناه.



مركز الدائرة $(6, 4)$ ونصف قطرها 5

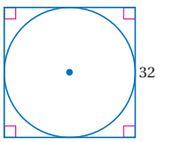
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	معادلة الدائرة
$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 5^2$	$r = 5, (h, k) = (6, 4)$
$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$	بالتبسيط

240 الفصل 8 الدائرة

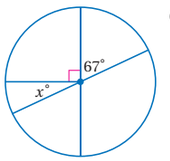
الفصل 8 اختبار الفصل

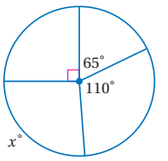
1) برك سباحة: عمق بركة سباحة سطحها دائري الشكل 4 ft، وطول قطر سطحها 25 ft، أوجد محيط سطح هذه البركة مقربًا إلى أقرب قدمٍ؟ **79 ft**

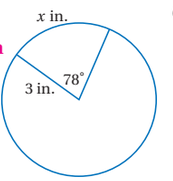
2) أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة الآتية: **32π**

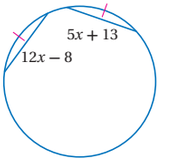


أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

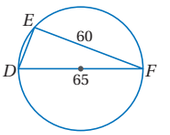
3) 

4) 

5) 

6) 

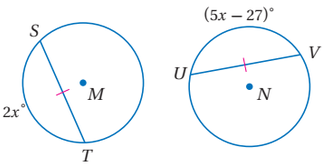
7) اختيار من متعدد: ما طول $\overline{ED}$ في الشكل أدناه؟ **C**



A 5 C 25

B 15 D 88.5

8) إذا كانت $\odot M \cong \odot N$، فأوجد قيمة x. **9**

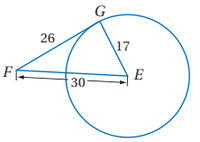


9) اختيار من متعدد: ما عدد النقاط المشتركة بين الدائرتين المتحدتين في المركز؟ **A**

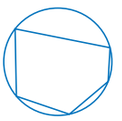
A 0 C 2

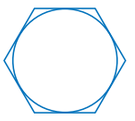
B 1 D 3

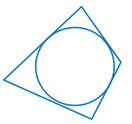
10) حدّد ما إذا كانت $\overline{FG}$ مماسًّا لِـ $\odot E$. برّر إجابتك. **انظر الهامش.**



11) اختيار من متعدد: أيُّ الأشكال أدناه يُمثّل دائرة تحيط بمضلع؟ **A**

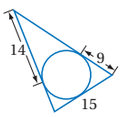
A 

C 

B 

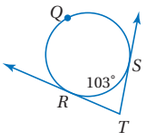
D 

12) أوجد محيط المثلث في الشكل المجاور، مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو كأنها مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا. **58**

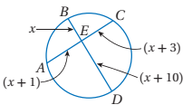


أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

13) $m\angle T$ **77°**



14) x **$\frac{1}{2}$**



15) أزهار: أرادت هند أن تحوّط جذع شجرة بحوض من الأزهار. إذا كان مركز جذع الشجرة هو نقطة الأصل، وأرادت هند أن يمتد الحوض 3 ft من مركز الشجرة، فما المعادلة التي تُمثّل الحد الخارجي لحوض الأزهار؟ **$x^2 + y^2 = 9$**

المعالجة: استعمل نتائج اختبار الفصل ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب.
العبارة "إذا... فاختر..." في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصدرٍ لكل مستوى.

إجابة:

10) لا؛ لأن $\triangle EFG$ ليس مثلثًا قائم الزاوية؛ إذن $\angle G$ ليست قائمةً، ولا يمكن أن يكون $\overline{FG}$ مماسًّا للدائرة.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حلّ ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	الدروس: 8-1, 8-2, 8-3, 8-4, 8-5, 8-6 , 8-7, 8-8		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43)		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف: تعيين عناصر الدائرة، وإيجاد قياس كلٍّ من القوس والزاوية والقطع المستقيمة فيها، وكتابة معادلتها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

أسأل:

- كيف تجد محيط الدائرة إذا علمت نصف قطرها؟ محيط الدائرة يساوي حاصل ضرب القطر في π
- ما الفرق بين الوتر والمماسِّ والقاطع؟ الوتر هو قطعةٌ مستقيمةٌ يقع طرفاها على الدائرة.
  المماس هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة ويقطعها في نقطة واحدة فقط، أما القاطع فهو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين فقط.
- في الدائرة الواحدة أو في الدائرتين المتطابقتين، إذا تطابق وتران ، فما العلاقة بين بُعدَيهِمَا عن المركز؟ متساويان

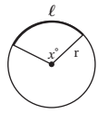
خصائص الدائرة

الدائرة هي الشكل الوحيد الذي تكون فيه للزوايا والأقواس والقطع المستقيمة التي تقطع الدائرة خصائص وعلاقات خاصة.

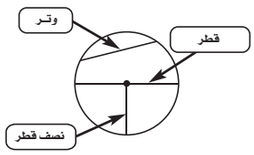
ويُفترض أن تكون قادرًا على تعيين عناصر الدائرة وكتابة معادلتها، وإيجاد قياسات الأقواس والزوايا والقطع المستقيمة في الدائرة.



$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$



$\ell = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$



$r = \frac{1}{2}d$

$d = 2r$

$C = 2\pi r$ أو πd

استراتيجية لتطبيق خصائص الدائرة

الخطوة 1

مراجعة عناصر الدائرة والعلاقات بينها.

- تتضمّن العناصر الأساسية: **نصف القطر والقطر والوتر والقوس والمماس والقاطع**.
- ادرس النظريات الأساسية للدائرة وخصائصها، بالإضافة إلى العلاقة بين عناصر الدائرة.

الخطوة 2

اقرأ نص المسألة، وادرس أيَّ شكلٍ مُعطًى بدقةٍ وعنايةٍ.

- حددّ المطلوب من المسألة.
- ضع على الشكل المعلومات التي تتضمّنها المسألة، وأيّ معلومات أخرى يمكن أن تُحدّدها.
- حدّد أي النظريات أو الخصائص التي يمكن تطبيقها في حالة هذه المسألة.

الخطوة 3

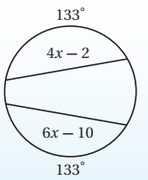
حُلّ المسألة، ثم تحقّق من حلّك.

- طبّق النظريات أو الخصائص لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك، وتأكّد من كونها مقبولة ومنطقية.

مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدّد المطلوب فيها ، ثم استعمل المعطيات لحلّها.

أوجد قيمة x في الشكل المجاور:



A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 6

اقرأ المسألة وادرس الشكل جيدًا. أعطيت دائرة فيها وتران مقابلان لقوسين متطابقين. يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان القوسان الأصغران المقابلان لهما متطابقين. يمكنك استعمال هذه الخاصية لتكوين معادلة بدلالة x، ومن ثم حلّها.

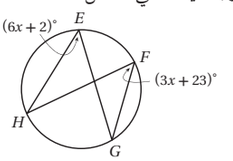
$4x - 2 = 6x - 10$	تعريف القطع المتطابقة
$4x - 6x = -10 + 2$	بالطرح
$-2x = -8$	بالتبسيط
$\frac{-2x}{-2} = \frac{-8}{-2}$	بقسمة كلا الطرفين على 2−
$x = 4$	بالتبسيط

إذن قيمة x تساوي 4، فالإجابة هي C، تحقّق من إجابتك بتعويض 4 في كلٍّ من عبارتَي الوترين، ستجد أن طولَي الوترين متساويان.

تمارين ومسائل

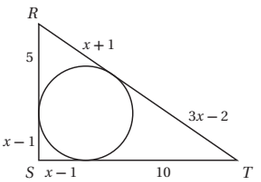
اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة.

1) أوجد قيمة x في الشكل أدناه: **D**



A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7

2) يُحيط المثلث RST بالدائرة في الشكل أدناه، ما محيط هذا المثلث؟ **B**

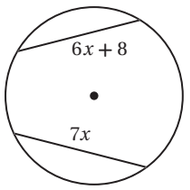


A 33 وحدةً **B** 36 وحدةً **C** 37 وحدةً **D** 40 وحدةً

مثال إضافي

1 تدريب على اختبار:

اوجد قيمة x إن أمكن.



تحتاج إلى معرفة ما إذا كان الوتران متطابقين، لا توجد معلومات كافية لإيجاد قيمة x .

3 التقويم

استعمل التمرينين 1, 2، للتحقق من فهم الطلاب.

تشخيص أخطاء الطلاب

أجر مسحًا شاملًا لإجابات الطلاب عن كل فقرةٍ، فقد تُشير الإجابات إلى أخطاء مفاهيمية.

1) A أخطأ باستعماله $m\angle BAC = 90°$

B صحيحة

C أخطأ

D أخطأ حسابيًّا

2) A أخطأ، حيث نفى المقدمة وليست النتيجة.

B صحيحة

C لم يفهم البرهان غير المباشر

D تخمين

3) A أخطأ باستعماله المجموع $290°$، بدلًا من المجموع $360°$

B أخطأ باستعماله المجموع $330°$، بدلًا من المجموع $360°$

C صحيحة

D أخطأ باستعماله المجموع $380°$، بدلًا من المجموع $360°$

4) A أخطأ حسابيًّا

B أخطأ حسابيًّا

C صحيحة

D خمَّن

5) A أخطأ باستعماله $\overset{\frown}{mAC} = 60°$ وأنه يساوي $m\angle ABC$ المحيطية.

B صحيحة

C أخطأ مفترضًا أن المماس عموديٌّ على وتر الدائرة.

D أخطأ باستعماله $\angle ACD$ زاوية خارجية لِـ $\triangle ABC$

6) A أخطأ باستعماله قاعدة محيط الدائرة

B صحيحة.

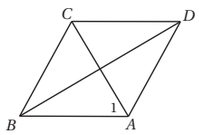
C أخطأ حسابيًّا باستعمال 3.14 بدلًا من π، وحصل على قيمةٍ تقريبيةٍ وليست دقيقةً.

D نسي العلاقة بين المماس ونصف القطر الذي طرفه نقطة التماس.

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة في نموذج الإجابة.

1) إذا كان $ABCD$ معينًا، وكان $m\angle ABC = 70°$، فأوجد $m\angle 1$؟ **B**



A $45°$ **B** $55°$

C $70°$ **D** $125°$

2) يقول محمد: "إذا كنت تقيم في جدة، فإنك تقيم في المملكة العربية السعودية"، أيّ الافتراضات الآتية تبدأ به برهانًا غير مباشر لهذه العبارة؟ **B**

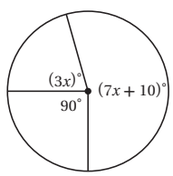
A افترض أن شخصًا لايقيم في جدة.

B افترض أن شخصًا لا يقيم في المملكة العربية السعودية.

C افترض أن شخصًا لايقيم في المملكة العربية السعودية، ولايقيم في جدة.

D افترض أن شخصًا يقيم في السعودية، ويقيم في جدة.

3) أوجد قيمة x في الشكل أدناه: **C**



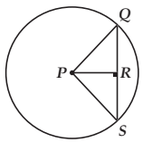
A 19 **B** 23

C 26 **D** 28

إرشادات للاختبار

السؤال 3: استعمل خصائص الدائرة، لكتابة المعادلة وحلّها لإيجاد قيمة x.

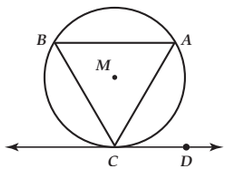
4) نصف قطر $\odot P$ في الشكل أدناه يساوي 5، إذا كان $PR = 3$، فما طول $\overline{QS}$؟ **C**



A 4 **B** 5

C 8 **D** 10

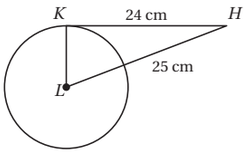
5) في $\odot M$، إذا كان: $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{CA}$، وكان $\overleftrightarrow{CD}$ مماسًا لِـ $\odot M$ عند النقطة C كما في الشكل أدناه، فما قياس $\angle ACD$؟ **B**



A $30°$ **B** $60°$

C $90°$ **D** $120°$

6) إذا كانت $\overline{HK}$ مماسًا للدائرة L في الشكل أدناه، فأوجد الدقيقة لمحيط $\odot L$. **A**



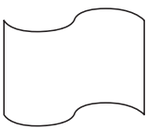
A 7π cm **B** 14π cm

C 43.96 cm **D** 20π cm

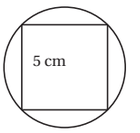
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في نموذج الإجابة.

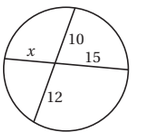
7) هل للشكل الآتي تماثل دوراني؟
وإذا كان كذلك، فأوجد رتبة هذا التماثل. نعم؛ الرتبة 2



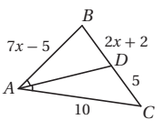
8) الشكل أدناه مربع محاط بدائرة طول ضلعه 5 cm، ما محيط هذه الدائرة ؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر سنتمتر. 22.2 cm



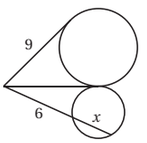
9) أوجد قيمة x في الشكل الآتي، مبيّنًا خطوات الحل. 8



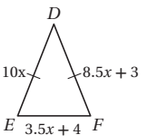
10) $\overline{AD}$ تنصف $\angle CAB$ كما في الشكل المجاور، أوجد قيمة x. 3



11) أوجد قيمة x في الشكل أدناه مفترضًا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلًا. 7.5



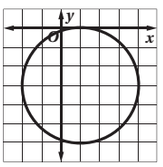
12) ما طول $\overline{EF}$ في المثلث أدناه؟ 11



أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في نموذج الإجابة مبينًا خطوات الحل.

13) استعمل الدائرة في الشكل أدناه لحل الأسئلة الآتية:



a) ما مركز الدائرة؟ (1, −3)

b) ما نصف قطر الدائرة؟ 3 وحداتٍ

c) اكتب معادلة الدائرة.
$(x-1)^2+(y+3)^2=9$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع الإجابة عن...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس...	5-5	4-4	8-2	8-3	8-6	8-5	7-5	8-4	8-7	6-4	8-5	3-6	8-8

التقويم التكويني

يمكنك تحديد مدى تقدم الطلاب في الفصل 8 من خلال:

اختبار تراكمي، ص (244-245)

الاختبار التراكمي، ص (81-83)

الدرس 2-8، ص 192

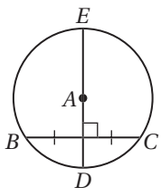
44) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle BAC \cong \angle DAE$	1) معطيات
2) $m\angle BAC = m\angle DAE$	2) تعريف تطابق الزوايا
3) $m\angle BAC = m\overset{\frown}{BC}$, $m\angle DAE = m\overset{\frown}{DE}$	3) تعريف قياس القوس
4) $m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{DE}$	4) بالتعويض
5) $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{DE}$	5) تعريف تطابق الأقواس

الدرس 3-8، ص 199، 200

23) المعطيات: $\odot A$ ، $\overline{ED}$ عمود منصف لـ $\overline{BC}$.

المطلوب: $\overline{ED}$ قطرٌ في $\odot A$.

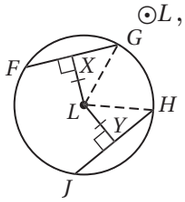


البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{ED}$ عمود منصف لـ $\overline{BC}$	1) معطيات
2) تقع A على بعدَين متساويين عن B , C	2) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة
3) A تقع على العمود المنصف لِـ $\overline{BC}$.	3) عكس نظرية العمود المنصف
4) $\overline{ED}$ قطر للدائرة A	4) تعريف القطر

24) المعطيات: $\odot L$, $\overline{LX} \perp \overline{FG}$, $\overline{LY} \perp \overline{JH}$, $\overline{LX} \cong \overline{LY}$

المطلوب: $\overline{FG} \cong \overline{JH}$



البرهان:

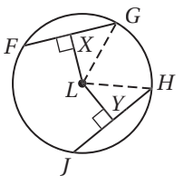
العبارات	المبررات
1) $\overline{LG} \cong \overline{LH}$	1) أنصاف أقطار الدائرة متطابقة
2) $\overline{LX} \perp \overline{FG}$, $\overline{LY} \perp \overline{JH}$, $\overline{LX} \cong \overline{LY}$	2) معطيات
3) $\angle LXG$, $\angle LYH$ قائمتان	3) تعريف المستقيمات المتعامدة
4) $(LX)^2 + (XG)^2 = (LG)^2$, $(LY)^2 + (YH)^2 = (LH)^2$	4) نظرية فيثاغورس
5) $(LX)^2 + (XG)^2 = (LY)^2 + (YH)^2$	5) خاصية التعويض
6) $(LX)^2 + (XG)^2 = (LX)^2 + (YH)^2$	6) خاصية التعويض
7) $(XG)^2 = (YH)^2$	7) خاصية الطرح مع المساواة
8) $XG = YH$	8) خاصية الجذور التربيعية
9) $\triangle XGL \cong \triangle YHL$	9) (SSS)
10) $\overline{XG} \cong \overline{YH}$	10) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
11) $XG = YH$	11) تعريف تطابق القطع المستقيمة
12) $2(XG) = 2(YH)$	12) خاصية الضرب
13) $\overline{LX}$ ينصف $\overline{FG}$ ؛ $\overline{LY}$ ينصف $\overline{JH}$	13) كلٌّ من $\overline{LX}$ وَ $\overline{LY}$ محتواه في نصف قطر الدائرة، ونصف القطر العمودي على الوتر ينصِّفه
14) $FG = FX + XG$, $JH = JY + YH$	14) طول القطعة المستقيمة يساوي مجموع أطول أجزائها
15) $FX = XG$, $JY = YH$	15) تعريف تطابق القطع المستقيمة
16) $FG = 2(XG)$, $JH = 2(YH)$	16) تعريف منصف القطعة المستقيمة
17) $FG = JH$	17) بالتعويض
18) $\overline{FG} \cong \overline{JH}$	18) تعريف تطابق القطع المستقيمة

25) المعطيات: $\odot L$, $\overline{FG} \cong \overline{JH}$, $\overline{LX} \perp \overline{FG}$; $\overline{LY} \perp \overline{JH}$

المطلوب: $\overline{LX} \cong \overline{LY}$

$\overline{LH}, \overline{LG}$ أنصاف أقطار .

البرهان:



العبارات	المبررات
1) $\overline{LG}, \overline{LH}, \overline{FG} \cong \overline{JH}$, $\overline{LX} \perp \overline{FG}, \overline{LY} \perp \overline{JH}$	1) أنصاف أقطار، معطيات
2) $\overline{LX}$ ينصف $\overline{FG}$ ؛ $\overline{LY}$ ينصف $\overline{JH}$	2) $\overline{LY}, \overline{LX}$ محتويان في نصف قطر للدائرة، ونصف القطر العمودي على الوتر ينصفه
3) $JY + YH = JH$, $FX + XG = FG$	3) طول القطعة المستقيمة يساوي مجموع أطوال أجزائها
4) $JY = YH, XG = FX$	4) X منتصف FG، وَ Y منتصف JH
5) $2YX = JH, 2XG = FG$	5) بالتعويض
6) $YH = \frac{1}{2}JH, XG = \frac{1}{2}FG$	6) خاصية القسمة
7) $FG = JH$	7) تعريف تطابق القطع المستقيمة
8) $\frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}JH$	8) خاصية الضرب
9) $XG = YH$	9) بالتعويض
10) $\overline{XG} \cong \overline{YH}$	10) تعريف تطابق القطع المستقيمة
11) $\overline{LG} \cong \overline{LH}$	11) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة
12) $\angle GXL, \angle HYL$ قائمتان	12) تعريف المستقيمات المتعامدة
13) $(XL)^2 + (XG)^2 = (LG)^2$, $(LY)^2 + (YH)^2 = (LH)^2$	13) نظرية فيثا غورس
14) $(XL)^2 + (XG)^2 = (LY)^2 + (YH)^2$	14) خاصية التوزيع
15) $(XL)^2 + (XG)^2 = (LY)^2 + (XG)^2$	15) خاصية التوزيع
16) $(XL)^2 = (LY)^2$	16) خاصية الطرح مع المساواة
17) $XL = LY$	17) خاصية الجذور التربيعية
18) $\triangle LXG \cong \triangle LYH$	18) (SSS)
19) $\overline{LX} \cong \overline{LY}$	19) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

26) 17.3 تقريبًا ؛ P و Q تبعدان مسافات متساوية عن نقطتَي طرفَي $\overline{AB}$، إذن كلاهما واقعة على العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$، لذلك نجد أن $\overline{PQ}$ هي العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ؛ لذا فإن طول كل جزءٍ من القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ يساوي 5

بما أن $\overline{PS}$ عمودي على الوتر $\overline{AB}$، حيث S نقطة تقاطع $\overline{AB}, \overline{PQ}$، إذن $\angle PSA$ قائمة، و $\triangle PSA$ قائم الزاوية، وبتطبيق نظرية فيثاغورس:

$PS = \sqrt{(PA)^2 - (AS)^2}$، وبالتعويض:

$PS = \sqrt{11^2 - 5^2} = \sqrt{96}$، وبالطريقة نفسها $\triangle ASQ$ قائم الزاوية فيه:

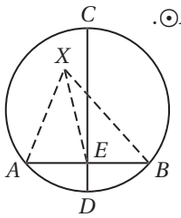
$SQ = \sqrt{(AQ)^2 - (AS)^2} = \sqrt{9^2 - 5^2} = \sqrt{56}$، وبما أن:

$PQ = PS + SQ$ ، إذن: $PQ = \sqrt{96} + \sqrt{56}$ أو 17.3 تقريبًا.

28a) المعطيات: $\overline{CD}$ عمود منصف للوتر $\overline{AB}$ في $\odot X$.

المطلوب: $\overline{CD}$ يمر بالنقطة X.

البرهان:



أفترض أن X لا تقع على $\overline{CD}$.

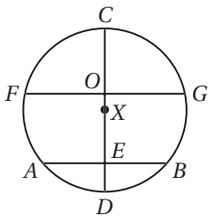
ارسم $\overline{XE}$ وأنصاف الأقطار $\overline{XB}, \overline{XA}$.

بما أن $\overline{CD}$ هو العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ و E نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ ، وكذلك $\overline{XB} \cong \overline{XA}$ ؛ لأن جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة. $\overline{XE} \cong \overline{XE}$ خاصية الانعكاس؛ لذا $\triangle AXE \cong \triangle BXE$، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة، فإن $\angle XEA \cong \angle XEB$، وبما أن $\angle XEA, \angle XEB$ متجاورتان متطابقتان تكوّنان $\angle AEB$، فإن $\overline{XE} \perp \overline{AB}$ ؛لذا فإن $\overline{XE}$ عمود منصف لِـ $\overline{AB}$، لكن $\overline{CD}$ هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ ، وهذا يناقض كون العمود المنصف للقطعة المستقيمة وحيدًا؛ لذا فالفرض خطأ، والمركز X يجب أن يقع على $\overline{CD}$.

28b) المعطيات: في $\odot X$. تقع X على $\overline{CD}$ و $\overline{FG}$ ينصف $\overline{CD}$ عند O.

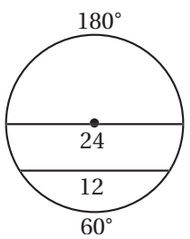
المطلوب: O هي النقطة X.

البرهان:



بما أن النقطة X تقع على $\overline{CD}$ ، و C, D تقعان على $\odot X$ ، فإن $\overline{CD}$ قطر للدائرة $\odot X$، وبما أن $\overline{FG}$ ينصِّف $\overline{CD}$ عند O، فإن O نقطة منتصف $\overline{CD}$، وبما أن نقطة منتصف القطر هي مركز الدائرة، فإن O هي مركز الدائرة، لذا فالنقطة O هي النقطة X.

29) لا؛ إجابة ممكنة: في دائرة نصف قطرها 12، القوس الذي قياسه 60° يقابل وترًا طوله 12، إذا أصبح قياس القوس ثلاثة أمثال قياس القوس الأصلي؛ أي أصبح 180°، فإن طول الوتر يساوي 24؛ لأنه أصبح قطرًا، وهذا لا يساوي ثلاثة أمثال 12



الدرس 4-8 ، ص (207 - 203)

إجابة تحقق من فهمك.

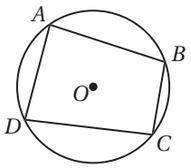
3) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overset{\frown}{QR} \cong \overset{\frown}{ST}, \overset{\frown}{PQ} \cong \overset{\frown}{PT}$	1) معطيات
2) $m\overset{\frown}{QR} = m\overset{\frown}{ST}, m\overset{\frown}{PQ} = m\overset{\frown}{PT}$	2) تعريف تطابق الأقواس
3) $m\angle QPR = m\angle TPS$, $m\angle QRP = m\angle TSP$	3) إذا قابلت زاويتان محيطتان في دائرة القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.
4) $\angle QPR \cong \angle TPS$, $\angle QRP \cong \angle TSP$	4) تعريف تطابق الزوايا
5) $\overline{QR} \cong \overline{ST}$	5) الأقواس المتطابقة تحدها أوتار متطابقة.
6) $\triangle PQR \cong \triangle PTS$	5) (AAS)

18) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $m\angle T=\frac{1}{2}m\angle S$	1) معطيات
2) $m\angle S=2m\angle T$	2) خاصية الضرب
3) $m\angle S=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{TUR}$, $m\angle T=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{URS}$	3) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها
4) $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{TUR}=2\left(\frac{1}{2}m\overset{\frown}{URS}\right)$	4) بالتعويض
5) $m\overset{\frown}{TUR}=2m\overset{\frown}{URS}$	5) خاصية الضرب

27) المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$ محاط بالدائرة O.



المطلوب: $\angle A$, $\angle C$ متكاملتان، $\angle B$, $\angle D$ متكاملتان.

البرهان: بتطبيق مسلَّمة جمع الأقواس، وتعريف قياس القوس ومجموع الزوايا المركزية، يكون: $m\overset{\frown}{DCB}+m\overset{\frown}{DAB}=360°$.

وبما أن: $m\angle C=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DAB}$ و $m\angle A=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DCB}$

فإن: $\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{DCB}+m\overset{\frown}{DAB})=m\angle C+m\angle A$

ولكن: $m\overset{\frown}{DCB}+m\overset{\frown}{DAB}=360°$

إذن: $m\angle C+m\angle A=\frac{1}{2}(360°)=180°$، وهذا يثبت أن $\angle C$ و $\angle A$ متكاملتان، ولأن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي يساوي $360°$، فإن: $m\angle A+m\angle C+m\angle B+m\angle D=360°$. ولكن $m\angle A+m\angle C=180°$، إذن: $m\angle B+m\angle D=180°$، وهذا يثبت أن هاتين الزاويتين متكاملتان أيضًا.

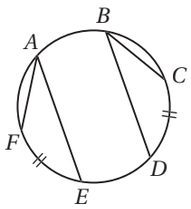
28) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $m\angle ABC=m\angle ABD+m\angle DBC$	1) مسلمة جمع الزوايا
2) $m\overset{\frown}{ADC}=m\overset{\frown}{AD}+m\overset{\frown}{DC}$	2) مسلّمة جمع الأقواس
3) $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC}=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{AD}+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}$	3) خاصية الضرب
4) $m\angle ABD=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{AD}$, $m\angle DBC=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}$	4) قياس الزاوية المحيطية التي يكون أحد ضِلْعَيها قطرًا في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل (الحالة 1)
5) $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC}=m\angle ABD+m\angle DBC$	5) خاصية الضرب
6) $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC}=m\angle ABC$	6) بالتعويض (الخطوتان 5,1)

30) المعطيات: $\angle FAE$ و $\angle CBD$

محيطيتان؛ $\overset{\frown}{EF}\cong\overset{\frown}{DC}$

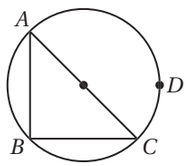
المطلوب: $\angle FAE\cong\angle CBD$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle FAE$ و $\angle CBD$ محيطيتان، $\overset{\frown}{EF}\cong\overset{\frown}{DC}$	1) معطيات
2) $m\angle CBD=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}$, $m\angle FAE=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{EF}$	2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها
3) $m\overset{\frown}{EF}=m\overset{\frown}{DC}$	3) تعريف تطابق الأقواس
4) $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{EF}=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}$	4) خاصية الضرب
5) $m\angle FAE=m\angle CBD$	5) بالتعويض (الخطوتان 4 , 2)
6) $\angle FAE\cong\angle CBD$	6) تعريف تطابق الزوايا

31) الجزء I: **المعطيات:** $\overset{\frown}{ADC}$ نصف دائرة.



المطلوب: $\angle ABC$ قائمة.

البرهان: $\overset{\frown}{ADC}$ نصف دائرة،

$m\overset{\frown}{ADC}=180°$ ، $\angle ABC$ محيطية،

$m\angle ABC=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC}=90°$

وهذا يعني أن $\angle ABC$ قائمة.

الجزء II: **المعطيات:** $\angle ABC$ قائمة.

المطلوب: $\overset{\frown}{ADC}$ نصف دائرة.

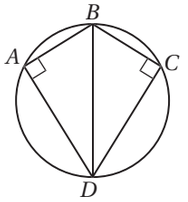
البرهان: بما أن $m\angle ABC=90°$، إذن قياس القوس المقابل لها يساوي $180°$، وبما أن قياس القوس المقابل يساوي $180°$، فهو نصف دائرة.

33) صحيحة دائمًا، جميع زوايا المربع قائمة، إذن زواياه المتقابلة ستكون محيطية مرسومة في نصف دائرة.

34) صحيحة دائمًا، جميع زوايا المستطيل قائمة، إذن زواياه المتقابلة ستكون محيطية مرسومة في نصف دائرة.

35) صحيحة أحيانًا، يمكن أن يكون المعيّن محاطًا بدائرةٍ إذا كان مربعًا. أما إذا لم تكن الزوايا المتقابلة قائمةً، فإنها لن تكون مرسومةً في نصف دائرة، كما أن مجموع قياس كل زاويتين متقابلتين لا يساوي $180°$، إذن لا يمكن أن يُحاط هذا المعين بدائرةٍ.

36) صحيحة أحيانًا، الزاويتين A, D المتقابلتين كل منها قائمة وبالتالي فهما متكاملتين وكل منها محيطية مرسومة في نصف دائرة وفي هذه الحالة يمكن احاطتها بدائرة.

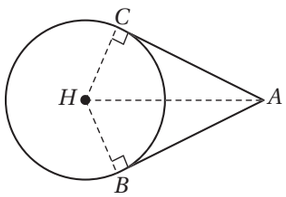


38) المثلث الذي زواياه $90°-45°-45°$، هو مثلث قائم الزاوية ومتطابق الساقين، وبالتالي يمكن أن يُحاط بدائرة يكون فيها قوسان أصغران متطابقين قياس كلٍّ منهما $90°$، من النظرية 8.8، الزاوية المحيطية في مثلث تقابل قطرًا أو نصف دائرة، إذا وفقط إذا كانت قائمة. إذن وتر المثلث القائم الزاوية ينطبق على قطر الدائرة. وباستعمال حساب المثلثات، فإن طول ساق المثلث يساوي $2r \cdot \sin 45° = \sqrt{2}\, r$

40) الزاوية المحيطية يقع رأسها على الدائرة، أما الزاوية المركزية فيقع رأسها عند مركز الدائرة، وإذا كانت الزاوية المحيطية والزاوية المركزية تقابلان القوس نفسه، فإن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية.

الدرس 5-8، ص (214)

22) البرهان: ارسم $\odot H$، ثم ارسم كلًّ من المماسين $\overline{AC}$ عند النقطة C، وَ $\overline{AB}$ عند النقطة B



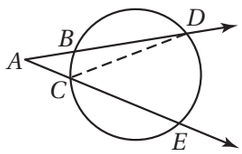
العبارات	المبررات
1) $\overline{AC}$ مماسٌّ للدائرة H عند C، و$\overline{AB}$ مماس للدائرة H عند B	1) معطيات
2) ارسم $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$.	2) أي نقطتين يمرُّ بهما مستقيم واحد
3) $\overline{AC} \perp \overline{CH}, \overline{AB} \perp \overline{BH}$	3) مماس الدائرة عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس
4) $\angle ACH, \angle ABH$ قائمتان	4) تعريف تعامد المستقيمات
5) $\overline{CH} \cong \overline{BH}$	5) جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة
6) $\overline{AH} \cong \overline{AH}$	6) خاصية الانعكاس
7) $\triangle ACH \cong \triangle ABH$	7) (HL)
8) $\overline{AC} \cong \overline{AB}$	8) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

25) البرهان: افترض أنّ ℓ ليس مماسًّا لِـ $\odot S$ عند T؛ لذا يجب أن يقطع الدائرة في نقطةٍ أُخرى ولتكن Q، إذن $ST = SQ$، ولكن إذا كانت $\overline{ST} \perp \ell$، فإنّ $\overline{ST}$ يجب أن تكون أقصر قطعة مستقيمة من S إلى ℓ، وبما أنّ T, Q نقطتان مختلفتان واقعتان على ℓ، فإن هذا تناقض؛ لذا ℓ مماس لِـ $\odot S$.

الدرس 6-8، ص (222, 223)

24) البرهان:

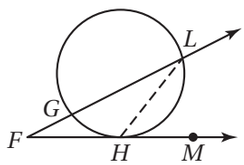
ارسم الوتر $\overline{CD}$



العبارات	المبررات
1) $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ قاطعان للدائرة.	1) معطيات
2) $m\angle DCE = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DE}$, $m\angle ADC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BC}$	2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تقابله
3) $m\angle DCE = m\angle ADC + m\angle A$	3) نظرية الزاوية الخارجية للمثلث
4) $\frac{1}{2} m\overset{\frown}{DE} = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BC} + m\angle A$	4) بالتعويض
5) $\frac{1}{2} m\overset{\frown}{DE} - \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BC} = m\angle A$	5) خاصية الطرح
6) $\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{DE} - m\overset{\frown}{BC}) = m\angle A$	6) خاصية التوزيع

25) البرهان:

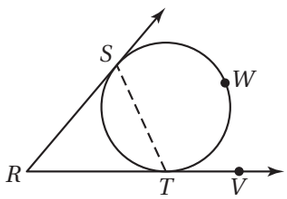
ارسم الوتر $\overline{LH}$



العبارات	المبررات
1) $\overline{FM}$ مماسٌّ للدائرة و $\overrightarrow{FL}$ قاطع لها.	1) معطيات
2) $m\angle FLH = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{HG}$, $m\angle LHM = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{LH}$	2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها
3) $m\angle LHM = m\angle FLH + m\angle F$	3) نظرية الزاوية الخارجية للمثلث
4) $\frac{1}{2} m\overset{\frown}{LH} = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{HG} + m\angle F$	4) بالتعويض
5) $\frac{1}{2} m\overset{\frown}{LH} - \frac{1}{2} m\overset{\frown}{HG} = m\angle F$	5) خاصية الطرح
6) $\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{LH} - m\overset{\frown}{HG}) = m\angle F$	6) خاصية التوزيع

26) البرهان:

ارسم الوتر $\overline{ST}$



العبارات	المبررات
1) $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RV}$ مماسّان للدائرة.	1) معطيات
2) $m\angle STV=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{SWT}$, $m\angle RST=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{ST}$	2) قياس الزاوية بين المماس والقاطع عند نقطة التماس يساوي نصف قياس القوس المقابل
3) $m\angle STV=m\angle RST+m\angle R$	3) نظرية الزاوية الخارجية للمثلث
4) $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{SWT}=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{ST}+m\angle R$	4) بالتعويض
5) $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{SWT}-\frac{1}{2}m\overset{\frown}{ST}=m\angle R$	5) خاصية الطرح
6) $\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{SWT}-m\overset{\frown}{ST})=m\angle R$	6) خاصية التوزيع

27) البرهان:

27a) البرهان: $\angle DAB$ قائمة قياسها $90°$ و $\overset{\frown}{DCA}$ نصف دائرة قياسه $180°$

إذا كان المستقيم مماسًّا $\odot O$ ، فإنه عمودي على نصف قطرها عند نقطة التماس، ولأن $\angle CAB$ حادة، فإن النقطة C تقع داخل $\angle DAB$ ، إذن بتطبيق مسلمة إضافة الزوايا والأقواس يكون:

$m\angle DAB=m\angle DAC+m\angle CAB$

و $m\overset{\frown}{DCA}=m\overset{\frown}{DC}+m\overset{\frown}{CA}$ وبالتعويض

$90°=m\angle DAC+m\angle CAB$

$180°=m\overset{\frown}{DC}+m\overset{\frown}{CA}$

إذن: $90°=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CA}$ خاصية الضرب.

$m\angle DAC+m\angle CAB=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CA}$ بالتعويض.

$m\angle DAC=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}$ (لأن $\angle DAC$ محيطية)، وبالتعويض ينتج أن:

$\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}+m\angle CAB=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC}+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CA}$ ومن خاصية الطرح ينتج أن:

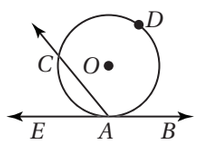
$m\angle CAB=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CA}$.

27b) المعطيات: $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لـ $\odot O$.

$\overleftrightarrow{AC}$ قاطع لـ $\odot O$. $\angle CAB$ منفرجة.

المطلوب: إثبات أن:

$m\angle CAB=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CDA}$



البرهان: $\angle CAB$ و $\angle CAE$ زاويتان متجاورتان على مستقيم، إذن:

$m\angle CAB+m\angle CAE=180°$، ولأن $\angle CAB$ منفرجة، فإنّ $\angle CAE$ حادة.

وبتطبيق حالة (1) يكون:

$m\angle CAE=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CA}$,

$m\overset{\frown}{CA}+m\overset{\frown}{CDA}=360°$,

$\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CA}+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CDA}=180°$ (بالضرب)

و $m\angle CAE+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CDA}=180°$ بالتعويض واستعمال خاصية التعدي ينتج أن:

$m\angle CAB+m\angle CAE=m\angle CAE+\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CDA}$

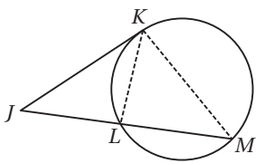
$m\angle CAB=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{CDA}$. (بالطرح)

39)

العبارات	المبررات
1) $\overline{RH}\perp\overline{TM}$ ؛ $\overset{\frown}{MHT}$ نصف دائرة	1) معطيات
2) $\angle THM$ قائمة.	2) الزاوية المحيطية التي تقابل نصف دائرة تكون قائمة
3) $\angle TRH$ قائمة	3) تعريف تعامد مستقيمين
4) $\angle THM\cong\angle TRH$	4) جميع الزوايا القائمة متطابقة
5) $\angle T\cong\angle T$	5) خاصية الانعكاس
6) $\triangle TRH\sim\triangle THM$	6) مسلمة التشابه AA
7) $\frac{TR}{TH}=\frac{RH}{HM}$	7) تعريف المضلعات المتشابهة
8) $\frac{TR}{RH}=\frac{TH}{HM}$	8) بالضرب التبادلي والتبسيط

الدرس 7-8 ، ص (228)

17) البرهان:

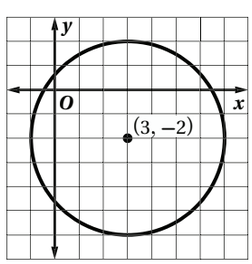


ارسم الوترين $\overline{KL}$ ، $\overline{KM}$

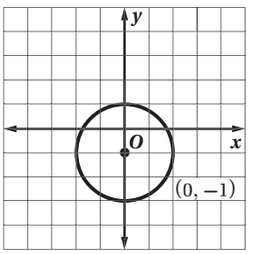
العبارات	المبررات
1) $\overline{JK}$ مماس و $\overline{JM}$ قاطع	1) معطيات
2) $m\angle KML=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{KL}$	2) قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها
3) $m\angle JKL=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{KL}$	3) قياس الزاوية المتكونة من القاطع والمماس، يساوي نصف قياس القوس المقابل لها
4) $m\angle KML=m\angle JKL$	4) بالتعويض
5) $\angle KML\cong\angle JKL$	5) تعريف تطابق الزوايا
6) $\angle J\cong\angle J$	6) خاصية الانعكاس
7) $\triangle JMK\sim\triangle JKL$	7) مسلمة التشابه AA
8) $\frac{JK}{JL}=\frac{JM}{JK}$	8) تعريف تشابه المثلثات
9) $JK^2=JL\cdot JM$	9) الضرب التبادلي

الدرس 8-8 ، ص (235–233)

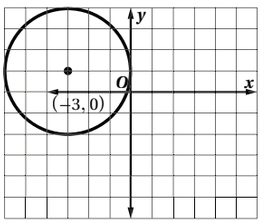
7) $(3,-2)$; 4



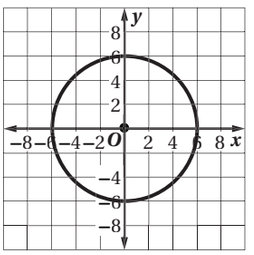
8) $(0, -1)$; 2



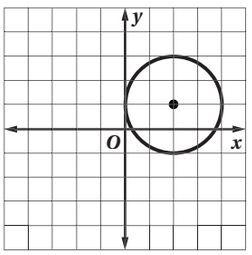
9) المركز $(0, -3)$؛ نصف القطر 3



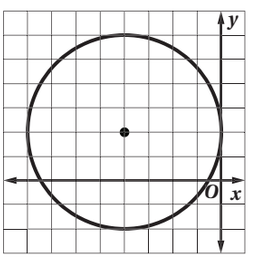
20) 6; (0, 0)



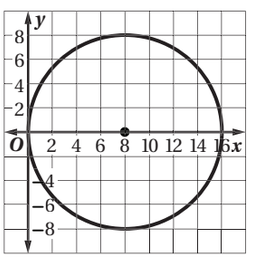
21) 2; (2, 1)



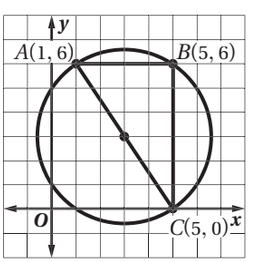
22) 4; (−4, 2)



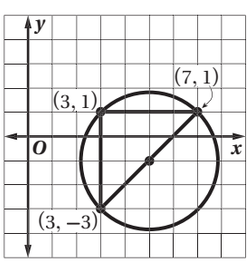
23) 8; (8, 0)



24) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$

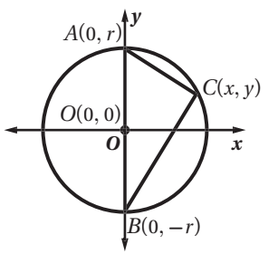


25) $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 8$



31) **المعطيات:** $\overline{AB}$ قطر في $\odot O$، C نقطة على $\odot O$.

المطلوب: $\angle ACB$ قائمة.



البرهان:

العبارات	المبررات
1) بما أن ميل $\overline{AC}$ يساوي $\frac{y-r}{x}$	1) صيغة الميل
2) وميل $\overline{CB}$ يساوي $\frac{y-(-r)}{x} = \frac{y+r}{x}$ فإنه	2) صيغة الميل
3) $\frac{y-r}{x} \cdot \frac{y+r}{x} = \frac{y^2-r^2}{x^2}$	3) بالضرب.
4) $= \frac{y^2-(x^2+y^2)}{x^2}$	4) $r^2 = x^2 + y^2$
5) $= \frac{y^2-x^2-y^2}{x^2}$	5) $-(x^2+y^2) = -x^2-y^2$
6) $\frac{-x^2}{x^2} = -1$	6) بالتبسيط

بما أن حاصل ضرب ميلَي $\overline{AC}$ و $\overline{CB}$ يساوي 1–، فإن $\overline{CB} \perp \overline{AC}$ و $\angle ACB$ قائمة .

33) إجابة ممكنة: لرسم الدائرة يرسم العمودين المنصفين لضلعين في المثلث، فتكون نقطة تقاطعهما مركز الدائرة.

